

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: «РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ
ПРУЖНОСТІ ЗА ДОПОМОГОЮ СУБПАРАМЕТРИЧНИХ
СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ»

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1132

спеціальності 113 Прикладна математика
(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми Прикладна математика
(назва освітньої програми)

А. О. Данильченко

(ініціали та прізвище)

Керівник завідувач кафедри фундаментальної та прикладної
математики, професор, д.т.н. Гребенюк С.М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент декан математичного факультету, професор, д.т.н.
Гоменюк С.І.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя

2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 113 Прикладна математика

(шифр і назва)

Освітня програма Прикладна математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної та прикладної
математики, професор, д.т.н.

Гребенюк С.М.
(підпис)

« » 2023 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

Данильченко Аліні Олегівні

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Розв'язання плоскої задачі теорії пружності за допомогою субпараметричних скінченних елементів

керівник роботи (проекту) Гребенюк Сергій Миколайович, професор, д.т.н.

(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « » 2023 року №

2. Строк подання студентом роботи

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.

2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

1.

2.

Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	17.05.2023	
2.	Збір вихідних даних.	16.06.2023	
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	15.09.2023	
4.	Розробка програмного забезпечення	10.10.2023	
5.	Опис алгоритмів та реалізації програмного забезпечення	21.11.2023	
6.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	27.11.2023	
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	12.12.2023	

Студентка _____
(підпис)

А.О. Данильченко _____
(ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____
(підпис)

С. М. Гребенюк _____
(ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____

О. Г. Спиця _____

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Розв'язання плоскої задачі теорії пружності за допомогою субпараметричних скінченних елементів»: 45 с., 13 рис., 10 джерел.

Предмет дослідження – субпараметричні двовимірні скінченні елементи.

Об'єкт дослідження – підходи та програмна реалізація методу розв'язання плоскої задачі теорії пружності на основі субпараметричних скінченних елементів.

Мета роботи: розробити чисельні підходи та програмне забезпечення для розв'язання плоску задачу теорії пружності за допомогою субпараметричних скінченних елементів.

Метод дослідження – аналітичний, чисельний, порівняльний.

Дослідження зосереджене на використанні субпараметричних скінченних елементів для розв'язання плоских задач теорії пружності. Розглянуто основні види плоских скінченних елементів. Наведені співвідношення для апроксимуючих функцій для кожного типу плоских скінченних елементів. На основі субпараметричного скінченного елемента розроблено підхід для розв'язання плоских задач теорії пружності, який реалізовано у вигляді пакету програм. За допомогою розробленого програмного забезпечення при розрахунках та проектуванні можна значно знизити обчислювальні витрати без зменшення точності розрахунків.

Дослідження продемонструвало ефективність застосування субпараметричних скінченних елементів на прикладі розрахунку напружено-деформованого стану консольної балки.

Ключові слова: метод скінченних елементів, ступені свободи, вузлові сили, переміщення, деформація, пружність, субпараметричний елемент.

SUMMARY

Master's Qualification Theses "Solving the plane problem of elasticity theory using subparametric finite elements": 45 pages, 13 figures, 10 sources.

The subject of research is subparametric two-dimensional finite elements.

The object of research is the approaches and software implementation of the method of solving the flat problem of the theory of elasticity using subparametric finite elements.

The purpose of the work: to develop numerical approaches and software, with the help of which the user will be able to solve the plane problem of the theory of elasticity with the help of subparametric finite elements.

The research method is analytical, numerical, comparative.

The research is focused on the use of subparametric finite elements for solving flat problems of the theory of elasticity. The main types of flat finite elements are considered. The relations for approximating functions for each type of plane finite elements are given. On the basis of a subparametric finite element, an approach for solving flat problems of the theory of elasticity has been developed, which is implemented in the form of a program package. With the help of developed software during calculations and design, it is possible to significantly reduce computational costs without reducing the accuracy of calculations.

The study demonstrated the effectiveness of using subparametric finite elements on the example of calculating the stress-strain state of a cantilever beam..

Key words: finite element method, degrees of freedom, nodal forces, displacement, deformation, elasticity, subparametric element.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	2
Реферат	4
Summary.....	5
Скорочення та умовні позначки.....	7
Вступ.....	8
1 Теоретичний огляд основних понять та методів розв'язання плоских задач теорії пружності	10
1.1 Основні рівняння теорії пружності. Узагальнений закон Гука	11
1.2 Огляд основних методів розв'язання рівнянь теорії пружності.....	14
2 Метод скінчених елементів для розв'язання плоскої задачі пружності	18
2.1 Ідея методу та основні типи скінчених елементів.....	18
2.2 Ідеалізація за допомогою скінчених елементів	20
2.3 Вузлові сили та переміщення	23
2.4 Ступені свободи та апроксимації	26
2.4.1 Трикутник з вузлами у вершинах.....	28
2.4.2 Шестивузловий трикутник	29
2.4.3 Прямокутник з вузлами у вершинах	31
2.4.4 Восьмивузловий прямокутник.....	31
3 Опис програмної реалізації.....	34
Перелік посилань	40

СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАКИ

МСЕ – Метод скінченних елементів

СЕ – скінченні елементи

ВСТУП

Теорія пружності – це розділ механіки, який використовується для аналізу деформації та напружень об'єктів у спокої або в русі під впливом навантажень.

В свою чергу плоска задача теорії пружності теоретично об'єднує два різні фізично явища: загальний плоский напружений стан та плоску деформацію. Ця задача є основною задачею в галузі механіки матеріалів і структурної механіки. Вона спрямована на аналіз деформацій і напружень матеріалів у плоскому (двовимірному) просторі. Ця область охоплює важливі сценарії, такі як деформація пластин, напруження балок та інших структурних елементів, які працюють в одній площині.

Метою цієї кваліфікаційної роботи є розробка та реалізація чисельного підходу розв'язання плоскої задачі теорії пружності з використанням субпараметричних скінченних елементів. Основними завданнями роботи можна відзначити: дослідження сучасних підходів та теоретичних аспектів теорії пружності, включаючи основні рівняння та методи розв'язання плоских задач, реалізація розроблених субпараметричних скінченних елементів у програмному забезпеченні, яке дозволить чисельно розв'язувати плоскі задачі теорії пружності, аналіз можливих областей застосування розробленого методу та визначення його переваг у вирішенні практичних інженерних завдань.

Актуальність роботи полягає в кількох ключових аспектах: підвищення точності моделювання, зменшення обчислювальних витрат, застосування в складних геометріях. З впровадженням субпараметричних скінченних елементів можна отримати більш точні результати в розв'язанні плоских задач теорії пружності. Це особливо важливо для сучасних інженерних застосувань, де точність дуже важлива. Субпараметричні скінченні елементи дозволяють більш ефективно моделювати складні геометричні форми, такі як порожнисті тіла,

отвори, та інші нелінійні геометричні об'єкти. Крім того застосування даного методу може зменшити обчислювальні витрати, оскільки він дозволяє використовувати більший розмір елементів при збереженні точності розрахунків.

Дана робота містить декілька розділів. Перший розділ включає в себе теоретичний огляд поставленої задачі, огляд основних типів скінченних елементів та їх застосування в чисельних розрахунках. Другий розділ висвітлює математичне підґрунтя, що включає в себе постановку математичної задачі, рівняння теорії пружності та властивості субпараметричних скінченних елементів. І третій розділ присвячений програмній реалізації методу скінченних субпараметричних елементів.

1 ТЕОРЕТИЧНИЙ ОГЛЯД ОСНОВНИХ ПОНЯТЬ ТА МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Головною метою теорії пружності є формулювання математичної постановки для механічних задач, пов'язаних з деформацією тіл, та їх розв'язання. Ця задача включає аналіз стану напружень, деформацій та використання законів термодинаміки для встановлення взаємозв'язку між цими фізичними величинами. Синтез результатів цього аналізу дозволяє сформулювати загальні рівняння, які враховують теплові та механічні аспекти, відомі як рівняння пружності, термопружності тощо.

Задачу визначення напружено-деформованого стану можна представити у вигляді диференціальних рівнянь або у формі задач оптимізації (мінімакських задач). Це формулювання виконується за допомогою варіаційних принципів, які є основою теорії пружності.

Після математичного викладу задачі теорії пружності досліджуються її загальні властивості, і розглядаються загальні розв'язки для таких задач. Оскільки в загальному вигляді задачі мають обмежені можливості щодо розв'язку, то для аналізу ключових ситуацій і отримання практичних результатів розглядаються спеціалізовані задачі, які хоча і досить загальні, але специфічні. Це звуження області дослідження дає можливість подальшого розширення розуміння задач. Серед таких спеціалізованих задач можна відзначити осесиметричну задачу теорії пружності, плоску задачу теорії пружності та задачу Сен-Венана. Такий спосіб представлення теорії пружності повинен розвивати глибоке наукове розуміння дослідників та їх здатність вибирати методи та вирішувати практичні завдання.

