**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**Кафедра загальної математики**

**Кваліфікаційна робота магістра**

на тему: **«ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ ПОВЕРХОНЬ ЕВКЛІДОВА ТА ПСЕВДОЕВКЛІДОВА ПРОСТОРІВ В ТЕРМІНАХ ІНДИКАТРИСИ КРИВИНИ»**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виконав: студент | | | 2 | | курсу, групи | 8.1111-з |
| спеціальності | | 111 математика | | | | |
|  | | (шифр і назва спеціальності) | | | | |
| освітньої програми | | | | математика | | |
|  | | | | (назва освітньої програми) | | |
| К.І. Матвієнок | | | | | | |
| (ініціали та прізвище) | | | | | | |
| Керівник | доцент кафедри загальної математики, к.ф.-м.н. Гречнєва М.О. | | | | | |
|  | (посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) | | | | | |
|  | | | | | | |
| Рецензент | доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики,  к.ф.-м.н. Манько Н.І.-В. | | | | | |
|  | (посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) | | | | | |
|  | | | | | | |

Запоріжжя

2022

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ** | | | | | | | | | | | | |
| **ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ** | | | | | | | | | | | | |
| Факультет | | математичний | | | | | | | | | | |
| Кафедра | загальної математики | | | | | | | | | | | |
| Рівень вищої освіти | | | | | | магістр | | | | | | |
| Спеціальність | | | 111 математика | | | | | | | | | |
|  | | | | | (шифр і назва) | | | | | | | |
| Освітня програма | | | | математика | | | | | | | | |
| **ЗАТВЕРДЖУЮ**  Завідувач кафедри загальної математики, к.ф.-м.н., доцент | | | | | | |
|  | | | | Зіновєєв І. В. | | |
| (підпис) | | | |  | | |
|  | | | | | | |
| « |  | » |  | | 2022 р. | |

# **ЗАВДАННЯ**

# **НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ**

|  |
| --- |
| Матвієнок Ксенії Іванівні |

(прізвище, ім’я та по-батькові)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. Тема роботи (проекту) | Диференціальна геометрія поверхонь евклідова та | | | | | | | | | | | | |
| псевдоевклідова просторів в термінах індикатриси кривини | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | | | | |
| керівник роботи (проекту) | | | Гречнєва М.О., к.ф.-м.н. | | | | | | | | | | |
|  | | | (прізвище, ім’я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання) | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | | | | |
| затверджені наказом ЗНУ від | | | | « | 10 | | » | травня | 2022 року № | 514-с | |
|  | | | | | | | | | | | | | |
| 2. Строк подання студентом роботи | | | | | |  | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | | | | |
| 3. Вихідні дані до роботи | | 1. Постановка задачі. | | | | | | | | | | | |
| 2. Перелік літератури. | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | | | | |
| 4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити) | | | | | | | | | | | | |  |
| 1. Постановка задачі. | | | | | | | | | | | | | |
| 1. Основні теоретичні відомості. | | | | | | | | | | | | | |
| 1. Дослідження індикатриси кривини поверхонь. | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | | | | |
| 5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов’язкових креслень) | | | | | | | | | | |  | | |
| презентація | | | | | | | | | | | | | |

6. Консультанти розділів роботи

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Розділ** | **Прізвище, ініціали та посада консультанта** | **Підпис, дата** | |
| **завдання видав** | **завдання прийняв** |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| 7. Дата видачі завдання | 11.05.2022 |

**КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Назва етапів кваліфікаційної роботи магістра** | **Строк виконання етапів роботи** | **Примітка** |
| 1. | Розробка плану роботи. | 06.05.2022 |  |
|  |  |  |  |
| 2. | Збір вихідних даних. | 01.09.2022 |  |
|  |  |  |  |
| 3. | Обробка літературних джерел | 5.10.2022 |  |
|  |  |  |  |
| 4. | Розробка першого та другого розділу. | 18.10.2022 |  |
|  |  |  |  |
| 5. | Розробка третього розділу. | 05.11.2022 |  |
|  |  |  |  |
| 6. | Оформлення та нормоконтроль | 07.12.2022 |  |
|  | кваліфікаційної роботи магістра. |  |  |
|  |  |  |  |
| 7. | Захист кваліфікаційної роботи магістра. | 14.12.2022 |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Студент |  |  | К.І. Матвієнок |
|  | (підпис) |  | (ініціали та прізвище) |
|  | | | |
| Керівник роботи |  |  | М.О. Гречнєва |
|  | (підпис) |  | (ініціали та прізвище) |

**Нормоконтроль пройдено**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Нормоконтролер | |  |  | О.Г. Спиця |
|  | (підпис) |  | (ініціали та прізвище) |

**ЗМІСТ**

[З А В Д А Н Н Я 2](#_Toc88773234)

[РЕФЕРАТ 5](#_Toc88773235)

[SUMMARY 6](#_Toc88773236)

[ВСТУП 7](#_Toc88773237)

[РОЗДІЛ 1 ЕВКЛІДОВИЙ ТА ПСЕВДОЕВКЛІДОВИЙ ПРОСТОРИ 10](#_Toc88773238)

[1.1 Тривимірний евклідовий та псевдоевклідовий простори…….…………...10](#_Toc88773239)

[1.2 Простір Мінковського 1](#_Toc88773240)5

[РОЗДІЛ 2 ПОВЕРХНІ ЕВКЛІДОВА ПРОСТОРУ ТА ПРОСТОРУ МІНКОВСЬКОГО ТА ЇХ ІНДИКАТРИСИ КРИВИНИ……………………….24](#_Toc88773241)

[2.1.Теорія поверхонь евклідового простору…………………………………...24](#_Toc88773242)

2.2 Стичний параболоїд. Класифікація точок поверхні………………..…….. 33

2.3 Підмноговиди багатовимірного евклідового простору…………………...41

[2.4 РозкладГауса для підмноговидів 41](#_Toc88773243)

[2.5. Розклад Вейнгартена 43](#_Toc88773244)

[2.6 Диференціальна геометрія двовимірної поверхні простору Мінковського…………………………………………………………………….46](#_Toc88773248)

2.7 Індикатриса нормальної кривини поверхонь різних типів у просторі Мінковського…………………………………………………………………….48

[Висновки](#_Toc88773251) 55

[Перелік посилань](#_Toc88773252) 56

# **РЕФЕРАТ**

Кваліфікаційна робота магістра «Диференціальна геометрія поверхонь евклідова та псевдоевклідова просторів в термінах індикатриси кривини»: 57с., 6 рис.,15 джерел.

ЕВКЛІДІВ ПРОСТІР, ПРОСТІР МІНКОВСЬКОГО, ДВОВИМІРНА ПОВЕХНЯ, ПРОСТОРОВОРПОДІБНА ПОВЕРХНЯ, ЧАСОПОДІБНА ПОВЕРХНЯ, ІНДИКАТРИСА КРИВИНИ

Об’єкт дослідження: індикатриса кривини поверхні

Мета роботи: дослідити властивості поверхонь за допомогою індикатриси кривини

Метод дослідження – аналітичний

В кваліфікаційній роботі розглядаються двовимірні поверхні чотиривимірного евклідового простору та простору Мінковського. Отримані розклади Гаусса й Вейнгартена для двовимірних просторовоподібних і часоподібних поверхонь простору Мінковського. Введено поняття індикатриси кривини поверхні, досліджені її властивості, отримані рівняння та формули для обчислення гауссової кривини поверхонь.

# **SUMMARY**

Master's qualifying paper on "Differential Geometry of the Surfaces of the

Euclidean and Pseudo-euclidean Spaces in the Terms of the Curvature Indicatrix": 57 pages, 6 pictures, 15 sources.

EUCLIDIAN SPACE, MINSKOWSKY SPACE, TWO-DIMENSIONAL SURFACE, SPACE-LIKE SURFACE, TIME-LIKE-SURFACE, curvature indicatrix

Object of the study - the curvature indicatrix.

Aim of the study: to investigate the properties of surfaces on top of the help of an indicatrix of curvature

Method of research - analytical.

Two-dimensional surfaces of four-dimensional Euclidean space and Minkowski space are considered in the qualification work. Gaussian and Weingarten distributions for two-dimensional space-like and time-like surfaces of the Minkowski space are obtained. The concept of surface curvature indicatrix introduced, its properties are investigated, equations and formulas for calculating the Gaussian curvature of surfaces are obtained.

**ВСТУП**

Сучасне розуміння простору і часу було сформульовано в теорії відносності А. Ейнштейна, що по-новому інтерпретувала реляційну концепцію простору і часу і дала їй природниче обґрунтування. Вихідним пунктом цієї теорії став принцип відносності, класичний принцип відносності сформульовано ще Г. Галілеєм.

80 років тому Герман Мінковський запропонував геометричну інтерпретацію спеціальної теорії відносності. У наші дні знайомство з теорією відносності стало необхідним елементом загальної освіти, проте викладання та розуміння цієї теорії досі утруднене тим, що її математичний опис перебуває у суперечності з тими уявленнями про простір та час, які базуються безпосередньо на чуттєвих сприйняттях та закріплюються у процесі вивчення класичної фізики Геометрія світу Мінковського залишається для нефахівців важкодоступною абстракцією. Тим часом до математичних знань, які тепер дають середня школа і перший курс вузу, треба додати небагато, щоб розвинути уявлення про псевдоевклідовий простір.

Насамперед, потрібно поняття абстрактного лінійного простору та його різновиду – евклідова простору, вміння розрізняти лінійні та метричні властивості простору. Ці поняття є вихідними для побудови геометричної теорії. Без достатньо вільного володіння ними і пов'язаним з ними апаратом алгебри не можна подолати прихильність до звичної наочності образів і проникнути у світ форм, прихованих від безпосереднього зорового сприйняття.

