**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**Кафедра загальної математики**

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА**

на тему: **«ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ВЗАЄМНИХ МНОГОЧЛЕНІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ»**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Виконав: студентка | 2 | курсу, групи | 8.1112-з |
| спеціальності | 111 Математика |
|  | (шифр і назва спеціальності) |
| освітньої програми | Математика |
|  | (назва освітньої програми) |
| Е.Е. Лохматова |
| (ініціали та прізвище) |
| Керівник | доцент кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Стєганцев Є.В. |
|  | (посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) |
|  |
| Рецензент | доцент кафедри фундаментальної математики, доцент, к.ф.-м.н Панасенко Є.В. |
|  | (посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) |

Запоріжжя

2023

|  |
| --- |
| **МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  |
| **ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ** |
| Факультет | математичний |
| Кафедра | фундаментальної математики |
| Рівень вищої освіти | магістр |
| Спеціальність | 111 Математика |
|  | (шифр і назва) |
| Освітня програма | Математика |

|  |
| --- |
| **ЗАТВЕРДЖУЮ**Завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики, д.т.н., професор |
|  | Гребенюк С.М. |
| (підпис) |  |
|  |
| « |  | » |  | 2023 р. |

**ЗАВДАННЯ**

**НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ (СТУДЕНТЦІ)**

|  |
| --- |
| Лохматовій Ельвірі Едуардівні |

(прізвище, ім’я та по-батькові)

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Тема роботи (проекту) | Застосування властивостей взаємних многочленів  |
| при розв’язанні задач |
|  |
| керівник роботи (проекту) | Стєганцев Євгеній Вікторович, к.ф.-м.н., доцент |
|  | (прізвище, ім’я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання) |
|  |
| затверджені наказом ЗНУ від | « | 01 | » | травня | 2023 року № | 643-с |
|  |
| 2. Строк подання студентом роботи  |  |
|  |
| 3. Вихідні дані до роботи | 1. Постановка задачі. |
| 2. Перелік літератури. |
|  |
|  |
| 4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити) |  |
| 1. Постановка задачі. |
| 2. Основні теоретичні відомості. |
| 3. Практична частина |
|  |
| 5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов’язкових креслень) |  |
| презентація |

6. Консультанти розділів роботи

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Розділ** | **Прізвище, ініціали та посада консультанта** | **Підпис, дата** |
| **завдання видав** | **завдання прийняв** |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| 7. Дата видачі завдання | 15.05.2023 |

**КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Назва етапів кваліфікаційної роботи магістра** | **Строк виконання етапів роботи** | **Примітка** |
| 1. | Розробка плану роботи. | 15.06.2023 |  |
|  |  |  |  |
| 2. | Збір вихідних даних. | 30.06.2023 |  |
|  |  |  |  |
| 3. | Обробка методичних та теоретичних  | 25.08.2023 |  |
|  | джерел. |  |  |
|  |  |  |  |
| 4. | Розробка першого та другого розділу. | 20.10.2023 |  |
|  |  |  |  |
| 5. | Розробка третього розділу. | 20.11.2023 |  |
|  |  |  |  |
| 6. | Оформлення та нормоконтроль | 01.12.2023 |  |
|  | кваліфікаційної роботи магістра. |  |  |
|  |  |  |  |
| 7. | Захист кваліфікаційної роботи магістра. | 12.12.2023 |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Студент |  |  | Е.Е. Лохматова |
|  | (підпис) |  | (ініціали та прізвище) |
|  |
| Керівник роботи  |  |  | Є.В. Стєганцев |
|  | (підпис) |  | (ініціали та прізвище) |

**Нормоконтроль пройдено**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Нормоконтролер |  |  | О.Г. Спиця |
|  | (підпис) |  | (ініціали та прізвище) |

**Реферат**

Кваліфікаційна робота магістра «Застосування властивостей взаємних многочленів при розв’язанні задач»: 47 с., 4 таблиці, 8 джерел.

