МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: «**ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ МНОГОЧЛЕНІВ ДО МАТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ**»

Виконав: студент 2 курсу, групи: 8.1112-з
спеціальності 111 Математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої спеціальності Математика
(назва освітньої програми)
І. І. Сташук
(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, доцент, к.ф.-м.н. Панасенко Є. В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри програмної інженерії, доцент, к.ф.-м.н. Кудін О.В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя

2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 Математика

(шифр і назва)

Освітня програма Математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної та прикладної
математики,
д.т.н., професор

_______________ Гребенюк С. М.
(підпис)

« _____ » __________ 2023 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ

Сташуку Івану Івановичу
(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проєкту) Застосування інтерполяційних многочленів до матричних функцій

Керівник роботи (проєкту) Панасенко Євген Валерійович, к.ф.-м.н., доцент
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 01 » травня 2023 року № 643-с

2. Строк подання студентом роботи ____________________

3. Вихідні дані до роботи
   1. Постановка задачі.
   2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
   1. Постановка задачі.
   2. Основні теоретичні відомості: матричні функції та методи їх інтерполяції.
   3. Застосування інтерполяційних многочленів для розв'язання однорідної задачі Коші.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) _______ презентація.

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		Завдання видав	Завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 18.05.2023

К А Л Е Н Д А Р Н И Й П Л А Н

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	23.05.2023	
2.	Збір вихідних даних.	28.05.2023	
3.	Обробка методичних та	28.07.2023	
	теоретичних джерел.		
4.	Розробка першого і другого	28.09.2023	
	розділу.		
5.	Розробка третього розділу.	28.10.2023	
6.	Оформлення і нормоконтроль	24.11.2023	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	12.12.2023	

Студент ________________ І. І. Сташук
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ________________ Є. В. Панасенко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормконтроль пройдено

Нормоконтролер ________________ О. Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Застосування інтерполяційних многочленів до матричних функцій»: 39 с., 1 рис., 1 табл., 12 джерел.

ЗАДАЧА КОШІ, ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ МНОГОЧЛЕН, МАТРИЧНА ЕКСПОНЕНТА, МАТРИЧНА ФУНКЦІЯ, ПОЛІНОМ ЛАГРАНЖА.

Об'єкт дослідження – матричні функції та інтерполяційні многочлени.

Мета дослідження: знаходження розв'язків задачі Коші за допомогою матричної експоненти, яка визначена інтерполяційним многочленом Лагранжа.

Метод дослідження: аналітичний.

У кваліфікаційній роботі було досліджено матричні функції та способи їх визначення у загальному випадку. Розглянуто деякі приклади застосування інтерполяційних поліномів у різних галузях науки та техніки, а також певні методи інтерполяції матричних функцій. Детальніше визначено матричну експоненту, як найбільш вивчену матричну функцію, та її властивості. Теоретично обґрунтовано значення матричної експоненти для знаходження загальних розв'язків однорідної задачі Коші. Також було розв'язано дві задачі Коші за допомогою матричної експоненти, яка визначена інтерполяційним многочленом Лагранжа, що демонструє ефективність інтерполяційних методів для визначення матричних функцій.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis "Application of interpolation polynomials to matrix functions": 39 pages, 1 figures, 1 table, 12 references.

CAUCHY PROBLEM, INTERPOLATION POLYNOMIAL, MATRIX EXPONENT, MATRIX FUNCTION, LAGRANGE POLYNOMIAL.

The object of the study is matrix functions and interpolation polynomials.

The aim of the study is finding solutions of the Cauchy problem using the matrix exponent defined by the Lagrange interpolation polynomial.

The method of research is analytical.

In the qualification work, matrix functions and methods of their definition in the general case were investigated. Some examples of the use of interpolation polynomials in various fields of science and technology, as well as certain methods of interpolation of matrix functions are considered. The matrix exponent, as the most studied matrix function, and its properties are defined in more detail. The value of the matrix exponent for finding general solutions to a homogeneous Cauchy problem is theoretically substantiated. Also, two Cauchy problems were solved using the matrix exponent defined by the interpolation Lagrange polynomial, which demonstrates the effectiveness of interpolation methods for determining matrix functions.

ЗМІСТ

ВСТУП

У сучасному науковому та технічному середовищі широкий спектр досліджень спрямований на вдосконалення методів обробки даних та моделювання складних систем. Дані методи широко використовують саме матричні функції та обчислення для побудови моделей систем та їх аналізу.

Саме тому дослідження матричних функцій та їх застосування в різноманітних галузях науки та техніки є актуальним у сучасному світі. Матричні функції використовують для моделювання та аналізу різноманітних систем у сферах інженерії, фізики, економіки та інших.

Для ефективного застосування цих функцій, важливим є розвиток методів інтерполяції, які дозволяють апроксимувати значення матричних функцій у визначених точках. Інтерполяційні методи дозволяють побудувати поліноми, які апроксимують значення матричних функцій в заданих точках, тим самим спрощуючи їх обчислення та подальший аналіз.

Відмінність та варіативність застосувань інтерполяційних методів до матричних функцій вказують на актуальність використання цих методів у різних сферах науки і техніки, де розв'язання проблем обробки та аналізу даних вимагає точного та оптимального підходу.

Ця робота присвячена вивченню матричних функцій та методів їх інтерполяції. В контексті застосувань інтерполяційних многочленів до матричних функцій, ми дослідимо теоретичні аспекти цього підходу та визначимо приклади його застосування в різних сферах науки та техніки.

1 МАТРИЧНІ ФУНКЦІЇ ТА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ МНОГОЧЛЕНИ

1.1 Матричні функції, їх застосування у науці та техніці.

Функція матриці – це математична функція, яка приймає матрицю як вхідний аргумент і повертає іншу матрицю того ж розміру як результат.

Визначити функцію матриці $A \epsilon \mathbb{C}^{n\times n}$ можна декількома способами [6].

Коли функція $f(t)$ є поліномом зі скалярними коефіцієнтами і аргументом t, то визначити $f(A)$ можна підставивши A замість t за умови, що 1 замінюється одиничною матрицею:

$$f(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

$$f(A) = c_o I + c_1 A + \cdots + c_k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k\,, \tag{1.1}$$

де A – матриця $n \times n$;

I – одинична матриця $n \times n$.

Якщо функція $f(t)$ є раціональною функцією зі скалярними коефіцієнтами і аргументом t, то $f(A)$ можна визначити, підставивши A замість t замінив ділення на матрицю оберненою за умови, що ця матриця є невиродженою, а 1 замінюється одиничною матрицею:

$$f(t) = \frac{1+t^2}{1-t} \Rightarrow f(A) = (I-A)^{-1}(I+A^2), \text{якщо } 1 \notin \Lambda(A),$$

де $\Lambda(A)$ – власні значення матриці A (спектр матриці A [9]).

Якщо степеневий ряд функції f є збіжним, то ми знову можемо замінити A на t для визначення $f(A)$:

$$\exp(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots,$$
$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots.$$

Для визначення функції матриці у загальному випадку використовують декілька способів, з яких наступні три є найбільш поширеними [5].

а) канонічна форма Жордана (1.2).