Оскільки математичною моделлю простору-часу в спеціальній теорії відносності служить точковий псевдоевклідів простір індексу 1 (простір Мінковського), то інтерес до вивчення об'єктів цього простору не слабшає вже протягом довгого часу. Питання, пов'язані з вивченням підмноговидів евклідова простору, давно викликають інтерес у геометрів. Геометрія підмноговидів є частиною сучасної геометрії. Вона вивчає факти, які не мають аналогів у класичній теорії поверхонь. Ряд результатів досліджень у геометрії підмноговидів тісно пов'язані з механікою й фізикою.

Метою роботи є дослідження властивостей неізотропних двовимірних поверхонь простору Мінковського. В рамках сучасної диференціальної геометрії дослідженням поверхонь евклідова простору та їх властивостей займались, в тому числі, і відомі вітчизняні математики О.А. Борисенко і Ю.А. Амінов та їх учні Ю.А. Ніколаєвський, В.Т. Лисиця, В.М. Савельєв, В.О. Горькавий, О.В. Ликова та інші.

**1 ЕВКЛІДОВИЙ ТА ПСЕВДОЕВКЛІДОВИЙ ПРОСТОРИ**

* 1. **Тривимірний евклідовий та псевдоевклідовий простори**

Евклідовий простір – скінченновимірний дійсний векторний простір зі скалярним добутком. Названий на честь давньогрецького математика Евкліда із Александрії. Розширює двовимірну евклідову площину тривимірного простору, і є поняттям евклідової геометрії. Термін «евклідовий» дозволяє відрізняти ці простори від інших типів просторів, що можуть розглядатися в сучасній геометрії. Евклідовий простір також узагальнюють і до більших розмірностейв.

В класичній давньогрецькій геометрії існує визначення евклідової площини і тривимірного евклідового простору, що ґрунтується на певних постулатах, в той час як інші властивості цих просторів виведені як теореми. Коли алгебра і математичний аналіз набули достатнього розвитку, цей зв’язок зберігся і тепер більш загальним стало визначення евклідового простору на основі векторних просторів, що дозволяють використовувати декартові координати і методи алгебри та диференціального та інтегрального числення. Це означає, що точки визначають за допомогою трійок дійсних чисел, які називаються координатними векторами, а геометричні фігури описують рівняннями і нерівностями , що визначають співвідношення цих координат. Цей підхід також дозволяє легко узагальнити геометрію евклідових просторів до просторів більшої розмірності.

Евклідовий простір визначено за допомогою аксіом, які не вказують як саме мають бути представлені точки цього простору. Евклідовий простір може бути побудований за допомогою декартової системи координат, як один із можливих способів його представлення. В такому випадку, евклідів простір моделюють застосовуючи дійсний простір координат , що має таку ж розмірність. Для одного виміру це була б шкала дійсних чисел; для двох вимірів, він представляється декартовою системою координат на площині; і для більшої кількості вимірів, це є координатний простір із трьома або більше координатами, що представлені дійсними числами. Математики позначають *n*-вимірний евклідовий простір як , якщо вони хочуть підкреслити його природу та властивості, але також використовують позначення , оскільки ці дві структури мають подібні властивості і їх як правило не розрізняють. Евклідові простори мають скінченну розмірність.

Нехай декартові координати в тривимірному просторі такі, що, якщо точці *Р* відповідають три її координати , а точці *Q* – координати то квадрат довжини прямолінійного відрізку, що з’єднує *P* та *Q* дорівнює

. (1.1)

Функція відстані між двома точками має назву *метрики*, а наведений вище вид такої функції для евклідового простору має назву *евклідової метрики.*

З точками евклідового простору зручно зіставити вектори. Назвемо вектор, направлений від початку координат у точку *Р* радіус-вектором цієї точки. Декартові координати точки *Р* будемо називати координатами радіус-вектора. Два вектори, які направлені з початку координат до точок *P* таQ з координатами та можна складати покоординатно. Тобто отримати вектор .

Можна також помножити вектор на число(скаляр). Одиничні вектори ,, мають довжину, яка дорівнює 1, а самі вектори взаємноперпендикулярні.

Будь-який вектор може бути розкладений по одиничних векторах: . Тут простір тривимірний. Для *n-*вимірного простору все аналогічно. Тому евклідів простір визначається також як лінійний (векторний) простір, в якому квадрат відстані між точками (кінцями радіус-векторів) визначається за формулою

(1.2)

Псевдоевклідів простір **–** скінченномірний дійсний векторний простір або афінний простір з невиродженним індефінітним скалярним добутком який називають також *індефінітною метрикою.* Індефінітна метрика не є метрикою у сенсі визначення метричного простору, а являє собою частковий випадок метричного тензора.

Найважливішим прикладом псевдоевклідового простору є простір Мінковського.

Обравши відповідний базис векторного псевдоевклідового простору, завжди можна домогтися того, щоб індефінітний скалярний добуток цього простору мав вигляд

,

де та – вектори простору. Зокрема, скалярний квадрат вектора має вигляд

і може бути як додатнім, так і від’ємним числом, а також нулем (навіть ненульового вектора *x* ). Відповідно, довжина вектора *x ,* визначена рівністю

є або дійсним додатнім, або чисто уявним числом, або нулем.

Аналогічно, вибором репера завжди можна домогтися того, щоб відстань між точками *n*-вимірного афінного псевдоевклідового простору з координатами і записувалось у вигляді

.

Базиси і репери з такою властивістю називаються *ортонормованими*.

Пара чисел (*m,n-m*)(які задають кількість базисних векторів дійсної і чисто уявної довжини відповідно) не залежить від вибору ортонормованого базису або репера(закон інерції Сільвестра) і називається *сигнатурою* псевдоевклідового простору.

Псевдоевклідові простори з рвзними сигнатурами не ізометричні один одному. Утім, простір із сигнатурою (*m,n-m*) може бути перетворений в простір з сигнатурою (*n-m,* *m,*) зміною знаку скалярного добутку, і тому відмінності між такими просторами зазвичай не роблять: зокрема, простір Мінковського в різних джерелах визначається або як простір сигнатури (1,3), або як простір сигнатури (3,1). Таким чином, кожному виміру *n* відповідає (де прямі дужки означають взяття цілої частини) різних *n-*вимірних псевдоевклідових просторів.

Важливою особливістю просторів з індефінітною метрикою є наявність ненульових векторів, які мають нульову довжину. Такі вектори (а також прямі,напрямними векторами яких вони є) називаються *ізотропними* або *світлоподібними* (останнє найменування частіше використовується у фізиці, воно пов’язане з простором Мінковського). Підпростір векторного псевдоевклідова простору називається *ізотропним* , якщо він повністю складається з ізотропних векторів.

Множина всіх ізотропних векторів псевдоевклідова векторного простору називається *ізотропним*  *конусом* (або світловим конусом) цього простору. Світловий конус сигнатури (1,*n-*1) не має «граней», тобто ізотропних підпросторів розмірності понад 1.

Множина всіх ізотропних векторів псевдоевклідова афінного простору, відкладених від довільної фіксованої точки,називається ізотропним конусом (або світловим конусом) простору в цій точці. Ця множина справді є конусом (в узагальненому сенсі цього поняття) з вершиною в цій точці. Ізотропні конуси псевдоевклідового афінного простору з вершинами в різних точках можна отримати один з одного за допомогою паралельного перенесення.

Зокрема , псевдоевклідова векторна площина має рівно два ізотропних напрямки. В ортонормованому базисі , де скалярний квадрат вектора набуває вигляду , ізотропні напрямки – прямі , тому ізотропний конус складається з об’єднання цих двох прямих.

Тривимірний псевдоевклідовий векторний простір має нескінченну кількість ізотропних напрямків. В ортонормованому базисі, де скалярний квадрат вектора набуває вигляду , ізотропні напрямки – це всі прямі, що лежать на ізотропному конусі який в цьому випадку являє собою справжній конус.

Підпростір псевдоевклідового простору із сигнатурою (*n-m,* *m,*) не обов’язково є теж псевдоевклідовим; він може бути й евклідовим простором. Наприклад, у тривимірному псевдоевклідовому просторі із сигнатурою (2,1) площина може бути або псевдоевклідовим просторомз сигнатурою (1,1), або евклідовим простором, або мати вироджений скалярний добуток. Геометрично ці три випадки визначаються розташуванням площини відносно ізотропного конуса (див. рис.1.1). А саме: площина є псевдоевклідовою ,якщо вона перетинає ізотропний конус по двох різних прямих( ізотропних напрямках); обмеження скалярного добутку на площину вироджене, якщо дотикається ізотропного конуса, тобто, перетинається з ним лише по одній прямій; нарешті, площина є евклідовою, якщо вона має з ізотропним конусом єдину спільну точку(вершину конуса).(див. рис.1.1)