 ВЗАЄМНИЙ ПОЛІНОМ, МАТРИЦЯ, НЕЗВІДНИЙ МНОГОЧЛЕН, ОБЕРНЕНИЙ МНОГОЧЛЕН , СХЕМА ГОРНЕРА.

Об’єкт дослідження – властивості взаємних многочленів, виявлення додаткових властивостей взаємних многочленів, розв’язання задач з використанням властивостей многочлена.

Мета роботи: дослідити та проаналізувати властивості взаємних многочленів, при розв’язанні задач. Продемонструвати доцільність практичного застосування певних властивостей взаємних многочленів при розв’язанні задач, які дозволяють спростити процес розв’язку і зменшити можливість обчислювальних помилок.

Метод дослідження – аналітичний.

У цій роботі було розглянуто приклади в яких встановлювали і використовували властивості взаємних та незвідних многочленів. Поняття взаємності та незвідності пов’язані, тому в деяких задачах доречно використовувати обидва поняття. Виходячи з прикладів, розв’язаних у цій роботі, можна зробити висновки про доцільність використання певних властивостей взаємних многочленів. Вони дозволяють виключити з процесу розв'язання, деякі етапи. Таким чином, при розв’язанні прикладної задачі використання відповідних властивостей взаємних поліномів дає певний виграш у часі, трудовитратах, значно знижує можливість обчислювальних помилок.

**SUMMARY**

Master's Qualification Thesis "Application of properties of reciprocal polynomials in solving problems": 47 pages, 4 tables, 8 references.

RECIPROCAL POLYNOMIAL, MATRIX, IRREDUCIBLE POLYNOMIAL, INVERSE POLYNOMIAL, HORNER’S SCHEME.

The object of the study – properties of reciprocal polynomials, identification of additional properties of reciprocal polynomials, solving problems using polynomial properties.

The aim of the study: research and analysis of the properties of reciprocal polynomials, when solving problems. Proving the expediency of practical application of certain properties of reciprocal polynomials when solving problems that allow to simplify the solution process and reduce the possibility of computational errors.

The method of research – analytical.

This paper considered examples in which the properties of reciprocal and irreducible polynomials were established and used. The concepts of reciprocity and irreducibility are related, so in some problems it is appropriate to use both concepts. Based on the examples solved in this work, it is possible to draw conclusions about the expediency of using certain properties of reciprocal polynomials. They allow you to exclude some stages from the solution process. Thus, when solving an applied problem, the use of the corresponding properties of reciprocal polynomials gives a certain gain in time, labor costs, significantly reduces the possibility of computational errors.

**ЗМІСТ**

Завдання на кваліфікаційну роботу……………………………………………...2

Реферат………………………………………………………………………….....4

Summary………………………………………………………………..............…..5

Вступ…………………………………………………………………………….…7

1. Поняття про многочлен……………………………………………...………..8
	1. Основні визначення та найпростіші властивості многочлена………..8
	2. Ділення многочленів. Схема Горнера…………………………............10
	3. Корені многочлена…………….………………………………………..15
2. Незвідні многочлени……………………………………………………….…27
3. Взаємні многочлени………………………………….…………………….…32
	1. Основні визначення та найпростіші властивості взаємних многочленів…………………………….…………………………….....32
	2. Застосування властивостей взаємних многочленів при розв’язанні задач…………………………………………………...…………...........33
	3. Використання додаткових властивостей взаємних многочленів
	у задачах зв’язку……………………………………….……………….40

Висновки…………………………………………………………………………46

Перелік посилань...………………………………………………………………47

**ВСТУП**

Важливе місце в алгебрі посідають многочлени та, зокрема, застосування многочленів при розв’язуванні рівнянь, систем рівнянь, знаходження коренів, доведення тотожностей, звільнення від ірраціональності у дробах тощо. Це говорить про широкий спектр властивостей многочленів.

