

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: «ЕФЕКТИВНІ ПРУЖНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ГУМОВОКОРДНОГО КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ»

Виконав: студент 2 курсу, групи 8.1132

спеціальності 113 Прикладна математика
(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми Прикладна математика
(назва освітньої програми)

В.В. Сидюк

(ініціали та прізвище)

Керівник завідувач кафедри фундаментальної та прикладної
математики, професор, д.т.н. Гребенюк С.М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри загальної математики, доцент,
к.ф.-м.н. Спиця О.Г.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя

2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 113 Прикладна математика

(шифр і назва)

Освітня програма Прикладна математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної та прикладної
математики, професор, д.т.н.

Гребенюк С.М.

(підпис)

« _____ » _____ 2023 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

Сидюку Володимиру Володимировичу

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Ефективні пружні характеристики гумовокордного композиційного матеріалу

керівник роботи (проекту) Гребенюк Сергій Миколайович, професор, д.т.н.

(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « _____ » _____ 2023 року № _____

2. Строк подання студентом роботи _____

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.

2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити) _____

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) _____

Презентація _____

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	17.05.2023	
2.	Збір вихідних даних.	16.06.2023	
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	15.09.2023	
4.	Отримання основних аналітичних співвідношень	10.11.2023	
5.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	27.11.2023	
6.	Захист кваліфікаційної роботи.	12.12.2023	

Студент _____
(підпис)

В.В. Сидюк _____
(ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____
(підпис)

С.М. Гребенюк _____
(ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____

О.Г. Спиця _____

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Ефективні пружні характеристики гумовокордного композиційного матеріалу»: 65 с., 8 рис., 3 табл., 11 джерел.

ВОЛОКНИСТИЙ КОМПОЗИТ, ГУМА, ГОМОГЕНІЗАЦІЯ, ЕФЕКТИВНІ ПРУЖНІ СТАЛІ, СЛАБКА СТИСЛИВІСТЬ.

Об'єкт дослідження – математична модель пружних властивостей гумовокордного композиційного матеріалу

Мета роботи: отримати аналітичні співвідношення для ефективних пружних сталей волокнистого композиційного матеріалу з гумовою нестисливою матрицею.

Метод дослідження – аналітичний, чисельний, порівняльний.

У даній кваліфікаційній роботі на основі методу представницького об'ємного елемента отримано ефективні пружні характеристики волокнистого композиційного матеріалу з гумовою нестисливою матрицею.

Розглянуто аналітичне розв'язання чотирьох пар крайових задач для сумісного деформування волокна і нестислої матриці та для гомогенізованого трансропного композиційного матеріалу. Проведено аналітичні розв'язки для таких крайових задач: рівномірне поздовжнє розтягнення, рівномірне поперечне розтягнення, чистий поперечний зсув і чистий поздовжній зсув.

Проведено розрахунок ефективних пружних характеристик для гумовокордного матеріалу із різним вмістом волокна у композиті.

SUMMARY

Master's Qualification Theses " Effective Elastic Characteristics of Rubber-Cord Composite Material. ": 65 pages, 3 tables, 8 figures, 11 sources.

FIBROUS COMPOSITES, RUBBER, HOMOGENIZATION, EFFICIENT ELASTIC STEELS, LOW COMPRESSION.

The object of research is the Effective Elastic Characteristics of Rubber-Cord Composite Material.

The purpose of the work: obtain analytical relationships for the effective elastic properties of composite materials with a transversely isotropic matrix and fibers.

The research method is analytical, numerical, comparative.

This diploma thesis encompasses a comprehensive study of elastic steel through the solution of the boundary problem of combined deformation of a transversely isotropic matrix and fibers.

The paper considers the solution to the boundary problem for a composite with a homogeneous transversely isotropic material with elastic steel layers. Analytical solutions have been obtained for a limited set of boundary problems, including uniform longitudinal stretching, uniform transverse stretching, pure transverse shear, and pure longitudinal shear.

An analysis of uniform longitudinal stretching, uniform transverse stretching, pure transverse shear and pure longitudinal shear was carried out.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	2
Реферат	4
Summary	5
Вступ.....	7
1 Основні механічні характеристики волокнистого композиційного матеріалу та методи їх визначення.....	9
1.1 Властивості гумовокордних композиційних матеріалів.....	9
1.2 Вплив основних параметрів композиції на пружні характеристики гумовокордних матеріалів.....	10
1.3 Аналітичні та чисельні методи визначення механічних характеристик волокнистих композитів.....	12
2 Визначення ефективних механічних характеристик волокнистого композиційного матеріалу при лінійних деформаціях	14
2.1 Постановка задачі й основні співвідношення.....	14
2.2 Визначення ефективних пружних сталих композиційного матеріалу при поздовжньому розтягненні	19
2.3 Визначення ефективних пружних сталих композиційного матеріалу при поперечному розтягненні.....	26
3 Визначення ефективних механічних характеристик волокнистого композиційного матеріалу при зсувних деформаціях.....	32
3.1 Визначення ефективних пружних сталих композиційного матеріалу при поперечному зсуві.....	32
3.2 Визначення ефективних пружних сталих композиційного матеріалу при поздовжньому зсуві	53
Висновки	61
Перелік посилань.....	62
Додаток А Основні співвідношення теорії пружності в циліндричній системі координат	64

ВСТУП

Сучасність потребує розвитку та нових винаходів, так широкого застосування, у різноманітній техніці, набувають композиційні матеріали. Адже, порівнюючи їх із звичними конструкційними матеріалами (чавун, латунь, сталь та інші), композиційні матеріали характеризуються більш високою міцністю, твердістю, стійкістю при високих температурах.

Композити мають значний спектр корисних функцій, а деякі з них є унікальними. Їх розумне поєднання дозволяє створювати конструкції з високим ступенем досконалості та заданими фізико-механічними характеристиками матеріалу. Вони широко використовуються у таких галузях, як літако-, судно-, машинобудування, медичній та в інших галузях.

В загальній системі, де компонент системи зберігає свої властивості, з'єднання двох і більше компонентів представляють композиційні матеріали. Композити можна представити однорідними або неоднорідними, оскільки їх можна розглядати в мікро- та макромасштабах.

Композиційні матеріали – це матеріали з новим корисним комплексом фізико-механічних та експлуатаційних властивостей, які утворюються поєднанням двох і більше компонентів, які мають межі розподілу та відрізняються за хімічним складом, структурою та фізико-хімічними характеристиками. Одним з основних компонентів композиційних матеріалів є матриця, яка оточує армуючі включення, які називаються наповнювачами або арматурою. Вони можуть виконувати функції як зміцнювача (в конструкціях композиційних матеріалів) так і наповнювача, що визначає функціональні характеристики матеріалу (теплофізичні, електричні, магнітні, триботехнічні та ін.). Як армуючий компонент або наповнювач використовують високоміцні дроти (сталь, вольфрам, молібден, берилій), ниткоподібні кристали з SiC, Al₂O₃, Si₃N₄ та ін., неметалічні волокна (вуглець, бор, скло, базальт, кераміка), порошок та гранули металів, інтерметалідів,

кераміки тощо.

У більшості випадків композиційні матеріали класифікуються за формою включень. Найпоширенішими з них є кулі, короткі (або розірвані) волокна, довгі безперервні волокна (нитки), а також макрочастинки (гранули). Фізико-механічні властивості композиційних матеріалів значною мірою залежать від кількості армуючого наповнювача (частинок або волокон), його розташування, розмірів, характеристик і характеру зв'язку з матрицею. Армування дротами або волокнами залежить від того, як вони розташовані щодо об'єму матеріалу, відношення довжини до діаметра (для дискретних волокон) і структури складових елементів, таких як сітки та інші текстильні армуючі структури. Односпрямована орієнтація неперервних або дискретних волокон забезпечує найкраще зміцнення.

Гумовокордні матеріали є важливою складовою галузі полімерних матеріалів та знаходять застосування в різних промислових секторах. Ці матеріали мають комбіновану структуру, яка включає гумовий матеріал та корд, який може бути з волокон або тканини.

Основні властивості гумовокордних матеріалів визначаються як властивостями гуми (гнучкість, пружність, витривалість тощо), так і механічними характеристиками корду (міцність, жорсткість, стійкість до розриву). Це робить їх корисними у виробництві автомобільних шин, промислових шнурів, ременів трансмісії, ремінців, конвеєрних стрічок та інших виробів.

Гумовокордні матеріали можуть бути розроблені для конкретних застосувань з урахуванням необхідних властивостей. Вони можуть бути посилені волокнами армування, які надають їм високу міцність та стійкість до деформації. Також, змішування різних видів гуми та корду може призвести до отримання матеріалів з покращеними характеристиками або специфічними властивостями.

1 ОСНОВНІ МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ ТА МЕТОДИ ЇХ ВИЗНАЧЕННЯ

1.1 Властивості гумовокордних композиційних матеріалів

Механічні характеристики гумовокордних композиційних матеріалів визначають їхню відповідність вимогам і умовам конкретного застосування. Ці характеристики описують реакцію матеріалу на механічне навантаження і можуть бути виміряні та оцінені шляхом різних тестів та випробувань. Оскільки гумовокордні композиційні матеріали часто використовуються в пружних елементах конструкцій, таких як шини, ремені, ущільнювачі та інші, їхні механічні характеристики мають велике значення.

Основні механічні характеристики гумовокордних композиційних матеріалів включають:

- а) міцність, яка вказує на максимальну силу, яку матеріал може витримати перед тим, як він розірветься або почне руйнуватися. Вимірюється в одиницях напружень (МПа);
- б) пластичність описує здатність матеріалу деформуватися без руйнування. Вимірюється у відсотках деформації при розриві;
- в) модуль пружності вказує на жорсткість матеріалу і його здатність повертатися до початкової форми після деформації. Вимірюється в одиницях напружень (МПа);
- г) ударна в'язкість визначає здатність матеріалу поглинати енергію удару без руйнування. Вимірюється у джоулях (Дж) або джоулях на квадратний сантиметр (Дж/см²);
- д) зносостійкість вказує на стійкість матеріалу до тертя та зносу під час контакту з іншими поверхнями;
- е) твердість вимірюється як ступінь стійкості матеріалу до подряпин і зносу;

ж) розтягувальна міцність – це міцність матеріалу при розтягуванні в поперечному напрямку. Вимірюється в одиницях напружень (МПа).

Ці характеристики важливі для визначення можливості використання гумовокордних композиційних матеріалів у конкретних умовах та застосуваннях. Вони допомагають інженерам та дослідникам оцінити механічну надійність і поведінку матеріалів у різних ситуаціях.

Еластичність та деформаційні характеристики гумовокордних композиційних матеріалів відіграють важливу роль у визначенні їхньої здатності до деформації та повернення до початкового стану.

Еластичність матеріалу вказує на його здатність повертатися до початкової форми та розмірів після припинення дії зовнішнього навантаження. Матеріал вважається еластичним, якщо його деформація залежить лінійно від прикладеного навантаження і повністю відновлюється після його зняття. Модуль пружності (або модуль Юнга) вимірює ступінь деформації матеріалу при певному навантаженні.

1.2 Вплив основних параметрів композиції на пружні характеристики гумовокордних матеріалів

Вплив параметрів композиції на пружні характеристики гумовокордних матеріалів може бути досить значущим. Розглянемо основні параметри, які впливають на пружні характеристики:

Кількість та тип корду: Кількість корду впливає на міцність і стійкість матеріалу. Збільшення кількості корду може підвищити міцність, але також зробить матеріал менш гнучким. Також важливий тип корду, оскільки металеві корди можуть надавати велику міцність, але меншу гнучкість порівняно з текстильними.

Вид наповнювача: Додавання наповнювача може покращити

жорсткість і зносостійкість матеріалу, але впливає на його еластичність. Також важливо вибирати наповнювач так, щоб він міг рівномірно розподілитися у матеріалі і не порушував його структуру.

Вид гуми: Різні типи гуми мають різні характеристики еластичності і міцності. Вибір гуми залежить від конкретних вимог до матеріалу, наприклад, наскільки важливі міцність, гнучкість чи стійкість до зносу.

Додаткові компоненти: Додаткові компоненти, такі як в'язкуваті речовини або модифікатори, можуть підвищити адгезію і міцність матеріалу. Вони можуть також впливати на стійкість до розривів і розривів при деформаціях.

Пропорції та співвідношення: Правильні співвідношення між компонентами впливають на однорідність та структуру матеріалу. Наприклад, нерівномірне розподілення компонентів може призвести до незадовільних пружних характеристик.

Технологічні параметри: Температура, тиск та час вулканізації можуть впливати на молекулярну структуру та механічні властивості матеріалу. Неправильна обробка може спричинити втрату пружності та міцності.

Термообробка: Після виготовлення матеріал може пройти термообробку, яка може змінити структуру та властивості матеріалу. Це може впливати на міцність та інші пружні характеристики.

Важливо враховувати, що вибір оптимальних параметрів композиції залежить від конкретних вимог до матеріалу та його застосування. Тестування різних комбінацій параметрів і вивчення їх впливу на пружні характеристики може допомогти знайти оптимальний склад для досягнення певних властивостей матеріалу.

1.3 Аналітичні та чисельні методи визначення механічних характеристик волокнистих композитів

Аналітичні та числові методи визначення ефективних характеристик волокнистих композитів грають важливу роль у розумінні та моделюванні їхнього механічного поведінки. Теорія макроскопічної пружності використовує закони механіки матеріалів для визначення ефективних модулів пружності та коефіцієнтів Пуассона, враховуючи властивості складових матеріалів та їх об'ємну частку.

Метод гомогенізації розв'язує рівняння для ефективних властивостей, використовуючи періодичну структуру композиту. Цей метод включає моделі середнього поля та моделі схожості. Метод теорії зігнутого стержня використовується для визначення жорсткості композитів при згині, розглядаючи стержень як цілісну систему.

Числові методи, такі як метод скінчених елементів (МСЕ), базуються на розбитті геометрії на прості елементи для числового моделювання поведінки матеріалу під впливом різних умов навантаження. Метод скінчених різниць (МСР) використовує апроксимацію диференціальних рівнянь диференціальними різницями, що дозволяє розв'язувати задачі теплопровідності та механіки матеріалів [9, 11].