Нехай $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ має канонічну форму Жордана

$$Z^{-1}AZ = J = \operatorname{diag}\left(J_1, J_2, \dots, J_p\right)$$
$$J_k = J_k(\lambda_k) = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m_k \times m_k},$$

де Z – невироджена матриця;

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – власні значення A;

$m_1 + m_2 + \cdots m_p = n.$

Тоді

$$f(A) = Zf(J)Z^{-1} = Z\operatorname{diag}\left(f\left(J_k(\lambda_k)\right)\right)Z^{-1},$$

де

$$f\big(J_k(\lambda_k)\big) = \begin{bmatrix} f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & & \dfrac{f^{m_k-1}(\lambda_k)}{(m_k-1)!} \\ & f(\lambda_k) & \ddots & \\ & & \ddots & f'(\lambda_k) \\ & & & f(\lambda_k) \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

б) інтегральна теорема Коші (1.3).

Для $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(zI - A)^{-1} dz, \tag{1.3}$$

де f – аналітична на та всередині замкненого контуру Γ, який охоплює $\Lambda(A)$.

Підінтегральна функція містить резольвенту $(zI - A)^{-1}$, яка визначена на Γ, оскільки Γ не перетинається зі спектром A.

в) визначення інтерполяційним многочленом (1.4).

Розглянемо визначення матричної функції через інтерполяцію Ерміта.

Нехай f визначена на спектрі $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ і нехай m є мінімальним поліномом A. $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ різні власні значення A, а p_i буде індексом λ_i, тобто порядком найбільшого жорданового блоку, в якому з’являється λ_i. Тоді

$$f(A) = r(A),$$

де r – унікальний поліном (інтерполяційний поліном Ерміта) степеня меншого за $\sum_{i=1}^{k} p_i = \deg m$, що задовольняє умові інтерполяції

$$r^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \qquad j = 0{:}\,p_i - 1, \quad i = 1{:}\,k. \tag{1.4}$$

Важливою умовою визначення $f(A)$ за формулою (1.4) є існування похідних, що входять до цієї формули. Тому функція f є визначеною на спектрі матриці A, якщо всі похідні в (1.4) існують. Вони називаються значеннями функції f на спектрі A.

Застосування матричних функцій визначається науковими і технічними процесами та системами, в яких забезпечується обробка та аналіз великого обсягу даних. Розглянемо найпоширеніші способи застосування функцій матриці [12].

У математиці і в області лінійної алгебри, функції матриці широко використовуються для різних цілей, включаючи обчислення, аналіз та моделювання різних систем і процесів.

Однією з найпоширеніших сфер застосування матричних функцій є диференціальні рівняння через фундаментальну роль, яку експоненціальна функція відіграє в лінійних диференціальних рівняннях. Класичною задачею розв’язування лінійних диференціальних рівнянь є задача Коші (1.5)

$$\frac{dy}{dt} = ay, y(0) = c,$$

що у векторній формі має вигляд

$$\frac{dy}{dt} = Ay, y(0) = c, \qquad y \in \mathbb{C}^n, A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \tag{1.5}$$

де $y(t) = e^{At}c$ – розв’язок задачі.

Матрична експонента та логарифм відіграють важливу роль у моделях Маркова, які використовуються для моделювання систем, що випадково змінюються, де передбачається, що майбутні стани залежать тільки від поточного стану, а не від послідовності подій, які передували цьому.

У теорії керування матрична експонента задає співвідношення зв’язку між системою безперервного часу та відповідною їй дискретною системою простору станів.

Функція знака матриці може бути використана для підрахунку того, скільки власних значень матриці лежить у певних областях комплексної площини, а також отримати відповідні інваріантні підпростори.

У фізиці матричні функції використовують в ядерній магнітно-резонансній спектроскопії, у квантовому моделюванні, для визначення оптичних характеристик систем.

Матричні функції застосовують й у задачах оптимізації, а саме задачі напіввизначеного програмування. Це клас задач оптимізації з обмеженнями, в яких змінна є симетричною додатною напіввизначеною матрицею $X \in R^{n \times n}$.

1.2 Методи застосування інтерполяційних многочленів до матричних функцій

Розглянемо детальніше застосування інтерполяційних многочленів для визначення матричних функцій.

Інтерполяційні методи визначення матричних функцій є ключовими у вирішенні завдань, пов'язаних із забезпеченням точності визначення функцій від матриці. На відміну від таких способів визначення як Жорданова канонічна форма (1.2) та інтеграл Коші (1.3), інтерполяція матричних функцій дозволяє ефективно апроксимувати значення функцій від матриці, тобто зменшити обчислювальні ресурси.

Через обчислювальну точність інтерполяційні многочлени широко використовують у інженерних дослідженнях та моделюванні.

В економічних дослідженнях та прогнозуванні, де застосовуються матричні методи, точність інтерполяції матричних функцій має визначальне значення для правильного прийняття рішень та оптимізації економічних процесів.

Широкого застосування інтерполяційні методи набули в сфері машинного навчання та штучного інтелекту, де використовуються матричні операції для обробки даних. Методи інтерполяції матричних функцій можуть покращити точність прогнозів та навчання моделей, а також зробити обчислювальні завдання менш витратними.

У медичних дослідженнях важливо мати точні моделі для опису фізіологічних процесів та виявлення аномалій. Інтерполяція матричних функцій може бути корисною для розробки більш точних моделей, які допомагають у діагностичних процедурах та вирішенні медичних завдань.

В галузі кібербезпеки та обробки сигналів, де велика кількість даних обробляється в режимі реального часу, ефективні методи інтерполяції для матричних функцій можуть виявитися ключовим елементом для виявлення аномалій та забезпечення безпеки інформаційних систем.

Зі збільшенням обсягів даних у сучасному світі виникає проблема їхньої ефективної обробки та аналізу. В контексті матричних функцій, які широко застосовуються у великих наборах даних, розвиток ефективних методів інтерполяції може полегшити аналіз та обробку цих даних у реальному часі.

Використання інтерполяційних методів до матричних функцій надає нові можливості для міждисциплінарних досліджень. Об'єднання знань із різних галузей, таких як математика, інженерія, медицина та комп'ютерні науки, може призвести до розробки інноваційних методів та рішень наукових та практичних проблем.

Все більш поширеною є технологія Internet of Things (Інтернет речей), де велика кількість пристроїв збирає та оброблює дані в режимі реального часу, тому методи інтерполяції для матричних функцій є важливими для оптимізації передачі та обробки даних в мережі Інтернету речей.

Спочатку наведемо деякі відомості про многочлени від матричних аргументів [10].

Мінімальним поліномом $m(\lambda)$ матриці A називається поліном найменшого степеня зі старшим коефіцієнтом одиниця, такий, що $m(A) = 0$.

Ключовою властивістю мінімального полінома є те, що мінімальний многочлен ділить будь-який інший поліном g, для якого $g(A) = 0$.

Якщо характеристичний поліном матриці $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ є $\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^{k}(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$, де $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – попарно різні корені, то її мінімальний поліном має вигляд

$$m(\lambda) = \prod_{i=1}^{k}(\lambda - \lambda_i)^{p_i}, \tag{1.6}$$

де $1 \leq p_i \leq n_i, i = 1, \dots, k$.