Взаємні многочлени мають певні властивості, які також використовуються для розв’язання задач багатьох напрямків. Властивості взаємних многочленів пов’язані із властивостями незвідних та обернених многочленів, що дозволяє використовувати залежності між їх властивостями у процесі розв’язання задач.

Дана магістерська робота складається з вступу, трьох розділів, висновків і списку використаних джерел. Перший розділ «Поняття про многочлен» складається з трьох пунктів. Вони присвячені загальним поняттям та основним властивостям многочленів. Другий розділ «Незвідні многочлени» містить в собі приклади застосування незвідних многочленів на практиці. Цей розділ присвячений практичному використанню поняття незвідності многочленів. Наведені приклади розкладання на незвідні множники многочленена, та побудова многочлена за заданими коренями. Застосування критерія Езенштейна. Третій розділ «Взаємні многочлени» вміщує в собі основні властивості взаємних многочленів. Застосування цих властивостей при розв’язанні задач, а саме: розв’язання рівнянь, доведення незвідності многочлена, знаходження коренів характеристичного многочлена матриці. Розв’язання цих задач дозволяє зробити аналіз доцільності використання властивостей взаємних многочленів. А також використання властивостей взаємних многочленів в задачах зв’язку.

1. **ПОНЯТТЯ ПРО МНОГОЧЛЕН**
	1. **Основні визначення та найпростіші властивості многочлена**

Многочленом, або поліномом, називається вираз виду:

,

де (P – довільне числове поле), а – символ, який називається незалежною змінною, величини називаються коефіцієнтами многочлена, а вираз – членами або мономами многочлена 𝑓(𝑥), при якій – степінь монома.

Якщо , то 𝑛 називається степенем многочлена та позначається , а – його старшим членом. Коефіцієнт називається вільним членом. Многочлен 𝑓(𝑥) = 0 називається нульовим; його степінь не визначена. Многочлени 1-, 2-, 3-й степенів називаються лінійними, квадратними та кубічними відповідно. Многочлени нульового степеню разом з нульовим многочленом називають константами.

Многочлен, старший коефіцієнт якого дорівнює одиниці, називається нормованим.

Два многочлени та , рівні, якщо
.

Множину всіх многочленів з коефіцієнтами із множини позначимо А[x]. Множину всіх многочленів із P[x] можна додавати та множити. При цьому знову отримуємо многочлен із P[x].

Додавання та множення многочленів відбувається за звичайними правилами додавання та множення алгебраїчних виразів. Для визначення суми многочленів та припустимо, що (щоб це припущення виконувалося допишемо , якщо необхідно, до многочленів та необхідну кількість членів з нульовими коефіцієнтами). Тоді сума многочленів та називається многочлен:

.

Добутком многочленів та називається многочлен

,

тобто , де , або

Операції додавання та множення многочленів володіють наступними властивостями [1]

1. *=* комутативність додавання;
2. комутативність множення;
3. асоціативність додавання;
4. асоціативність множення;
5. дистрибутивність.

Операція віднімання виводиться як операція, обернена до операції додавання, а саме різницею або многочленом, отриманим в результаті віднімання многочленів , що .

У 𝑃[𝑥] константа 1 (і тільки вона) є нейтральним елементом відносно множення, тобто для будь-якого справедливо . Для многочлена оберненим називається такий многочлен ℎ(𝑥), що . Обернений многочлен, якщо він існує, позначається .

Із твердження витікає, що , звідки виходить, що обернений многочлен існує тоді і тільки тоді, коли , тобто нульова константа.

Операція ділення виконується як операція, обернена операції множення, а саме часткою або многочленом, отриманим в результаті ділення націло на , називається такий многочлен , що

**1.2 Ділення многочленів. Схема Горнера**

Нехай 𝑃 позначає довільне числове поле та , – многочлени із P[x]. Многочлен називається дільником многочлена , якщо існує многочлен , такий, що 𝑓.