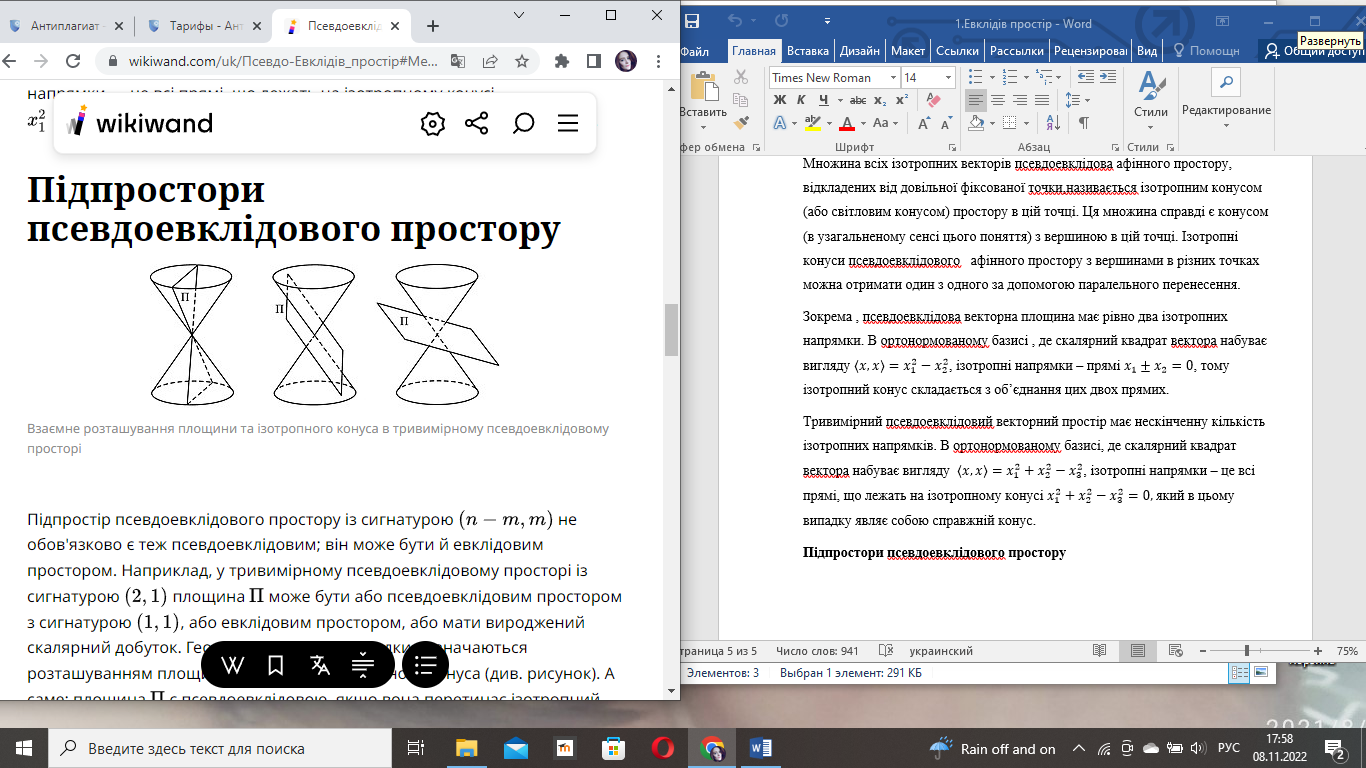


Рисунок 1.1 – Взаємне розташування площини та ізотропного конуса

**1.2 Простір Мінковського**

Простором Мінковського називається чотирьохвимірний псевдоевклідів простір індексу 1. Герман Мінковськи запропонував даний простір в 1908 році в якості геометричної інтерпритації простору-часу спеціальної теорії відносності. Інтервал в просторі Мінковського грає роль, аналогічну ролі відстані в геометрії евклідових просторів. Він інваріантний при заміні однієї інерціальної системи відліку на іншу, як і відстань інваріантна при поворотах, відображення в зміщеннях початку координат в евклідовому просторі. Після евклідових просторів індексу , тобто власне евклідових, найбільший інтерес представляють евклідові простори індексу (вони, звичайно, належать до псевдоевклідових просторів). Евклідовий простір індексу 1 представляє інтерес з точки зору теорії диференціальних рівнянь (хвильове рівняння з *n* аргументами) та особливо з точки зору теорії відносності. В останньому випадку грає роль саме чотирьохвимірний евклідовий простір індексу 1.

Даний простір може бути отриманий на базі чотирьохвимірного афінного простору *А*, за допомогою введення скалярного добутку векторів. Нехай деякий репер афінного простору , де

,.

Введемо скалярний добуток за формулою:

(1.3)

Простір А4, для векторів якого введено скалярний добуток за формулою (1.3) називається *чотирьохвимірним псевдоевклідовим простором індексу 1* або *простором Мінковського.* Позначається .

Скалярний квадрат вектору визначається за формулою:

(1.4)

При цьому вектори реперу будуть мати наступні скалярні квадрати:

(1.5)

*Довжиною* вектора в просторі Мінковського будемо називати число

.

Вектори простору Мінковського називаються *ортогональними,* якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Таким чином,в просторі  будуть існувати вектори трьох типів.

* вектори дійсної довжини при .

Наприклад,

* вектори уявної довжини при .

Наприклад,

* ненульові вектори нульової довжини при .

Наприклад, .

Такі вектори називаються *ізотропними.* Вони лежать на ізотропному конусі(див. рис 1.3).

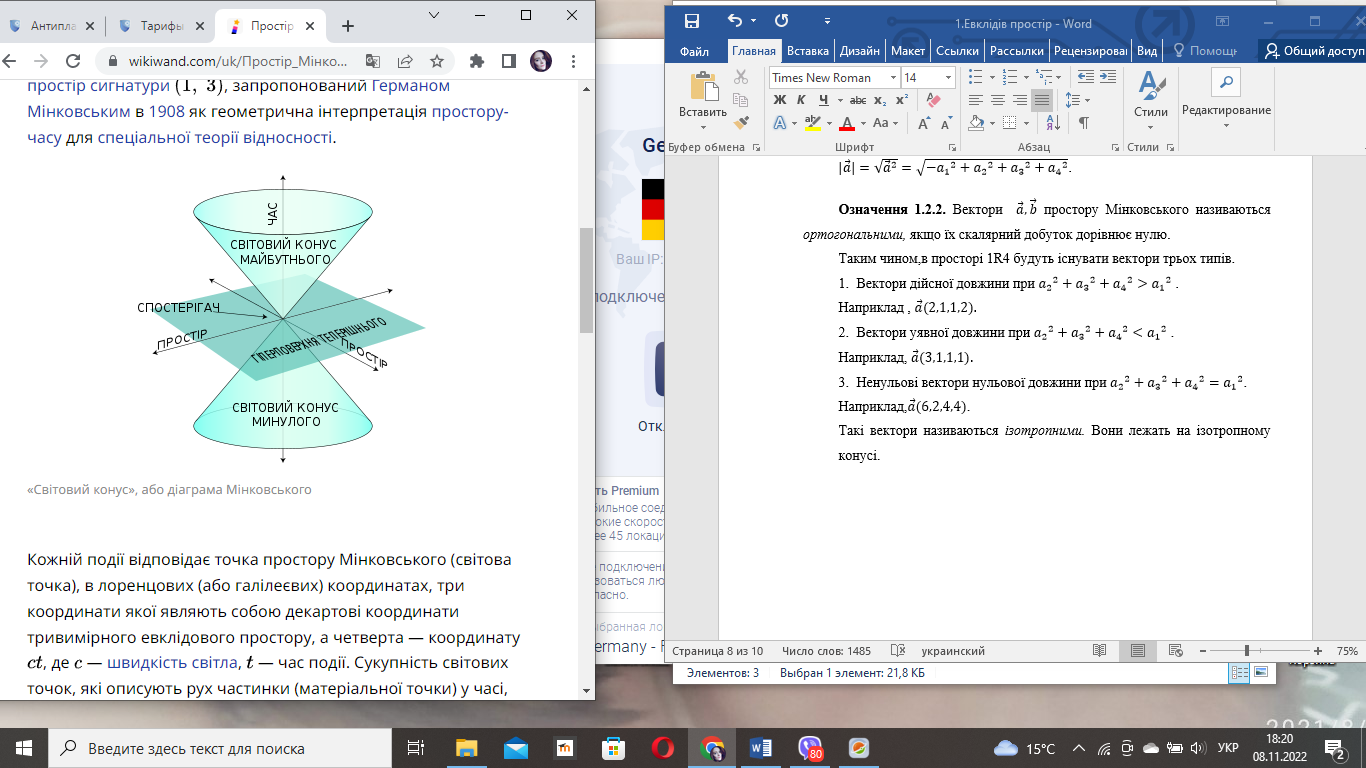


Рисунок 1.2 Світовий конус

Рівняння конусу буде мати вигляд

.

Такий конус також називають світловим.

Відстань між точками та в просторі 1R4 визначається як довжина вектору і дорівнює

=

(1.6)

В просторі  існує три типи прямих:

а) прямі дійсної довжини (),направляючий вектор яких є вектор дійсної довжини. Наприклад ,;

б) прямі уявної довжини (), направляючий вектор яких є вектором уявної довжини, наприклад,;

в) ізотропні прямі () ,направляючий вектор яких являються ізотропним вектором. наприклад,.

В просторі  існує три типи двухвимірних площин:

а) евклідова площина , на якій існує базис,в якому скалярний добуток будь-яких двух векторів цієї площини записується у вигляді

, де ,.

Наприклад,евклідова площина – площина . Для векторів цієї площини , .

Тоді,

,.

б) псевдоевклідова площина , на якій існує базис, в якому скалярний добуток будь-яких двух векторів цієї площини записується у вигляді

,

де ,.

Наприклад, евклідовою площиною являється площина . Для векторів цієї площини , . Отримаємо,

,.

в) напівевклідова площина , на якій існує базис, в якому скалярний добуток будь-яких двух векторів цієї площини приймає вигляд

, де ,.

Наприклад, напівевклідова площина – площина .

Для векторів цієї площини

, .

Тоді,отримаємо

оскільки

Псевдоевклідова площина за своїми афінними властивостями не відрізняється від евклідової, проте метричні властивості цих площин суттєво різняться. Це видно, хоча б на прикладі кола, яке на псевдоевклідовій площині визначимо як сукупність усіх точок, віддалених на те саме псевдоевклідова відстань r від даної точки – центру.