Для будь-якого $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ і будь-якого полінома $g(t)$ поліном $g(A)$ є визначеним (1.1) та g визначений на спектрі A.

Теорема 1 Для поліномів $g_1(A)$ і $g_2(A)$ та $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $g_1(A) = g_2(A)$ тоді і тільки тоді, коли $g_1(\Lambda) = g_2(\Lambda)$.

Доведення. Припустимо, що $g_1(A) = g_2(A)$, тоді поліном $d(\lambda) = g_1(\lambda) - g_2(\lambda) = 0$. За властивістю мінімального полінома $d(\lambda)$ ділиться на $m(\lambda)$, тобто $d(\lambda) = m(\lambda)q(\lambda)$. На основі (1.6) $d(\lambda) = q(\lambda)\prod_{i=1}^{k}(\lambda - \lambda_i)^{p_i}$, звідки одержуємо рівності

$$d^{(j)}(\lambda_i), \qquad i = 1, \dots, k, \quad j = 0, \dots, p_i - 1,$$

Або

$$g_1^{(j)}(\lambda_i) = g_2^{(j)}(\lambda_i) \qquad i = 1, \dots, k, \quad j = 0, \dots, p_i - 1,$$

тобто $g_1(\Lambda) = g_2(\Lambda)$ на основі (1.4).

І навпаки, припустимо, що $g_1(\Lambda) = g_2(\Lambda)$, тоді для полінома $d(\lambda) = g_1(\lambda) - g_2(\lambda)$ виконується рівність $d(\Lambda) = 0$, тобто

$$d^{(j)}(\lambda_i) = 0, \qquad i = 1, \dots, k, \quad j = 0, \dots, p_i - 1.$$

Звідси випливає, що λ_i $(i = 1, \dots, k)$ є коренем полінома $d(\lambda)$ з кратністю не меншою за p_i. Тоді $d(\lambda) = q(\lambda) \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{p_i} = m(\lambda) q(\lambda)$. Оскільки $d(A) = m(A) q(A) = 0$, тому $g_1(A) = g_2(A)$.

Таким чином, щоб $g(A) = 0$, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, необхідно і достатньо, аби $g(\Lambda) = 0$.

Властивістю поліномів є те, що матриця $g(A)$ повністю визначається значеннями g на спектрі A.

Інтерполяційним поліномом функції $f(\lambda)$ на спектрі матриці A називається поліном $r(\lambda)$, який задовольняє рівність

$$r(\Lambda) = f(\Lambda). \tag{1.7}$$

Рівність (1.7) називають інтерполяційною рівністю [1, с. 8]

Нехай $\mathbb{C}^{n \times n}$ – множина всіх квадратних матриць з комплексними значеннями, а $D(f)$ – множина матриць $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, на спектрі яких визначена функція $f(\lambda)$. Функцією від матриці називається відображення $f : D(f) \to K$, що описується формулою

$$f(A) = r(A),$$

де, $r(\lambda)$ – довільний інтерполяційний поліном функції $f(\lambda)$ на спектрі матриці A.

Розглянемо деякі методи визначення функції від матриці за допомогою інтерполяційних поліномів [6, с. 6].

а) інтерполяційний поліном Ерміта.

Інтерполяційний поліном Ерміта $r(t)$ задається формулою Лагранжа–Ерміта

$$r(t) = \sum_{i=}^{k} \left[\left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{1}{j!} \phi_i^{(j)}(\lambda_i)(t-\lambda_i)^j \right) \prod_{j\neq i} \left(t-\lambda_j\right)^{n_j} \right], \qquad (1.8)$$

де $\phi_i(t) = f(t)/\prod_{j\neq i}(t-\lambda_i)^{n_j}$.

б) формула Ньютона.

Формулу (1.8) можна записати за допомогою інтерполяційного многочлена Ньютона

$$r(t) = f[x_1] + f[x_1, x_2](t-x_1) + f[x_1, x_2, x_3](t-x_1)(t-x_2) + \\ + \cdots + f\left[x_1, x_2, \dots, x_p\right](t-x_1)(t-x_2)\dots\left(t-x_{p-1}\right), \qquad (1.9)$$

де $p = \deg m$;

$\{x_i\}_{i=1}^{p}$ – різні власні значення $\lambda_1, \dots, \lambda_k$;

$f[\dots]$ – розділені різниці.

Інший поліном r_1, для якого $f(A) = r_1(A)$ визначається як (1.9), де $p = n$ та $\{x_i\}_{i=1}^{n}$- множина усіх n власних значень матриці A.

$$r_1(t) = f[\lambda_1] + f[\lambda_1, \lambda_2](t-\lambda_1) + f[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3](t-\lambda_1)(t-\lambda_2) + \cdots \\ + f[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n](t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\dots(t-\lambda_{n-1}).$$

Многочлен $r_1(t)$ не залежить від Жорданової форми A і має степінь більший за $r(t)$. Проте $r_1(A) = r(A) = f(A)$.

в) формула Лагранжа.

Функцію $f(A)$ можна виразити як поліном від A степеня не більше $n-1$. Це твердження випливає з теореми Гамільтона-Келлі, що будь-яка матриця є коренем свого характеристичного многочлена [9, с. 147]. Тобто A^n можна виразити у вигляді лінійної комбінації з $I, A, \dots, A^{n-1}$.

Якщо всі власні значення $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матриці A прості, а степеневий ряд має нескінчений радіус збіжності, то матричну функцію $f(A)$ можна визначити за допомогою полінома Лагранжа:

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) \frac{\omega(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)\omega'(\lambda_k)}\Bigg|_{\lambda=A}, \qquad \omega(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j). \qquad (1.10)$$

Виконаємо спрощення формули (1.10) для полегшення подальших обчислень.

Насамперед визначимо похідну $\omega'(\lambda)$:

$$\begin{gathered} \omega'(\lambda) = [(\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)]' = \\ = (\lambda - \lambda_1)' \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n) + (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2)' \cdot \dots \cdot \\ \cdot (\lambda - \lambda_n) + \dots + (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)'. \qquad (1.11) \end{gathered}$$

Підставимо у рівність (1.11) значення λ_k. Якщо $\lambda_k = \lambda_j,\ k = 1, \dots, n$, $j\ = 1, \dots, n$, то значення похідної $\omega'(\lambda_k) = 0$, у такому випадку рівність (1.10) не матиме змісту. Тобто, для знаходження значення похідної $\omega'(\lambda_k)$ має виконуватись умова $k\ \neq j$.