Теорема про ділення з остачею. Для будь-яких многочленів , , 𝑔 (𝑥) 0, існують многочлени та такі, що , до того ж степінь менший за степінь або ж . Многочлени та визначені однозначно.

Многочлени  та називаються частка та остача відповідно. Многочлен 𝑔(𝑥) ділить 𝑓(𝑥) тоді і тільки тоді, коли .

В окремому випадку, коли , ділення легше виконувати за допомогою схеми Горнера [3].

Із рівняння .

Якщо – частка, – остача від ділення на , то або , або степінь дорівнює нулю і, відповідно

*=*. (1.1)

Не важко побачити, що коефіцієнти можуть бути отримані за формулами:

,

*,*

*,*

*…………..*,

*,*

*.* (1.2)

Для практичного використання схеми Горнера складають таблицю. Розглянемо приклад.

Приклад 1.1 Знайти частку та остачу від ділення на .

Розв'язок. Скористаємося схемою Горнера та складемо таблицю (1.1). У першому рядку, у якому стоять коефіцієнти многочлена , а в другий записуємо коефіцієнти частки та остачі, обчислюючи їх за формулами (1.2):

Таблиця 1.1 Коефіцієнти многочлена , за схемою Горнера

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | -1 | 0 | 3 |
| 2 | 2 | 3 | 6 | 15 |

Отримаємо . Частка дорівнює, остача дорівнює 15.

Для розв’язку деяких задач математичного аналізу та алгебри буває необхідно подавати многочлен по степеням , тобто подавати у вигляді:

.

Для розв’язку цієї задачі використовується наступний алгоритм:

Поділимо на з остачею. Потім поділимо частку на . Потім поділимо нову частку на і так далі. Ділення виконуємо до тих пір, поки не отримаємо у частку многочлен нульового степеня:

,

,

*…..…….*,

,

. (1.3)

Вочевидь, степінь дорівнює нулю та . Підставимо вираз для та вираз  для:

*.*

Тепер підставимо вираз для у вираз для у рівностях (1.3):

Продовжуючи і надалі цей процес, під кінець отримаємо:

.

Тепер ясно, що:

,

,

,

………,

,

. (1.4)

Приклад 1.2 Представити многочлен по степеням .

Розв’язок. Для розв’язку скористаємося наведеним вище алгоритмом. Ділення на будемо виконувати за схемою Горнера та результати одразу записувати у таблицю (1.2):

Таблиця 1.2 – Коефіцієнти за схемою Горнера

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Із формул (1.4) витікає, що коефіцієнти*, , , ,*  знаходяться на «сходинках» таблиці (1.2). Отримуємо:

 – шукане уявлення многочлена.

Представлення многочлена по степеням можна використовувати для обчислення значення многочлена та його похідних у точці .

Насправді, якщо:

Тоді, очевидно:

,

,

,

,

*…………………..*,

 (1.5)

Ці формули отримуємо за допомогою диференціювання правої та лівої частини рівності (1.1) або із формули Тейлора.

Приклад 1.3 Знайти значення многочлена

та всіх його похідних у точці .

Розв’язок. Представимо многочлен , по степеням (див. приклад 1.2). Тоді із формул (1.5) отримуємо:

,

,

,

,

Похідні більш високих порядків дорівнюють нулю.

Якщо , 𝑔(𝑥) – многочлени із та многочлен (𝑥) ∈ 𝑃[𝑥] ділить та 𝑔(𝑥) (без остачі), то (𝑥) називається спільним дільником та 𝑔(𝑥).

Найбільшим спільним дільником многочленів та 𝑔(𝑥) називається многочлен *,* що задовольняє умови:

* 1. є спільним дільником для та 𝑔(𝑥);
	2. ділиться на кожен спільний дільник та 𝑔(𝑥);
	3. старший коефіцієнт дорівнює одиниці.