1.1 Основні рівняння теорії пружності. Узагальнений закон Гука

Головною метою теорії пружності є визначення змін форми твердого тіла, які воно зазнає під впливом заданих зовнішніх сил, та внутрішніх сил пружності, які виникають між частинами тіла при таких змінах форми. У такому загальному контексті задача теорії пружності ще не має повного розв'язку, проте існує кілька досить детально вивчених часткових випадків, результати яких можуть бути використані при розв'язанні важливих технічних завдань, коли потрібно визначати міцнісні характеристики деталей машин і конструкцій.

Для встановлення взаємозв'язку між компонентами напруження та викликаними ними компонентами деформації важливо розуміти фізичні властивості ідеального пружного тіла. Основні закони деформування базуються на експериментальних даних, отриманих на об'єктах зі значною еластичністю. Жоден експеримент не здатний прямо встановити зв'язок між напруженнями та деформаціями. Однак, засновуючись на численних експериментах з ідеальними пружними тілами, закон Гука можна використовувати у загальному вигляді для проведення розрахунків. Він припускає, що в кожній точці деформованого тіла компонента напруження є лінійною функцією деформаційної компоненти. У своїй загальній формі закон Гука не піддається безпосередньою перевірці експериментом; його вірогідність підтверджується шляхом аналізу висновків, зроблених на основі загального закону Гука.

На рисунку 1.1 представлена діаграма розтягування, яка ілюструє зв'язок між розтягуючим (нормальним) напруженням і відносним подовженням матеріальної пластини в цьому напрямку. Зовнішній вигляд цієї діаграми варіюється в залежності від матеріалу та його хімічного складу та структури. Діаграма типу "а" характеризує метали, які мають пластичні властивості, наприклад, м'яку сталь з низьким вмістом вуглецю. Початковий відрізок ОА на цій діаграмі є прямою лінією, вказуючи на пропорційний зв'язок між

напруженням в даному напрямку і відносним подовженням.

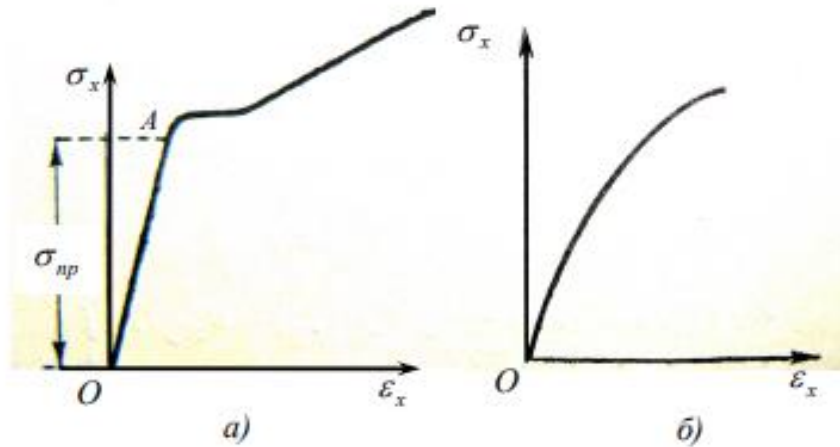


Рисунок 1.1 – Діаграма розтягування

Для матеріалів з обмеженою пластичністю або відсутністю пластичності, таких як крихкі матеріали, наприклад, твёрдосплавна сталь, чавун і камінь, діаграма розтягування не має початкового прямого відрізка. Проте для багатьох матеріалів цей відрізок може бути приблизно замінений прямою. Тому для більшості матеріалів, які піддаються розтягуванню, в межах невеликого діапазону подовження може бути застосована наступна залежність:

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E}. \quad (1.1)$$

Для даної залежності E – модуль пружності (модуль Юнга). В свою чергу модуль пружності є фізичною константою матеріалу, яку можна визначити експериментально.

Зафіксовано експериментальний закон, що встановлює взаємозв'язок між лінійними деформаціями у поздовжньому та поперечному напрямках. Якщо тіло розтягується вздовж вісі x , то одночасно відбувається його стискання у напрямках, що перпендикулярні цій вісі:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x. \quad (1.2)$$

Це співвідношення представлено як закон Пуассона, що регулює поперечне стиснення при поздовжньому подовженні, де ν позначає коефіцієнт Пуассона. Цей параметр визначається експериментально та описує властивості матеріалу. У випадку всіх металів числові значення ν зазвичай знаходяться в діапазоні між 0,25 та 0,35. Щодо ізотропних матеріалів, значення ν не перевищує 0,5.

Під час тестування на чистий зсув встановлено взаємозв'язок між тангенціальним напруженням та кутовою деформацією в площині, де це напруження виникає. Ця пропорційність має вид:

$$e_{yz} = \frac{Y_z}{G}. \quad (1.3)$$

Коефіцієнт цього взаємозв'язку, позначений як G , отримав назву модуля зсуву або другого модуля пружності. Його розмірність, подібно до розмірності першого модуля, співпадає з розмірністю напруження. Це не є самостійною пружною константою, оскільки взаємозв'язаний з модулем пружності та коефіцієнтом Пуассона за таким співвідношенням:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (1.4)$$

Виразимо взаємозв'язок між кутовими деформаціями та дотичними напруженнями під час зсуву згідно з законом Гука окремо для кожної з трьох площин, паралельних координатним площинам. Це означає, що можна мати шість формул, що відображають лінійну залежність між компонентами деформації та напруження у ізотропному пружному тілі:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad (1.7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}. \quad (1.8)$$

Ці формули відомі, як узагальнений закон Гука у прямій формі. Відповідно до цього, величини головних деформацій, тобто лінійні деформації вздовж головних напружень, можна визначити за відповідними формулами:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)], \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)], \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \quad (1.11)$$

1.2 Огляд основних методів розв'язання рівнянь теорії пружності

Можемо виділити 3 групи рівнянь теорії пружності: статичні, геометричні та фізичні.

Випишемо статичні рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho X = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho Y = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Геометричні рівняння:

а) співвідношення Коші

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (1.13)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad (1.14)$$

б) рівняння Сен-Венана:

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x}, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}. \quad (1.20)$$

Узагальнений закон Гука в прямій формі:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad (1.21)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \quad (1.22)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \gamma_{yx} = \frac{\tau_{yz}}{G}. \quad (1.23)$$

Використання даних груп рівнянь, дає можливість розв'язати загальну задачу теорії пружності, яка включає визначення напружень і деформації у ізотропному пружному тілі під впливом зовнішніх сил. Варто зауважити, що всі ці рівняння ґрунтуються на припущенні невеликих деформацій.

Повний набір рівнянь теорії пружності включає невідомі функції, які характеризують напруження, деформацію та переміщення. Необхідно передбачити ключові невідомі параметри для пріоритетного визначення, які відіграють важливу роль у знаходженні всіх інших параметрів, що визначають напружений стан і деформацію тіла.

Можна виокремити декілька способів розв'язання описаних вище задач:

Якщо основними невідомими взяти напруження задачу можна звести до визначення шести функцій

$$\begin{aligned} & \sigma_x(x, y, z), \sigma_y(x, y, z), \sigma_z(x, y, z) \\ & \tau_{xy} = \tau_{yx}(x, y, z), \tau_{xz} = \tau_{zx}(x, y, z), \tau_{yz} = \tau_{zy}(x, y, z) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Дані функції мають задовольняти рівняння рівноваги (1.12), умови спільності деформації (1.18-1.20) та умови на поверхні

$$\begin{cases} P_{nx} = \sigma_x \cos(x, n) + \tau_{xy} \cos(y, n) + \tau_{xz} \cos(z, n), \\ P_{ny} = \tau_{yx} \cos(x, n) + \sigma_y \cos(y, n) + \tau_{yz} \cos(z, n), \\ P_{nz} = \tau_{zx} \cos(x, n) + \tau_{zy} \cos(y, n) + \sigma_z \cos(z, n). \end{cases} \quad (1.25)$$

Отже, задачу, сформульовану таким чином називають першою основною (граничною) задачею теорії пружності.

Якщо основними невідомими взяти переміщення точок пружного тіла задачу можна звести до визначення трьох функцій

$$u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z). \quad (1.26)$$

Крім цього, повинні задовольнятися рівняння рівноваги (1.12) та умови на поверхні (1.25). Для досягнення цього потрібно в рівняння закону Гука підставити співвідношення Коші (1.14) у зворотному порядку, тобто виразити напруження через переміщення. Після чого отримані вирази необхідно вставити в рівняння рівноваги. Таким чином отримуємо другу основну (граничну) задачу теорії пружності.

Якщо основними невідомими взяти частину переміщень і частину напружень, то в результаті отримуємо так звану змішану задачу теорії пружності.

Зазначені три основні питання у якійсь мірі спрощують реальні фізичні проблеми. Більш точним у відображенні реальності є так звана контактна задача, що вивчає взаємний тиск між двома тілами: пружним на пружне або абсолютно тверде тіло на пружне тіло. Проблеми контакту виникають, наприклад, при обчисленні підшипників, роликів і пластин, рухомих опор ферм і балок, а також у процесі штампування на плоских поверхнях еластомерів. У всіх цих випадках також можна виявити сили, що діють між тілами.