Продовжуємо спрощувати рівність (1.11)

$$\begin{gathered} \omega'(\lambda) = (\lambda - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n) + (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_3) \dots \cdot (\lambda - \lambda_n) + \\ + \dots + (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_{n-1}) \qquad (1.12) \end{gathered}$$

Після підстановки у рівність (1.12) значення $\lambda_k,\ k = 1, \dots, n$, отримуємо наступну рівність

$$\omega'(\lambda_k) = \prod_{k \neq j} \left(\lambda_k - \lambda_j\right)$$

Отже, визначимо формулу (1.10) у такому вигляді

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) \frac{\omega(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)\omega'(\lambda_k)}\Bigg|_{\lambda=A} =$$

$$= \Bigg(f(\lambda_1) \frac{(\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)}{(\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda_1 - \lambda_n)} +$$

$$+ \ f(\lambda_2) \frac{(\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)}{(\lambda - \lambda_2) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot (\lambda_2 - \lambda_3) \cdot \ldots \cdot (\lambda_2 - \lambda_n)} + \cdots +$$

$$+ f(\lambda_n) \frac{(\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)}{(\lambda - \lambda_n) \cdot (\lambda_n - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda_{n-1})} \Bigg)_{\lambda=A} =$$

$$= \Bigg(f(\lambda_1) \frac{(\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)}{(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda_1 - \lambda_n)} +$$

$$+ f(\lambda_2) \frac{(\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_3) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)}{(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot (\lambda_2 - \lambda_3) \cdot \ldots \cdot (\lambda_2 - \lambda_n)} + \cdots +$$

$$+ f(\lambda_n) \frac{(\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_{n-1})}{(\lambda_n - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda_{n-1})} \Bigg)_{\lambda=A}. \qquad (1.13)$$

2 МАТРИЧНА ЕКСПОНЕНТА

2.1 Загальні відомості про матричну експоненту та її властивості

Розглянемо лінійний простір квадратних матриць порядку n. В цьому просторі визначена деяка норма $\|\cdot\|$, така, що для будь-яких двох матриць $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ виконується нерівність $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$ [4, с. 55].

Послідовність матриць $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ збігається за нормою $\|\cdot\|$ до матриці $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$), якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$.

Матричний ряд довільної матриці $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, що має вигляд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}, \tag{2.1}$$

збігається за нормою для будь-якого A:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{A^n}{n!}\right\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} < \infty.$$

Матричною експонентою e^A матриці $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ називається сума матричного ряду (2.1). Цей матричний ряд є збіжним для будь-якої матриці $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ [6, с. 76]. Сума ряду e^A є матрицею тієї ж розмірності, що й A.

Матрична експонента e^A дає змогу визначити матричну функцію e^{At}, яка ставить у відповідність до дійсного числа $t \in \mathbb{R}$ експоненту матриці At [11, с. 462].

Таким чином для матричної експоненти e^{At}, де $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, виконується рівність

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n . \qquad (2.2)$$

Матрична експонента є найбільш вивченою матричною функцією. Матрична експонента застосовується в різних галузях науки, а саме теорії диференціальних рівнянь, фізиці, статистиці, інженерії тощо. Вона дозволяє розв'язувати математичні задачі, що пов'язані з лінійними системами і лінійними перетвореннями.

Методів обчислення e^A існує багато. Побудовані вони на основі способу визначення матричної експоненти див. табл. 2.1 (у роботах [4], [6]).

Таблиця 2.1 – Деякі формули для e^A

Степеневий ряд	Границя	Форма Шура
$I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$	$\lim_{s\to\infty} \left(I + \frac{A}{s}\right)^s$	$Q\mathrm{diag}(e^T)Q^*$
Інтеграл Коші	Форма Жордана	Інтерполяція
$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^z (zI - A)^{-1} dz$	$Z\mathrm{diag}(e^{J_k})Z^{-1}$	$\sum_{i=1}^{n} f[\lambda_1, \dots, \lambda_i] \prod_{j=1}^{i-1} (A - \lambda_j I)$

Визначимо деякі властивості матричної експоненти (у роботах [2], [6], [11]).

Властивість 1 Для $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $e^{A+B} = e^A e^B$ тоді і тільки тоді, коли $AB = BA$.

Доведення.

$$e^A e^B = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^k B^m}{k!\, m!}.$$

Замінимо індекси для сум: $p = k + m, q = k$:

$$e^A e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^k B^m}{k!\, m!} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} \frac{A^q B^{p-q}}{q!\,(p-q)!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{q=0}^{p} \frac{p!}{q!\,(p-q)!} A^q B^{p-q}.$$

Оскільки матриці A та B комутовані, то будь-які їх степені комутують:

$$(A+B)^p = \sum_{q=0}^{p} \frac{p!}{q!\,(p-q)!} A^q B^{p-q},$$

що в свою чергу дорівнює правій частині рівності (2.3):

$$e^A e^B = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (A+B)^p = e^{A+B}.$$

Властивість 2 Для довільної матриці $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ матрична експонента e^A є невиродженою, оскільки $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$, де $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ – слід матриці A.

Доведення. Маємо

$$\det e^A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i e^A = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i(A)} = e^{\lambda_1(A)+\cdots+\lambda_n(A)} = e^{\operatorname{tr} A}.$$

Властивість 3 Для довільної матриці $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ обернена матриця до матричної експоненти e^A дорівнює $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Доведення. Матриці A та $-A$ комутують, тому за властивістю 1

$$e^A e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^0,$$

де 0 – нульова матриця розмірності n.

За означенням матричної експоненти $e^0 = I$, тому отримуємо, що $e^A e^{-A} = I$, до того ж $e^{-A} e^A = I$, тому з означення оберненої матриці

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

Властивість 4 [11, с. 636] Для довільної матриці $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}.$$

Доведення. Користуючись рівномірною збіжністю за t ряду (2.2) отримуємо

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n = A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(At)^{n-1}}{(n-1)!} = A \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m A^m}{m!} = Ae^{At}.$$

Властивість 5 Для довільної матриці $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$e^{A^T} = (e^A)^T.$$

Доведення. Використовуючи властивості матриць отримуємо, що

$$(e^A)^T = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\right)^T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^n)^T}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^T)^n}{n!} = e^{A^T}.$$

Властивість 6 Експоненти подібних матриць є подібними матрицями, тобто, якщо $A = HBH^{-1}$, то $e^{At} = He^{Bt}H^{-1}$.

Доведення.

$$A^n = (HBH^{-1})^n = (HBH^{-1})(HBH^{-1})\dots(HBH^{-1}) = HB^nH^{-1}.$$

Тепер визначимо матричну експоненту як

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nHB^nH^{-1}}{n!} = H\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nB^n}{n!}H^{-1} = He^{Bt}H^{-1}.$$

2.2 Застосування матричної експоненти для розв’язку систем однорідних лінійних диференціальних рівнянь

Матричну експоненту можна успішно використовувати для розв'язування систем диференціальних рівнянь.

Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь, яку в матричній формі можна записати так:

$$y^{(1)}(t) = Ay(t), \qquad (2.3)$$

де $y(t)$ – n – вимірний вектор функцій зі змінною t;

$y^{(1)}(t)$ – n – вимірний вектор похідних цих функцій;

$A(t)$ – матриця $n \times n$ коефіцієнтів.

Задача, що полягає в пошуку розв'язку (інтеграла) диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам (початковим даним), називається задачею Коші. Задача Коші зазвичай з’являється в аналізі процесів, визначених диференціальним законом і початковим станом, сформульованим математично в термінах диференціального рівняння і початкової умови.