Для знаходження НСД використовується алгоритм Евкліда. Остання не рівна нулю остача в алгоритмі Евкліда дорівнює НСД с точністю до постійного множника.

**1.3 Корені многочлена**

Однією з важливих задач в теорії многочленів є завдання знаходження коренів многочлена. Нехай - різні корені многочлена . Тоді ділиться на , тобто:

.

Покладемо в цій рівності . Отримаємо і, так , то . Але , тобто , а значить, . Таким чином, – корінь многочлена . Звідси випливає, що ділиться на , тобто:

.

Підставимо отриманий вираз для в рівність ). Маємо:

.

Поклавши в останньому рівність з урахуванням того, що , отримаємо, що корінь многочлена . Значить, , а тоді і т.д. Продовживши ці міркування для решти коренів ми, нарешті, отримаємо:

,

тобто доведено cформульоване вище твердження.

Якщо - різні корені многочлена , то можна представити у вигляді

.

Звідси випливає важливий наслідок:

Якщо - різні корені многочлена , то ділиться на многочлен .

Як вже відзначено, однією з важливих задач в теорії многочленів є завдання знаходження коренів многочлена. У зв'язку з цим суттєвим є питання про їх число. Якщо дано якийсь многочлен і вже знайдено, скажімо, 1 його коренів, то варто перевірити чи не має він більше коренів. У таких випадках буде доречно використати теорему, що наведена нижче.

Теорема. Число різних коренів ненульового многочлена не більше, ніж його ступінь.

Якщо коренів не має, то ясно, що теорема правильна, бо *ст*. .

Нехай тепер має коренів, причому всі вони різні. Тоді, за щойно доведеним ділиться на .. В такому випадку ст. = , тобто , а - це число коренів розглянутого многочлена.

А ось у нульового многочлена нескінченно багато коренів, адже його значення для будь-якого дорівнює . Зокрема, з цієї причини йому й не наказують ніякої певної міри.

З щойно доведеної теореми випливає таке твердження:

Якщо многочлен не є многочленом ступеня, більшою, ніж , і має більш, ніж коренів, то - нульовий многочлен.

Справді, з умов цього твердження випливає, що - нульовий многочлен, або . Якщо припустити, що многочлен не нульовий, то , і тоді має не більше, ніж коренів. Приходимо до протиріччя. Значить, - ненульовий многочлен.

Нехай і - ненульові многочлени степеня, не більше, ніж n. Якщо ці многочлени приймають однакові значення при значення змінної , то

Для доказу розглянемо многочлен Ясно, що або , або , тобто не є многочленом степеня, більше, ніж . Нехай тепер число таке, що Тоді , тобто корінь многочлена Отже, многочлен має корінь, а коли, як тільки що доведено, , тобто

Якщо і приймають однакові значення при всіх значеннях змінної , то ці многочлени тим більше рівні.

Ця теорема досить ефективно використовується при доказі деяких числових тотожностей. Доведемо, наприклад, що для будь-яких попарно різних чисел і будь-якого числа *x*.

.

Звичайно, можна перетворивши ліву частину зазначеної рівності, переконатися, що в результаті вийде . Але такий метод доведення пов'язаний з громіздкими перетвореннями. Спробуємо обійтися без них.

Будемо розглядати *x* як змінну. Тоді, як неважко помітити, в лівій частині тотожності знаходиться многочлен, який ми позначимо Мінлива *x* входить в цей многочлен найбільше в степені , тобто . в правій частині тієї ж тотожності так само многочлен: .

Знайдемо тепер значення многочленів і при Ясно, що . Далі,

.

Аналогічно . Отже,

. Бачимо, що многочлени і які не є многочленами степеня вище, ніж , приймають однакові значення при трьох різних значеннях змінної. Значить,

Виділення кратного кореня відбувається за алгоритмом:

Якщо при значенні многочлен приймає значення , то число *c* називається коренем цього многочлена.