2 МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ПРУЖНОСТІ

2.1 Ідея методу та основні типи скінченних елементів

Ідея методу скінченних елементів полягає у тому, що будь-яка постійна величина може бути наближено представлена частинами неперервної функції на основі значень цієї величини у скінченному числі вибраних елементів.

Під час побудови дискретної моделі неперервних значень отримуємо:

- область визначення розділена на обмежену кількість елементів, які мають спільні вузли та апроксимують форму області;
- вузли фіксуються в межах області аналізу;
- за допомогою значень знайденої неперервної величини у вузлових точках та функції наближення визначаються значення цієї величини всередині визначеної області.

Апроксимуючі функції часто обирають у вигляді лінійних, квадратичних або кубічних поліномів. Поліном, який пов'язаний з певним елементом, отримує назву функції елемента. З цієї точки зору, конструкцію можна розглядати як сукупність конструкційних елементів, які з'єднані у вузлові точки. Якщо відомі взаємозв'язки між силами та переміщеннями для кожного елемента, це дозволяє описати властивості та вивчити поведінку конструкції в цілому.

В той же час існує багато різних типів скінченних елементів (рис. 2.1).

Завдання розбиття тіла на СЕ неоднозначне. Так, для розрахунку ферм використовують лінійні стрижневі елементи (рис. 2.1a). Такими ж елементами можна моделювати різноманітні конструктивні елементи (пружини, стрижні, балки, рами і т.і.).

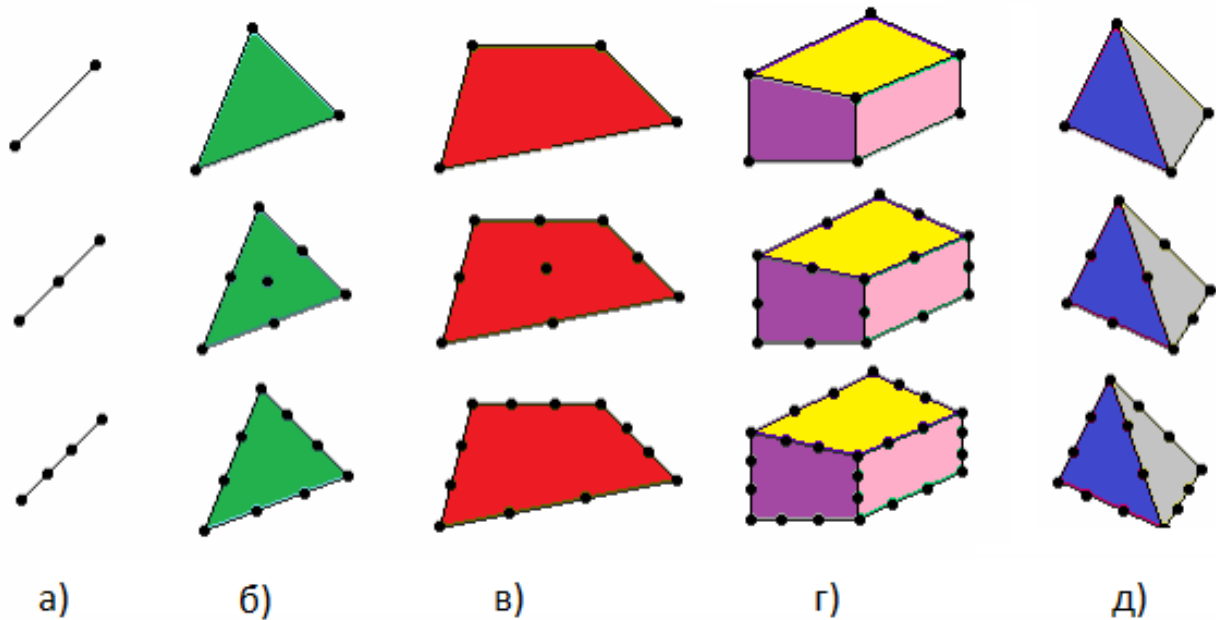


Рисунок 2.1 – Основні типи скінченних елементів

Набагато складніше вибрати тип СЕ для двовимірних чи тривимірних областей. Тут потрібно враховувати типи СЕ, що найкраще апроксимують досліджувану область.

Плоскі двовимірні елементи (рис. 2.1 б,в) застосовуються для моделювання мембран, тонких пластин, тонкостінних оболонок і т.і. В свою чергу, об'ємні тривимірні елементи (рис. 2.1 г,д) застосовуються при дослідженні об'ємного напружено деформованого стану.

Можна відзначити, що при розрахунку геометрична сторона задач є надзвичайно різноманітною.

Інженерна конструкція може бути описана як:

- комбінація стрижнів, пластин, оболонок
- тривимірний чи об'ємний об'єкт
- двовірний об'єкт (пластину, плиту або оболонку)
- стрижневу систему (ферму, балку чи раму)

Було розроблено значну кількість різноманітних скінченних елементів для

геометричного моделювання інженерних конструкцій описаних вище. Через велику кількість даних елементів важко сформулювати чітку класифікацію. Проте, можна провести загальну класифікацію на основі чотирьох основних ознак:

- розмірність простору,
- кількість вузлових точок,
- кількість ступенів свободи (можливих переміщень) у вузлі.

У науковій літературі часто використовують таке позначення для типу скінченного елемента: nDm , де n – це розмірність простору, в якому розташований скінчений елемент, m – кількість вузлових точок у елементі. Як приклад можна взяти позначення $3D9$, яке означає, що розглядається плоский скінчений елемент з дев'ятьма вузлами. Залежно від області, що описують можна виділити найчастіше використовувані різновиди скінчених елементів, а саме: стрижневі, плоскі та об'ємні.

При розрахунку тіл з осьовою симетрією використовують сімейство так званих осесиметричних скінчених елементів. Їх зазвичай відносять до двовимірних (плоских) елементів тому, що під час розрахунку даних конструкцій частіше за все розглядають їх радіальний переріз.

2.2 Ідеалізація за допомогою скінчених елементів

Під час розробки математичної моделі конструкції, геометрія цієї конструкції виражається набором простих скінчених елементів. Зміни у переміщеннях та напруженнях всередині кожного елемента також можуть бути представлені простими функціями, що мають лінійну або квадратичну форму. При вивченні з'єднань скінчених елементів напруження, що діють між ними, може вважатись еквівалентною зосередженим силам (а часом – і моментам), які

прикладені до вузлових точок з'єднання. Отже, зміщення цих точок – це ступінь свободи, яка використовується для відображення руху елемента. У вузлових силах також враховуються зовнішні розподілені навантаження, що впливають на поверхню тіла. Фіксація меж тіла також зводиться до фіксації вузлових точок. Таким чином, модель, що розраховується стає дискретною.

Поведінка реальної конструкції схематично показана на рисунку 2.2а, у той час як її скінченно-елементна модель відображена на рис. 2.2б. Ідеалізація конструкції повинна проводитися таким чином, щоб при зменшенні розмірів елементів модель відтворювала поведінку реальної конструкції.

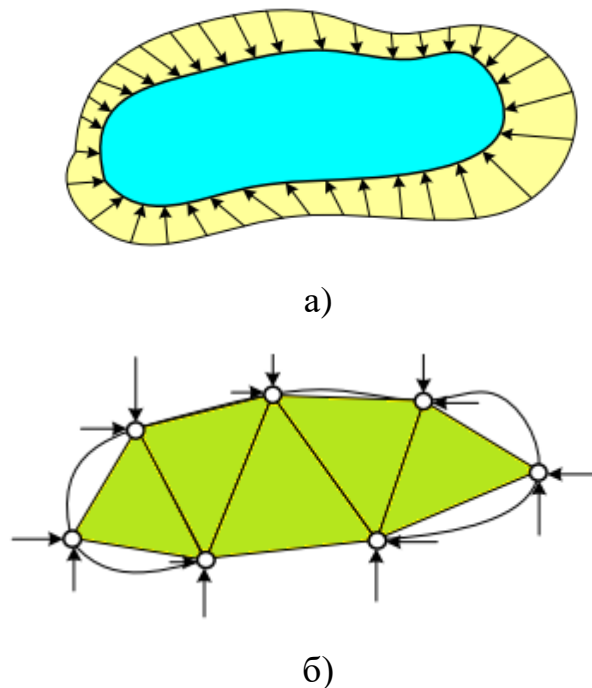


Рисунок 2.2 – Розрахункова схема тіла

Варто відзначити, що існує широко застосовуваний підхід, що базується на енергетичних або варіаційних принципах. Цей підхід розглядає основні концепції методу трохи по-іншому.

Під час застосування спрощеної моделі замість реальної конструкції можуть виникати похибки. Розглянемо, який характер вони мають. При

розв'язанні плоских або просторових задач, оскільки рівняння рівноваги та умови неперервності деформацій застосовуються лише локально – в вузлах, можливі випадки порушення неперервності деформацій чи напружень на межах між елементами.