Метод дискретних елементів (DEM) моделює взаємодію окремих частинок, враховуючи їхню геометрію та механічні властивості. Цей метод особливо корисний для дослідження деформацій та руйнування волокнистих композитів.

Метод граничних елементів (BEM) розв'язує диференціальні рівняння шляхом апроксимації розв'язку на границі області.

Ці методи дозволяють враховувати різні аспекти механічної поведінки волокнистих композитів, такі як анізотропія, нелінійність та взаємодія між компонентами. Комбінація різних методів може бути ефективною для отримання точних та реалістичних результатів.

Усі ці методи, як аналітичні, так і числові, використовуються для розв'язання різних завдань у механіці матеріалів, таких як визначення ефективних модулів пружності, властивостей при згині, анізотропії та теплопередачі. Вони дозволяють інженерам та науковцям отримувати комплексні та точні дані, що є ключовими для оптимізації та розробки нових високопродуктивних матеріалів у різних галузях, таких як авіація, автомобільна промисловість та будівництво.

2 ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ МЕХАНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ ПРИ ЛІНІЙНИХ ДЕФОРМАЦІЯХ

2.1 Постановка задачі й основні співвідношення

Однією із найпопулярних схем розташування армуючих волокон у односпрямованих композитах є гексагональна укладка волокон. (рис. 1).

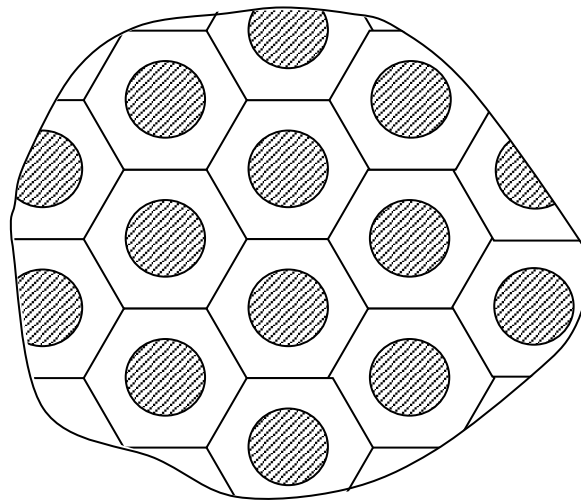


Рисунок 1 – Гексагональна укладка волокон

Зробимо припущення, що розглядається ситуація, коли матеріал матриці (гума) є нестисливим, а матеріал волокна є трансверсально-ізотропним матеріалом. Площина ізотропії матеріалу волокна розташована перпендикулярно до осі волокна. Важливо відзначити, що обидва матеріали, матриця і волокно, підкоряються закону Гука. Це справедливо для матеріалу гуми навіть при значних деформаціях (для деяких марок до 50 % деформацій). Будемо вважати, що між матеріалом матриці і матеріалом волокна існує ідеальний контакт. Також припустимо, що розміри та розташування компонентів композиту такі, що композиційний матеріал в цілому можна

розглядати як макроскопічно однорідний.

Уявно виріжемо з масиву композиту елементарний об'єм, що містить комбінацію двох геометричних тіл нескінченної довжини. Перше – це гексаедр з циліндричним отвором (ось гексаедру та циліндричного отвору співпадають), який відповідає нестисливій матриці. Друге – циліндр, який відповідає волокну і є трансверсально-ізотропним та суцільним.

Ця модель дозволяє аналізувати поведінку матеріалу, припускаючи, що матриця та волокно мають різні властивості. Вони розглядаються як нескінченно довгі, що спрощує аналіз. Ця модель допомагає вивчити реакцію матеріалу на зовнішні навантаження та передбачити його механічні властивості. Але при постановці задач для гексаедру аналітичні розв'язки отримати досить складно, тому видозмінимо модель і замість гексаедру з циліндричним отвором візьмемо порожнистий циліндр (рис. 2), причому діаметри отворів співпадають, а зовнішній діаметр порожнистого циліндру підберемо так, щоб об'ємний вміст волокна як в циліндричній, так і в гексагональній комірці був однаковим (рис. 3).

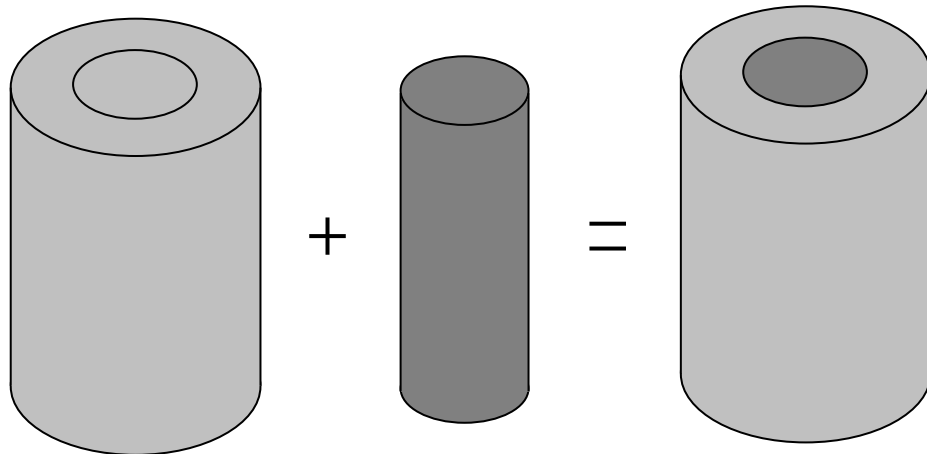


Рисунок 2 – Елемент волокнистого композита

Якщо об'єм волокон у композиті дорівнює f , то справедливе таке співвідношення: враховуючи, що поздовжній розмір тіла, що моделює матрицю, в елементарній комірці та розмір тіла, що моделює волокно у цій

комірці однакові, справедливе таке співвідношення:

$$f = \frac{\pi a^2}{\pi b^2} = \frac{a^2}{b^2}. \quad (2.1)$$

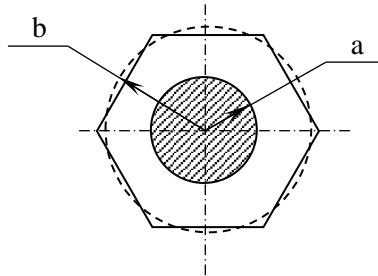


Рисунок 3 – Гексагональна комірка

Пружні сталі отримуються шляхом розв'язання крайової задачі сумісного деформування нестисливої матриці та трансропного волокна. У результаті її розв'язання отримуємо складові напружено-деформованого стану як функція пружних сталих матеріалів матриці та волокна, а також об'ємної частки кожного з цих матеріалів у композиті. Далі отримаємо розв'язок крайової задачі для композита з однорідним трансверсально-ізотропним матеріалом із пружними сталями, які поки що залишаються невизначеними. Розв'язання дає компоненти напружено-деформованого стану, які є функцією невідомих пружного характеристик однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, який моделює композит. Рівність деяких значень вектору переміщень у двох задачах є умовою узгодження. У результаті цієї умови знаходимо пружні сталі трансверсально-ізотропного матеріалу, що залежать від відповідних компонентів як матеріалу матриці, так і матеріалу волокна, а також їхньої об'ємної частки в композиті. Із викладеного вище очевидно, що чим більш точно розв'язана крайова задача, тим точнішими будуть пружні характеристики композитного матеріалу. Аналітичні розв'язки для такої комбінації можуть бути отримані лише для невеликої кількості крайових задач, включаючи рівномірне поздовжнє розтягнення, рівномірне поперечне

розтягнення, чистий поперечний зсув і чистий поздовжній зсув.

Давайте розглянемо розподіл напружень та деформацій в циліндричному тілі з вісесиметричною симетрією, тоді $\sigma_{zz} = \sigma_0$, $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r)$, $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r)$, $\sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0$. Рівняння рівноваги (A.8) та (A.9), наведені в додатку А, при заданих умовах виконуються автоматично, а рівняння (A.7) при масовій силі $G_r = 0$ набуде вигляду:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0. \quad (2.2)$$

Якщо вважати осьове напруження сталим, зокрема нульовим, то тоді з (A.10) та (A.11) витікає, що $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}(r)$, $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}(r)$ і, відповідно, $\varepsilon_{zz} = const$. Тоді з урахуванням співвідношень додатку А (A.17), (A.18) і (A.1), (A.3) для вісесиметричного напружено-деформованого стану рівняння (2.2) запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0. \quad (2.3)$$

Розв'язок цієї задачі має вигляд:

$$u_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (2.4)$$

де C_1 і C_2 – сталі, що визначаються з граничних умов.

Отже, використовуючи вирази з додатку А (A.1) та (A.3), отримуємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}(r) &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = C_1 - \frac{C_2}{r^2}; \\ \varepsilon_{\theta\theta}(r) &= \frac{u_r}{r} = C_1 + \frac{C_2}{r^2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Використовуючи формули (А.17) та (А.18), запишемо наступні вирази:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{E_2 \left(\nu_{12}(1 + \nu_{23})\varepsilon_{zz} + C_1(1 + \nu_{23}) + \frac{C_2}{r^2}(\nu_{23} + 2\nu_{12}\nu_{21} - 1) \right)}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E_2 \left(\nu_{12}(1 + \nu_{23})\varepsilon_{zz} + C_1(1 + \nu_{23}) + \frac{C_2}{r^2}(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21}) \right)}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}. \quad (2.6)\end{aligned}$$

Підставляючи отримані співвідношення та значення $\sigma_{zz} = \sigma_0$ у вираз (А.12), знайдемо співвідношення для ε_{zz} :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_0(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1 - \nu_{23})} - \frac{2C_1\nu_{21}}{(1 - \nu_{23})} = \text{const.} \quad (2.7)$$

А враховуючи співвідношення (А.5), отримаємо вирази для осьових переміщень:

$$\begin{aligned}u_z(z) &= \int \varepsilon_{zz} dz = \int \left(\frac{\sigma_0(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1 - \nu_{23})} - \frac{2C_1\nu_{21}}{(1 - \nu_{23})} \right) dz = \\ &= \left(\frac{\sigma_0(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1 - \nu_{23})} - \frac{2C_1\nu_{21}}{(1 - \nu_{23})} \right) z + C_3. \quad (2.8)\end{aligned}$$

За умови $u_z(0) = 0$, маємо $C_3 = 0$. І співвідношення (2.8) запишеться в вигляді:

$$u_z(z) = \left(\frac{\sigma_0(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1 - \nu_{23})} - \frac{2C_1\nu_{21}}{(1 - \nu_{23})} \right) z. \quad (2.9)$$

З урахуванням отриманого співвідношення (2.9) вирази для напружень

набудуть вигляду:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r) &= E_2 \left(\frac{\sigma_0 \nu_{12}}{E_1(1 - \nu_{23})} + \frac{C_1}{1 - \nu_{23}} - \frac{C_2}{r^2(1 + \nu_{23})} \right), \\ \sigma_{\theta\theta}(r) &= E_2 \left(\frac{\sigma_0 \nu_{12}}{E_1(1 - \nu_{23})} + \frac{C_1}{1 - \nu_{23}} + \frac{C_2}{r^2(1 + \nu_{23})} \right).\end{aligned}\quad (2.10)$$

Отже, всі величини напружень, деформацій і переміщень для вісесиметричного напружено-деформованого стану визначаються як функції пружних властивостей матеріалу та констант, враховуючи крайові умови.

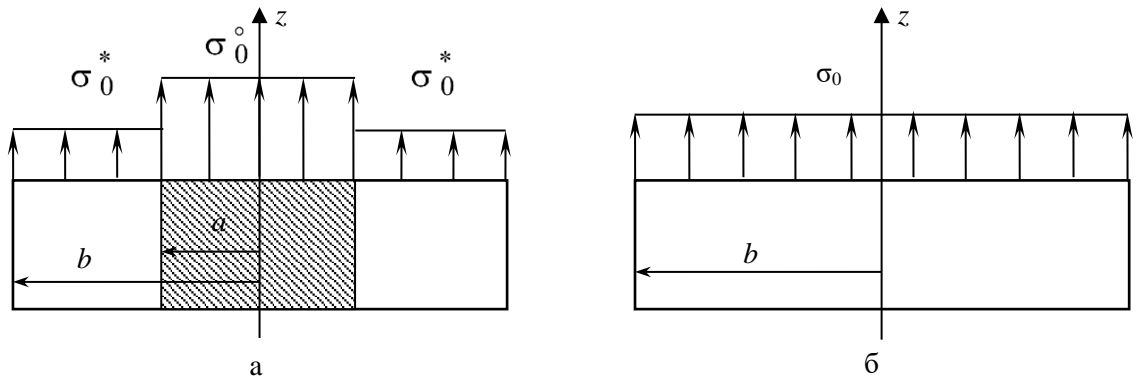
2.2 Визначення ефективних пружних сталих композиційного матеріалу при поздовжньому розтягненні

Розглянемо сумісне поздовжнє розтягнення (рис. 4а) суцільного циліндра ($0 \leq r \leq a$), що моделює волокно, і порожнистого циліндра ($a \leq r \leq b$), що моделює матрицю.

Підберемо крайові умови так, щоб вони збігалися з експериментальними даними для композиційних матеріалів. Важливо, щоб в місці зчеплення волокна з матрицею не було стрибків у радіальних переміщеннях та радіальних напруженнях. Осьові переміщення волокон і матриці залишаються при деформуванні однаковими і сталими, що є важливою характеристикою цих крайових умов.

$$\sigma_{rr}^{\circ}(a) = \sigma_{rr}^*(a), \quad u_r^{\circ}(a) = u_r^*(a), \quad u_z^{\circ}(h) = u_z^*(h). \quad (2.11)$$

Тут і далі символ \circ означає величини, що описують матеріал волокна, а символом $*$ – величини, що описують матеріал матриці.