Якщо центр збігається з початком координат (0,0), то за визначенням рівняння кола має вигляд

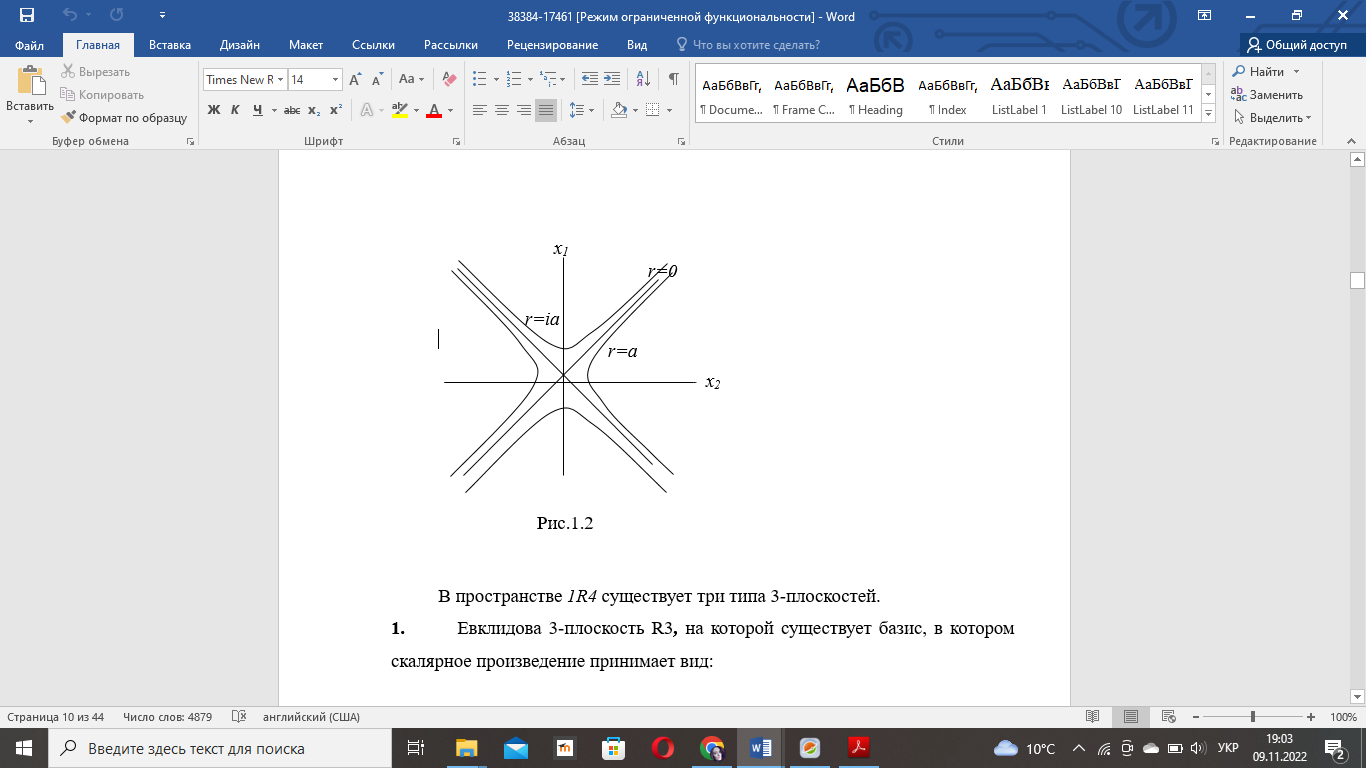
.

Радіус кола може бути дійсним (*r=a*) ,тоді .

Якщо радіус кола уявний, (*r=ia*), то .

У випадку, коли радіус (*r=0*), маємо .

Таким чином, на існує три види кіл. На афінній площині вони являють собою пару прямих, що перетинаються, – коло нульового радіусу і дві спряжені гіперболи, для яких зазначені прямі є асимптотами (рис. 1.3) .

Рисунок 1.3 – Кола псевдоевклідової площини

У просторі  існує три типа 3-площин:

а) евклідова 3-площина , на якій існує базис, в якому скалярний добуток набуває вигляду

.

Наприклад, евклідовою 3-площиною являється площина Для вектора цієї 3-площини , Отримаємо, ,)=

б) площина , на якій існує базис, в якому скалярний добуток набуває вигляду

.

Наприклад, площиною  є площина Для векторів цієї 3-площини , Отримаємо,

,)=

в) площина , на якій існує базис, в якому скалярний добуток приймає вигляд .

Наприклад, площиною являється площина . Для векторів цієї 3-площини , .

Отримаємо

Оскільки кожна 3-площина ортоганальна деякій прямій, то існує лише 3 типу 3-площин.

Ортогональним доповненням до векторного простору  називається векторний простір, утворений всіма векторами, ортогональним до простору *L*.

Наприклад**, з**найдемо множину векторів, ортогональних до вектора . Якщо вектор ортоганальний , то . Звідси,(=. Таким чином, ортоганальним доповненням до вектору являється множина векторів . Ці вектори визначають 3-площину яка являється 3-площиною виду . Отже, . Це означає, що до прямої ортоганальною є 3-площина типу . Вірно і зворотнє.

Аналогічно знайдемо множину векторів ортоганальних до вектору . Якщо вектор ортоганальний до , то . Звідси,

=.

Множина векторів, ортогональних вектору , має вигляд і визначає 3-площину яке є 3-площиною виду . Отже, . Це означає, що до прямої ортогональної є 3-площина типу . Вірне і зворотнє.

Розглянемо вектор () і знайдемо множину ортогональних векторів до даного вектора. Якщо вектор ортогональний (), то .

Отримаємо, що

=.

Звідси , а – довільні. це множина векторів,ортогональних вектору () та визначає 3-площину яка є 3-площиною вигляду . Значить, . Це означає, що до прямої ортогональною є 3-площина типу . Вірне і зворотнє.

Зауважимо, що .

Знайдемо множину векторів, ортогональних до векторів . Якщо вектор ортоганальний, то звідси

Таким чином, ортогональним доповненням до векторів є множина векторів . Ці вектори визначають 2-площину яка є 2-площиною вигляду . Отже,  (до двомірної площини R2 ортогональною є площина виду ).

Знайдемо множину векторів, ортоганальних до векторів . Якщо вектор ортогональний , то Звідси

Таким чином, ортогональним доповненням до векторів є множина векторів *.* Ці вектори визначають 2-площину яка є 2-площиною виду R2. Отже, (до двовимірної площини  ортогональною є площина виду ). Вірно і зворотнє.

Знайдемо множину векторів, ортогональних до векторів . Якщо вектор ортоганальний , то . Звідси,

Таким чином, ортоганальним доповненням до векторів є множина векторів *.* Ці вектори визначають 2-площину яка є 2-площиною виду . Отже,*.*

**2 ПОВЕРХНІ ЕВКЛІДОВА ПРОСТОРУ ТА ПРОСТОРУ МІНКОВСЬКОГО ТА ЇХ ІНДИКАТРИСИ КРИВИНИ**

**2.1 Теорія поверхонь евклідового простору**

Множина точок площини називається *елементарною областю*, якщо вона топологічно еквівалентна відкритому кругу. Внутрішність квадрата, прямокутника, еліпса приклади елементарних областей. Вся площина також є елементарною областю. Згідно з теоремою Жордана, проста плоска замкнена крива розбиває площину на дві зв’язні під- множини: обмежену і необмежену, для кожної з яких вона є межею; при цьому обмежена підмножина гомеоморфна кругу.

Розглянемо вектор-функцію двох скалярних аргументів, тобто вважатимемо, що множина її визначення , а множина значень . Символом позначимо множину всіх векторних і скалярних

функцій двох скалярних аргументів, для яких у кожній точці існують і є неперервними усі частинні похідні до *k-*гопорядку включано.

**Означення 2.1** Множина Ф точок евклідового простору. яка є годографом вектор-функції , визначеної на елементарній області G, називається *поверхнею,* заданою параметризацією або векторним рівнянням .

Поверхня *Ф* є регулярною поверхнею *k*-го порядку, якщо її параметризація ; при *k* > 1 поверхню називають гладкою. Зазначимо, що поверхня може допускати параметризації різних класів регулярності.

Поверхня *Ф*, гомеоморфна елементарній області *G,* називається *елементарною поверхнею*.

**Означення 2.2** Параметризація називається *простою,* якщо для будь-якої точки існує такий окіл , на якому годограф вектор-функції є елементарною поверхнею.

Множина *Ф* точок простору називається *простою поверхнею,* якщо вона є зв’язною і кожна точка має просторовий окіл такий, що –елементарна поверхня. Останню називають поверхневим околом даної точкина простій поверхні. Іншими словами, проста поверхня – це зв’язна локально елементарна поверхня. Кожна елементарна поверхня є простою, але не навпаки. Наприклад, сфера та еліпсоїд не є елементарними поверхнями. Проста поверхня називається повною, якщо границя будь-якої збіжної послідовності точок цієї поверхні також належить цій поверхні. Якщо повна поверхня обмежена, то вона називається замкненою. Наприклад, сфера замкнена поверхня. Якщо ж з неї виколоти одну точку, то така сфера вже не буде повною, але стане елементарною.

Загальною поверхнею називається множина точок простору, яка є образом простої поверхні при її локально топологічному відображенні у простір. Відображення простої поверхні , і відображення простої поверхні визначають одну і ту ж загальну поверхню Ф, якщо існує гомеоморфізм , при якому образи відображень і на Ф збігаються. Відображення i (за умови існування гомеоморфізму ) називають різними (але еквівалентними) параметризаціями поверхні Ф. Із наведених означень випливає, що локальне дослідження поверхні зводиться до розгляду елементарної поверхні.