Наприклад, на рис. 2.3 можна побачити, що при зміні переміщень в елементі за лінійним законом і рівності цих переміщень у вузлах, поля переміщень залишаються безперервними вздовж усього з'єднання. Але, якщо використовувати квадратичну функцію для переміщень всередині елемента та зберігати рівність переміщень у вузлах, можуть виникнути зазори між сторонами елементів. Ці зазори зменшуються зі зменшенням розмірів елементів. Те саме можна спостерігати при аналізі напружень, що діють вздовж сторін елементів.

Отже, при використанні методу скінчених елементів головні неточності виникають через локальні відхилення у неперервності поля переміщень (порушення неперервності деформацій) та поля напружень (рівнянь рівноваги).

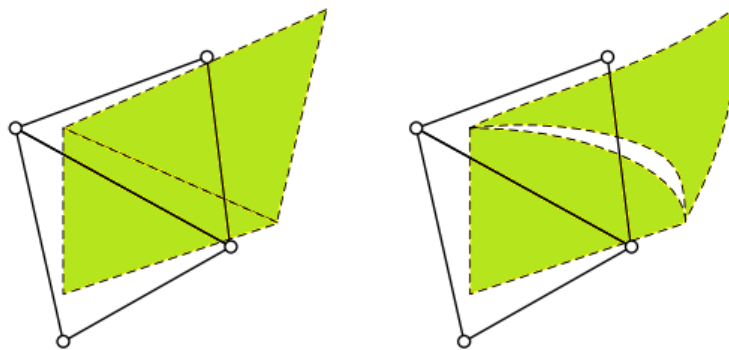


Рисунок 2.3 – Порушення неперервності

Помилки також можуть виникати внаслідок накопичення похибок при розв'язанні системи рівнянь, особливо якщо ця система має великі розміри. Мінімізація цих неточностей, що часто має технічний характер, представляє окремий напрямок досліджень.

2.3 Вузлові сили та переміщення

Надалі використовуватимемо декартову систему координат, осі якої на рис. 2.4 позначені x , y , z . Осі залишаються нерухомими під час деформації конструкції. Розглянемо елементарний об'єм із центром у точці g , який є нескінченно малим. Позначимо сили, які діють на нього F_{xg} , F_{yg} , F_{zg} . В процесі деформування конструкції точка g зміститься в точку g' .

Компоненти зміщення позначимо:

$$u_g = x'_g - x_g, v_g = y'_g - y_g, w_g = z'_g - z_g. \quad (2.1)$$

Напрямки переміщень та сил, спрямовані в додатному напрямку, відповідають вісям координат.

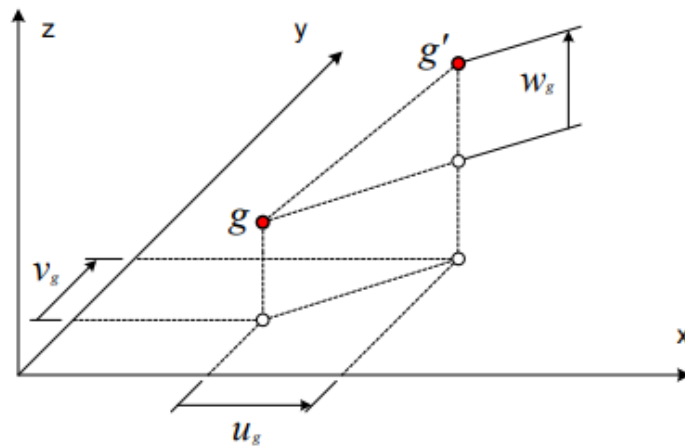


Рисунок 2.4 – Переміщення точки

Під час розв'язання задач розрахунку конструкції методом скінченних елементів, зазвичай визначають переміщення точок тіла, які відомі як вузлові. Усі зовнішні сили також замінюються зосередженими силами, що діють у вузлах. Таким чином, поведінка окремого скінченного елемента описується за допомогою компонентів сил і переміщень, заданих у вузлових точках елемента.

Розглянемо скінченний елемент який має дві вузлові точки i та j (рис. 2.5). Нехай F_{xi} , F_{yi} , F_{zi} три прикладені вузлові сили. Тоді у вузлі i три ступеня свободи з вузловими зміщеннями u_i , v_i , w_i .

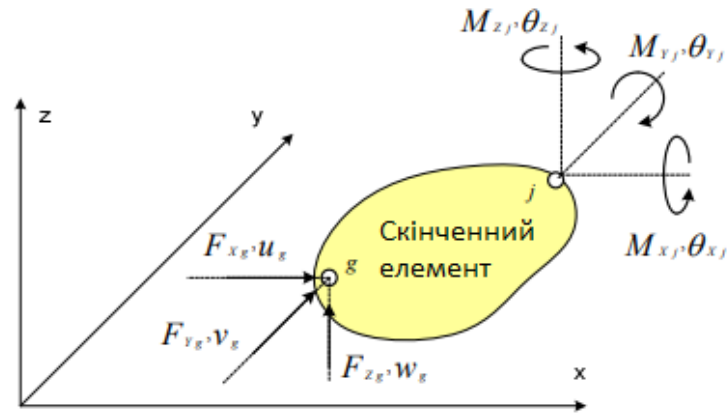


Рисунок 2.5 – Вузлові сили

В окремих задачах, таких як аналіз рам або балок, важливо враховувати навантаження у формі концентрованих моментів та визначати кути, на які повертаються при деформації поперечні перерізи. Наприклад, у вузлу j можуть діяти три концентровані моменти M_{xj} , M_{yj} , M_{zj} . Кутові зміщення позначені як θ_{xj} , θ_{yj} , θ_{zj} . Це означає, що вузол j має три ступені свободи.

Загальна кількість ступенів свободи елемента – це сума ступенів свободи всіх його вузлів, що у цьому випадку складає шість. На рис. 2.5 для скінченного елемента узагальнені вузлові сили та переміщення представлені векторами: вектором вузлових сил $\{F\}$ та вектором вузлових переміщень $\{\Delta\}$.

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \\ M_{xj} \\ M_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix}, \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix}, \quad (2.2)$$

Надалі вектори-стовпці будемо записувати в транспонованій формі, тобто у вигляді матриці-рядка:

$$\{F\}^T = \{F_{xi}, F_{yi}, F_{zi}, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}\}. \quad (2.3)$$

i -м ступенем свободи позначати окремий i -й елемент вектору вузлових переміщень $\{\Delta\}$.

У методі скінченних елементів важливо чітко розрізняти локальні та глобальні системи координат. Глобальні осі (показані осі xu на рис. 2.6) визначаються для всієї конструкції. Локальні системи координат можуть встановлюватись для окремого елемента (вісь $x'u'$ на рис. 2.6) або для окремого вузла (вісь $x''u''$ на рис. 2.6).

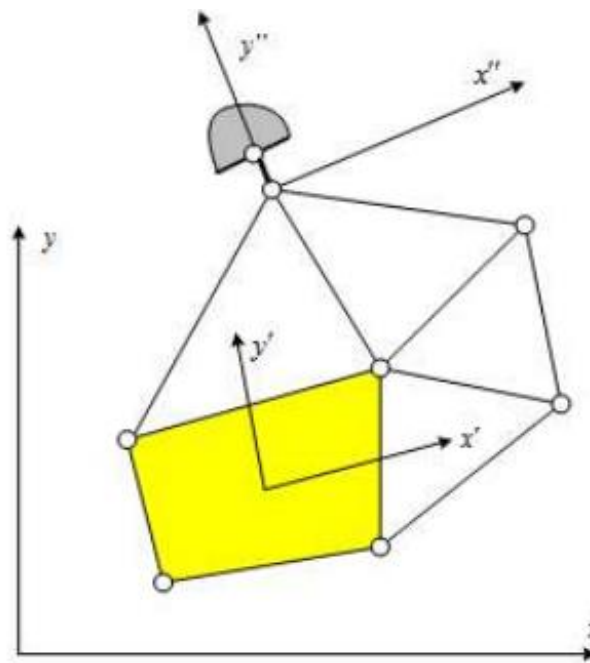


Рисунок 2.6 – Локальні та глобальні координати

Локальні координати зазвичай використовуються при формулюванні рівнянь, які відносяться до окремого елемента. Після отримання цих рівнянь

можна легко перевести сили та переміщення у глобальну систему координат. Для отримання рівнянь, що описують поведінку всієї конструкції важливою є глобальна система координат.

Нумерація вузлів у скінченному елементі зазвичай відбувається проти годинникової стрілки (як показано на рис. 2.7).