а – сумісне деформування матриці та волокна;

б – деформування композита;

Рисунок 4 – Поздовжнє розтягнення

Враховуючи, що суміжні представницькі об'ємні елементи у макрооб'ємі повинні знаходитися у однаковому напруженому стані, будемо мати крайову умову у напруженнях:

$$\sigma_{rr}^*(b) = 0. \quad (2.12)$$

Враховуючи вісесиметричність задачі, радіальні переміщення транслопного волокна будуть описуватися співвідношенням (2.4), а зважаючи, що при $r = 0$ $u_r^{\circ}(0) = 0$ матимемо, що $C_2 = 0$, її співвідношення (2.4) прийме вид:

$$u_r^{\circ}(r) = Cr. \quad (2.13)$$

А напружено-деформований стан транслопного волокна буде описуватися виразом (2.13), та співвідношеннями:

$$u_z^{\circ}(z) = \frac{1}{(1 - \nu_{23}^{\circ})} \left(\frac{\sigma_0^{\circ}(1 - \nu_{23}^{\circ} - 2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ})}{E_1^{\circ}} - 2C\nu_{21}^{\circ} \right) z, \quad (2.14)$$

$$\sigma_{rr}^{\circ}(r) = \frac{E_2^{\circ}}{(1 - \nu_{23}^{\circ})} \left(\frac{\sigma_0^{\circ} \nu_{12}^{\circ}}{E_1^{\circ}} + C \right); \quad \sigma_{\theta\theta}^{\circ}(r) = \frac{E_2^{\circ}}{(1 - \nu_{23}^{\circ})} \left(\frac{\sigma_0^{\circ} \nu_{12}^{\circ}}{E_1^{\circ}} + C \right). \quad (2.15)$$

Аналогічним чином представимо вирази для напружено-деформованого стану нестисливої матриці:

$$u_r^*(r) = Ar + \frac{B}{r}; \quad u_z^*(z) = -2Az, \quad (2.16)$$

$$\sigma_{rr}^*(r) = E^* \left(\frac{\sigma_0^*}{E_1^*} + 2A - \frac{2B}{3r^2} \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta}^*(r) = E^* \left(\frac{\sigma_0^*}{E_1^*} + 2A + \frac{2B}{3r^2} \right). \quad (2.17)$$

Враховуючи крайові умови (2.11), (2.12) знайдемо сталі A , B , C та співвідношення між σ_0° та σ_0^* . Друга рівність з (2.11) дає:

$$C = A + \frac{B}{a^2}. \quad (2.18)$$

Із співвідношення (2.12) матимемо:

$$A = \frac{B}{3b^2} - \frac{\sigma_0^*}{2E^*}. \quad (2.19)$$

Враховуючи останнє (2.18) прийме вид:

$$C = B \left(\frac{f+3}{3a^2} \right) - \frac{\sigma_0^*}{2E^*}. \quad (2.20)$$

Перше співвідношення з (2.11) дає:

$$\begin{aligned}
& \frac{E_2^\circ}{(1 - \nu_{23}^\circ)} \left(\frac{\sigma_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} - \frac{\sigma_0^*}{2E^*} \right) = \\
& = \frac{B}{a^2} \left(\frac{2E^*}{3} (f - 1) - \frac{E_2^\circ}{(1 - \nu_{23}^\circ)3} (f + 3) \right), \\
B & = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} - \frac{\sigma_0^*}{2E^*} \right) \frac{3a^2 E_2^\circ}{E^* (f - 1)(1 - \nu_{23}^\circ) - E_2^\circ(0,5f + 1,5)}, \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Позначимо

$$d_1 = E^* (f - 1)(1 - \nu_{23}^\circ), d_2 = E_2^\circ(0,5f + 1,5). \quad (2.22)$$

Будемо мати

$$\begin{aligned}
B & = \frac{3}{2} \left(\frac{\nu_{21}^\circ a^2}{d_1 - d_2} \sigma_0^\circ - \frac{a^2 E_2^\circ}{d_1 - d_2} \frac{1}{2E^*} \sigma_0^* \right); \\
C & = \frac{d_2}{d_1 - d_2} \frac{\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} \sigma_0^\circ - \frac{1}{2E^*} \frac{d_1}{d_1 - d_2} \sigma_0^*; \\
A & = \frac{0,5f \nu_{21}^\circ}{d_1 - d_2} \sigma_0^\circ - \frac{0,5}{E^*} \frac{0,5f E_2^\circ + d_1 - d_2}{d_1 - d_2} \sigma_0^*. \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Третє співвідношення в (2.11) дає залежність між σ_0^* та σ_0° :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(1 - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ - \nu_{23}^\circ)(d_1 - d_2)}{E_1^\circ(1 - \nu_{23}^\circ)} - \frac{2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ d_2}{E_1^\circ(1 - \nu_{23}^\circ)} + \frac{f \nu_{21}^\circ}{1} \right) \sigma_0^\circ = \\
& = \left(\frac{(0,5f E_2^\circ + d_1 - d_2)}{E^*} - \frac{\nu_{21}^\circ d_1}{E^* (1 - \nu_{23}^\circ)} \right) \sigma_0^*. \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Позначимо

$$d^\circ = \frac{E^* (f - 1)(1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) - E_2^\circ(f(0,5 - \nu_{12}^\circ) + 1,5)}{E_1^\circ};$$

$$d^* = \frac{E^* (f - 1)(1 - \nu_{23}^{\circ} - \nu_{21}^{\circ}) - 1,5E_2^{\circ}}{E^*}, \quad (2.25)$$

матимемо

$$d^{\circ} \sigma_0^{\circ} = d^* \sigma_0^*. \quad (2.26)$$

Тепер розглянемо схожу задачу для однорідного трансверсально-ізоотропного матеріалу, який використовується для моделювання поведінки композиційного матеріалу (див. рис. 4б). У цьому випадку поле напружень буде визначатися наступними рівняннями:

$$\sigma_{zz} = \sigma_0, \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0. \quad (2.27)$$

Для того щоб умови рівноваги були спільними для обох задач, необхідно, щоб виконувалися такі умови:

$$\pi a^2 \sigma_0^{\circ} + \pi (b^2 - a^2) \sigma_0^* = \pi b^2 \sigma_0, \quad \text{або} \quad \sigma_0^{\circ} f + \sigma_0^* (1 - f) = \sigma_0. \quad (2.28)$$

Враховуючи співвідношення між напруженнями, отримаємо:

$$\sigma_0^* = \frac{\sigma_0 d^{\circ}}{d^{\circ} + f(d^* - d^{\circ})}, \quad \sigma_0^{\circ} = \frac{\sigma_0 d^*}{d^{\circ} + f(d^* - d^{\circ})}. \quad (2.29)$$

Враховуючи (2.27) співвідношення для деформацій (А.10), (А.12) приймуть вид:

$$\varepsilon_{rr} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_0; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_1} \sigma_0. \quad (2.30)$$

Тоді переміщення можна записати у виді:

$$u_r(r) = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_0 r + C_1; u_z(z) = \frac{1}{E_1} \sigma_0 z + C_2. \quad (2.31)$$

З урахуванням того, що $u_r(0) = 0$ та $u_z(0) = 0$ й, відповідно, сталі $C_1 = C_2 = 0$, матимемо

$$u_r(r) = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_0 r; u_z(z) = \frac{1}{E_1} \sigma_0 z. \quad (2.32)$$

Будемо вважати, що як умови узгодження для задачі про поздовжнє розтягнення однорідного трансропного композита та задачі про сумісне поздовжнє розтягнення матриці і волокна виступають: рівність осьових переміщень для будь-якої осьової координати; рівність радіальних переміщень на зовнішній поверхні циліндричної структури:

$$u_r(b) = u_r^*(b); u_z(h) = u_z^\circ(h) = u_z^*(h). \quad (2.33)$$

Таким чином, друге зі співвідношень (2.33) з урахуванням (2.16) та (2.32) буде виглядати наступним чином:

$$-2A = \frac{1}{E_1} \sigma_0, \quad (2.34)$$

а маючи на увазі (2.23) та (2.29), отримаємо співвідношення:

$$\frac{1}{E_1} = \frac{1}{d^\circ + f(d^* - d^\circ)} \left(-\frac{f\nu_{21}^\circ}{d_1 - d_2} d^* + \left(+\frac{1}{E^*} \frac{0,5fE_2^\circ + d_1 - d_2}{d_1 - d_2} \right) d^\circ \right). \quad (2.35)$$

Після проведених перетворень отримуємо вираз для визначення поздовжнього модуля пружності композитного матеріалу з трансропним волокном та нестисливою матрицею:

$$E_1 = \frac{(d^\circ(1-f) + d^*f) \left(E^* (f-1)(1 - \nu_{23}^\circ) + E_2^\circ(0,5(f-1) - (1+f)) \right) E^*}{(E^* (f-1)(1 - \nu_{23}^\circ) - 1,5E_2^\circ)d^\circ - f\nu_{21}^\circ E^* d^*},$$

або

$$E_1 = \frac{(\alpha - 2\nu_{12}^\circ\beta)E^* (1-f) + (\alpha - \beta)E_1^\circ f}{\alpha - 2\beta\nu_{12}^\circ + fE_2^\circ(\nu_{12}^\circ - 0,5)}, \quad (2.36)$$

з урахуванням співвідношень

$$\alpha = E^* (1-f)(1 - \nu_{23}^\circ) + E_2^\circ(0,5f + 1,5); \quad \beta = \nu_{21}^\circ E^* (1-f) + 0,5fE_2^\circ. \quad (2.37)$$

Перша рівність в (2.33) дає змогу знайти величину $-\nu_{21}/E_2$, тоді матимемо:

$$\frac{0,5f\nu_{21}^\circ}{d_1 - d_2} \sigma_0^\circ - \frac{0,5}{E^*} \frac{0,5fE_2^\circ + d_1 - d_2}{d_1 - d_2} \sigma_0^* + \frac{B}{b^2} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_0. \quad (2.38)$$

Підставляючи у (2.38) вираз для сталої B , отримуємо:

$$-\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{1}{d^\circ + f(d^* - d^\circ)} \left(\frac{2f\nu_{21}^\circ d^*}{d_1 - d_2} - \frac{0,5}{E^*} \frac{(2fE_2^\circ + d_1 - d_2)d^\circ}{d_1 - d_2} \right). \quad (2.39)$$

Або, використовуючи зв'язок між коефіцієнтами Пуассона та модулями пружності анізотропного матеріалу, отримуємо вираз для коефіцієнта Пуассона ν_{12} :

$$\nu_{12} = \frac{\left((f-1)(E^* (1 - \nu_{23}^\circ) + 3E_2^\circ)d^\circ - 4f\nu_{21}^\circ E^* d^* \right)}{2(E^* (f-1)(1 - \nu_{23}^\circ) - 1,5E_2^\circ)d^\circ - f\nu_{21}^\circ E^* d^*},$$

або

$$\nu_{12} = \frac{(\alpha - 2\beta\nu_{12}^{\circ}) + 4E_2^{\circ}f(\nu_{12}^{\circ} - 0,5)}{2\alpha - 4\beta\nu_{12}^{\circ} + 2fE_2^{\circ}(\nu_{12}^{\circ} - 0,5)}. \quad (2.40)$$

Розглянемо гумовокордний матеріал із ізотропною матрицею та кордом, що має ізотропні пружні характеристики [1]. Матимемо модуль пружності текстильного корда $E^{\circ} = 1,6 \cdot 10^3$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu^{\circ} = 0,8$, модуль пружності гуми $E^* = 4,5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu^* = 0,49$.

В таблицях 2.1, 2.2 наведені розрахунки величин модуля пружності E_1 та коефіцієнта Пуассона ν_{12} при різних значеннях об'ємного вмісту корда.

Таблиця 2.1 – Поздовжній модуль пружності E_1 гумовокордного матеріалу

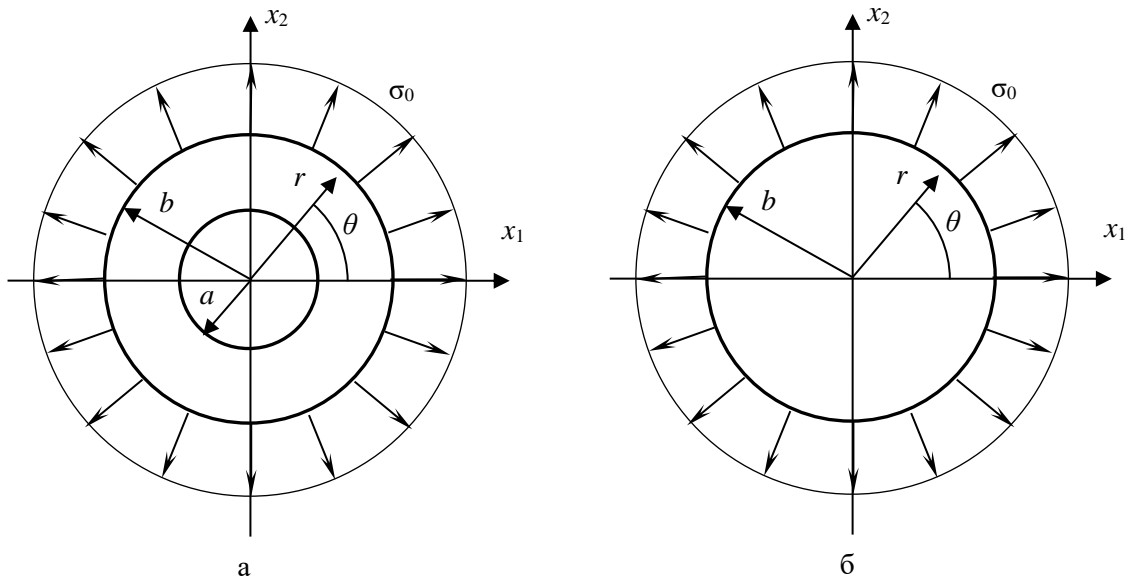
Величина	Значення				
f	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
E_1 , МПа	164,1	323,7	483,3	642,8	802,4

Таблиця 2.2 – Коефіцієнт Пуассона ν_{12} гумовокордного матеріалу

Величина	Значення				
f	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
ν_{12}	0,499965	0,4999285	0,49989	0,49986	0,49983

2.3 Визначення ефективних пружних сталих композиційного матеріалу при поперечному розтягненні

Розглянемо сумісне вісесиметричне поперечне розтягнення суцільного циліндра ($0 \leq r \leq a$), що моделює волокно, та порожнистого циліндра ($a \leq r \leq b$), що моделює матрицю (рис. 5а).