Число *c* є коренем многочлена тоді і тільки тоді, коли ділиться на , тобто *.* Якщо при цьому ділиться на, але вже не ділиться на *,* то *c* називається кратним коренем многочлена *.* Корені кратності називаються простими коренями многочлена.

Щоб перевірити чи буде число *c* коренем многочлена і якої кратності, можна скористатися схемою Горнера . Спочатку ділиться на , потім, якщо остача дорівнює нулю, отримана частка знову ділиться на і т. д. до тих пір поки не отримаємо нульову остачу.

Приклад 1.4 Перевірити, чи є число коренем многочлена

 та знайти його кратність.

Розв’язок. Ділення на виконується за схемою Горнера

Таблиця 1.3 – Коефіцієнти за схемою Горнера

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

де корінь кратності

Нехай ,, *…*, – всі різні корені многочлена з кратностями, рівними відповідно , , …, , — старший коефіцієнт *.*Тоді:

.

Корінь многочлена кратності є коренем кратності для його похідної. Тому:

*,*

де – многочлен, який вже не має *, , …,*  в якості своїх коренів.

Звідси НСД многочленів та дорівнює:

.

Відповідно, многочлен:

має числа *, , …,*  в якості звичайних коренів.

Тепер для того, щоб знайти всі корені , достатньо знайти всі корені многочлена . Це достатньо легко зробити, так як степінь менша за степінь , коли . Побудова многочлена називається відокремленням кратних коренів многочлена .

Приклад 1.5 Відокремити кратні корені многочлена

.

Розв’язок. . Знаходимо . Для цього ділимо з остачею :



де ділиться на остачу .

Тому . Шуканий многочлен, що відокремлює кратні корені , дорівнює .

Зауважимо, що в прикладі 1.5 всі корені легко обчислити.

Задача обчислення коренів деякого многочлена часто з`являється в практиці. Відповідно основній теоремі алгебри, всі корені довільного многочлена *,* з коефіцієнтами із числового поля *P* містяться в полі комплексних чисел *C*. Однак не існує якого-небудь універсального метода обчислення цих коренів. Метод рішення цієї задачі залежить від степеня многочлена і числового поля *P*. Ми розглянемо лише основні методи рішення задачі обчислення коренів многочлена.

Шукаємо корені многочленів 3-го або 4-го ступеня:

Якщо , то для того, щоб відшукати всі корені многочлена необхідно розв’язати рівняння:

. (1.6)

Розділимо обидві частини (1.18) на . В результаті отримаємо рівняння:

, (1.7)

що має ті самі корені, що і рівняння (1.6).

Зробимо тепер заміну невідомого .

Цю заміну легше за все виконати, подаючи многочлен за степенями за допомогою схеми Горнера і виконуючи потім заміну . В результаті заміни отримаємо рівняння:

. (1.8)

Корені рівняння (1.8) знаходяться за формулою Кардан:

,

де , (корені знаходяться в полі комплексних чисел *C*).

 Використовуючи цю формулу, потрібно для кожного із трьох значень брати те значення , для якого виконується умова (таке значення завжди існує).

Якщо *,, –* всі корені рівняння (1.8), то *,* , – всі корені рівняння (1.6) і многочлена .

Приклад 1.6 Знайти корені многочлена .

Розв’язок. Розкладемо многочлен за степенями .

Припустимо , отримаємо рівняння . Його корені знаходяться за формулою ,

де , , або ,

.

Значеннями кореня є числа:

*,*

*,*

.

Відповідні їм значення другого кореня:

*,*

*,*

.

Звідси

*,*

*,*

.

Корені многочлена: *, , .*

Якщо *—* многочлен 4-ого степеня, то для обчислення його коренів достатньо мати спосіб обчислення всіх коренів рівняння виду:

. (1.9)

Спосіб Феррар розв’язання рівняння (1.9) полягає у наступному.