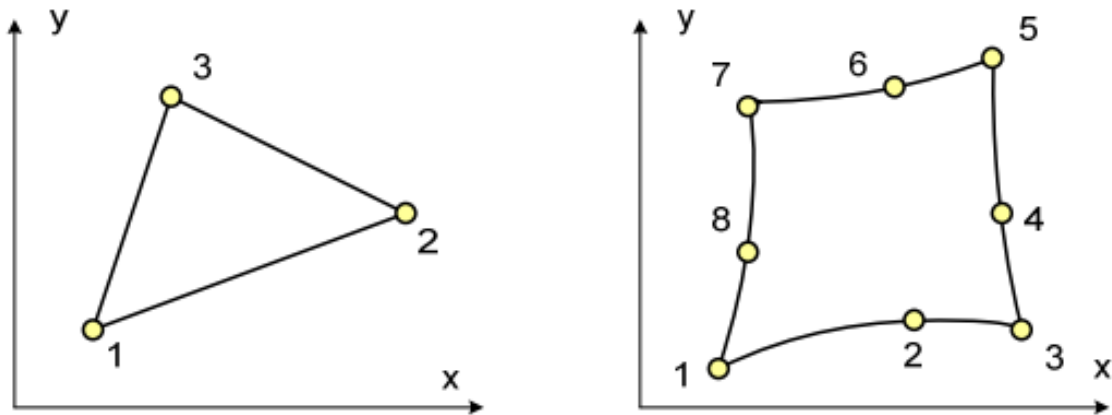


Рисунок 2.7 – Нумерація вузлів

2.4 Ступені свободи та апроксимації

Для розв'язання плоскої задачі теорії пружності, як правило, використовують скінченні елементи, які можуть мати форму трикутника, прямокутника або довільного чотирикутника. Найбільш прості елементи представлені лише вузлами, які збігаються з вершинами багатогранників. В елементах з підвищеною апроксимацією додаються вузли, розташовані на їх сторонах. Також існують різновиди скінченних елементів, де використовується внутрішня мережа вузлів, зразки яких подані на рис. 2.8. У цих випадках внутрішні вузли мають ті ж самі ступені свободи, що й вузли у вершинах області.

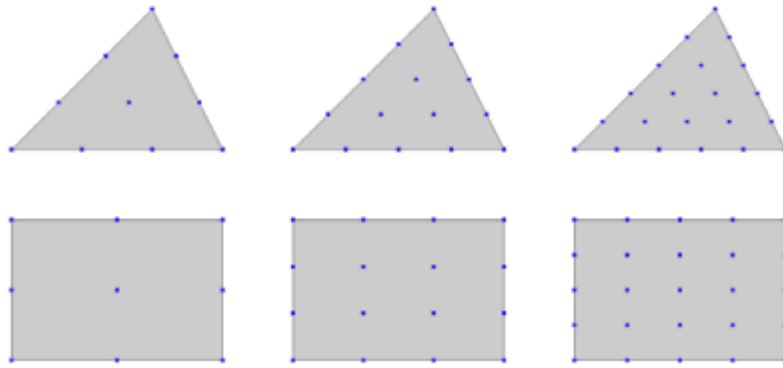


Рисунок 2.8 – Приклади плоских лагранжевих елементів

Традиційно для скінченного елемента кожен вузол має по два ступені свободи: $u_i, v_i, i=1, 2, \dots, N$, де N – кількість вузлів елемента.

При побудові більшості елементів, переміщення апроксимуються окремо по кожній координаті, використовуючи введену систему функцій.

$$\{\varphi_{ij}^r(x, y), (i) \in \Omega_r, j = 1, 2\}. \quad (2.4)$$

а поле переміщень представляється у вигляді:

$$u(x, y) = \sum_{(i) \in \Omega_r} (u_i \varphi_{i,1}^r + v_i \varphi_{i,2}^r) \quad (2.5)$$

$$\varphi_{i,1}^r = \begin{Bmatrix} \psi_i^r \\ 0 \end{Bmatrix}, \varphi_{i,2}^r = \begin{Bmatrix} 0 \\ \psi_i^r \end{Bmatrix}, i = 1, 2, \dots, N_r \quad (2.6)$$

Ступені свободи скінченних елементів складають $2N_r$, які впорядковані в певній послідовності під час побудови матриці жорсткості елемента:

$\{u_1, v_1, \dots, u_{N_r}, v_{N_r}\}$ і відповідно $\{\varphi_{1,1}^r, \varphi_{1,2}^r, \dots, \varphi_{N_r,1}^r, \varphi_{N_r,2}^r\}$.

Деякі елементи характеризуються тим, що обидві компоненти вектору переміщень не рівні нулю:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{N_r} \left\{ u_i \varphi_{i,1,u}^r(x, y) + v_i \varphi_{i,2,u}^r(x, y) \right\} \\ \left\{ u_i \varphi_{i,1,v}^r(x, y) + v_i \varphi_{i,2,v}^r(x, y) \right\},$$

$$\varphi_{i,1}^r = \begin{Bmatrix} \varphi_{i,1,u}^r \\ \varphi_{i,1,v}^r \end{Bmatrix}, \varphi_{i,2}^r = \begin{Bmatrix} \varphi_{i,2,u}^r \\ \varphi_{i,2,v}^r \end{Bmatrix}. \quad (2.7)$$

2.4.1 Трикутник з вузлами у вершинах

Найпростіший трикутний скінченний елемент зображений на рис. 2.9а.

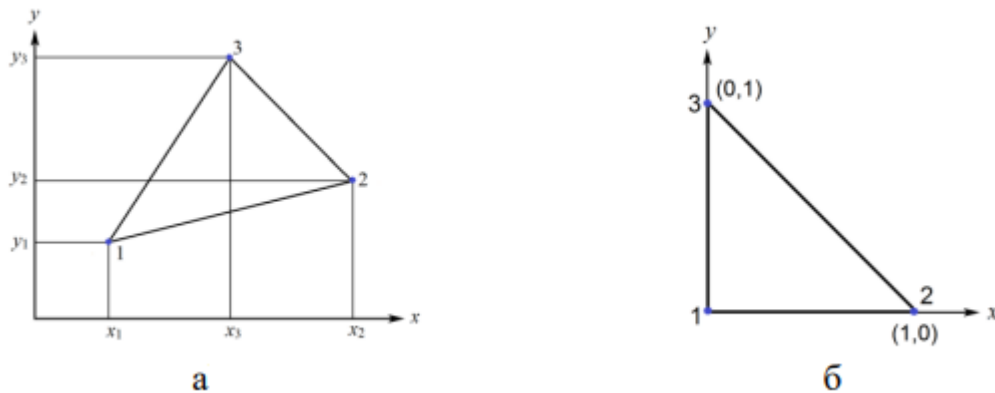


Рисунок 2.9 – Трикутник та його елемент

При побудові системи апроксимуючих функцій (2.6) поле переміщень апроксимується за лінійним законом:

$$\psi_i(x, y) = C_1^i + C_2^i x + C_3^i y. \quad (2.8)$$

На основі властивостей МСЕ складаємо систему рівнянь для однозначного визначення коефіцієнтів:

$$C_1^i + C_2^i x_j + C_3^i y_j = \delta_i^j, j = 1, 2, 3. \quad (2.9)$$

Для спрощення можна скористатися допоміжною системою координат, виконавши не ортогональне у загальному випадку перетворення з центром системи координат $\xi\eta$ у першому вузлі:

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta \end{cases} \quad (2.10)$$

Матриця Якобі:

$$J(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}, |J(\xi, \eta)| = \text{const}, \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1}(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\Psi_1 = 1 - \xi - \eta, \Psi_2 = \xi, \Psi_3 = \eta. \quad (2.12)$$

2.4.2 Шестивузловий трикутник

Трикутний скінченний елемент із 6 вузлами, у якого додатково на кожній із сторін додано ще один вузол, зображений на рис. 2.10а. Перетворення (2.10) приводить його до виду на рис. 2.10б.

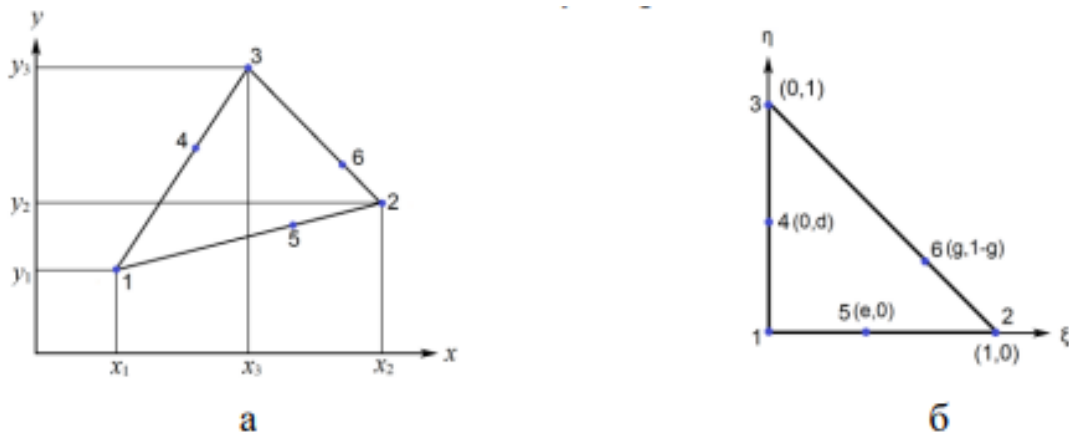


Рисунок 2.10 – Трикутник з 6-ма вузлами та його елемент

При побудові системи апроксимуючих функцій поле переміщень апроксимується за квадратичним законом

$$\Psi_i(x, y) = C_1^i + C_2^i \xi + C_3^i \eta + C_4^i \xi^2 + C_5^i \xi \eta + C_6^i \eta^2. \quad (2.13)$$