а – сумісне деформування матриці та волокна;

б – деформування композита;

Рисунок 5 – Поперечне розтягнення

Отже, стан напруження та деформації трансверсально-ізотропного волокна буде описуватися рівняннями такого ж формату, як і для поздовжнього розтягнення (2.13)-(2.15). Так само, як і для поздовжнього розтягнення, вирази для напружено-деформованого стану матриці будуть записані у вигляді (2.16)-(2.17).

Для моделювання поперечного вісесиметричного розтягнення необхідно встановити наступну крайову умову:

$$\sigma_{rr}^*(b) = \sigma_0. \quad (2.41)$$

Враховуючи данні експериментів про напружено-деформовані стани композитного матеріалу при вісесиметричному поперечному розтягненні, можемо сформулювати наступні крайові умови:

$$\sigma_{rr}^\circ(a) = \sigma_{rr}^*(a), \quad u_r^\circ(a) = u_r^*(a), \quad u_z^\circ(h) = u_z^*(h). \quad (2.42)$$

Виходячи з крайових умов (2.41), (2.42), знайдемо сталі A , B , C та залежність між σ_0 та σ_0° , σ_0^* – осьовими напруженнями, які діють на матеріал волокна й матриці, відповідно ($\sigma_0^\circ = const$, $\sigma_0^* = const$, виходячи з третьої рівності (2.42)). З другого співвідношення в умовах (2.42):

$$C = A + \frac{B}{a^2}. \quad (2.43)$$

З умови (2.41) матимемо:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_0^* + E^* (A - B)}{1,5b^2}, \quad (2.44)$$

Тоді

$$A = \frac{3b^2(\sigma_0 - \sigma_0^*) + 2B}{6E^* b^2}, \quad (2.45)$$

$$C = \frac{3a^2(\sigma_0 - \sigma_0^*) + 4E^* B(0,5f + 1,5)}{6E^* a^2}. \quad (2.46)$$

Перша умова з (2.42), маючи на увазі (2.43) та (2.44), дає

$$B = \frac{3a^2(\sigma_0(E^* (1 - \nu_{23}^\circ) - 0,5E_2^\circ) - 2\sigma_0^\circ \nu_{21}^\circ E^* + \sigma_0^* E_2^\circ)}{2E^* (d_2 - d_1)}, \quad (2.47)$$

$$A = \frac{\sigma_0 (1,5E_2^\circ + E^* (1 - \nu_{23}^\circ)) - \sigma_0^\circ E^* f \nu_{21}^\circ + \sigma_0^* (d_1 - 1,5E_2^\circ)}{2E^* (d_2 - d_1)}, \quad (2.48)$$

$$C = \frac{4\sigma_0 E^* (1 - \nu_{23}^\circ) - 2E^* \nu_{21}^\circ \sigma_0^\circ (0,5f + 1,5) + \sigma_0^* d_1}{2E^* (d_2 - d_1)}. \quad (2.49)$$

Для знаходження співвідношень між σ_0 та σ_0° , σ_0^* використаємо третю умову в (2.42):

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1 - \nu_{23}^{\circ} - 2\nu_{12}\nu_{21}^{\circ}(d_2 - d_1)}{E^{\circ}(1 - \nu_{23}^{\circ})} + \frac{2\nu_{21}^{\circ}E_1^{\circ}(\nu_{21}^{\circ}(0,5f + 1,5) - 0,5f(1 - \nu_{23}^{\circ}))}{E_1^{\circ}(1 - \nu_{23}^{\circ})} \right) \sigma_0^{\circ} \\
& + \\
& + \left(\frac{0,5(1 - \nu_{23}^{\circ})(d_1 - 1,5E_2^{\circ}) - 0,5\nu_{21}^{\circ}d_1}{0,5E^*(1 - \nu_{23}^{\circ})} \right) \sigma_0^* = \\
& = \frac{4\nu_{21}^{\circ}E^* - (1,5E_2^{\circ} + E^*(1 - \nu_{23}^{\circ}))}{E^*} \sigma_0. \tag{2.50}
\end{aligned}$$

Ввівши такі допоміжні величини

$$\begin{aligned}
d_1^{\circ} = -d^{\circ} &= \frac{(E_2^{\circ}(f(0,5 - \nu_{12}^{\circ}) + 1,5) + E^*(1 - f)(1 - \nu_{23}^{\circ} - 2\nu_{12}\nu_{21}^{\circ}))}{E_1^{\circ}}; \\
d_1^* = d^* &= \frac{(E^*(f - 1)(1 - \nu_{23}^{\circ} - \nu_{21}^{\circ}) - 1,5E_2^{\circ})}{E^*}; \\
d_0 &= \frac{(4\nu_{21}^{\circ}E^* - (1,5E_2^{\circ} + E^*(1 - \nu_{23}^{\circ})))}{E^*}, \tag{2.51}
\end{aligned}$$

матимемо

$$d^* \sigma_0^* - d^{\circ} \sigma_0^{\circ} = d_0 \sigma_0. \tag{2.52}$$

Розглянемо аналогічну задачу для однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, який використовується для моделювання поведінки композиційного матеріалу (зображено на рис. 5б). У цьому випадку поля напружень будуть визначатися такими співвідношеннями:

$$\sigma_{zz} = 0, \sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0, \tag{2.53}$$

переміщення запишуться у вигляді:

$$u_r(r) = C_1 r, u_z(z) = -\frac{2C_1 \nu_{21}}{(1 + \nu_{23})} z. \quad (2.54)$$

А вирази для напружень набудуть вигляду:

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{C_1 E_2}{1 - \nu_{23}} = \text{const}, \sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{E_2 C_1}{1 - \nu_{23}} = \text{const}. \quad (2.55)$$

Враховуючи граничну умову

$$\sigma_{rr}(b) = \sigma_0, \quad (2.56)$$

отримуємо

$$\sigma_{rr} = \sigma_0; \sigma_{\theta\theta} = \sigma_0. \quad (2.57)$$

Тоді для деформацій будемо мати:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_0(1 - \nu_{23})}{E_2}; \varepsilon_{zz} = -\frac{2\sigma_0 \nu_{12}}{E_1}. \quad (2.58)$$

Переміщення визначатимуться формулами:

$$u_r(r) = \frac{\sigma_0(1 - \nu_{23})}{E_2} r + C_1; u_z(z) = -\frac{2\sigma_0 \nu_{12}}{E_1} z + C_2. \quad (2.59)$$

З урахуванням, що $u_r(0) = 0$ та $u_z(0) = 0$, матимемо

$$u_r(r) = \frac{\sigma_0(1 - \nu_{23})}{E_2} r; u_z(z) = -\frac{2\sigma_0 \nu_{12}}{E_1} z. \quad (2.60)$$

Еквівалентність обох задач забезпечується рівністю:

$$\pi a^2 \sigma_0^\circ + \pi(b^2 - a^2) \sigma_0^* = 0, \text{ або } \sigma_0^\circ f + \sigma_0^*(1 - f) = 0. \quad (2.61)$$

Враховуючи (2.52) матимемо:

$$\sigma_0^* = \sigma_0 \frac{d_0 f}{d^* f + d^\circ(1 - f)}, \sigma_0^\circ = \sigma_0 \frac{d_0(f - 1)}{d^* f + d^\circ(1 - f)}. \quad (2.62)$$

При розгляді цієї задачі про поперечне розтягнення однорідного трансверсально-ізотропного композита, вважатимемо, що умови узгодження включатимуть в себе рівність осьових переміщень для будь-якої осьової координати і рівність радіальних переміщень на зовнішній поверхні циліндр

$$u_r(b) = u_r^*(b); u_z(h) = u_z^\circ(h) = u_z^*(h). \quad (2.63)$$

Перша рівність в (2.63) дає таку пружну константу:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \nu_{23}}{E_2} &= \frac{4E^* (1 - \nu_{23}^\circ)(1,5f + 0,5) + 3E_2^\circ(1 - f)}{4E^* (d_2 - d_1)} + \\ &+ \frac{d_0 f(f - 1) (0,75E_2^\circ + E^* (0,5(1 - \nu_{23}^\circ) - 2\nu_{21}^\circ))}{E^* (d_2 - d_1)(d^* f + d^\circ(1 - f))}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Друга умова в (2.63) дає співвідношення:

$$\begin{aligned} -\frac{\nu_{12}}{E_1} &= \frac{d_0 f(d_2 - d_1 + E^* \nu_{21}^\circ(f - 1) - 0,5fE_2^\circ)}{2E^* (d_2 - d_1)(d^* f + d^\circ(1 - f))} - \\ &- \frac{(1,5E_2^\circ + E^* (1 - \nu_{23}^\circ))}{2E^* (d_2 - d_1)}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

3 ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ МЕХАНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ ПРИ ЗСУВНИХ ДЕФОРМАЦІЯХ

3.1 Визначення ефективних пружних сталих композиційного матеріалу при поперечному зсуві

Розглянемо задачу про сумісний поперечний зсув суцільного циліндра (волокно) та порожнистого циліндра (матриця). Чистий поперечний зсув надає матеріалу стан, близькому до плоскої деформації ($\varepsilon_{zz} = 0$).

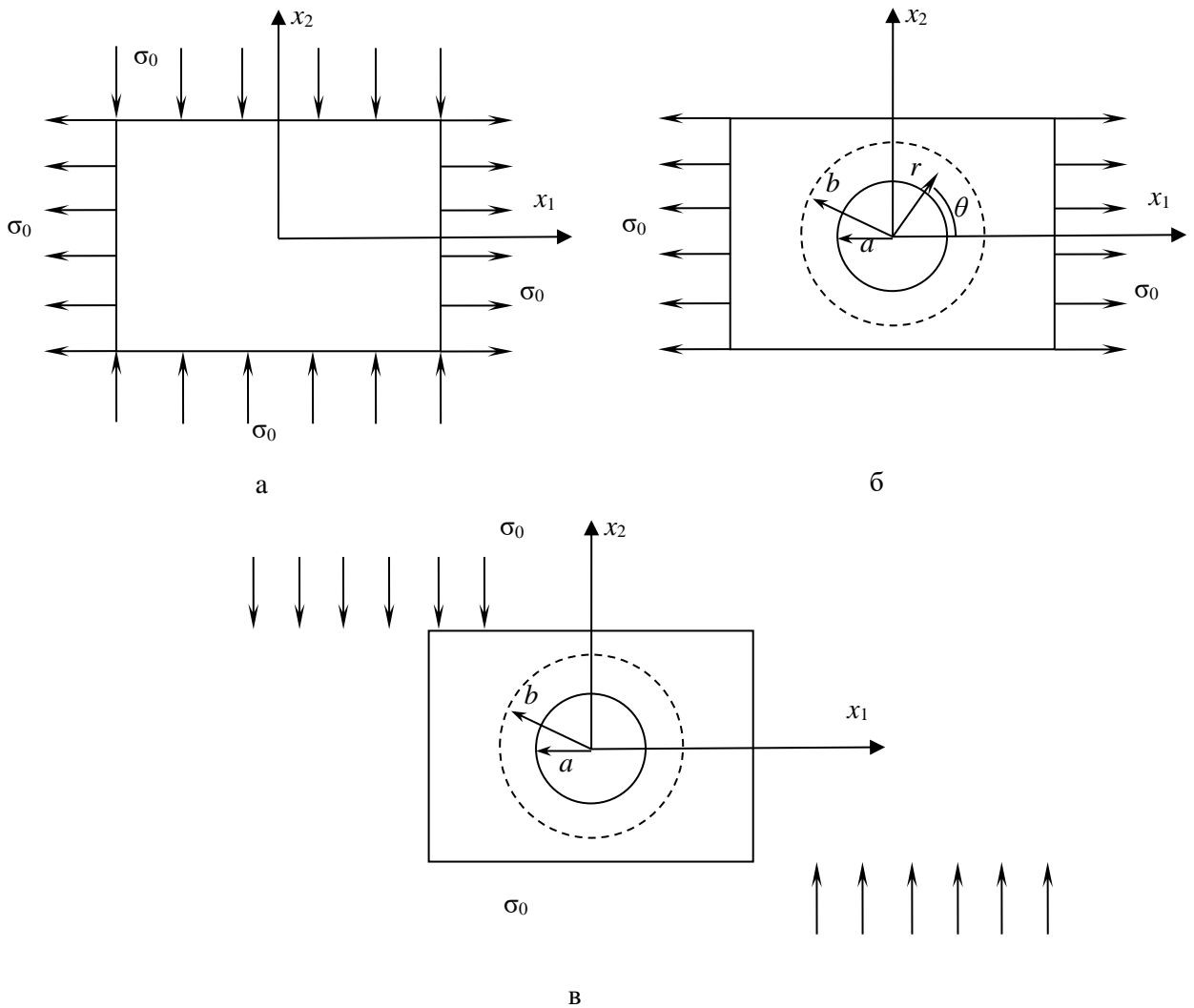
З теорії пружності відомо, що при розтягненні прямокутної пластини виникає чистий зсув через дію напружень σ_0 в одному напрямку та дії стискаючих напружень σ_0 в іншому (рис. 6а).