Розглянемо однорідну задачу Коші матричного лінійного диференціального рівняння (2.3) з доданою початковою умовою

$$\begin{cases} y^{(1)}(t) = Ay(t), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{2.4}$$

де $y(0) = y_0$ – початкові умови.

Здійснимо диференціювання обох частин рівняння відносно t [7]:

$$\begin{aligned} &y^{(2)}(t) = Ay^{(1)}(t) = A^2 y(t), \\ &y^{(3)}(t) = Ay^{(2)}(t) = A^3 y(t), \\ &\vdots \\ &y^{(j)}(t) = Ay^{(j-1)}(t) = A^j y(t), \end{aligned}$$

де $y^{(j)}(t)$ – j-та похідна функції $y(t)$.

Таким чином, аналітичний розв’язок системи диференціальних рівнянь (2.4) можна записати наступним чином:

$$y(t) = y(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y^{(j)}(0)}{j!} t^j = \frac{t^0}{0!} A^0 y(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j y(0) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (At)^j \right) y_0.$$

В отриманому розв’язку один з множників є степеневим рядом функції від матриці, який визначений як (2.2), тобто є матричною експонентою e^{At}. Тому даний розв’язок можна записати так:

$$y(t) = e^{At} y_0, \tag{2.5}$$

тобто матриця e^{At} є резольвентою даної задачі Коші.

Таким чином, розв'язок однорідної системи стає відомим, якщо обчислити відповідну матричну експоненту (у роботах [3], [8], [11]). Для його обчислення можна використовувати нескінченний ряд, який міститься у визначенні матричної експоненти (2.2). Однак часто це дозволяє нам знайти експоненту матриці лише приблизно. Щоб розв'язати задачу, матричну експоненту можна обчислити за допомогою інтерполяційного многочлена.

3 ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ МНОГОЧЛЕНІВ ДО МАТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОРІДНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ

Розглянемо наступну задачу Коші.

Знайти розв'язок однорідної системи диференціальних рівнянь з постійною матрицею в лінійній частині у формі $y(x) = e^{Ax}y^0$:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = 3y_1 + y_3 \end{cases}$$

при початкових умовах $y_1(0) = -1, y_2(0) = 3, y_3(0) = -2.$

Для матриці $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ визначимо характеристичний многочлен $\varphi(\lambda)$ за формулою

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I)\,, \tag{3.1}$$

$$\varphi(\lambda) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^3 + 3(1-\lambda) + 1 - \lambda ==$$

$$1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 3 - 3\lambda + 1 - \lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 7\lambda + 5.$$

Знайдемо корені характеристичного многочлена $\varphi(\lambda) = 0.$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 7\lambda + 5 = 0,$$

$$\text{Заміна: } \lambda = x - \tfrac{3}{-3} = x + 1,$$

$$x^3 + px + q = 0,$$

$$p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a} = -\frac{9}{3} + \frac{-7}{-1} = 7 - 3 = 4,$$

$$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = \frac{54}{-27} - \frac{-21}{3} + \frac{5}{-1} = -2 + 7 - 5 = 0,$$

$$x^3 + 4x = 0,$$

$$x(x^2 + 4) = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2i, x_3 = -2i,$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1 + 2i, \lambda_3 = 1 - 2i.$$

Оскільки власні значення матриці A є простими числами, а також степеневий ряд (2.2) має нескінченний радіус збіжності, то матричну експоненту e^{Ax} можна знайти за допомогою полінома Лагранжа (1.10).

Для обчислення матричної експоненти використаємо спрощену формулу (1.13).

$$e^{Ax} = \left(e^x \frac{(\lambda - 1 - 2i)(\lambda - 1 + 2i)}{(1 - 1 - 2i)(1 - 1 + 2i)} + \right.$$

$$+ e^{(1+2i)x} \frac{(\lambda - 1)(\lambda - 1 + 2i)}{(1 + 2i - 1)(1 + 2i - 1 + 2i)} +$$

$$\left. + e^{(1-2i)x} \frac{(\lambda - 1)(\lambda - 1 - 2i)}{(1 - 2i - 1)(1 - 2i - 1 - 2i)} \right)_{\lambda = A} =$$

$$= \left(e^x \frac{\lambda^2 - \lambda + 2i\lambda - \lambda + 1 - 2i - 2i\lambda 2i + 4}{4} + \right.$$

$$+ e^{(1+2i)x} \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 2i\lambda - \lambda + 1 - 2i}{-8} +$$

$$\left. + e^{(1-2i)x} \frac{\lambda^2 - \lambda - 2i\lambda - \lambda + 1 + 2i}{-8} \right)_{\lambda = A} = \left(e^x \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 5}{4} + \right.$$

$$\left. + e^{(1+2i)x} \frac{(\lambda^2 - 2\lambda + 2i\lambda + 1 - 2i)}{-8} + e^{(1-2i)x} \frac{\lambda^2 - 2\lambda - 2i\lambda + 1 + 2i}{-8} \right)_{\lambda = A}$$

Для подальших обчислень використаємо формули Ейлера:

$$e^{(1\pm 2i)x} = e^{x}(\cos 2x \pm i\sin 2x),$$

$$\Bigg[e^{x}\frac{\lambda^2-2\lambda+5}{4} +$$

$$+ e^{x}\Bigg(\frac{\lambda^2\cos 2x - 2\lambda\cos 2x + 2i\lambda\cos 2x + \cos 2x - 2i\cos 2x}{-8} +$$

$$+\frac{i\lambda^2\sin 2x - 2i\lambda\sin 2x - 2\lambda\sin 2x + i\sin 2x + 2\sin 2x}{-8} +$$

$$+\frac{\lambda^2\cos 2x - 2\lambda\cos 2x - 2i\lambda\cos 2x + \cos 2x + 2i\cos 2x}{-8} +$$

$$+\frac{-i\lambda^2\sin 2x + 2i\lambda\sin 2x - 2\lambda\sin 2x - i\sin 2x + 2\sin 2x}{-8}\Bigg)\Bigg]_{\lambda=A} =$$

$$= \Bigg[e^{x}\frac{\lambda^2-2\lambda+5}{4} +$$

$$+ e^{x}\Bigg(\frac{2\lambda^2\cos 2x - 4\lambda\cos 2x + 2\cos 2x - 4\lambda\sin 2x + 4\sin 2x}{-8}\Bigg)\Bigg]_{\lambda=A} =$$

$$= \Bigg(\frac{e^{x}\lambda^2}{4} - \frac{e^{x}\lambda}{2} + \frac{5e^{x}}{4} - \frac{e^{x}\lambda^2\cos 2x}{4} + \frac{e^{x}\lambda\cos 2x}{2} - \frac{e^{x}\cos 2x}{4} +$$

$$+\frac{e^{x}\lambda\sin 2x}{2} - \frac{e^{x}\sin 2x}{2}\Bigg)_{\lambda=A}.$$

Отже,

$$e^{Ax} = \left(\lambda^2 f_1(x) + \lambda f_2(x) + f_3(x)\right)_{\lambda=A},$$

де $f_1(x) = \frac{1}{4}(e^{x} - e^{x}\cos 2x), f_2(x) = \frac{1}{2}(-e^{x} + e^{x}\cos 2x + e^{x}\sin 2x),$
$f_3(x) = \frac{1}{4}(5e^{x} - e^{x}\cos 2x - 2e^{x}\sin 2x).$