Коефіцієнти C_i^j визначаємо з рівнянь

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= (1 - \xi - \eta) \left(1 - \frac{\xi}{e} - \frac{\eta}{d}\right), & \Psi_2 &= \frac{\xi}{1 - e} \left(\xi - \frac{g - e}{1 - g} \eta - e\right), \\ \Psi_3 &= \frac{\eta}{1 - d} \left(\eta - \frac{1 - g - d}{g} \xi - d\right), & \Psi_4 &= \frac{\eta}{d(1 - d)} (1 - \xi - \eta), \\ \Psi_5 &= \frac{\xi}{e(1 - e)} (1 - \xi - \eta), & \Psi_6 &= \frac{\xi \eta}{g(1 - g)}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Якщо вузли 4-6 розташовані в серединах сторін, формули (2.14) спрощуються:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta), & \Psi_2 &= \xi(2\xi - 1), \\ \Psi_3 &= \eta(2\eta - 1), & \Psi_4 &= \eta(2\eta - 1), \\ \Psi_5 &= 4\xi(1 - \xi - \eta), & \Psi_6 &= 4\xi\eta. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Можна розглядати скінченні елементи з числом вузлів 4 і 5, коли відсутні деякі вузли на сторонах. Такі елементи застосовуються для послідовного згущення сітки. При цьому береться закон апроксимацій (2.14), а на сторонах, де відсутні проміжні вузли, додаються умови лінійності переміщень.

2.4.3 Прямокутник з вузлами у вершинах

Найпростіший прямокутний скінченний елемент зображений на рисунку 2.11а.

При перетворенні (2.10) отримуємо квадрат, зображений на рисунку 2.11б.

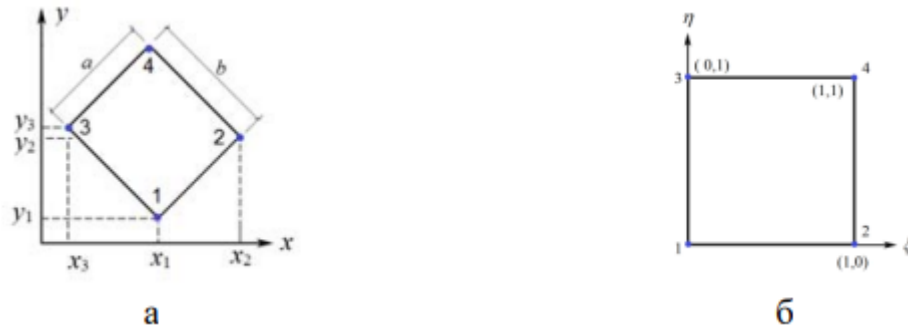


Рисунок 2.11 – Прямокутник та його елемент

При побудові системи апроксимуючих функцій (2.10) поле переміщень апроксимується за білінійним законом:

$$\Psi_i(x, y) = C_1^i + C_2^i \xi + C_3^i \eta + C_4^i \xi \eta. \quad (2.16)$$

Тоді отримуємо:

$$\Psi_1 = (1 - \xi)(1 - \eta), \Psi_2 = \xi(1 - \eta), \Psi_3 = (1 - \xi)\eta, \Psi_4 = \xi\eta. \quad (2.17)$$

2.4.4 Восьмивузловий прямокутник

Чотирикутний скінченний елемент з 8-ма вузлами, у якого додатково на кожній із сторін додано ще один вузол, зображений на рис. 2.12а. Після перетворення (33) одержуємо чотирикутник, зображений на рис. 2.12б.

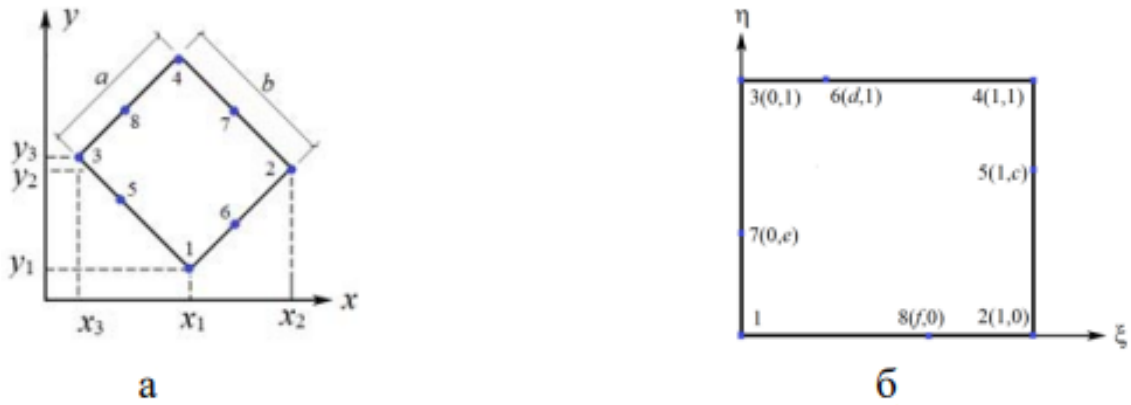


Рисунок 2.12 – 8-й вузловий чотирикутник

При побудові системи апроксимуючих функцій (2.10) поле переміщень апроксимується неповним поліномом третього ступеня, що забезпечує безперервність переміщень на лініях стикування елементів.

$$\Psi_i(x, y) = C_1^i + C_2^i \xi + C_3^i \eta + C_4^i \xi^2 + C_5^i \xi \eta + C_6^i \eta^2 + C_7^i \xi^2 \eta + C_8^i \xi \eta^2 \quad (2.18)$$

Отримуємо функції (2.5):

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= (1 - \xi)(1 - \eta) \left(1 - \frac{\xi}{b} - \frac{\eta}{a} \right), & \Psi_2 &= \xi(1 - \eta) \left(\frac{\xi - b}{1 - b} - \frac{\eta}{d} \right), \\ \Psi_3 &= (1 - \xi)\eta \left(\frac{\eta - a}{1 - a} - \frac{\xi}{c} \right), & \Psi_4 &= \xi\eta \left(\frac{\xi - c}{1 - c} - \frac{\eta - a}{a - 1} \right), \\ \Psi_5 &= (1 - \xi) \frac{\eta(1 - \eta)}{a(1 - a)}, & \Psi_6 &= \frac{\xi(1 - \xi)}{b(1 - b)} (1 - \eta), \\ \Psi_7 &= \xi \frac{\eta(1 - \eta)}{c(1 - c)}, & \Psi_8 &= \frac{\xi(1 - \xi)}{d(1 - d)} \eta. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Якщо вузли 5-8 розташовані на серединах сторін, то:

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta), & \Psi_2 &= \xi(1 - \eta)(2\xi - 2\eta - 1) \\
\Psi_3 &= (1 - \xi)\eta(2\eta - 2\xi - 1) & \Psi_4 &= \xi\eta(2\eta + 2\xi - 3) \\
\Psi_5 &= 4(1 - \xi)\eta(1 - \eta) & \Psi_6 &= 4\xi(1 - \xi)(1 - \eta) \\
\Psi_7 &= 4\xi\eta(1 - \eta) & \Psi_8 &= 4\xi(1 - \xi)\eta
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Можна розглядати скінченні елементи з числом вузлів від 5 до 7, коли відсутні деякі вузли на сторонах. Для цього береться закон апроксимацій (2.19), а на сторонах, де відсутні проміжні вузли, розглядаються умови лінійності переміщень. Як і в трикутних елементи, додаткові вузли застосовуються для послідовного згущення сітки.

2.4.5 Субпараметричні скінченні елементи

У багатьох випадках межі конструкції являють собою комбінацію відрізків прямих ліній (у двовимірному) та частин площин (у просторовому). Тому при розбитті таких конструкцій немає сенсу задавати геометрію скінченних елементів у вигляді кривих (другого, третього і т.і. порядків) або частин поверхонь. Але для таких конструкцій є актуальним покращення рівня апроксимації шуканої функції. В такому випадку в нагоді стають субпараметричні скінченні елементи, що дає змогу у деяких випадках зменшити обчислювальні витрати без зменшення точності отриманих результатів розрахунку.

Так, наприклад, якщо використовувати для розрахунків трикутний субпараметричний скінченний елемент, то можна як апроксимуючі функції для геометричного опису взяти функції (2.12), а для апроксимації невідомої функції – функції (2.15). При використанні чотирикутного субпараметричного скінченного елемента для геометричного опису можна взяти функції (2.17), а для апроксимації невідомої функції – функції (2.20).