Для отримання поперечного зсуву для циліндричних областей, що представляють собою порожнистий циліндр і суцільний циліндр розглядаємо розв'язання задачі Кірша. В цій задачі розглядається нескінченна пластинка з круглим отвором малого радіуса a , яка розтягується під впливом напруження σ . Шляхом виділення кільця радіусом b і враховуючи умови простого розтягнення на межі цього кільця, ми можемо отримати наступне [5]:

$$\sigma_{rr}(b, \theta) = \frac{1}{2}\sigma_0 + \frac{1}{2}\sigma_0 \cos 2\theta, \sigma_{r\theta}(b, \theta) = -\frac{1}{2}\sigma_0 \sin 2\theta. \quad (3.1)$$

Для отримання чистого зсуву, прикладемо для такої ж пластинки стискаюче навантаження в перпендикулярному напрямі (рис. 6в). І для межі кільця радіусом b ($b \gg a$) матимемо:

$$\sigma_{rr}(b, \theta) = -\frac{1}{2}\sigma_0 + \frac{1}{2}\sigma_0 \cos 2\theta, \sigma_{r\theta}(b, \theta) = -\frac{1}{2}\sigma_0 \sin 2\theta. \quad (3.2)$$



а – пластина під дією розтягуючих та стискаючих напружень;

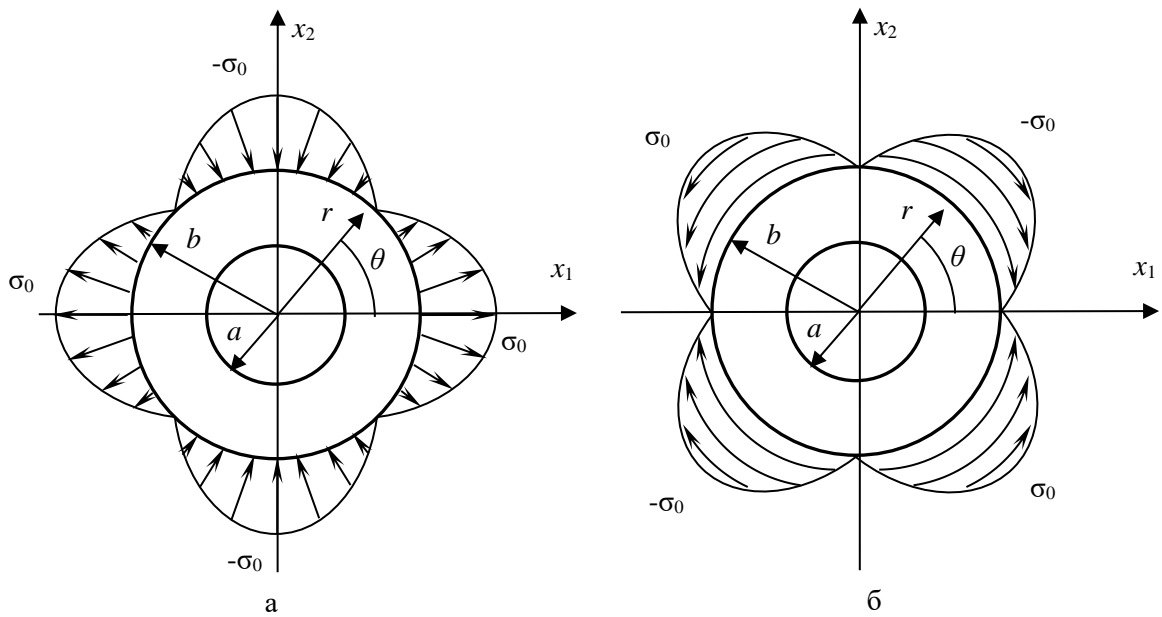
б – пластина з отвором під дією розтягуючих напружень;

в – пластина з отвором під дією стискаючих напружень

Рисунок 6 – Моделювання поперечного зсуву

Отже, для досягнення чистого зсуву в кільці радіусом b , згідно з методом суперпозиції, необхідно застосувати таке навантаження до зовнішньої межі кільця (рис. 7):

$$\sigma_{rr}(b, \theta) = \sigma_0 \cos 2\theta, \sigma_{r\theta}(b, \theta) = -\sigma_0 \sin 2\theta. \quad (3.3)$$



а – для напружень $\sigma_{rr}(b, \theta)$;

б – для напружень $\sigma_{r\theta}(b, \theta)$

Рисунок 7 – Крайові умови при поперечному зсуві в кільці

Для зручності знаходження розв'язку цієї крайової задачі можна скористатися функцією Ері такого вигляду $\phi(r, \theta) = f(r) \cos 2\theta$, таким чином, бігармонічне рівняння сумісності деформацій у полярній системі координат набуде вигляду [5]:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2} \right) = 0. \quad (3.4)$$

Розв'язком цього рівняння є функція вигляду:

$$f(r) = C_1 r^2 + C_2 r^4 + \frac{C_3}{r^2} + C_4. \quad (3.5)$$

Тоді функція Ері для цієї крайової задачі запишеться у вигляді:

$$\phi(r, \theta) = \left(C_1 r^2 + C_2 r^4 + \frac{C_3}{r^2} + C_4 \right) \cos 2\theta. \quad (3.6)$$

Запишемо співвідношення для напружень через функцію Ері:

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}; \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta) = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right), \quad (3.7)$$

матимемо

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta) &= -\left(2C_1 + \frac{6C_3}{r^4} + \frac{4C_4}{r^2} \right) \cos 2\theta; \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \left(2C_1 + 12C_2 r^2 + \frac{6C_3}{r^4} \right) \cos 2\theta; \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= \left(2C_1 + 6C_2 r^2 - \frac{6C_3}{r^4} - \frac{2C_4}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для матриці напружений стан буде представлено у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^*(r, \theta) &= -\left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\theta; \\ \sigma_{\theta\theta}^*(r, \theta) &= \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4} \right) \cos 2\theta; \\ \sigma_{r\theta}^*(r, \theta) &= \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin 2\theta; \\ \sigma_{zr}^* &= 0; \quad \sigma_{\theta z}^* = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Компоненту σ_{zz}^* знайдемо з умови:

$$\varepsilon_{zz}^* = 0, \quad (3.10)$$

або

$$\varepsilon_{zz}^* = \frac{1}{E^*} (\sigma_{zz}^* - 0,5(\sigma_{rr}^* + \sigma_{\theta\theta}^*)) = 0, \quad (3.11)$$

тоді отримуємо:

$$\sigma_{zz}^*(r, \theta) = 0,5 \left(12Br^2 - \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\theta. \quad (3.12)$$

Напружений стан матеріалу волокна, яке представляє собою суцільний циліндр, також в загальному випадку описується співвідношеннями (3.8). А враховуючи, що напруження при $r = 0$ мають кінцеві значення, необхідно, щоб у цих співвідношеннях $C_3 = 0$ та $C_4 = 0$. Для волокна можемо записати:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{\circ}(r, \theta) &= -2F \cos 2\theta; \\ \sigma_{\theta\theta}^{\circ}(r, \theta) &= (2F + 12Hr^2) \cos 2\theta; \\ \sigma_{r\theta}^{\circ}(r, \theta) &= (2F + 6Hr^2) \sin 2\theta; \\ \sigma_{zr}^{\circ} &= 0; \sigma_{\theta z}^{\circ} = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Компоненту σ_{zz}° знайдемо з умови:

$$\varepsilon_{zz}^{\circ} = 0, \quad (3.14)$$

Тоді отримаємо:

$$\sigma_{zz}^{\circ} = \nu_{12}^{\circ} (\sigma_{rr}^{\circ} + \sigma_{\theta\theta}^{\circ}), \quad (3.15)$$

З урахуванням (3.13) матимемо

$$\sigma_{zz}^{\circ}(r, \theta) = 12Hr^2 \nu_{12}^{\circ} \cos 2\theta. \quad (3.16)$$

Отже, використавши закон Гука, визначимо деформований стан матриці

та волокна. Для матриці маємо:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^*(r, \theta) &= -\frac{1}{E^*} \left(3A + 9Br^2 + \frac{9C}{r^4} + \frac{3D}{r^2} \right) \cos 2\theta; \\ \varepsilon_{\theta\theta}^*(r, \theta) &= \frac{1}{E^*} \left(3A + 9Br^2 + \frac{9C}{r^4} + \frac{3D}{r^2} \right) \cos 2\theta; \\ \gamma_{r\theta}^*(r, \theta) &= \frac{3}{E^*} \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin 2\theta; \\ \gamma_{zr}^* &= 0; \gamma_{z\theta}^* = 0.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Аналогічним чином отримаємо деформований стан волокна:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^\circ(r, \theta) &= -\frac{1}{E_2^\circ} \left(2F(1 + \nu_{23}^\circ) + 12Hr^2(\nu_{23}^\circ + \nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) \right) \cos 2\theta; \\ \varepsilon_{\theta\theta}^\circ(r, \theta) &= \frac{1}{E_2^\circ} \left(2F(1 + \nu_{23}^\circ) + 12Hr^2(1 - \nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) \right) \cos 2\theta; \\ \gamma_{r\theta}^\circ(r, \theta) &= \frac{2(1 + \nu_{23}^\circ)}{E_2^\circ} (2F + 6Hr^2) \sin 2\theta; \\ \gamma_{zr}^\circ &= 0; \gamma_{z\theta}^\circ = 0.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Отже, використавши співвідношення Коші, отримаємо компоненти вектору переміщень для матриці та волокна. Матимемо:

$$u_r^*(r, \theta) = \int \varepsilon_{rr}^* dr = -\frac{1}{E^*} \left(3Ar + 3Br^3 - \frac{3C}{r^3} - \frac{3D}{r} \right) \cos 2\theta + C_1(\theta). \quad (3.19)$$

Знайдемо переміщення $u_\theta^*(r, \theta)$

$$\begin{aligned}u_\theta^*(r, \theta) &= \int (r\varepsilon_{\theta\theta}^* - u_r^*) d\theta = \frac{2}{E^*} \left(1,5Ar + 3Br^3 + \frac{1,5C}{r^3} \right) \times \\ &\times \sin 2\theta - \int C_1(\theta) d\theta + C_2(r).\end{aligned}\quad (3.20)$$

Підставимо отримані залежності для $u_r^*(r, \theta)$ та $u_\theta^*(r, \theta)$ в співвідношення Коші для $\gamma_{r\theta}^*(r, \theta)$ й прирівняємо до (3.17):

$$\begin{aligned} \frac{3}{E^*} \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin 2\theta = \frac{3}{E^*} \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin 2\theta + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial C_1(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial C_2(r)}{\partial r} + \frac{\int C_1(\theta) d\theta}{r} - \frac{C_2(r)}{r}, \end{aligned}$$

звідки

$$\frac{\partial C_1(\theta)}{\partial \theta} + r \frac{\partial C_2(r)}{\partial r} + \int C_1(\theta) d\theta - C_2(r) = 0. \quad (3.21)$$

Диференціюючи (3.21) по θ матимемо

$$\frac{\partial^2 C_1(\theta)}{\partial \theta^2} + C_1(\theta) = 0, \quad (3.22)$$

з розв'язком

$$C_1(\theta) = H_1 \cos \theta + H_2 \sin \theta. \quad (3.23)$$

Тоді радіальні переміщення описуватимуться так:

$$u_r^*(r, \theta) = -\frac{1}{E^*} \left(3Ar + 3Br^3 - \frac{3C}{r^3} - \frac{3D}{r} \right) \cos 2\theta + H_1 \cos \theta + H_2 \sin \theta. \quad (3.24)$$

Для визначення сталої $C_2(r)$, підставляємо (3.23) в (3.21), в результаті маємо рівняння:

$$\frac{\partial(H_1 \cos \theta + H_2 \sin \theta)}{\partial \theta} + r \frac{\partial C_2(r)}{\partial r} + \int (H_1 \cos \theta + H_2 \sin \theta) d\theta - C_2(r) = 0,$$

$$r \frac{\partial C_2(r)}{\partial r} - C_2(r) = 0, \quad (3.25)$$

яке має розв'язок

$$C_2(r) = H_3 r. \quad (3.26)$$

Тоді вираз для окружних переміщень набуде вигляду:

$$u_{\theta}^*(r, \theta) = \frac{2}{E^*} \left(1,5Ar + 3Br^3 + \frac{1,5C}{r^3} \right) \sin 2\theta - H_1 \sin \theta + H_2 \cos \theta + H_3 r \quad (3.27)$$

Для визначення констант H_1 , H_2 , використовуючи вказані міркування та враховуючи симетричність крайової задачі, можемо записати наступну рівність:

$$u_r^* \left(r, \frac{\pi}{4} \right) = u_r^* \left(r, \frac{3\pi}{4} \right) = u_r^* \left(r, -\frac{\pi}{4} \right). \quad (3.28)$$

Тоді, використавши ці умови у (3.24), отримуємо рівності:

$$H_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + H_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -H_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + H_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = H_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - H_2 \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (3.29)$$

Остання рівність виконується при таких умовах:

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0. \quad (3.30)$$

Для знаходження константи H_3 в (3.27) використаємо симетричність

крайової задачі, отримуємо таку рівність:

$$u_{\theta}^*(r, 0) = 0. \quad (3.31)$$

Підставляючи наведену умову в (3.27) та сталі H_1, H_2 , матимемо таку рівність:

$$H_3 r = 0, \text{ або } H_3 = 0. \quad (3.32)$$

Тоді отримаємо вирази для компонентів переміщень:

$$\begin{aligned} u_r^*(r, \theta) &= -\frac{1}{E^*} \left(3Ar + 3Br^3 - \frac{3C}{r^3} - \frac{3D}{r} \right) \cos 2\theta; \\ u_{\theta}^*(r, \theta) &= -\frac{2}{E^*} \left(1,5Ar + 3Br^3 + \frac{1,5C}{r^3} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Використавши співвідношення Коші, можемо знайти компоненти вектору переміщень для волокна:

$$\begin{aligned} u_r^{\circ}(r, \theta) &= \int \varepsilon_{rr}^{\circ} dr = \\ &= -\frac{1}{E_2^{\circ}} \left(2F(1 + \nu_{23}^{\circ})r + 4Hr^3(\nu_{23}^{\circ} + \nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ}) \right) \cos 2\theta + T_1(\theta). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Для переміщення $u_{\theta}^{\circ}(r, \theta)$:

$$\begin{aligned} u_{\theta}^{\circ}(r, \theta) &= \int (r\varepsilon_{\theta\theta}^{\circ} - u_r^{\circ}) d\theta = \frac{2}{E_2^{\circ}} \times \\ &\times \left(F(1 + \nu_{23}^{\circ})r + Hr^3(3 + \nu_{23}^{\circ} - 2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ}) \right) \sin 2\theta - \int T_1(\theta) d\theta + T_2(r). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Підставимо співвідношення для $u_r^{\circ}(r, \theta)$ та $u_{\theta}^{\circ}(r, \theta)$ у формули Коші і

прирівняємо до виразу (3.18):

$$\begin{aligned} \frac{2(1 + \nu_{23}^{\circ})}{E_2^{\circ}} (2F + 6Hr^2) \sin 2\theta = \frac{2(1 + \nu_{23}^{\circ})}{E_2^{\circ}} (2F + 6Hr^2) \sin 2\theta + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial T_2(r)}{\partial r} + \frac{\int T_1(\theta) d\theta}{r} - \frac{T_2(r)}{r}, \end{aligned}$$