Повернемося до параметризації  *,* поверхні *Ф*. Розкладемо вектор-функцію за ортонормованим базисом простору

*.*

Нехай *M(u,v)* довільна точка поверхні *Ф*, *, х, у*, z – декартові координати точки *M (u,v).* Tоді

*x= x(u,v*), *y = y(u,v), z* = *z(u,v).* (2.1)

Ці рівняння називаються параметричними рівняннями поверхні, а параметри *u, v* криволінійними координатами точки на поверхні.

**Означення 2.3** Точкa називається звичайною точкою параметризації , якщо вектор-функція має в цій точці частинні похідні причому

*.* (2.2)

Якщо точка *не є звичайною, то її називають особливою точкою параметризації.*

**Теорема 2.1** *Якщо всі точки параметризації*  *звичайні, то ця парамеризація проста.*

Як і в теорії кривих природно виникає запитання: коли наперед задана система параметричних рівнянь може визначати деяку поверхню? Відповідь на поставлене питання випливає з доведення теореми 2.1, а саме, правильним є наступне твердження.

**Теорема 2.2** Нехай регулярні функції *x(u,v), y(u,v), z(u,v)* в областізадовольняють умову*:*

*.*

Тоді система рівнянь *x = x(u,v), у = y(u,v), z = z(u,v)* визначає гладку поверхню, яка є образом області *G* при локально топологічному відображенні

Параметризація поверхні рівнянням *z* = *f (x ,y* ) відрізняється більшою наглядністю. Відповідність між точками поверхні і точками області площини *X O Y* здійснюється при проектуванні прямими, паралельними вісі *Oz.* Якщо поверхня може бути описана як множина точок, координати яких задовольняють рівняння *F(x, у, z) =* 0, то такe рівняння називається *загальним* або *неявним рівнянням поверхні*. Рівняння вигляду *z = f(x ,y )*є його частковим випадком і його називають *явним рівнянням поверхні*. Задане заздалегідь неявне рівняння не завждивизначає поверхню. Проте, правильним є наступне твердження.

**Теорема 2.3** Якщо *F(x, у, z*) регулярна функція змінних *х, у, z, М* - множина точок простoру, координати яких задовольняють рівняння *F(x,y,z*) = 0, - точка множини М, в якійто у точки існує окіл, у якому всі точки Μ , що йому належать, утворюють регулярну елементарну поверхню.

Першою квадратичною формою гладкої поверхні *Ф* з векторною пераметризацією називається вираз

(2.3)

де .

Отже, >0 у кожній звичайній точці поверхні , обертається в нуль лише при *du=dv=0.*

Перша квадратична форма застосовується для знаходження довжини дуги кривої на поверхні, кута між кривими на поверхні та обчислення площі області на поверхні. Рівнянням задамо на поверхні Ф довільну регулярну криву γ, довжину дуги якої можемо обчислити за відомою формулою Оскільки , то

Отже,

(2.4)

Вдовж кривої *γ du=u’dt, dv=v’dt* і тому формулу для довжини дуги поверхневої кривої можна подати у вигляді *У* зв’язку з цим для першої квадратичної форми використовують також позначення *.* Отже, для вимірювання довжин кривих на поверхні досить знати першу квадратичну форму поверхні. У зв’язку з цим кажуть, що перша квадратична форма задає метрику поверхні.

Всі геометричні об’єкти поверхні, які повністю визначаються через коефіцієнти першої квадратичної форми, називають об’єктами внутрішньої геометрії поверхні. Таким чином, довжина дуги поверхневої кривої є об’єктом її внутрішньої геометрії.

Нехай, *Ф* - регулярна поверхня з параметризацією *,-*одиничний вектор нормалі в точці *M(u,v),* тобто

Другою квадратичною формою поверхні називається квадратична форма

Отже,

*,* (2.5)

де

Коефіцієнти *L, M, N* другої квадратичної форми можна подати в іншому вигляді, якщо скористатися тим, що або . Продиференціюємо останнє співвідношення:

Отже, Знайдемо

Оскільки, , то

(2.6)

Звідси дістаємо, що

Зокрема, якщо поверхня задана неявно рівнянням *z* = *f (х, у),* то

Нехай γ– регулярна крива на поверхні *Ф*, яка проходить через точку *M(u, v)* і має в цій точці напрям - природна параметризація кривої γ. Розглянемо скалярний добуток *.* Вектор направлений по головній нормалі кривої і *,* де *k* кривина кривої, де - одиничний вектор головної нормалі кривої в точці *М.* Tоді *0* кут між таОскільки , то

Домножимо останню рівність скалярно на *,* урахувавши, що

Оскільки,, то маємо наступну формулу

(2.7)

Tочка *M Ф* фіксована, тому коефіцієнти форм , також фіксовані. Отже, величина залежить в цій точці лише від поверхневого напряму (*d*): *{du,dv}.* Величину називають *нормальною кривиною поверхні Ф у даній точці МФ у заданому напрямку (d).* Таким чином, доведене наступне твердження.

**Теорема 2.4 (Меньє).** Для всіх поверхневих кривих, які проходять через задану точку в даному напрямку, має місце рівність

Візьмемо, зокрема, серед усіх кривих, що проходять через дану точку *М*  Ф у напрямку *(d),* нормальний переріз поверхні - плоску криву , яку на поверхні утворює площина, що проходить через нормаль у напрямку (*d*). Для цієї кривої орт головної нормалі колінеарний нормальному вектору поверхні в точці *М* Ф. Отже, I . Для нормального перерізу з теореми Меньє маємо , де *k -* кривина цього перерізу. Звідси робимо висновок, що нормальна кривина поверхні в напрямку (*d*) з точністю до знаку дорівнює кривині відповідного перерізу. Знак плюс береться у випадку, коли  *,* і мінус, коли .

Відкладемо від точки *M (u,v*) поверхні в кожному напрямку *(d):* {*du,dv*} відрізок, рівний , де  *–* нормальна кривина поверхні в цьому напрямку. Геометричне місце кінців цих відрізків називається *індикатрисою кривини поверхні в точці М або індикатрисою Дюпена.*

З’ясуємо, що представляє собою індикатриса кривини. Для цього введемо в дотичній площині до поверхні *Р* афінну систему координат, взявши точку дотику за початок координат, прямі, які містять векториза вісі координат, а самі вектори за базисні вектори.

Нехай *х*, *у –* координати точки *К* індикатриси кривини, яка відповідає напряму *{du, dv}* (див. рис. 2.1).

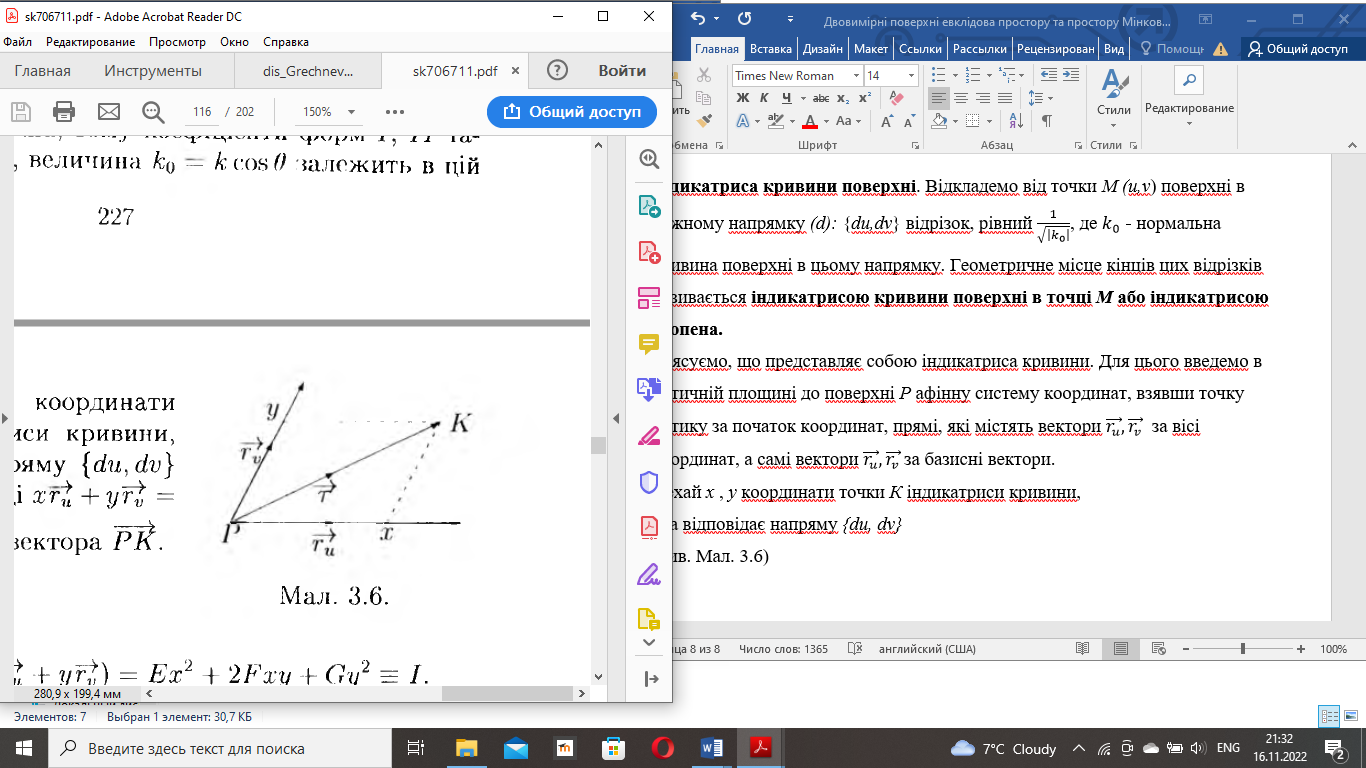


Рисунок 2.1 – Поточна точка індикатриси

Tоді , де – орт вектора Маємо:

З іншого боку,

Отже, тобто або

рівняння індикатриси кривини. З курсу аналітичної геометрії відомо, що останнє рівняння визначає:

а) еліпс, якщо

б) пара спряжених гіпербол, якщо ;

в) пара паралельних прямих, якщо .