Тому

$$e^{Ax} = A^2 f_1(x) + A f_2(x) + E f_3(x).$$

Оскільки $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $A^2=\begin{bmatrix}-3 & -2 & -2\\ 2 & 0 & -1\\ 6 & -3 & -2\end{bmatrix}$, то функція e^{Ax} матиме вигляд

$$e^{Ax}=\begin{bmatrix}-3f_1+f_2+f_3 & -2f_1-f_2 & -2f_1-f_2\\ 2f_1+f_2 & f_2+f_3 & -f_1\\ 6f_1+3f_2 & -3f_1 & -2f_1+f_2+f_3\end{bmatrix},$$

$$e_{11}=\frac{-3e^x+3e^x\cos 2x}{4}+\frac{-2e^x+2e^x\cos 2x+2e^x\sin 2x}{4}+$$

$$+\frac{5e^x-e^x\cos 2x-2e^x\sin 2x}{4}=\frac{4e^x\cos 2x}{4}=e^x\cos 2x,$$

$$e_{21}=\frac{2e^x-2e^x\cos 2x}{4}+\frac{-2e^x+2e^x\cos 2x+2e^x\sin 2x}{4}=\frac{2e^x\sin 2x}{4}=$$

$$=\frac{e^x\sin 2x}{2},$$

$$e_{31}=\frac{6e^x-6e^x\cos 2x}{4}+\frac{-6e^x+6e^x\cos 2x+6e^x\sin 2x}{4}=\frac{6e^x\sin 2x}{4}=$$

$$=\frac{3e^x\sin 2x}{2},$$

$$e_{12}=\frac{-2e^x+2e^x\cos 2x}{4}-\frac{-2e^x+2e^x\cos 2x+2e^x\sin 2x}{4}=-\frac{2e^x\sin 2x}{4}=$$

$$=-\frac{e^x\sin 2x}{2},$$

$$e_{22}=\frac{-2e^x+2e^x\cos 2x+2e^x\sin 2x}{4}+\frac{5e^x-e^x\cos 2x-2e^x\sin 2x}{4}=$$

$$=\frac{3e^x+e^x\cos 2x}{4},$$

$$e_{32}=\frac{-3e^x+3e^x\cos 2x}{4},$$

$$e_{13}=-\frac{e^x\sin 2x}{2},$$

$$e_{23}=\frac{-e^x+e^x\cos 2x}{4},$$

$$e_{33} = \frac{-2e^x + 2e^x\cos 2x}{4} + \frac{-2e^x + 2e^x\cos 2x + 2e^x\sin 2x}{4} +$$

$$+\frac{5e^x - e^x\cos 2x - 2e^x\sin 2x}{4} = \frac{e^x + 3e^x\cos 2x}{4},$$

$$e^{Ax} = \begin{bmatrix} e^x\cos 2x & -\frac{e^x\sin 2x}{2} & -\frac{e^x\sin 2x}{2} \\ \frac{e^x\sin 2x}{2} & \frac{3e^x + e^x\cos 2x}{4} & \frac{-e^x + e^x\cos 2x}{4} \\ \frac{3e^x\sin 2x}{2} & \frac{-3e^x + 3e^x\cos 2x}{4} & \frac{e^x + 3e^x\cos 2x}{4} \end{bmatrix}.$$

Представимо початкові умови у формі вектор-стовпця $y^0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ та знайдемо розв'язок задачі Коші $y(x) = \begin{Bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{Bmatrix}$ за формулою $y(x) = e^{Ax}y^0$:

$$\begin{bmatrix} e^x\cos 2x & -\frac{e^x\sin 2x}{2} & -\frac{e^x\sin 2x}{2} \\ \frac{e^x\sin 2x}{2} & \frac{3e^x + e^x\cos 2x}{4} & \frac{-e^x + e^x\cos 2x}{4} \\ \frac{3e^x\sin 2x}{2} & \frac{-3e^x + 3e^x\cos 2x}{4} & \frac{e^x + 3e^x\cos 2x}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$y_1(x) = -e^x\cos 2x - \frac{3e^x\sin 2x}{2} + e^x\sin 2x = -e^x\cos 2x - \frac{e^x\sin 2x}{2},$$

$$y_2(x) = -\frac{e^x\sin 2x}{2} + \frac{9e^x + 3e^x\cos 2x}{4} + \frac{2e^x - 2e^x\cos 2x}{4} =$$

$$= -\frac{e^x\sin 2x}{2} + \frac{11e^x + e^x\cos 2x}{4},$$

$$y_3(x) = -\frac{3e^x\sin 2x}{2} + \frac{-9e^x + 9e^x\cos 2x}{4} + \frac{-2e^x - 6e^x\cos 2x}{4} =$$

$$= -\frac{3e^x\sin 2x}{2} - \frac{11e^x - 3e^x\cos 2x}{4}.$$

Отже, загальним розв'язком системи однорідних диференціальних рівнянь є

$$\begin{cases} y_1(x) = -e^x \cos 2x - \dfrac{e^x \sin 2x}{2}, \\ y_2(x) = -\dfrac{e^x \sin 2x}{2} + \dfrac{11e^x + e^x \cos 2x}{4}, \\ y_3(x) = -\dfrac{3e^x \sin 2x}{2} - \dfrac{11e^x - 3e^x \cos 2x}{4}. \end{cases}$$

Розв'яжемо ще одну задачу.

Знайти розв'язок однорідної системи диференціальних рівнянь з постійною матрицею в лінійній частині у формі $y(x) = e^{Ax}y^0$:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 3y_1 - y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = 4y_1 - y_2 + 4y_3 \end{cases}$$

при початкових умовах $y_1(0) = 1, y_2(0) = -3, y_3(0) = -1$.

Для матриці $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ визначимо характеристичний многочлен $\varphi(\lambda)$ за формулою (3.1):

$$\varphi(\lambda) = \det\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 4 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) - 4 - 1 - 4(1-\lambda) + 3 - \lambda + 4 - \lambda =$$

$$= 12 - 16\lambda + 4\lambda^2 - 3\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 - 4 + 4\lambda - 2\lambda + 2 =$$

$$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 10.$$

Знайдемо корені характеристичного многочлена $\varphi(\lambda) = 0$.

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 10 = 0.$$

Раціональні корені даного многочлена – цілі. Цілі корені – дільники вільного члена, а саме: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$.

Маємо: $\varphi(1) = 0, \varphi(-1) = 36, \varphi(2) = 0, \varphi(-2) = 84, \varphi(5) = 0,$ $\varphi(-5) = 420, \varphi(10) = -360, \varphi(-10) = 1980.$

Тобто, коренями даного многочлена можуть бути $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$.