тоді

$$\frac{\partial T_1(\theta)}{\partial \theta} + r \frac{\partial T_2(r)}{\partial r} + \int T_1(\theta) d\theta - T_2(r) = 0. \quad (3.36)$$

З цього рівняння маємо:

$$T_1(\theta) = R_1 \cos \theta + R_2 \sin \theta. \quad (3.37)$$

Для радіальних переміщень отримаємо:

$$\begin{aligned} u_r^{\circ}(r, \theta) = -\frac{1}{E_2^{\circ}} (2F(1 + \nu_{23}^{\circ})r + 4Hr^3(\nu_{23}^{\circ} + \nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ})) \cos 2\theta + \\ + R_1 \cos \theta + R_2 \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.38)$$

З наступної умови знайдемо константи R_1 та R_2 :

$$u_r^{\circ}(0, \theta) = 0. \quad (3.39)$$

При $r = 0$, маємо таку рівність:

$$R_1 \cos \theta + R_2 \sin \theta = 0. \quad (3.40)$$

З якої зрозуміло, що

$$R_1 = 0, R_2 = 0. \quad (3.41)$$

Для визначення сталої $T_2(r)$, підставимо (3.41) в (3.36), отримуємо рівняння:

$$r \frac{\partial T_2(r)}{\partial r} - T_2(r) = 0, \quad (3.42)$$

його розв'язком є

$$T_2(r) = R_3 r. \quad (3.43)$$

Тоді співвідношення для окружних переміщень прийме вид:

$$u_{\theta}^{\circ}(r, \theta) = \frac{2}{E_2^{\circ}} (F(1 + \nu_{23}^{\circ})r + Hr^3(3 + \nu_{23}^{\circ} - 2\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ})) \sin 2\theta + R_3 r. \quad (3.44)$$

Для визначення сталої R_3 скористаємося симетрією у задачі:

$$u_{\theta}^{\circ}(r, 0) = 0. \quad (3.45)$$

Звідки

$$R_3 r = 0, \quad \text{або } R_3 = 0. \quad (3.46)$$

Отже можемо записати вирази для компонент переміщень:

$$\begin{aligned} u_r^{\circ}(r, \theta) &= -\frac{1}{E_2^{\circ}} (2F(1 + \nu_{23}^{\circ})r + 4Hr^3(\nu_{23}^{\circ} + \nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ})) \cos 2\theta; \\ u_{\theta}^{\circ}(r, \theta) &= \frac{2}{E_2^{\circ}} (F(1 + \nu_{23}^{\circ})r + Hr^3(3 + \nu_{23}^{\circ} - 2\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ})) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Розв'яжемо задачі про суцільний поперечний зсув суцільного циліндра та порожнистого циліндра. Спочатку необхідно знайти всі невідомі сталі A, B, C, D, F, H . Щоб їх знайти використовуємо крайові умови (3.3), отже отримуємо:

$$\sigma_0 = -2A - \frac{6C}{b^4} - \frac{4D}{b^2}; -\sigma_0 = 2A + 6Bb^2 - \frac{6C}{b^4} - \frac{2D}{b^2},$$

або

$$C = \frac{Bb^6}{2} - \frac{Db^2}{2}; A = -\frac{\sigma_0}{2} - \frac{3Bb^2}{2} - \frac{D}{2b^2}. \quad (3.48)$$

З умов неперервності на стику суцільного та порожнистого циліндру знайдемо решту сталих:

$$u_r^*(a, \theta) = u_r^\circ(a, \theta), \quad (3.49)$$

$$\sigma_{rr}^*(a, \theta) = \sigma_{rr}^\circ(a, \theta), \quad (3.50)$$

$$u_\theta^*(a, \theta) = u_\theta^\circ(a, \theta), \quad (3.51)$$

$$\sigma_{r\theta}^*(a, \theta) = \sigma_{r\theta}^\circ(a, \theta). \quad (3.52)$$

Використовуючи (3.49), (3.51), матимемо:

$$F = -\frac{\sigma_0}{2} + \frac{3Bb^2(b^4 - a^4)}{2a^4} + \frac{D(4a^2b^2 - a^4 - 3b^4)}{2a^4b^2}, \quad (3.53)$$

$$H = B \frac{a^6 - b^6}{a^6} + D \frac{b^2 - a^2}{a^6}. \quad (3.54)$$

Використовуючи (3.50), (3.52), матимемо::

$$\begin{aligned} \frac{1}{E^*} \left(3Aa + 3Ba^3 - \frac{3C}{a^3} - \frac{3D}{a} \right) &= \frac{1}{E_2^\circ} \left(2F(1 + \nu_{23}^\circ)a + 4Ha^3(\nu_{23}^\circ + \nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ) \right), \\ \frac{1}{E^*} \left(1,5Aa + 3Ba^3 + \frac{1,5C}{a^3} \right) &= \frac{1}{E_2^\circ} \left(F(1 + \nu_{23}^\circ)a + Ha^3(3 + \nu_{23}^\circ - 2\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ) \right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

враховуючи (3.48), (3.53), (3.54) маємо:

$$\begin{aligned} &B \left(\frac{E_2^\circ(3a^6 - 1,5b^2(3a^4 + b^4))}{a^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{E^*(3b^2(b^4 - a^4)(1 + \nu_{23}^\circ) + 4(a^6 - b^6)(\nu_{23}^\circ + \nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ))}{a^3} \right) + \\ &+ D \left(\frac{1,5E_2^\circ((b^4 - a^4) - 3a^2b^2)}{a^3b^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{E^*((4a^2b^2 - a^4 - 3b^4)(1 + \nu_{23}^\circ) + 4(b^2 - a^2)b^2(\nu_{23}^\circ + \nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ))}{a^3b^2} \right) = \\ &= \sigma_0 a \left(1,5E_2^\circ - E^*(1 + \nu_{23}^\circ) \right), \\ &B \left(\frac{E_2^\circ(6a^6 + 1,5b^2(b^4 - 3a^4))}{a^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{E^*(3b^2(b^4 - a^4)(1 + \nu_{23}^\circ) + 2(a^6 - b^6)(3 + \nu_{23}^\circ - 2\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ))}{a^3} \right) + \\ &\quad + D \left(\frac{E_2^\circ(-1,5(a^4 + b^4))}{a^3b^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{E^*((4a^2b^2 - a^4 - 3b^4)(1 + \nu_{23}^\circ) + 2b^2(b^2 - a^2)(3 + \nu_{23}^\circ - 2\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ))}{a^3b^2} \right) = \\ &= \sigma_0 a \left(1,5E_2^\circ - E^*(1 + \nu_{23}^\circ) \right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Після перетворень, маємо

$$\begin{aligned}
& b^2 B \left(E_2^\circ \left(3f - 1,5 \left(3 + \frac{1}{f^2} \right) \right) - \right. \\
& E^* \left(3 \left(\frac{1}{f^2} - 1 \right) (1 + \nu_{23}^\circ) + 4 \left(f - \frac{1}{f^2} \right) (\nu_{23}^\circ + \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right) \Bigg) + \\
& \quad + \frac{D}{a^2} \left(E_2^\circ \left(1,5 \left(\frac{1}{f} - f \right) - 3 \right) - \right. \\
& - E^* \left(\left(4 - f - \frac{3}{f} \right) (1 + \nu_{23}^\circ) + 4 \left(\frac{1}{f} - 1 \right) (\nu_{23}^\circ + \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right) \Bigg) = \\
& \quad = \sigma_0 \left(1,5 E_2^\circ - E^* (1 + \nu_{23}^\circ) \right), \\
& b^2 B \left(E_2^\circ \left(6f + 1,5 \left(\frac{1}{f^2} - 3 \right) \right) - \right. \\
& - E^* \left(3 \left(\frac{1}{f^2} - 1 \right) (1 + \nu_{23}^\circ) + 2 \left(f - \frac{1}{f^2} \right) (3 + \nu_{23}^\circ - 2\nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right) \Bigg) + \\
& \quad + \frac{D}{a^2} \left(E_2^\circ \left(-1,5 \left(f + \frac{1}{f} \right) \right) - \right. \\
& - E^* \left(\left(4 - f - \frac{3}{f} \right) (1 + \nu_{23}^\circ) + 2 \left(\frac{1}{f} - 1 \right) (3 + \nu_{23}^\circ - 2\nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right) \Bigg) = \\
& \quad = \sigma_0 \left(1,5 E_2^\circ - E^* (1 + \nu_{23}^\circ) \right). \tag{3.57}
\end{aligned}$$

Введемо допоміжні величини:

$$\begin{aligned}
d_{11} &= E_2^\circ \left(1,5 \left(4f - 3 - \frac{1}{f^2} \right) - 3f \right) - \\
& - E^* \left(\left(4f - \frac{1}{f^2} - 3 \right) (1 + \nu_{23}^\circ) + 4 \left(\frac{1}{f^2} - f \right) (1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right); \\
d_{12} &= E_2^\circ \left(1,5 \left(\frac{1}{f} - f \right) - 3 \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -E^* \left(\left(\frac{1}{f} - f \right) (1 + \nu_{23}^\circ) + 4 \left(1 - \frac{1}{f} \right) (1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right) \\
& d_{21} = E_2^\circ \left(3f + 1,5 \left(2f + \frac{1}{f^2} - 3 \right) \right) - \\
& -E^* \left(\left(2f + \frac{1}{f^2} - 3 \right) (1 + \nu_{23}^\circ) + 4 \left(f - \frac{1}{f^2} \right) (1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right); \\
& d_{22} = E_2^\circ \left(1,5 \left(2 - f - \frac{1}{f} \right) - 3 \right) - \\
& -E^* \left(\left(2 - f - \frac{1}{f} \right) (1 + \nu_{23}^\circ) + 4 \left(\frac{1}{f} - 1 \right) (1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right); \\
& b_1 = 1,5E_2^\circ - E^* (1 + \nu_{23}^\circ). \tag{3.58}
\end{aligned}$$

З системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} d_{11}b^2B + \frac{d_{12}}{a^2}D = \sigma_0b_1, \\ d_{21}b^2B + \frac{d_{22}}{a^2}D = \sigma_0b_1. \end{cases} \tag{3.59}$$

знаходимо вирази для B, D :

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\sigma_0b_1}{b^2} \frac{d_{22} - d_{12}}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}, \\
D &= \sigma_0a^2b_1 \frac{d_{11} - d_{21}}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}. \tag{3.60}
\end{aligned}$$

Враховуючи (3.60) знайдемо співвідношення для всіх інших сталей:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\sigma_0}{2} \left(\frac{b_1}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}} \left(3 \left(\frac{1}{f^2} - 1 \right) (d_{22} - d_{12}) + \left(4 - f - \frac{3}{f} \right) (d_{11} - d_{21}) \right) \right. \\
&\quad \left. - 1 \right); \\
H &= \frac{\sigma_0 b_1}{a^2 (d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12})} \left(\left(f - \frac{1}{f^2} \right) (d_{22} - d_{12}) + \left(\frac{1}{f} - 1 \right) (d_{11} - d_{21}) \right); \\
C &= \frac{\sigma_0 b_1 b^4}{2 (d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12})} \left((d_{22} - d_{12}) - f (d_{11} - d_{21}) \right); \\
A &= -\frac{\sigma_0}{2} \left(1 + \frac{b_1}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}} \left(3 (d_{22} - d_{12}) + f (d_{11} - d_{21}) \right) \right). \quad (3.61)
\end{aligned}$$

Отже напружений стан для матеріалу матриці буде подано в даному вигляді:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^*(r, \theta) &= \sigma_0 \left(1 + \frac{b_1}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}} \left(3 \left(1 - \frac{b^4}{r^4} \right) (d_{22} - d_{12}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + f \left(1 + \frac{3b^4}{r^4} - \frac{4b^2}{r^2} \right) (d_{11} - d_{21}) \right) \right) \cos 2\theta; \\
\sigma_{\theta\theta}^*(r, \theta) &= -\sigma_0 \left(1 + \frac{b_1}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left(3 \left(1 - 4 \frac{r^2}{b^2} - \frac{b^4}{r^4} \right) (d_{22} - d_{12}) + f \left(1 + \frac{3b^4}{r^4} \right) (d_{11} - d_{21}) \right) \right) \cos 2\theta; \\
\sigma_{r\theta}^*(r, \theta) &= -\sigma_0 \left(1 + \frac{b_1}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}} \left(3 \left(1 - \frac{2r^2}{b^2} + \frac{b^4}{r^4} \right) (d_{22} - d_{12}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + f (d_{11} - d_{21}) \left(1 - \frac{3b^4}{r^4} + \frac{2b^2}{r^2} \right) \right) \right) \sin 2\theta; \\
\sigma_{zz}^*(r, \theta) &= \frac{2\sigma_0 b_1}{r^2 b^2 (d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12})} \left(3r^4 (d_{22} - d_{12}) - a^2 b^2 (d_{11} - d_{21}) \right) \cos 2\theta.
\end{aligned} \quad (3.62)$$

Для компонент переміщень матриці маємо:

$$\begin{aligned}
 u_r^*(r, \theta) &= \frac{\sigma_0 r}{E^*} \left(1,5 + \frac{b_1}{(d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12})} \times \right. \\
 &\quad \times \left(\left(1,5 \left(3 + \frac{b^4}{r^4} \right) - \frac{3r^2}{b^2} \right) (d_{22} - d_{12}) + \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\frac{3a^2}{r^2} + 1,5f \left(1 - \frac{b^4}{r^4} \right) \right) (d_{11} - d_{21}) \right) \right) \cos 2\theta; \\
 u_\theta^*(r, \theta) &= \frac{\sigma_0 r}{E^*} \left(-1,5 + \frac{b_1}{(d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12})} \times \right. \\
 &\quad \times \left(\left(\frac{6r^2}{b^2} + 1,5 \left(\frac{b^4}{r^4} - 3 \right) \right) (d_{22} - d_{12}) + \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(-1,5f \left(1 + \frac{b^4}{r^4} \right) \right) (d_{11} - d_{21}) \right) \right) \sin 2\theta. \quad (3.63)
 \end{aligned}$$