3 ОПИС ПРОГРАМНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ

Розв'язання плоскої задачі теорії пружності через субпараметричні скінченні елементи становить важливий аспект у чисельному аналізі механічних конструкцій. Практична частина даної роботи присвячена створенню програми для реалізації даного методу, зокрема використовуючи субпараметричні елементи, що дозволяють адекватно моделювати поведінку та деформації матеріалу за впливом зовнішніх навантажень.

У даній роботі використовується підхід, що базується на використанні скінченних елементів для моделювання поведінки пружних матеріалів у плоскому напрямку. Одним із ключових аспектів роботи є реалізація алгоритмів обчислення, які використовують елементи для апроксимації переміщень та напружень у пружних тілах. Програмна частина цього дослідження базується на реалізації розробленого алгоритму в середовищі програмування, яке дозволяє проводити чисельні експерименти з різноманітними умовами та параметрами. В цій роботі ставиться завдання не лише реалізації цих елементів у програмному забезпеченні, але й подальший аналіз отриманих результатів.

Перед програмною реалізацією було виконано аналіз теорії пружності та основних концепцій МСЕ. Цей аналіз включав вивчення математичних основ теорії, таких як рівняння рівноваги, закони Гука, та їх використання для опису деформацій і напружень у тілі при різних умовах навантаження.

Далі представлений детальний опис етапів реалізації програми.

```
import numpy as np
import math
from matplotlib import pyplot as plt
```

За допомогою інструкції `import` імпортує необхідні бібліотеки: `numpy`, `math` та `pyplot` з `matplotlib`.

У кодi визначено двi функцiї: «shape» та «gradshape». Цi функцiї обчислюють функцiї форми та визначення похiдних форми елементiв.

```
def shape(xi):
    x,y = tuple(xi)
    N = [(1.0-x)*(1.0-y), (1.0+x)*(1.0-y), (1.0+x)*(1.0+y), (1.0-x)*(1.0+y)]
    return 0.25*np.array(N)

def gradshape(xi):
    x,y = tuple(xi)
    dN = [[-(1.0-y), (1.0-y), (1.0+y), -(1.0+y)],
          [-(1.0-x), -(1.0+x), (1.0+x), (1.0-x)]]
    return 0.25*np.array(dN)
```

Створення сiтки: Визначаються розмiри та кiлькiсть елементiв сiтки. Обчислюються вузли сiтки, що вiдповiдають прямокутнiй дiлянкi та задається зв'язок мiж вузлами для кожного елемента.

```
mesh_nx = mesh_ex + 1
mesh_ny = mesh_ey + 1
num_nodes = mesh_nx * mesh_ny
num_elements = mesh_ex * mesh_ey
mesh_hx = mesh_lx / mesh_ex
mesh_hy = mesh_ly / mesh_ey

nodes = []
for y in np.linspace(0.0, mesh_ly, mesh_ny):
    for x in np.linspace(0.0, mesh_lx, mesh_nx):
        nodes.append([x,y])
nodes = np.array(nodes)
conn = []
for j in range(mesh_ey):
```

```

for i in range(mesh_ex):
    n0 = i + j*mesh_nx
    conn.append([n0, n0 + 1, n0 + 1 + mesh_nx, n0 + mesh_nx])

```

Модель матеріалу: Вказуються параметри матеріалу: модуль пружності (E) і коефіцієнт Пуассона (ν). Обчислюється матриця жорсткості (C) відповідно до обраної моделі плоскої деформації.

```
E = 100.0
```

```
 $\nu = 0.48$ 
```

```

C = E/(1.0+ $\nu$ )/(1.0-2.0* $\nu$ ) * np.array([[1.0- $\nu$ ,    $\nu$ ,   0.0],
      [   $\nu$ , 1.0- $\nu$ ,   0.0],
      [ 0.0, 0.0, 0.5- $\nu$ ]])

```

Створення глобальної матриці жорсткості: Обчислюється глобальна матриця жорсткості (K) для всієї конструкції. Ітерація проводиться по всіх елементах з використанням гаусової квадратури для обчислення жорсткості матриці кожного елемента. Для кожного зв'язку між вузлами формується локальна матриця жорсткості елемента, яка потім підсумовується глобальну матрицю жорсткості.

```
K = np.zeros((2*num_nodes, 2*num_nodes))
```

```
q4 = [[x/math.sqrt(3.0),y/math.sqrt(3.0)] for y in [-1.0,1.0] for x in [-1.0,1.0]]
```

```
B = np.zeros((3,8))
```

```
for c in conn:
```

```
    xIe = nodes[c,:]
```

```
    Ke = np.zeros((8,8))
```

```
    for q in q4:
```

```
        dN = gradshape(q)
```

```
        J = np.dot(dN, xIe).T
```

```
        dN = np.dot(np.linalg.inv(J), dN)
```

```
        B[0,0::2] = dN[0,:]
```

```

B[1,1::2] = dN[1,:]
B[2,0::2] = dN[1,:]
B[2,1::2] = dN[0,:]
Ke += np.dot(np.dot(B.T,C),B) * np.linalg.det(J)

```

```
for i,I in enumerate(c):
```

```
    for j,J in enumerate(c):
```

```
        K[2*I,2*J] += Ke[2*i,2*j]
```

```
        K[2*I+1,2*J] += Ke[2*i+1,2*j]
```

```
        K[2*I+1,2*J+1] += Ke[2*i+1,2*j+1]
```

```
        K[2*I,2*J+1] += Ke[2*i,2*j+1]
```

Завдання вузлових сил та граничних умов: Задаються вузлові сили та умови прикріплення конструкції. Формується вектор вузлових сил (f) з урахуванням умов завдання.

```
for i in range(num_nodes):
```

```
    if nodes[i,1] == 0.0:
```

```
        K[2*i,:] = 0.0
```

```
        K[2*i+1,:] = 0.0
```

```
        K[2*i,2*i] = 1.0
```

```
        K[2*i+1,2*i+1] = 1.0
```

```
    if nodes[i,1] == mesh_ly:
```

```
        x = nodes[i,0]
```

```
        f[2*i+1] = 20.0
```

```
    if x == 0.0 or x == mesh_lx:
```

```
        f[2*i+1] *= 0.5
```

Розв'язання системи лінійних рівнянь: Вирішується лінійна система рівнянь ($Ku = f$) методом `np.linalg.solve`. Обчислюється максимальне переміщення.

```
u = np.linalg.solve(K, f)
```

Побудова графіка переміщень: Обчислюються переміщення вузлів конструкції та формуються вектори для побудови графіка. Використовується бібліотека `matplotlib` для створення контурного графіка переміщень.

```

ux = np.reshape(u[0::2], (mesh_ny,mesh_nx))
uy = np.reshape(u[1::2], (mesh_ny,mesh_nx))
xvec = []
yvec = []
res = []
for i in range(mesh_nx):
    for j in range(mesh_ny):
        xvec.append(i*mesh_hx + ux[j,i])
        yvec.append(j*mesh_hy + uy[j,i])
        res.append(uy[j,i])
t = plt.tricontourf(yvec, xvec, res, levels=14, cmap=plt.cm.jet)
plt.scatter(yvec, xvec, marker='o', c='b', s=2)
plt.grid()
plt.colorbar(t)
plt.axis('equal')
plt.show()

```

Розглянемо балку довжиною 50 мм, шириною 10 мм і товщиною 1 мм. Ця балка деформується при перпендикулярному прикладанні сили 200 Н. Лівий край балки утримується нерухомо. Тоді, після запуску програми отримуємо два графіка (рисунок 3.1 та 3.2). На рисунку 3.2 кольором показано наскільки сильно відрізняються початкові координати розташування балки з отриманими після застосування сили. Де синій колір – координати залишились незмінними, червоними – найбільше переміщення.

Максимальне переміщення дорівнює 8.1308432019.