Перевіримо це твердження за наслідком з теореми Безу (рис. 3.1):

а) $\lambda_1 = 1$

$$\begin{array}{r|l} -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 10 & \lambda - 1 \\ \hline -\lambda^3 + \lambda^2 \qquad\qquad\quad & -\lambda^2 + 7\lambda - 10 \\ 7\lambda^2 - 17\lambda + 10 & \\ 7\lambda^2 - 7\lambda \quad\;\; & \\ -10\lambda + 10 & \\ -10\lambda + 10 & \\ 0 & \end{array}$$

б) $\lambda_2 = 2$

$$\begin{array}{r|l} -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 10 & \lambda - 2 \\ \hline -\lambda^3 + 2\lambda^2 \qquad\qquad\quad & -\lambda^2 + 6\lambda - 5 \\ 6\lambda^2 - 17\lambda + 10 & \\ 6\lambda^2 - 12\lambda \quad\;\; & \\ -5\lambda + 10 & \\ -5\lambda + 10 & \\ 0 & \end{array}$$

в) $\lambda_3 = 5$

$$\begin{array}{r|l} -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 10 & \lambda - 5 \\ \hline -\lambda^3 + 5\lambda^2 \qquad\qquad\quad & -\lambda^2 + 3\lambda - 2 \\ 3\lambda^2 - 17\lambda + 10 & \\ 3\lambda^2 - 15\lambda \quad\;\; & \\ -2\lambda + 10 & \\ -2\lambda + 10 & \\ 0 & \end{array}$$

Рисунок 3.1 – Ділення характеристичного многочлена на двочлени відповідно до його можливих коренів λ

Отже, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$ є коренями характеристичного многочлена.

Оскільки власні значення матриці A є простими числами, а також степеневий ряд (2.2) має нескінченний радіус збіжності, то матричну експоненту e^{Ax} можна знайти за допомогою полінома Лагранжа (1.10).

Для обчислення матричної експоненти використаємо спрощену формулу (1.13)

$$e^{Ax} = \left(e^{x}\frac{(\lambda-2)(\lambda-5)}{(1-2)(1-5)} + e^{2x}\frac{(\lambda-1)(\lambda-5)}{(2-1)(2-5)} + e^{5x}\frac{(\lambda-2)(\lambda-1)}{(5-1)(5-2)} \right)_{\lambda=A} =$$

$$= \left(e^{x}\frac{\lambda^2-5\lambda-2\lambda+10}{4} + e^{2x}\frac{\lambda^2-\lambda-5\lambda+5}{-3} + e^{5x}\frac{\lambda^2-\lambda-2\lambda+2}{12} \right)_{\lambda=A} =$$

$$= \left(e^{x}\frac{\lambda^2-7\lambda+10}{4} + e^{2x}\frac{\lambda^2-6\lambda+5}{-3} + e^{5x}\frac{\lambda^2-3\lambda+2}{12} \right)_{\lambda=A} =$$

$$= \left(\frac{3e^{x}\lambda^2-21e^{x}\lambda+30e^{x}-4e^{2x}\lambda^2+24e^{2x}\lambda-20e^{2x}}{12} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{5x}\lambda^2-3e^{5x}\lambda+2e^{5x}}{12} \right)_{\lambda=A}.$$

Отже,

$$e^{Ax} = \left(\lambda^2 f_1(x) + \lambda f_2(x) + f_3(x)\right)_{\lambda=A},$$

де $f_1(x) = \frac{1}{12}(3e^{x}-4e^{2x}+e^{5x}), f_2(x) = \frac{1}{12}(-21e^{x}+24e^{2x}-3e^{5x}),$
$f_3(x) = \frac{1}{12}(30e^{x}-20e^{2x}+2e^{5x}).$

Тому

$$e^{Ax} = A^2 f_1(x) + A f_2(x) + E f_3(x).$$

Оскільки $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 12 & -5 & 6 \\ 8 & -1 & 6 \\ 27 & -9 & 19 \end{bmatrix}$, то функція e^{Ax} матиме вигляд

$$e^{Ax} = \begin{bmatrix} 12f_1 + 3f_2 + f_3 & -5f_1 - f_2 & 6f_1 + f_2 \\ 8f_1 + f_2 & -f_1 + f_2 + f_3 & 6f_1 + f_2 \\ 27f_1 + 4f_2 & -9f_1 - f_2 & 19f_1 + 4f_2 + f_3 \end{bmatrix},$$

$$e_{11} = \frac{36e^x - 48e^{2x} + 12e^{5x}}{12} + \frac{-63e^x + 72e^{2x} - 9e^{5x}}{12} +$$

$$+ \frac{30e^x - 20e^{2x} + 2e^{5x}}{12} = \frac{3e^x + 4e^{2x} + 5e^{5x}}{12},$$

$$e_{12} = \frac{-15e^x + 20e^{2x} - 5e^{5x}}{12} + \frac{21e^x - 24e^{2x} + 3e^{5x}}{12} = \frac{6e^x - 4e^{2x} - 2e^{5x}}{12} =$$

$$= \frac{3e^x - 2e^{2x} - e^{5x}}{6},$$

$$e_{13} = \frac{18e^x - 24e^{2x} + 6e^{5x}}{12} + \frac{-21e^x + 24e^{2x} - 3e^{5x}}{12} = \frac{-3e^x + 3e^{5x}}{12} =$$

$$= \frac{-e^x + e^{5x}}{4},$$

$$e_{21} = \frac{24e^x - 32e^{2x} + 8e^{5x}}{12} + \frac{-21e^x + 24e^{2x} - 3e^{5x}}{12} = \frac{3e^x - 8e^{2x} + 5e^{5x}}{12},$$

$$e_{22} = \frac{-3e^x + 4e^{2x} - e^{5x}}{12} + \frac{-21e^x + 24e^{2x} - 3e^{5x}}{12} + \frac{30e^x - 20e^{2x} + 2e^{5x}}{12} =$$

$$= \frac{6e^x + 8e^{2x} - 2e^{5x}}{12} = \frac{3e^x + 4e^{2x} - e^{5x}}{6},$$

$$e_{23} = \frac{-e^x + e^{5x}}{4},$$

$$e_{31} = \frac{81e^x - 108e^{2x} + 27e^{5x}}{12} + \frac{-84e^x + 96e^{2x} - 12e^{5x}}{12} =$$

$$= \frac{-3e^x - 12e^{2x} + 15e^{5x}}{12} = \frac{-e^x - 4e^{2x} + 5e^{5x}}{4},$$

$$e_{32}=\frac{-27e^{x}+36e^{2x}-9e^{5x}}{12}+\frac{21e^{x}-24e^{2x}+3e^{5x}}{12}=$$

$$=\frac{-6e^{x}+12e^{2x}-6e^{5x}}{12}=\frac{-e^{x}+2e^{2x}-e^{5x}}{2},$$

$$e_{33}=\frac{57e^{x}-76e^{2x}+19e^{5x}}{12}+\frac{-84e^{x}+96e^{2x}-12e^{5x}}{12}\ +$$

$$+\frac{30e^{x}-20e^{2x}+2e^{5x}}{12}=\frac{3e^{x}+9e^{5x}}{12}=\frac{e^{x}+3e^{5x}}{4},$$

$$e^{Ax}=\begin{bmatrix}\frac{e^{x}}{4}+\frac{e^{2x}}{3}+\frac{5e^{5x}}{12} & \frac{e^{x}}{2}-\frac{e^{2x}}{3}-\frac{e^{5x}}{6} & -\frac{e^{x}}{4}+\frac{e^{5x}}{4}\\ \frac{e^{x}}{4}-\frac{2e^{2x}}{3}+\frac{5e^{5x}}{12} & \frac{e^{x}}{2}+\frac{2e^{2x}}{3}-\frac{e^{5x}}{6} & -\frac{e^{x}}{4}+\frac{e^{5x}}{4}\\ -\frac{e^{x}}{4}-e^{2x}+\frac{5e^{5x}}{4} & -\frac{e^{x}}{2}+e^{2x}-\frac{e^{5x}}{2} & \frac{e^{x}}{4}+\frac{3e^{5x}}{4}\end{bmatrix}.$$