**2.2 Стичний параболоїд. Класифікація точок поверхні**

Нехай Ф регулярна поверхня, *М -* звичайна точка поверхні Φ, *(β)* - параболоїд з вершиною у точці М, віссю симетрії якого є нормаль до поверхні Ф у точці *М.* Якщо *h* віддаль від довільної точки *Q* поверхні Ф до параболоїда, a *d-* віддаль від цієї ж точки до точки *М ,* то параболоїд (*β*) називається *стичним*для поверхні Ф у точці *М* за умови . Іншими словами, параболоїд *(β)* у точці *М* має з поверхнею Ф дотик 2-го порядку.

Якщо до класу стичних параболоїдів включити параболічні циліндри і площини, то правильним є наступне твердження.

**Теорема 2.5** У кожній звичайній точці двічі неперервно диференційовног поверхні існує єдиний стичний параболоїд.

**Доведення.** Нехай звичайна точка *М* поверхні Ф є початком просторової декартової системи координат, вісь *Oz* якої збігається з нормаллю поверхні Ф у точці *М,* а дотична площина поверхні Ф у точці *М* збігається з координатною площиною *ху.* Тоді у точки *М* існує окіл, в якому поверхня

Ф може бути задана рівняння z = *f(x, у),* де функція *f(х, у)* двічі неперервно диференційовна в околі точки (0; 0).Справді, нехай *-* деяка двічі неперервно диференційовна параметризація поверхні Ф. Оскільки *М –* звичайна точка поверхні, то в цій точці і цей вектор направлений вздовж вісі *Oz.* Отже, визначник

Звідси (див. доведення теореми 2.1) випливає, що поверхня Ф в околі точки *М* допускає задання рівнянням*,* де. Зауважимо, що оскільки дотична площина поверхні Ф у точці М має рівняння і збігається з координатною площиною

Рівняння параболоїда (β), а також його виродження в параболічний циліндр та площину можна записати рівнянням вигляду

(2.8)

Припустимо, що у точці *M* існує стичний параболоїд.

Доведемо, що він єдиний. Нехай (2.9) рівняння стичного параболоїда.

Розкладаючи функцію *f(x,y)* в околі точки (0,0) за формулою Тейлора отримаємо, що

де функція коли Зазначимо також, що квадрат віддалі від точки *Q* до *М* має вигляд *(М -* початок системи координат):

Для застосування леми 2.1. візьмемо стичний параболоїд за поверхню Ψ із рівнянням .

На підставі леми 2.1 величина *h* має порядок величини *F(x,y, f(х, у))* (у рівняння параболоїда слід підставити координати *х, у, f(x, у)* точки *Q).* Отже,тоді і тільки тоді, коли

Напрям прямування *Q* → *М* може бути довільним, тобто , коли *х* і *у* незалежно прямують до нуля. Розглянемо спочатку випадок прямування *х→* 0, *у →* 0. Взявши до уваги розклад функції *f(x,y)* за формулою Тейлора отримаємо, що

тоді і лише тоді, коли *r=a.* Аналогічно, випадок прямування *х* = 0, *у* → 0 дає

t = с.

Доведемо, нарешті, що *b = s.* Для цього припустимо, що *х* = *у→* 0. Тоді

За умови *s=b*.

Таким чином, якщо стичний параболоїд в точці *М* існує, то він єдиний і його рівняння у вибраній системі координат має вигляд

(2.9)

Доведемо, що параболоїд (2.10) завжди є стичним. Для цього параболоїда маємо

Дослідимо поведінку функції при використавши полярні координати Тоді

Якщо , то *х=*0і набуває вигляду

якщо .

Якщо ж то *у=*0 ; тоді

при

При інших значеннях *φ* функція α, очевидно, є обмеженою. Отже,

якщо .

Теорема доведена.

Із граничних властивостей дотичної площини та стичного параболоїда поверхні випливає, що вони дають її наближення відповідно першого та другого порядку, які можна використати при дослідженні локальної будови поверхні. Існування та єдиність стичного параболоїда дозволяє ввести

таку класифікацію точок поверхні. Звичайну точку *М*  Ф регулярної поверхні *Ф* називають:

* еліптичною, якщо стичний параболоїд у цій точці є еліптичним параболоїдом;
* гіперболічною, якщо стичний параболоїд у цій точці є гіперболічним параболоїдом;
* параболічною, якщо стичний параболоїд у цій точці є параболічним циліндром;
* точкою заокруглення (омбілічною, сферичною), якщо стичний параболоїд у цій точці є еліптичним параболоїдом обертання;
* точкою сплощення, якщо стичний параболоїд є площиною.

Відповідно до цих випадків локальна будова поверхні має вигляд (див. рис 2.2)

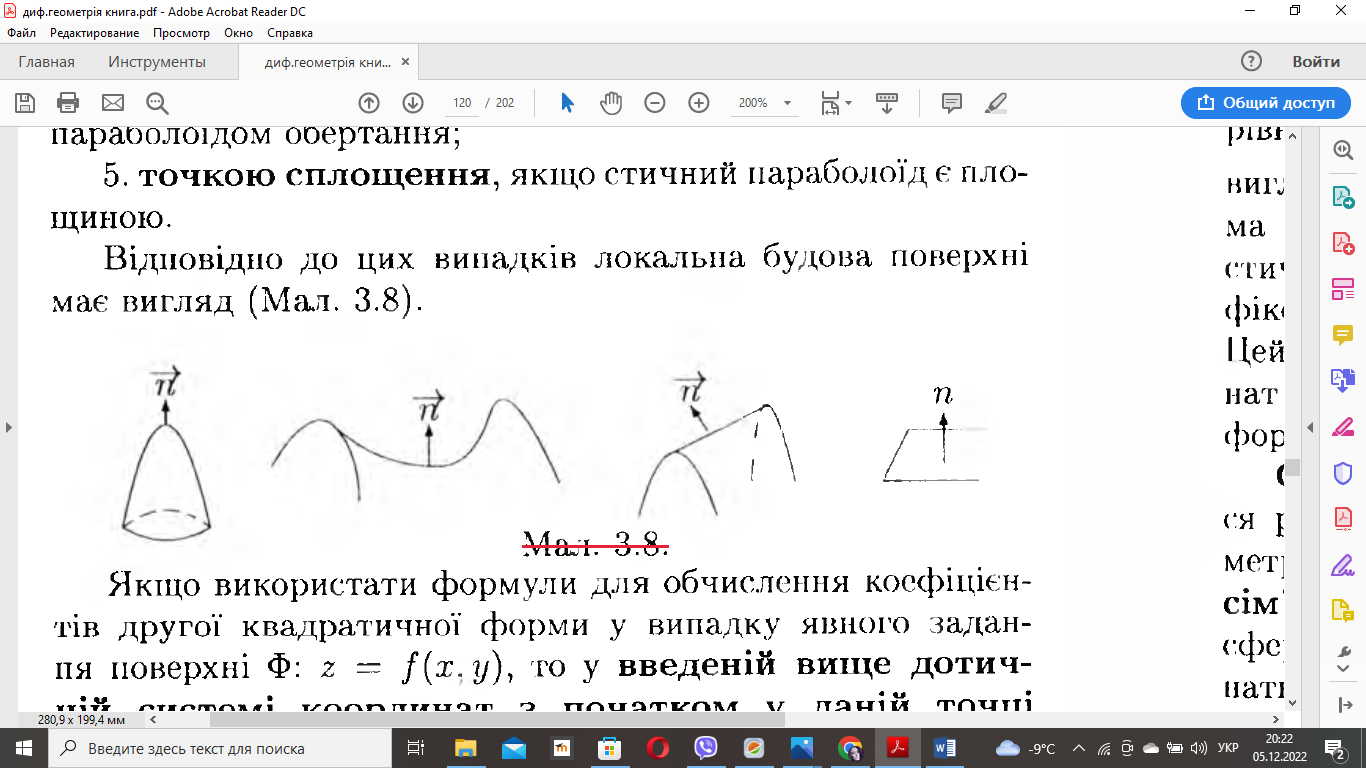


Рисунок 2.2 – Типи поверхонь

Якщо використати формули для обчислення коефіцієнтів другої квадратичної форми у випадку явного задання поверхні *Ф: z = f(x.y),* то у введеній вище дотичній системі координат з початком у даній точці М Ф матимемо:Позначимо через визначник другої квадратичної форми поверхні. З іншогобоку, із загальної теорії поверхонь другого порядку випливає,що визначник стичного параболоїда рівний Такимчином, у точці *M Ф* визначники другої квадратичноїформи поверхні і стичного параболоїда збігаються. Цейфакт дає змогу класифікувати точки поверхні так:

* δ > 0 – еліптична точка;
* δ< 0 – гіперболічна точка;
* δ = 0, але хоча б один з коефіцієнтів відмінний від нуля параболічна точка;
* *L*=*Μ=N=*0 – точка сплощення.

Отже, у дотичній системі координат рівняння стичного параболоїда набуває вигляду. Якщо взяти точку (.*х,у*) на дотичній площині, то для неї *-* віддаль до стичного параболоїда.

Нехай *Ф* регулярна поверхня, задана параметризацією *, М Ф.* Поверхневий напрям (*d*): {*du,dv*} у точці *М* називається головним напрямом поверхні, якщо він є головним напрямом індикатриси кривини в цій точці. Оскільки індикатриса кривини не визначена в точках сплощення, то в таких точках вважатимемо кожний напрям головним. Із властивостей головних напрямів кривих другого порядку випливає, що в загальному випадку в даній точці поверхні існує точно два головних напрями.