Для напруженого стану матеріалу волокна запишемо таке ж співвідношення:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^\circ(r, \theta) &= \sigma_0 \left(1 - \frac{b_1}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}} \left(3 \left(\frac{1}{f^2} - 1 \right) (d_{22} - d_{12}) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(4 - f - \frac{3}{f} \right) (d_{11} - d_{21}) \right) \right) \cos 2\theta; \\
 \sigma_{\theta\theta}^\circ(r, \theta) &= \sigma_0 \left(\frac{b_1}{(d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12})} \left(3 \left(\left(1 - \frac{4r^2}{a^2} \right) \frac{1}{f^2} - 1 + \frac{4r^2}{a^2} f \right) (d_{22} - d_{12}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \right. \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(4 \left(1 - \frac{3r^2}{a^2} \right) - f + \frac{3}{f} \left(\frac{4r^2}{a^2} - 1 \right) \right) (d_{11} - d_{21}) - 1 \Big) \cos 2\theta; \\
\sigma_{r\theta}^{\circ}(r, \theta) = & \sigma_0 \left(\frac{b_1}{(d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12})} \left(3 \left(\frac{1}{f^2} \left(1 - \frac{2r^2}{a^2} \right) - 1 + \frac{2r^2}{a^2} f \right) (d_{22} - d_{12}) \right. \right. \\
& + \\
& \left. \left. + \left(2 \left(2 - \frac{3r^2}{a^2} \right) - f + \frac{3}{f} \left(\frac{2r^2}{a^2} - 1 \right) \right) (d_{11} - d_{21}) - 1 \right) \sin 2\theta; \\
\sigma_{zz}^{\circ}(r, \theta) = & \frac{12\sigma_0 b_1}{(d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12})} \frac{r^2}{a^2} \times \\
& \times \left(\left(f - \frac{1}{f^2} \right) (d_{22} - d_{12}) + \left(\frac{1}{f} - 1 \right) (d_{11} - d_{21}) \right) \nu_{12}^{\circ} \cos 2\theta. \quad (3.64)
\end{aligned}$$

Отримаємо компонент переміщень для матеріалу волокна:

$$\begin{aligned}
u_r^{\circ}(r, \theta) = & \frac{\sigma_0 r}{E_2^{\circ}} \left((1 + \nu_{23}^{\circ}) - \frac{b_1}{(d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12})} \times \right. \\
& \times \left(\left(\left(\frac{3}{f^2} - 3 \right) (1 + \nu_{23}^{\circ}) + \frac{4r^2}{a^2} \left(f - \frac{1}{f^2} \right) (\nu_{23}^{\circ} + \nu_{21}^{\circ} \nu_{12}^{\circ}) \right) (d_{22} - d_{12}) + \right. \\
& + \left(\left(4 - f - \frac{3}{f} \right) (1 + \nu_{23}^{\circ}) + \frac{4r^2}{a^2} \left(\frac{1}{f} - 1 \right) (\nu_{23}^{\circ} + \nu_{21}^{\circ} \nu_{12}^{\circ}) \right) (d_{11} \\
& \left. \left. - d_{21}) \right) \right) \cos 2\theta; \\
u_{\theta}^{\circ}(r, \theta) = & \frac{\sigma_0 r}{E_2^{\circ}} \left(-(1 + \nu_{23}^{\circ}) + \frac{b_1}{(d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12})} \times \right. \\
& \left(\left(\left(\frac{3}{f^2} - 3 \right) (1 + \nu_{23}^{\circ}) + \frac{2r^2}{a^2} \left(f - \frac{1}{f^2} \right) (3 + \nu_{23}^{\circ} - 2\nu_{21}^{\circ} \nu_{12}^{\circ}) \right) (d_{22} - d_{12}) + \right. \\
& \left. \left. + \left(\left(4 - f - \frac{3}{f} \right) (1 + \nu_{23}^{\circ}) + \frac{2r^2}{a^2} \left(\frac{1}{f} - 1 \right) (3 + \nu_{23}^{\circ} - 2\nu_{21}^{\circ} \nu_{12}^{\circ}) \right) \right) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\times (d_{11} - d_{21})) \sin 2\theta. \quad (3.65)$$

Розглянемо аналогічну задачу з чистим поперечним зсувом для трансропного однорідного композитного матеріалу. У цій задачі композитний матеріал буде представлений у формі суцільного круга з радіусом b . Крайові умови виглядають як (3.3). Напружено-деформований стан описується співвідношеннями, аналогічними тим, що використовуються для волокна. Таким чином, для компонент напружень маємо:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta) &= -2\tilde{A} \cos 2\theta, \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= (2\tilde{A} + 6\tilde{B}r^2) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Скориставшись першою рівністю з умови (3.3), знаходимо константу:

$$\tilde{A} = -\frac{\sigma_0}{2}. \quad (3.67)$$

З другої рівності можемо отримати:

$$\tilde{B} = 0. \quad (3.68)$$

Використавши співвідношення, отримані для волокна, а також враховуючи значення сталих (3.67), (3.68) для однорідного трансропного матеріалу компоненти напружень, деформацій та переміщень:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta) &= \sigma_0 \cos 2\theta; \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = -\sigma_0 \cos 2\theta; \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= -\sigma_0 \sin 2\theta, \\ \varepsilon_{rr}(r, \theta) &= \frac{\sigma_0(1 + \nu_{23})}{E_2} \cos 2\theta; \quad \varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta) = -\frac{\sigma_0(1 + \nu_{23})}{E_2} \cos 2\theta; \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\gamma_{r\theta}(r, \theta) = -\frac{2\sigma_0(1 + \nu_{23})}{E_2} \sin 2\theta, \quad (3.70)$$

$$u_r(r, \theta) = \frac{\sigma_0(1 + \nu_{23})r}{E_2} \cos 2\theta; u_\theta(r, \theta) = -\frac{\sigma_0(1 + \nu_{23})r}{E_2} \sin 2\theta. \quad (3.71)$$

Отже, маємо розв'язок задачі щодо чистого поперечного зсуву при спільному деформуванні кільця та круга, які відповідають матриці та волокну, а також для круга, який моделює композитний матеріал. Можемо встановити як умови узгодження – рівність радіальних переміщень на зовнішній поверхні:

$$u_r(b, \theta) = u_r^*(b, \theta), \quad (3.72)$$

та рівність окружних переміщень там же:

$$u_\theta(b, \theta) = u_\theta^*(b, \theta). \quad (3.73)$$

Скориставшись рівністю (3.72), отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \nu_{23})}{E_2} = \frac{1}{E^*} \left(1,5 + \frac{b_1}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}} \left((3(d_{22} - d_{12}) + f(d_{11} - d_{21})) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times 1,5 - 3(d_{22} - d_{12}) + ((d_{22} - d_{12}) - f(d_{11} - d_{21}))1,5 \right. \right. \\ \left. \left. + 3f(d_{11} - d_{21}) \right) \right). \end{aligned} \quad (3.74)$$

А для рівності (3.73), маємо:

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \nu_{23})}{E_2} = \frac{1}{E_2^*} \left(1,5 + \frac{b_1}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}} \left((3(d_{22} - d_{12}) + f(d_{11} - d_{21})) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times 1,5 - 6(d_{22} - d_{12}) - f(d_{11} - d_{21}) \right) \times 1,5 \right) \end{aligned} \quad (3.75)$$

Після перетворень, та враховуючи допоміжних величин

$$\chi_1 = \frac{(d_{11} - d_{21})}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}; \chi_2 = \frac{(d_{22} - d_{12})}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}, \quad (3.76)$$

Відповідно, маємо:

$$\frac{(1 + \nu_{23})}{E_2} = \frac{1}{E^*} (1,5 + 3(\gamma - 2E_2^*)(f\chi_1 + \chi_2)), \quad (3.77)$$

$$\frac{(1 + \nu_{23})}{E_2} = \frac{1}{E^*} (1,5 + 3(\gamma - 2E_2^*)(f\chi_1 - \chi_2)). \quad (3.78)$$

Використавши співвідношення (2.64) та (3.77) або (3.78) та враховуючи, що

$$\frac{1 - \nu_{23}}{E_2} + \frac{1 + \nu_{23}}{E_2} = \frac{2}{E_2}$$

для формули (3.77), маємо

$$E_2 = \frac{2\alpha E^*}{(\alpha(1,5 + 3(\gamma - 2E_2^*)(f\chi_1 + \chi_2)) + \delta + \eta_1\eta_2)}, \quad (3.79)$$

для формули (3.78), маємо

$$E_2 = \frac{2\alpha E^*}{(\alpha(1,5 + 3(\gamma - 2E_2^*)(f\chi_1 - \chi_2)) + \delta + \eta_1\eta_2)}, \quad (3.80)$$

де $\delta = 1,5f(\gamma - 2E_2^\circ) + 0,5\gamma$, $\eta_1 = 2E_1^\circ E^* f(f - 1)(0,5\gamma - 2\nu_{21}^\circ E^*)^2$,

$$\eta_2 = \frac{1}{\left(E^* \left(\alpha(E_1^\circ f + E^*(1-f)) - 2\beta(0,5E_1^\circ f + \nu_{12}^\circ E^*(1-f))\right)\right)},$$

$$\gamma = E^* (1 - \nu_{23}^\circ) + 1,5E_2^\circ.$$

А із співвідношень (2.64) та (3.77), (3.79) або (3.76), (3.80), можемо отримати:

$$\nu_{23} = \frac{\left(\alpha \left(1,5 + 3(\gamma - 2E^*) \right) (f\chi_1 + \chi_2) \right) - (\delta + \eta_1\eta_2)}{\left(\alpha \left(1,5 + 3(\gamma - 2E^*) \right) (f\chi_1 + \chi_2) \right) + (\delta + \eta_1\eta_2)}, \quad (3.81)$$

або

$$\nu_{23} = \frac{\left(\alpha \left(3 + 6(\gamma - 2E^*) \right) (f\chi_1 - \chi_2) \right) - 2(\delta + \eta_1\eta_2)}{\left(\alpha \left(3 + 6(\gamma - 2E^*) \right) (f\chi_1 - \chi_2) \right) + 2(\delta + \eta_1\eta_2)}. \quad (3.82)$$

Використаємо данні формули для розрахунку пружних сталих реальних композиційних матеріалів. Розглянемо гумовокордний матеріал із нестисливою матрицею та ізотропним кордом із такими пружними характеристиками [1]: модуль пружності текстильного корда $E^\circ = 1,6 \cdot 10^3$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu^\circ = 0,8$, модуль пружності нестисливої гуми $E^* = 4,5$ МПа.

3.2 Визначення ефективних пружних сталих композиційного матеріалу при поздовжньому зсуві

Розглянемо процес поздовжнього зсуву. В роботі [5] наведено розв'язок задачі для трансропного циліндричного тіла. Запишемо основні співвідношення, що визначають чистий поздовжній зсув в циліндричній області (рис. 8).

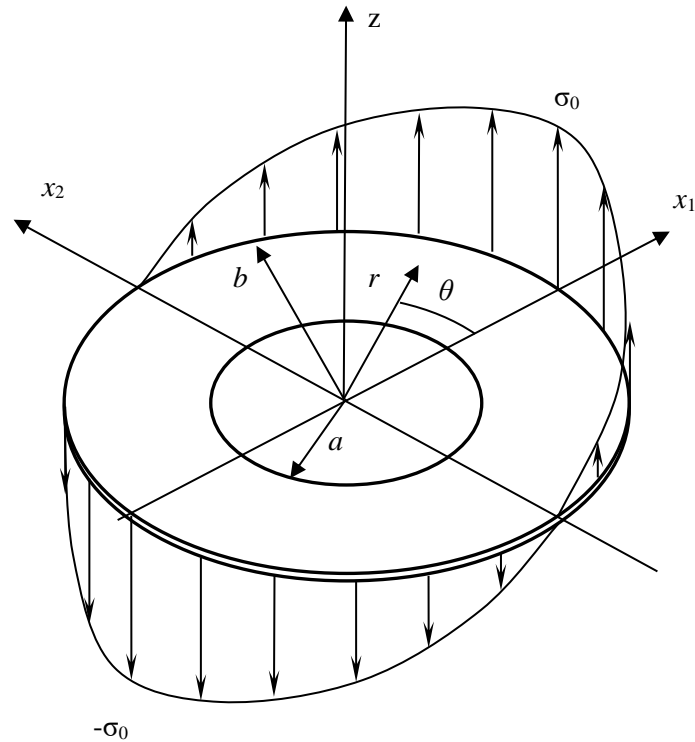


Рисунок 8 – Крайові умови при поздовжньому зсуві в кільці

У випадку поздовжнього зсуву напружено-деформований стан визначається такими співвідношеннями: $\sigma_{zz} = \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0$, $\sigma_{zr} = \sigma_{zr}(r, \theta)$, $\sigma_{\theta z} = \sigma_{\theta z}(r, \theta)$; $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \gamma_{r\theta} = 0$, $\gamma_{zr} = \gamma_{zr}(r, \theta)$, $\gamma_{\theta z} = \gamma_{\theta z}(r, \theta)$.

Для моделювання напружено-деформованого стану чистого поздовжнього зсуву в циліндричній області нескінченної довжини необхідно до зовнішньої поверхні циліндра прикласти такі сили:

$$\sigma_{zr}(b, \theta) = \sigma_0 \cos \theta, \quad (3.83)$$

а напружено-деформований стан чистого зсуву характеризуватиметься такими співвідношеннями $\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0$.

Залишається одне рівняння рівноваги із трьох, вигляду:

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = 0, \quad (3.84)$$

в переміщеннях матимемо

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} = 0. \quad (3.85)$$

Наведена нижче функція буде розв'язком даного рівняння:

$$u_z(r, \theta) = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right), \quad (3.86)$$

тоді на основі співвідношень Коші отримуємо вирази для деформацій:

$$\begin{aligned} \gamma_{\theta z}(r, \theta) &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = - \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) \sin \theta; \\ \gamma_{zr}(r, \theta) &= \frac{\partial u_z}{\partial r} = \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.87)$$

а співвідношення для напружень приймуть вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{zr}(r, \theta) &= G_{12} \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \theta; \\ \sigma_{z\theta}(r, \theta) &= -G_{12} \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Розглянемо задачу про сумісний поздовжній зсув суцільного циліндра ($0 \leq r \leq a$) та порожнистого циліндра ($a \leq r \leq b$).