Представимо початкові умови у формі вектор-стовпця $y^{0}=\begin{bmatrix}1\\-3\\-1\end{bmatrix}$ та знайдемо розв'язок задачі Коші $y(x)=\begin{Bmatrix}y_1(x)\\y_2(x)\\y_3(x)\end{Bmatrix}$ за формулою $y(x)=e^{Ax}y^{0}$

$$\begin{bmatrix}\frac{e^{x}}{4}+\frac{e^{2x}}{3}+\frac{5e^{5x}}{12} & \frac{e^{x}}{2}-\frac{e^{2x}}{3}-\frac{e^{5x}}{6} & -\frac{e^{x}}{4}+\frac{e^{5x}}{4}\\ \frac{e^{x}}{4}-\frac{2e^{2x}}{3}+\frac{5e^{5x}}{12} & \frac{e^{x}}{2}+\frac{2e^{2x}}{3}-\frac{e^{5x}}{6} & -\frac{e^{x}}{4}+\frac{e^{5x}}{4}\\ -\frac{e^{x}}{4}-e^{2x}+\frac{5e^{5x}}{4} & -\frac{e^{x}}{2}+e^{2x}-\frac{e^{5x}}{2} & \frac{e^{x}}{4}+\frac{3e^{5x}}{4}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-3\\-1\end{bmatrix},$$

$$y_1(x)=\frac{e^{x}}{4}+\frac{e^{2x}}{3}+\frac{5e^{5x}}{12}-\frac{3e^{x}}{2}+e^{2x}+\frac{e^{5x}}{2}+\frac{e^{x}}{4}-\frac{e^{5x}}{4}=-e^{x}+\frac{4e^{2x}}{3}+\frac{2e^{5x}}{3},$$

$$y_2(x)=\frac{e^{x}}{4}-\frac{2e^{2x}}{3}+\frac{5e^{5x}}{12}-\frac{3e^{x}}{2}-2e^{2x}+\frac{e^{5x}}{2}+\frac{e^{x}}{4}-\frac{e^{5x}}{4}=$$

$$=-e^{x}-\frac{8e^{2x}}{3}+\frac{2e^{5x}}{3},$$

$$y_3(x) = -\frac{e^x}{4} - e^{2x} + \frac{5e^{5x}}{4} + \frac{3e^x}{2} - 3e^{2x} + \frac{3e^{5x}}{2} - \frac{e^x}{4} - \frac{3e^{5x}}{4} =$$
$$= e^x - 4e^{2x} + 2e^{5x}.$$

Отже, загальним розв'язком системи однорідних диференціальних рівнянь є

$$\begin{cases} y_1(x) = -e^x + \dfrac{4e^{2x}}{3} + \dfrac{2e^{5x}}{3}, \\ y_2(x) = -e^x - \dfrac{8e^{2x}}{3} + \dfrac{2e^{5x}}{3}, \\ y_3(x) = e^x - 4e^{2x} + 2e^{5x}. \end{cases}$$

Розв'язані у цьому розділі задачі дають змогу зробити висновок, що використання матричної експоненти полегшує розв'язання систем однорідних диференціальних рівнянь.

Знаходження матричної експоненти здійснено за допомогою полінома Лагранжа. Цей спосіб дозволяє знайти точне визначення матричної експоненти легше та без громіздких обчислень.

ВИСНОВКИ

Матричні функції мають широкий спектр застосувань у різних сферах науки та техніки, а саме диференціальні обчислення, побудова стохастичних моделей, теорії керування, фізиці, задачах оптимізації тощо.

Визначити функцію від матриці можна багатьма способами, що дає можливості обрати саме той спосіб, який буде доречним та ефективним для використання в окремих задачах моделювання та аналізу.

Ефективність обчислень у великих обсягах даних, точність моделювання складних систем, інтеграція з міждисциплінарними дослідженнями, а також застосування до сучасних технологічних викликів, таких як квантові обчислення та Інтернет речей, свідчать про великий потенціал і важливість розвитку саме інтерполяційних методів для матричних функцій.

Дана робота висвітлила теоретичні аспекти та приклади застосування інтерполяційних методів до матричних функцій. На прикладі однорідної задачі Коші було продемонстровано зручність використання інтерполяційних многочленів до матричних функцій, зокрема матричної експоненти.

Розвиток цього напрямку досліджень може сприяти покращенню якості обчислень та розв'язанню завдань різноманітних галузей, визначаючи нові можливості для наукових відкриттів та практичних застосувань.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Луценко А. В., Скорик В. О. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими матрицями : методичний посібник з курсу «Диференціальні рівняння». Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2013. 24 с.

2. Маринець К. В. Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи диференціальних рівнянь першого порядку : навч. посіб. з курсу «Диференціальні рівняння». Ч. ІІ. Ужгород : Говерла, 2017. С. 76-82.

3. Bruce Ikenaga The Exponential of a Matrix: website. URL: https://sites.millersville.edu/bikenaga/linear-algebra/matrix-exponential/matrix-exponential.html (дата звернення 30.06.2023).

4. Gene Howard Golub, Charles F. Van Loan Matrix Computations. Baltimore and London : JHU Press, 2013. 756 p.

5. Higham, Nicholas J. Functions of Matrices : handbook of Linear Algebra / in L. Hogben, editor, second edition. Boca Raton : Chapman and Hall/CRC, 2014, P. 1-4. URL: https://eprints.maths.manchester.ac.uk/2109/1/fm2_final_njh.pdf (дата звернення 24.07.2023).

6. Higham, Nicholas J. Functions of Matrices: Theory and Computation. Philadelphia : SIAM, 2008. 445 p.

7. Marco Taboga Matrix function : lectures on matrix algebra. URL: https://www.statlect.com/matrix-algebra/matrix-function (дата звернення 14.08.2023).

8. Method of Matrix Exponential: website. URL: https://math24.net/method-matrix-exponential.html (дата звернення 21.10.2023).

9. Richard A. Brualdi, Dragos Cvetkovic A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Applications. Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2009. 288 p.

10. Sheldon Axler Linear Algebra Done Right. 3rd edition, New York : Springer, 2014. 357 p.

11. Stephen W. Goode and Scott A. Annin Differential equations and linear algebra. 4th edition, California State University, Fullerton : PEARSON, 2016. 864 p.

12. W. Keith Nicholson Linear Algebra with Applications. Version 2021A, Calgary : Lyryx Learning Inc., 2020. 688 p.