Ліву частину (1.9) подають у вигляді:

*,* (1.10)

а потім підбирають так, щоб вираз у квадратних дужках стало квадратом двочлена першого степеня. Для цього необхідно и достатньо щоб виконувалася умова:

. (1.11)

Із якого випливає, що є коренем допоміжного кубічного (1.11). Тепер знаходимо будь-який один корінь і, підставляючи його значення в (1.10), розкладаємо ліву частину (1.9) як різницю квадратів на множники. Задача обчислення коренів полягає тепер у рішенні двох квадратних рівнянь.

Приклад 1.7 Знайти корені многочлена .

Розв’язок. Складемо рівняння.

. (1.12)

Представимо ліву частину (1.12) у вигляді:

,  (1.13)

Підбираємо 𝜆 так, щоб дискримінант квадратного тричлена у квадратних дужках дорівнював нулю:

або

.

Можна помітити, що 4 – один із коренів цього рівняння. Тоді підставимо у (1.13) і рівняння (1.12) прийме вигляд:

або

.

Звідси, розв’язуючи рівняння та , отримаємо корені нашого многочлена:

, *, ,* .

Розглянемо раціональні корені многочленів з раціональними коефіцієнтами.

Многочлен і має такі ж корені, що і многочлен з цілими коефіцієнтами, що було отримано із , шляхом множення на спільне кратне знаменників всіх коефіцієнтів .

Якщо нескоротний дріб є коренем многочлена з цілими коефіцієнтами, то виконуються наступні умов:

* + 1. – дільник числа ;
		2. дільник числа ;
		3. для будь-якого цілого числа число є дільником числа .

Тому всі раціональні корені многочлена (якщо вони існують) потрібно шукати серед нескоротних дробів, що відповідають умовам .

Якщо , то всі раціональні корені є цілими числами.

Приклад 1.8 Знайти раціональні корені многочлена і визначити їх кратність.

Розв’язок. Якщо – нескоротний дріб, є коренем , то ділить , а ділить . Всі дільники , а дільники .

Зафіксуємо . Тоді за умовою .

У якості візьмемо та . Тоді та .

*;* ,

Числа и не є коренями. Якщо число – корінь, то та . Таку умову задовольняють . За допомогою схеми Горнера з’ясуємо, що число є коренем кратності .

Далі, зафіксуємо . Тоді та .

Перевіряти потрібно лише взаємно прості з , тобто, . Серед цих чисел умові відповідає . Перевіряючи за схемою Горнера дроби та з’ясуємо, що коренем є . Отже, – простий корінь, – корінь кратності

1. **НЕЗВІДНІ МНОГОЧЛЕНИ**

Многочлен степені з коефіцієнтами із поля *P* називається незвідний [9] над полем *P*, якщо він не може бути розкладеним на добутки многочленів степенів з коефіцієнтами із *P*. У протилежному випадку многочлен називається звідним над полем *P*.

Незвідність многочлена залежить від поля, над яким він розглядається. Так, многочлен звідний над полем *С* та над полем *R*

.

Але незвідний над полем раціональних чисел *Q*.

Многочлен вище -ого степеня, незвідний над полем *P*, не може мати корені у полі *P*. Протилежне невірне, тобто, із того, що многочлен не має корені у полі *P*, не випливає, що він незвідний над полем *P*.

Наприклад,

не має раціональних коренів, але є зведеним над *Q*.

Для многочленів степені або зворотнє вірне, а саме, справедливе твердження: многочлен степені або зведений над полем *P* тоді і тільки тоді, коли він має корінь в цьому полі.

Будь який многочлен , що має степінь , можна розкласти на добуток многочленів, незвідних над полем *P*, причому, якщо многочлен двома способами розкладено на добуток незвідних множників:

 *,*

то і, при відповідній нумерації, мають місце рівності , де .