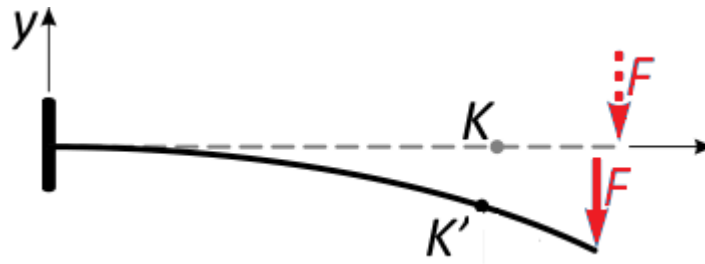


Рисунок 3.1 – Графік деформації середньої лінії заданої балки

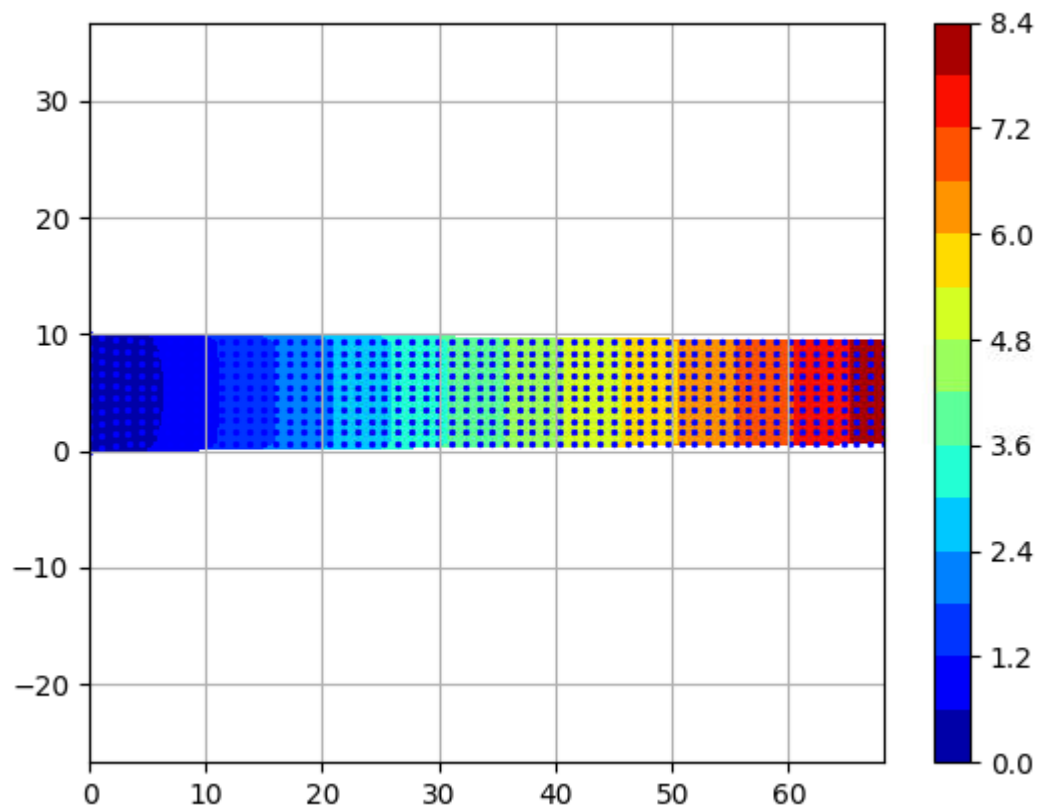


Рисунок 3.2 – Графік деформації балки

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження підтвердило високу ефективність та точність субпараметричних скінченних елементів у розв'язанні плоских задач теорії пружності. Результати роботи програмного продукту представленого у даній кваліфікаційній роботі свідчать про те, що застосування МСЕ підвищує стійкість та надійність конструкцій при навантаженнях. Отримані результати можуть бути корисними у реальних інженерних проектах, сприяючи оптимізації проектування та підвищенню безпеки конструкцій.

За допомогою використання комп'ютерних методів аналізу можна суттєво зменшити витрати на ресурси, оскільки реальні випробування замінюються віртуальними, скоротити час виробництва, підвищити якість ухвалених технологічних рішень та стійкість виробів під час експлуатації.

Під час розробки було використано спеціальний модуль `matplotlib` для графічного відображення результатів розрахунків. Був проведений огляд теорії пружності та основних понять МСЕ. Цей аналіз включав вивчення математичних основ теорії, таких як рівняння рівноваги та закони Гука, і їх використання для опису деформацій та напружень у тілі за різних умов навантаження.

Отже, дана робота вказує на потенційні напрямки подальших досліджень, зокрема у вдосконаленні методів моделювання та розширенні області застосування субпараметричних скінченних елементів.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Карпов Я. С. Соединение деталей и агрегатов из композиционных материалов. Харьков : Нац. аерокосм. ун-т “Харьк. авиац. ин-т”, 2006. 359 с.
2. Карпиловский В. С. Метод конечных элементов и задачи теории упругости. Киев : «Софія А», 2022. 275 с.
3. Павленко І. В. Метод скінчених елементів в задачах опору матеріалів і лінійної теорії пружності: Навчальний посібник. Суми : Вид-во СумДУ, 2006. 147 с.
4. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пружності. Львів : Світ, 1994. 560 с.
5. Баженов В. А., Гуляр О. І., Пискунов С. О., Сахаров О. С. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл. Київ : КНУБА, 2005. 298 с.
6. Бреславський Д. В., Коритко Ю. М., Татарінова О. А. Проектування та розробка скінченноелементного програмного забезпечення. Харків : Вид-во «Підручник НТУ "ХП"», 2017. 232 с.
7. Asadzadeh M. An Introduction to the Finite Element Method for Differential Equations. Hoboken (NJ): John Wiley & Sons, 2020. 334 p.
8. Felippa C. A. Introduction to Finite Element Methods. Boulder: University of Colorado, 2004. 791 p.
9. Larson M. G., Bengzon F. The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications. Berlin: Springer Heidelberg, 2012. 385 p.
10. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Fox D. D. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Oxford : Elsevier, 2014. 657 p.

ДОДАТОК А

Текст програми

```

import numpy as np
import math
from matplotlib import pyplot as plt
def shape(xi):
    x,y = tuple(xi)
    N = [(1.0-x)*(1.0-y), (1.0+x)*(1.0-y), (1.0+x)*(1.0+y), (1.0-x)*(1.0+y)]
    return 0.25*np.array(N)
def gradshape(xi):
    x,y = tuple(xi)
    dN = [[-(1.0-y), (1.0-y), (1.0+y), -(1.0+y)],
          [-(1.0-x), -(1.0+x), (1.0+x), (1.0-x)]]
    return 0.25*np.array(dN)
print('create mesh')
# input
mesh_ex = 9
mesh_ey = 59
mesh_lx = 10.0
mesh_ly = 60.0
# derived
mesh_nx = mesh_ex + 1
mesh_ny = mesh_ey + 1
num_nodes = mesh_nx * mesh_ny
num_elements = mesh_ex * mesh_ey
mesh_hx = mesh_lx / mesh_ex
mesh_hy = mesh_ly / mesh_ey

nodes = []
for y in np.linspace(0.0, mesh_ly, mesh_ny):
    for x in np.linspace(0.0, mesh_lx, mesh_nx):
        nodes.append([x,y])
nodes = np.array(nodes)
conn = []
for j in range(mesh_ey):
    for i in range(mesh_ex):
        n0 = i + j*mesh_nx
        conn.append([n0, n0 + 1, n0 + 1 + mesh_nx, n0 + mesh_nx])
print('material model – plane strain')
E = 100.0
v = 0.48
C = E/(1.0+v)/(1.0-2.0*v) * np.array([[1.0-v,    v,    0.0],

```

```

        [ v, 1.0-v, 0.0],
        [ 0.0, 0.0, 0.5-v]])
print('create global stiffness matrix')
K = np.zeros((2*num_nodes, 2*num_nodes))
q4 = [[x/math.sqrt(3.0),y/math.sqrt(3.0)] for y in [-1.0,1.0] for x in [-1.0,1.0]]
B = np.zeros((3,8))
for c in conn:
    xIe = nodes[c,:]
    Ke = np.zeros((8,8))
    for q in q4:
        dN = gradshape(q)
        J = np.dot(dN, xIe).T
        dN = np.dot(np.linalg.inv(J), dN)
        B[0,0::2] = dN[0,:]
        B[1,1::2] = dN[1,:]
        B[2,0::2] = dN[1,:]
        B[2,1::2] = dN[0,:]
        Ke += np.dot(np.dot(B.T,C),B) * np.linalg.det(J)
    for i,I in enumerate(c):
        for j,J in enumerate(c):
            K[2*I,2*J] += Ke[2*i,2*j]
            K[2*I+1,2*J] += Ke[2*i+1,2*j]
            K[2*I+1,2*J+1] += Ke[2*i+1,2*j+1]
            K[2*I,2*J+1] += Ke[2*i,2*j+1]
print('assign nodal forces and boundary conditions')
f = np.zeros((2*num_nodes))
for i in range(num_nodes):
    if nodes[i,1] == 0.0:
        K[2*i,:] = 0.0
        K[2*i+1,:] = 0.0
        K[2*i,2*i] = 1.0
        K[2*i+1,2*i+1] = 1.0
    if nodes[i,1] == mesh_ly:
        x = nodes[i,0]
        f[2*i+1] = 20.0
        if x == 0.0 or x == mesh_lx:
            f[2*i+1] *= 0.5
print('solving linear system')
u = np.linalg.solve(K, f)
print('max u=', max(u))
print('plotting displacement')
ux = np.reshape(u[0::2], (mesh_ny,mesh_nx))
uy = np.reshape(u[1::2], (mesh_ny,mesh_nx))
xvec = []
yvec = []
res = []
for i in range(mesh_nx):
    for j in range(mesh_ny):
        xvec.append(i*mesh_hx + ux[j,i])

```

```
yvec.append(j*mesh_hy + uy[j,i])  
res.append(uy[j,i])
```

```
t = plt.tricontourf(yvec, xvec, res, levels=14, cmap=plt.cm.jet)  
plt.scatter(yvec, xvec, marker='o', c='b', s=2)  
plt.grid()  
plt.colorbar(t)  
plt.axis('equal')  
plt.show()
```