Виняток складають омбілічні (сферичні) точки, для яких індикатриса кривини є колом і тому в цих точках будь-який напрям є головним. Спосіб побудови індикатриси кривими говорить про те. що для головних напрямів нормальна кривина поверхні у даній точці набуває екстремальних значень.

У зв’язку з цим використовують ще й таке означення головного напряму поверхні: напрям (*d*): {*du,dv*} на поверхні *Ф* у точці *М* називається головним, якщо нормальна кривина поверхні у точці *М* у заданому напрямі досягає екстремального значення.

Згідно з означенням головних напрямів кривої другого порядку, вони є одночасно ортогональними і спряженими. Нехай (*d*): {*du,dv*} *,* (*δ*): {*δu,δv*} – два ортогональні і спряжені напрями в точці *М*  *Ф.* Тоді на цих напрямах анулюються перша (умова ортогональності) і друга (умова спряженості) білінійні форми, породжені відповідними квадратичними формами:

Для знаходження головних напрямів розглянемо ці два рівняння як систему лінійних рівнянь відносно невідомих *δи,* *δυ:*

Оскільки ця лінійна система є однорідною, то її нетривіальний розв’язок існує тоді і тільки тоді, коли

(2.10)

Отже, остання рівність характеризує головні напрями; ї ї будемо називати формулою головних напрямів. Зауважимо, що розглядаючи зазначену вище лінійну систему відносно невідомих *du, dv,* прийдемо до формули (2.10). Співвідношенню (2.11) можна надати більш симетричний вигляд

(2.11)

У точках сплощення *L* = *М = N* = 0 і тому (2.11) задовольняє будь-який поверхневий напрям, що узгоджується з означенням головних напрямів у цих точках. Крім того, у омбілічних точках, де індикатриса кривини є колом, нормальна кривина однакова для всіх поверхневих напрямів (*d*). Звідси випливає, що в омбілічних точках коефіцієнти першої і другої квадратичних форм пропорційні: ・ Отже, в цих точках будь-який поверхневий напрям також єголовним.

Нормальні кривини поверхні, які відповідають головним напрямам поверхні в даній точці, називаються головними кривинами поверхні в цій точці. Таким чином, головні кривини є екстремальними серед всіх нормальних

кривин поверхні в даній точці.

**Означення 2.4** *Лінією кривини на поверхні Ф* називають таку криву, в кожній точці якої дотична до нсі направлена вздовж одного з головних напрямів поверхні *Ф* в цій точці.

Головні напрями в точці *М Ф* визначаються рівнянням (2.10), отже, має місце твердження: для того, щоб регулярна крива другого порядку на поверхні *Ф* була лінією кривини, необхідно і досить, щоб диференціали *du, dv* вздовж неї в кожній ї ї точці задовольняли рівняння

(2.10), де коефіцієнти квадратичних форм *І* і *II* взято в цій точці. Отже, (2.10) є диференціальним рівнянням, яке зводиться до двох диференціальних рівнянь вигляду

(замість можна розглянути в залежності від того, який з диференціалів *dv* або *du* не перетворюється в нуль), З теорії диференціальних рівнянь відомо, що у випадку гладких функцій  *,* через кожну точку *M (u, v)*  Ф проходить єдина інтегральна крива першого та єдина інтегральна крива другого з цих рівнянь. Таким чином, лінії кривини поверхні Ф утворюють на ній ортогональну сітку, оскільки дві лінії кривини, що містять точку *М,* ортогональні в цій точці. Зазначимо також, що рівняння (2.10) (або (2.11)) після перетворень можна звести до рівняння

(2.12)

# **2.3 Підмноговиди багатовимірного евклідового простору**

Нехай  **–** підмноговид розмірності *n* в . *Корозмірністю* називається число . Розглянемо в кожній точці *х* деякого околу точки нормальний простір . Виберемо в кожному нормальному просторі базис з одиничних взаємно ортогональних векторів , причому так, щоб ці вектор функції від *х* були регулярними функціями від координат *u1,*…,*un.* За допомогою кожного вектора нормалі визначимо другу квадратичну форму:

коефіцієнти якої позначимо *Lijσ=().*

Через точку *х0 ϵ F n* у деякому дотичному напрямку τ проведемо криву γ, що лежить на *Fn.* Нехай *s* – довжина дуги на γ.

Розглянемо вектор кривизни кривої *γ:k=rss .*

*Вектором нормальної кривизни kN*поверхні *Fn* в напрямку τ у точці *х0* називається проекція вектора кривизни *k*кривої γ на нормальний простір *Nx0*.

# **2.4 Розклад Гаусса для підмноговидів**

У кожній регулярній точці *n* дотичних векторів і *p* нормальних *n1*,…,*np* разом утворюють базис об'ємлючого простору *En+p.* Запишемо розклад других похідних радіус-вектора за векторами цього базису:

По *k* і σ у правій частині проводиться підсумовування. Коефіцієнти при є символами Крістоффеля другого роду. Коефіцієнти знаходимо, помножуючи праву та ліву частину цього рівняння скалярно на *np*. Тоді отримаємо:

,

тобто є коефіцієнтами другої квадратичної форми по відношенню до нормалі. За допомогою коваріантних похідних, які будемо відзначати комою, розклад Гауса можна записати так:

. (2.13)

Використаємо розклад Гаусса для знаходження вираження вектора геодезичної кривизни *kg* лінії γ на підмноговиді. Вектор кривизни *k* кривої γ має вигляд:

.

За допомогою розкладу Гаусса можемо записати:

,

де *kg* – вектор, перпендикулярний до дотичної ; *kN* – нормальний вектор. Тому вектор геодезичної кривизни кривої γ має вигляд:

.

Якщо γ – геодезична крива підмноговида, то виконується система рівнянь:

.

# **2.5 Розклад Вейнгартена**

Запишемо розклад похідних по *ui*нормальних векторів *nσ* за векторами базису :

(2.14)

де – деякі коефіцієнти. Помножуючи це рівняння скалярно на *nα*, отримуємо:

.

Коефіцієнти називаються коефіцієнтами скруту. Так як вектори *n1,*…,*np* одиничні і взаємно ортогональні, то (*nα*,*nσ*)=*const*. Диференціюючи це співвідношення, отримуємо:

,

тобто коефіцієнти скруту кососиметричні за першими двома індексами. Тому . Набір цих коефіцієнтів утворює тензор за індексом *i* на *Fn*. Справді, якщо є перетворення координат *ui*= *ui*(*uk`* ), то

,

тобто ці величини перетворюються за тензорним законом. Називаються вони коефіцієнтами скруту за аналогіє зі скрутом κ кривої в *E3*. Розглянемо одну з формул Френе: вираз похідної від головної нормалі кривої ν по довжині дуги

(2.15)

де *τ* – одиничний дотичний вектор, *β* – бінормаль.

Розклад (2.14) абсолютно аналогічний формулі (2.15). В обох формулах похідна від нормального вектора розбита на два доданки – на дотичний до підмноговида вектор і на нормальний вектор, причому у формулі (2.15) коефіцієнтом при одиничному нормальному векторі *β* стоїть скрут *κ*, а в (2.14) коефіцієнтом при одиничній нормалі *np* є . Лінійну формулу називатимемо *формою скруту.*

Знайдемо тепер величини . Помножимо (2.14) на . Отримаємо у лівій частині:

.

У правій частині маємо:

.

Маємо систему рівнянь для визначення :

. (2.16)

Використаємо коефіцієнти () зворотньої матриці до матриці метричної тензора ().Так як виконуються рівняння , то після згортання (2.16) зотримаємо:

.

Умова набуває вигляду:

.

Отже, можемо записати *розклад Вейнгартена:*

(2.17)

Для гіперповерхні є одна нормаль *n* і одна друга квадратна форма. Рівняння (2.17) запишемо за допомогою коваріантних похідних на *Fn*. Оскільки в (2.17) кожен компонент векторів *r* і *nσ* розглядається як функція на *Fn*, то . Тому (2.17) можемо переписати у такому вигляді

.

Нехай *n(x)* – нормальне поле на *Fn*. Позначимо – похідну у цього поля у точці *x*, – її проекція на *Tx і* – її проекцію на *Nx*. Можемо записати

.

Якщо в дотичному просторі існує напрям , таке, що для будь-якого поля одиничних нормалей , воно називається *головним*. Підмноговиди з корозмірністю *p >1*, що мають головні напрями, повинні задовольняти спеціальним умовам. Лінія на підмноговидах, що стосується кожної точки головного напрямку, називається *лінією кривини.*

**2.5 Диференціальна геометрія двовимірної поверхні простору Мінковського**

Будемо розглядати такі двовимірні поверхні простору  або такі області на цих поверхнях, у яких тип дотичної площини зберігається в кожній точці.

Двовимірна поверхня простору  називається *просторовоподібною (часоподібною, ізотропною)*, якщо дотична площина до неї в кожній точці є просторовоподібною (часоподібною, ізотропною).

Нехай  – гладка поверхня класу  в , задана векторним рівнянням . Вектори  є дотичними до поверхні. Розглянемо в кожній точці  нормальну площину . Виберемо в нормальній площині  лінійно незалежні вектори  й  так, щоб четвірка векторів  була ортонормованою в . Якщо поверхня просторовоподібна, то нормальні площини в кожній точці до цієї поверхні будуть часоподібними, якщо ж поверхня часоподібна, то нормальні площини – просторовоподібні. У випадку ізотропної поверхні нормальні площини у всіх точках ізотропні, причому ізотропний вектор дотичної та нормальної площин буде спільним.

За допомогою кожного базисного вектора нормальної площини визначимо другі квадратичні форми

,

коефіцієнти яких позначимо .