Основні вирази, що описують напружено-деформований стан матриці (нескінченний порожнистий циліндр), можна визначити за допомогою залежностей (3.86) - (3.88):

$$u_z^*(r, \theta) = \left(Ar + \frac{B}{r} \right) \cos \theta, \quad (3.89)$$

$$\gamma_{\theta z}^*(r, \theta) = - \left(A + \frac{B}{r^2} \right) \sin \theta; \gamma_{zr}^*(r, \theta) = \left(A - \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (3.90)$$

$$\sigma_{zr}^*(r, \theta) = \frac{E^*}{3} \left(A - \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta, \sigma_{z\theta}^*(r, \theta) = - \frac{E^*}{3} \left(A + \frac{B}{r^2} \right) \sin \theta. \quad (3.91)$$

Основні співвідношення, що описують напружено-деформований стан волокна (нескінчений суцільний циліндр), маючи на увазі, що при $r = 0$ переміщення скінченні:

$$u_z^\circ(r, \theta) = Cr \cos \theta, \quad (3.92)$$

$$\gamma_{\theta z}^\circ(\theta) = -C \sin \theta; \gamma_{zr}^\circ(\theta) = C \cos \theta, \quad (3.93)$$

$$\sigma_{zr}^\circ(\theta) = G_{12}^\circ C \cos \theta; \sigma_{z\theta}^\circ(\theta) = -G_{12}^\circ C \sin \theta. \quad (3.94)$$

Для отримання невідомих сталих у співвідношеннях (3.89)-(3.94) для задачі про сумісний поздовжній зсув матриці і волокна, використаємо крайову умову (3.83) та умови неперервності на межі розділу матеріалів:

$$\sigma_{zr}^\circ(\theta) = \sigma_{zr}^*(a, \theta), \quad (3.95)$$

$$u_z^\circ(a, \theta) = u_z^*(a, \theta). \quad (3.96)$$

Із (3.83) отримуємо:

$$A = \frac{3\sigma_0}{E^*} + \frac{B}{b^2}. \quad (3.97)$$

Із (3.96), враховуючи (3.97), маємо

$$C = \frac{3\sigma_0}{E^*} + B \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \right). \quad (3.98)$$

Отже, із (3.95) враховуючи (3.97), (3.98), отримаємо

$$B = \frac{3\sigma_0 a^2 \left(G_{12}^\circ - \frac{E^*}{3}\right)}{E^* \left(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)\right)}. \quad (3.99)$$

Звідси

$$C = \frac{-2\sigma_0}{\left(\frac{E^*}{3}(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)\right)}, \quad (3.100)$$

$$A = \frac{-\sigma_0 \left(\frac{E^*}{3} + G_{12}^\circ\right)}{\frac{E^*}{3} \left(\frac{E^*}{3}(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)\right)}. \quad (3.101)$$

Звернувши увагу на (3.99), (3.101) отримаємо основні співвідношення, що описують напружено-деформований стан матриці при сумісному поздовжньому зсуві:

$$u_z^*(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{\frac{E^*}{3} \left(\frac{E^*}{3}(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)\right)} \times \\ \times \left(-\left(\frac{E^*}{3} + G_{12}^\circ\right)r + \frac{a^2 \left(G_{12}^\circ - \frac{E^*}{3}\right)}{r} \right) \cos \theta, \quad (3.102)$$

$$\gamma_{\theta z}^*(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{\frac{E^*}{3} \left(\frac{E^*}{3}(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)\right)} \left(\frac{E^*}{3} + G_{12}^\circ - \frac{a^2 \left(G_{12}^\circ - \frac{E^*}{3}\right)}{r^2} \right) \sin \theta;$$

$$\gamma_{zr}^*(r, \theta) = -\frac{\sigma_0}{\frac{E^*}{3} \left(\frac{E^*}{3} (f-1) - G_{12}^\circ (f+1) \right)} \left(\frac{E^*}{3} + G_{12}^\circ + \frac{a^2 \left(G_{12}^\circ - \frac{E^*}{3} \right)}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (3.103)$$

$$\sigma_{zr}^*(r, \theta) = -\frac{\sigma_0}{\frac{E^*}{3} (f-1) - G_{12}^\circ (f+1)} \left(\frac{E^*}{3} + G_{12}^\circ + \frac{a^2 \left(G_{12}^\circ - \frac{E^*}{3} \right)}{r^2} \right) \cos \theta;$$

$$\sigma_{z\theta}^*(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{\frac{E^*}{3} (f-1) - G_{12}^\circ (f+1)} \left(\frac{E^*}{3} + G_{12}^\circ - \frac{a^2 \left(G_{12}^\circ - \frac{E^*}{3} \right)}{r^2} \right) \sin \theta. \quad (3.104)$$

З використанням (3.100), отримаємо співвідношення для напружено-деформованого стану волокна при сумісному поздовжньому зсуві:

$$u_z^\circ(r, \theta) = \frac{-2\sigma_0 r \cos \theta}{\frac{E^*}{3} (f-1) - G_{12}^\circ (f+1)}, \quad (3.105)$$

$$\gamma_{\theta z}^\circ(\theta) = \frac{2\sigma_0 \sin \theta}{\frac{E^*}{3} (f-1) - G_{12}^\circ (f+1)}; \gamma_{zr}^\circ(\theta) = \frac{-2\sigma_0 \cos \theta}{\frac{E^*}{3} (f-1) - G_{12}^\circ (f+1)}, \quad (3.106)$$

$$\sigma_{zr}^\circ(\theta) = \frac{-2\sigma_0 G_{12}^\circ \cos \theta}{\frac{E^*}{3} (f-1) - G_{12}^\circ (f+1)}; \sigma_{z\theta}^\circ(\theta) = \frac{2\sigma_0 G_{12}^\circ \sin \theta}{\frac{E^*}{3} (f-1) - G_{12}^\circ (f+1)}. \quad (3.107)$$

Розглянемо таку ж задачу про чистий поздовжній зсув для трансропного однорідного матеріалу, що моделює композит. Представимо, в цій задачі, композиційний матеріал у вигляді суцільного нескінченного циліндра радіусом b . Крайові умови матимуть вид (3.83). Основні співвідношення аналогічні залежностям, отриманим для волокна, тобто маємо:

$$u_z(r, \theta) = \tilde{A} r \cos \theta, \quad (3.108)$$

$$\gamma_{\theta z}(r, \theta) = -\tilde{A} \sin \theta; \quad \gamma_{zr}(r, \theta) = \tilde{A} \cos \theta, \quad (3.109)$$

$$\sigma_{zr}(r, \theta) = \tilde{A} G_{12} \cos \theta; \quad \sigma_{z\theta}(r, \theta) = -\tilde{A} G_{12} \sin \theta. \quad (3.110)$$

Застосовуючи крайову умову задачі (3.83) знайдемо сталу \tilde{A} :

$$\tilde{A} = \frac{\sigma_0}{G_{12}}. \quad (3.111)$$

Отримаємо:

$$u_z(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} r \cos \theta, \quad (3.112)$$

$$\gamma_{\theta z}(r, \theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}} \sin \theta; \quad \gamma_{zr}(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} \cos \theta, \quad (3.113)$$

$$\sigma_{zr}(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} G_{12} \cos \theta; \quad \sigma_{z\theta}(r, \theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}} G_{12} \sin \theta. \quad (3.114)$$

Отже, отримуємо розв'язок задачі для сумісного деформування нескінченних порожнистого та суцільного циліндрів і для нескінченного суцільного циліндра при чистому поздовжньому зсуві. Рівність на зовнішній поверхні циліндру осьових переміщень використаємо як умову узгодження:

$$u_z(b, \theta) = u_z^*(b, \theta). \quad (3.115)$$

Тоді матимемо:

$$G_{12} = \frac{\frac{E^*}{3} \left(\frac{E^*}{3} (1-f) + G_{12}^\circ (f+1) \right)}{G_{12}^\circ (1-f) + \frac{E^*}{3} (f+1)}. \quad (3.116)$$

Визначимо модуль зсуву для гумовокордного матеріалу із нестисливою матрицею та ізотропним кордом, пружні характеристики яких[1]: модуль

пружності текстильного корда $E^\circ = 1,6 \cdot 10^3$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu^\circ = 0,8$, модуль пружності гуми $E^* = 4,5$ МПа.

В таблиці 3.1 наведені значення модуля зсуву G_{12} при різних значеннях об'ємному вмісті корда f .

Таблиця 3.1 – Модуль зсуву гумовокордного матеріалу G_{12}

Величина	Значення				
f	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
G_{12} , МПа	1,83	2,24	2,77	3,48	4,46

ВИСНОВКИ

Об'єктом дослідження роботи була математична модель пружних властивостей гумовокордного композиційного матеріалу. На основі методу представницького об'ємного елемента отримано аналітичні співвідношення для ефективних пружних сталих волокнистого композиційного матеріалу з гумовою нестисливою матрицею.

Було розглянуто аналітичне розв'язання чотирьох пар крайових задач для сумісного деформування волокна і нестислої матриці та для гомогенізованого трансропного композиційного матеріалу. Отримано аналітичні розв'язки для таких крайових задач: рівномірне поздовжнє розтягнення, рівномірне поперечне розтягнення, чистий поперечний зсув і чистий поздовжній зсув.

На основі порівняння певних компонентів напружено-деформованого стану у цих парах задач проведено розрахунок ефективних пружних характеристик для гумовокордного матеріалу в залежності від вмісту волокна у композиті та механічних властивостей волокна та нестислої гумової матриці.

Наведено чисельні розрахунки ефективних пружних сталих волокнистого композиційного матеріалу з гумовою нестисливою матрицею для різного вмісту волокна у композиційному матеріалі.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Гребенюк С. М., Гоменюк С. І., Клименко М. І. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів. Херсон : Гельветика, 2019. 350 с.
2. Клименко М. І., Гребенюк С. М., Гоменюк С. І. Ефективні механічні характеристики в'язкопружних композитів. Херсон : Гельветика, 2019. 300 с.
3. Столярова А. В. Ефективні механічні характеристики композиційних матеріалів із транстропними порожнистими волокнами. Херсон : Гельветика, 2021. 104 с.
4. Класторний М., Кондерла П., Пекарський Р. Точна теорія жорсткості однонапрямованих волокнисто-армованих композитів. *Механіка композитних матеріалів*. 2009. Т. 45, № 1. С. 109-144.
5. Соловей М. О., Кривенко О. П., Міщенко О. О. Визначення ефективних фізико-механічних характеристик односпрямованого волокнистого композитного. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2014. № 92. С.30-48
6. Bavan D. S., Kumar G. C. M. Finite element analysis of a natural fiber (maize) composite beam. *Journal of Engineering*. 2013. V. 2013. P. 1-7. URL : <http://dx.doi.org/10.1155/2013/450381272> (дата звернення : 12.09.2023).
7. Grebenyuk S., Klymenko M., Titiva O., Boguslavska A. Effective longitudinal elastic modulus of the composite with viscoelastic matrix and transtropic fiber. 20th International Scientific Conference Mechanika 2015. Kaunas : Kaunas University of Tehnology. 2015. P. 96-100.
8. Würkner M., Berger H., Gabbert U. Numerical study of effective elastic properties of fiber reinforced composites with rhombic cell arrangements and imperfect interface. *International Journal of Engineering Science*. 2013. V. 63. P. 1-9.

9. Chiang C. Mei, Vernescu B. Homo-genization Methods for Multiscale Mechanics. Wspc, 2010, 348p.
10. June Gunn Lee, Computational Materials Science An Introduction, Second Edition. CRCPress, 2016, 376 p.
11. Ericksen J., Kinderlehrer D., Kohn R., Lions J.-L. Bass. Homogenization and Effective Moduli of Materials and Media. Springer, 2011, 268 p.

ДОДАТОК А

**Основні співвідношення теорії пружності в циліндричній системі
координат**

Співвідношення Коші:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad (\text{A. 1})$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta}; \quad (\text{A. 2})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \quad (\text{A. 3})$$

$$\gamma_{zr} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \quad (\text{A. 4})$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad (\text{A. 5})$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}. \quad (\text{A. 6})$$

Рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + G_r = 0; \quad (\text{A. 7})$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + G_\theta = 0; \quad (\text{A. 8})$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + G_z = 0. \quad (\text{A. 9})$$

Закон Гука для трансропного матеріалу:

$$\varepsilon_{rr} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_{zz} + \frac{1}{E_2} \sigma_{rr} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{E_2} (\sigma_{rr} - (\nu_{21} \sigma_{zz} + \nu_{23} \sigma_{\theta\theta})); \quad (\text{A. 10})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_{zz} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{rr} + \frac{1}{E_2} \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{E_2} (\sigma_{\theta\theta} - (\nu_{21} \sigma_{zz} + \nu_{23} \sigma_{rr})); \quad (\text{A. 11})$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_1} \sigma_{zz} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{rr} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{E_1} (\sigma_{zz} - \nu_{12} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})); \quad (\text{A. 12})$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1 + \nu_{23})}{E_2} \sigma_{r\theta}; \quad (\text{A. 13})$$

$$\gamma_{zr} = \frac{1}{G_{12}} \sigma_{zr}; \quad (\text{A. 14})$$

$$\gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_{12}} \sigma_{z\theta}. \quad (\text{A. 15})$$

Зворотний закон Гука для транстропного матеріалу:

$$\sigma_{zz} = \frac{E_1 ((1 - \nu_{23}^2) \varepsilon_{zz} + \nu_{21} (1 + \nu_{23}) \varepsilon_{rr} + \nu_{21} (1 + \nu_{23}) \varepsilon_{\theta\theta})}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \quad (\text{A. 16})$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E_2 (\nu_{12} (1 + \nu_{23}) \varepsilon_{zz} + (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \varepsilon_{rr} + (\nu_{23} + \nu_{12}\nu_{21}) \varepsilon_{\theta\theta})}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \quad (\text{A. 17})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E_2 (\nu_{12} (1 + \nu_{23}) \varepsilon_{zz} + (\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12}) \varepsilon_{rr} + (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \varepsilon_{\theta\theta})}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \quad (\text{A. 18})$$

$$\sigma_{zr} = G_{12} \gamma_{zr}; \quad (\text{A. 19})$$

$$\sigma_{z\theta} = G_{12} \gamma_{z\theta}; \quad (\text{A. 20})$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} \gamma_{r\theta}. \quad (\text{A. 21})$$