Поверхню будемо вивчати за допомогою рухомого репера . Частинні похідні від векторів базису цього репера, тобто вектори , можна розкласти по векторах цього ж базису. Розклади Гаусса мають вигляд

,

де  – індекси підсумовування.

Нехай  – просторовоподібна поверхня. У розкладах Гаусса коефіцієнти  – це символи Крістоффеля другого роду. Коефіцієнти  знаходимо, помноживши праву й ліву частини рівностей на . Одержимо

, .

Таким чином, розклади Гаусса для просторовоподібної поверхні мають вигляд:

.

Розклади Вейнгартена для похідних від нормалей мають такий самий вигляд, як і для поверхні евклідова простору



Нехай тепер  – часоподібна поверхня. Після аналогічних перетворень можемо записати розклади Гаусса й Вейнгартена у вигляді

,



відповідно.

Ці розклади визначають наступний вигляд тензора кривини просторовоподібної поверхні. Використовуючи розклади Гаусса й Вейнгартена, можна вивести рівняння Гаусса у вигляді

. (2.18)

Для часоподібної поверхні одержимо

. (2.19)

Рівняння Гаусса для поверхонь евклідова простору виведені в роботі [5, с.98].

**2.6 Індикатриса нормальної кривини поверхонь різних типів у просторі **

У просторі  розглянемо двовимірну просторовоподібну поверхню . Вибравши на цій поверхні два поля одиничних взаємно ортогональних нормалей  і , одержимо відповідні їм дві другі квадратичні форми

.

Введемо поняття індикатриси нормальної кривини поверхні.

У точці  просторовоподібної поверхні  (для неї нормаль  – часоподібна, а  – просторовоподібна) кожному напрямку  відповідає вектор нормальної кривини , який розташований у нормальній площині  і є лінійною комбінацією проекцій вектора кривини на нормалі  й . Кінець цього вектора задає точку , що належить . При обертанні напрямку  в дотичній площині  точка  опише деяку криву, яку, за аналогією з евклідовим простором [5, гл.6], будемо називати *індикатрисою нормальної кривини*. Запишемо вектор нормальної кривини для деякого напрямку , який визначається диференціалами , у вигляді

,

де  – вектор кривини кривої на поверхні  в точці , що має напрямок  а скалярні проекції визначено формулами .

Нехай  – координати в нормальній площині  відносно репера з початком у точці  й базисними ортами  і . Тоді координати точки індикатриси мають вигляд

 .

Для дослідження рівняння індикатриси перейдемо на поверхні до такої параметризації , відносно якої метричний тензор має вигляд . Тоді з'являється можливість виразити  через один параметр  у вигляді

,,

де кут  утворений напрямком  і координатною лінією .

Координати точки індикатриси для просторовоподібної поверхні приймуть вид



або



Перенесемо початок репера в площині  в точку з координатами , де

, . Тоді

,

.

Якщо виключити параметр , то стане зрозумілим, що останні рівняння є рівняннями невиродженої центральної кривої із центром у точці . Вимагаючи, щоб при  виконувалась умова , отримаємо . При цьому функція  досягає екстремуму, значить . Отже, . Тому

, .

Ці рівняння відповідають вибору нормалей  і  паралельно осям індикатриси нормальної кривини. Введемо позначення ,  Знаходимо вирази для коефіцієнтів других квадратичних форм

, .

Запишемо істотне рівняння Гаусса, підставивши в нього .

. (2.20)

Будемо кривину поверхні відносно нормалі  позначати . Тоді відносно часоподібної нормалі  визначимо  відповідно до [, с.97], формулою

 . (2.21)

Отже, гауссова кривина поверхні  у формулі (2.21) є сумою кривин цієї поверхні відносно кожної з нормалей.

Оскільки , то гауссова кривина просторовоподібної поверхні має вигляд .

Використовуючи отримані залежності між коефіцієнтами других квадратичних форм і параметрами  індикатриси нормальної кривини, можемо одержати аналог формули Картана [5, с.145] для гауссової кривини просторовоподібної поверхні у вигляді .

У випадку часоподібної поверхні індикатриса нормальної кривини належить нормальній площині поверхні, яка в кожній точці є просторовоподібною. Тоді координати точки індикатриси є проекціями на просторовоподібні вектори  і  й мають вигляд  . Відносно ортонормованого базису в дотичному просторі метричний тензор поверхні в точці  має вигляд . Тоді в цій точці маємо . Оскільки , то існує таке , що

, .

Для координат точки індикатриси можемо записати

.

У спеціальній системі координат  і , а координати точки індикатриси часоподібної поверхні запишуться у вигляді

, .

Ці рівняння визначають гіперболу із центром у точці , де ,  і півосями , .

Коефіцієнти других квадратичних форм будуть виражатися через параметри індикатриси в такий спосіб

,

.

Запишемо істотне рівняння Гаусса, підставивши в нього . Оскільки , то гауссова кривина часоподібної поверхні має вигляд

. (2.23)

Тоді формула Картана для гауссової кривини часоподібної поверхні має вигляд .

Розглянемо, **наприклад**, поверхню з радіус-вектором , яку можна вважати аналогом тора Кліффорда в просторі Мінковського. Дотичні вектори до цієї поверхні мають вигляд , . Ці вектори є просторовоподібними та ортогональними, а значить поверхня буде просторовоподібною. У якості нормалей до поверхні можна обрати вектори  та . Обчислимо коефіцієнти других квадратичних форм відносно нормалей  та :

, , , .

Для гауссової кривини поверхні за формулою (2.20) отримаємо .

Побудуємо індикатрису кривини цієї поверхні. Запишемо вектор номальної кривини



Позначимо через ,  координати нормольної площини. Тоді координати точки венктора мають вигляд . Отже, вони задовольняють рівнянню прямої . Таким чином, індикатриса нормальної кривини заданої поверхні вироджена у відрізок. У випадку коли  графік індикатриси зображений на рисунку 2.3.

y1

y2

*-1/b*

*1/a*

Рисунок 2.3 – Індикатриса кривини

**Висновки**

На основі чотиривимірного псевдоевклідового простору індексу 1 може бути побудована така модель миру, котра всеціло погоджується зі спеціальною теорією відносності, навіть пояснює її, і при цьому ні в чому не протирічить тій картині світу, яку малюють нам чуттєві сприйняття.

Своєрідність геометрії простору Мінковського визначається тим, що відстань між двома точками ( подіями) визначається квадратами складових чотиривимірного вектора на тимчасові та просторові осі з різними знаками. В наслідок цього чотиривимірний простір з відмінними від нуля складовими може мати нульову довжину. Геометрія простору Мінковського дозволяє наочно інтерпретировати кінематичні ефекти спеціальної теорії відносності (змінення довжини і швидкості течії часу при переході від однієї інерційної системи відліку до іншої) і лежить в основі сучасного математичного апарату теорії відносності.

В роботі були розглянуті двовимірні поверхні чотиривимірного евклідового простору та простору Мінковського. Отримані розклади Гаусса й Вейнгартена для двовимірних просторовоподібних і часоподібних поверхонь простору Мінковського. Введено поняття індикатриси кривини поверхні, досліджені її властивості, отримані рівняння та формули для обчислення гауссової кривини поверхонь. Оскільки в цьому просторі існують поверхні різних типів, то дослідження кожної поверхні є окремою змістовною задачею.

# **Перелік посилань**

1. Сазанов А.А. Четырехмерный мир Минковского. Москва : Наука, 1988. 224с.
2. Акивис М. А. К дифференциальной геометрии грассманова многообразия, 1982. V.38. С.273–282.
3. Аминов Ю. А. О грассмановом образе двумерной поверхности в четырёхмерном евклидовом пространстве. *Укр. геом. сб*. 1980. Вып.23.  
   С.3–16.
4. Аминов Ю. А. Определение поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу. *Математический сборник*.1982. Т.117, №2. С.147-160.
5. Аминов Ю. А. Геометрия подмногообразий: Київ : Наукова думка, 2002. 467с.
6. Борисенко А. А. Об однозначной определенности многомерных подмногообразий в евклидовомпространстве по грассманову образу: *Математические заметки*, №51, 1. 1992. С.8–15
7. Борисенко А. А., Николаевский Ю. А. Многообразия Грассмана и грассманов образподмногообразий. *УМН*, 46, №278. 1991. С.41–83.
8. Величко И. Г., Гургенидзе М. А., Стеганцева П. Г. Подмногообразия грассманового многообразияплоскостей псевдоевклидова пространства: *Зб. праць інституту математики НАН України*, 2009. №2. С.56–76.
9. Горькавый В. А. О конформных преобразованиях поверхностей в пространстве Минковского с сохранением грассманова образа. *Известия вузов. Математика*, 2006. № 7.С.13–24.
10. Борисенко А. А. Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий. Москва : Изд-во “Экзамен”, 2003. 670 с.
11. Аминов Ю. А. О погружении евклидовой плоскости в Е4 с нулевым гауссовым кручением. *Математическая физика, анализ, геометрия*, 1994. 1.
12. Борисенко А. А., Николаевский Ю. А. О поверхностях с максимальной кривизной грассманова образа. *Математические заметки*, 48:3. 1990. С.12–19.
13. Гречнева М.А. Стеганцева П. Г. О поверхностях со стационарными значениями стационарной кривизны грассманова образа. *Proceedings of the International Geometry Center*, 2016. Vol. 9. №2. С. 42–48.
14. Маазикас И. К римановой геометрии грассмановых подмногообразий неизотропных подпространств псевдоевклидова пространства. *Ученые записки Тартусского университета*, 1974. С.342
15. Стеганцева П. Г., Гречнева М. А. Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства. *Известия вузов. Математика*. 2017, №2, С.65–75.