Якщо, при розкладанні многочлена на незвідні множники, із кожного із цих множників винести за дужку старший коефіцієнт, то виходить розкладання

,

де всі , є незвідними многочленами зі старшими коефіцієнтами, рівними одиниці.

Для кожного многочлена таке розкладання вже однозначне з точністю до нумерації множників. Якщо незвідний многочлен , зустрічається у вказаному розкладанні многочлена *k* разів, то називається кратним множником многочлена *.*

Збираючи однакові незвідні множники разом, можна записати у вигляді:

, (2.1)

де , *.*

Таким чином, є – кратний множник для ,. Розкладання (2.1) називається канонічним розкладанням многочлена над полем *P*.

Більш детально розглянемо питання про незвідні многочлени над полями *R* та *C*. Необхідні міркування засновані на наступній теоремі:

Основна теорема алгебри комплексних чисел. Кожен многочлен ненульового степеня над полем *C* має хоча б один корінь у полі *C*.

З цієї теореми випливає, що над *C* незвідними є тільки многочлени першого степеня і канонічне розкладання многочлена над полем має вигляд:

 . (2.2)

Якщо многочлен з дійсними коефіцієнтами і *a* – комплексний корінь , то пов’язане з *a* число також є коренем *,* причому кратність коренів та співпадають. Якщо у розкладанні (2.2) для многочлена перемножити попарно дужки, відповідні комплексносполученим кореням , то вийде канонічне розкладання над :

.

Квадратні трьохчлени, що входять в це розкладання , не мають дійсних коренів і, відповідно незвідні над *R*.

Тому, над полем *R*, окрім многочленів -ого степеня, незвідними є також многочлени ого степеня, що не мають дійсних коренів, а усі многочлени вище ого степеня зведені.

Приклад 2.1 Розкладіть на незвідні множники многочленен:

1. над полем *C* ;
2. над полем *R*.

Розв’язок Задача зводиться до пошуку коренів цього многочлена. Корені цього многочлена знайдені у прикладі 1.6 і рівні:

.

А тоді і є розкладанням на незвідні множники над полем *C*

 – розкладання на незвідні множники над полем *R*.

Приклад 2.2 Розкладання на незвідні множники над полем R многочлен =.

Розв’язок. Корені знайдені в прикладі 1.7 . Вони дорівнюють:

Тому є розкладанням над *R*. Тут:

Приклад 2.3 Побудувати многочлен найменшого степеня з комплексними коефіцієнтами за заданими коренями: 1 – корінь кратності 3; —корені кратності 2; простий корінь.

Розв’язок.

.

Приклад 2.4 Побудувати многочлен найменшого степеня з дійсними коефіцієнтами за заданими коренями: 2 – корінь кратності 2; – прості корені.

Розв’язок.

*.*

У прикладах 2.3 та 2.4 можна перемножити дужки та отримати многочлен у звичайному записі.

Зупинимося ще на питанні про незвідні многочлени над полем раціональних чисел Q.

Нехай – многочлен з цілими коефіцієнтами.

Критерій Ейзенштейна Якщо існує просте число *p*, що задовольняє умови:

1. *p* не ділить ;
2. *p* ділить *, , ,…* ;
3. *p* не ділить ;

то многочлен незвідний над *Q*.

Якщо , то незвідний за критерієм Ейзенштейна . Незвідними над *Q* також є многочлени , . Звідси видно, що для кожного натурального існує многочлен степеня незвідний над *Q* , на відміну від полей *C* та *R*.

1. **ВЗАЄМНІ** **МНОГОЧЛЕНИ**

**3.1 Основні визначення та найпростіші властивості взаємних многочленів**

Розглянемо взаємний [многочлен](https://hmong.ru/wiki/Polynomial):

*,* (3.1)

з коефіцієнтами із довільного [поля](https://hmong.ru/wiki/Field_%28mathematics%29), його обернений многочлен або відображений многочлен, позначається або :

, (3.2)

де степінь .

Тобто коефіцієнти для є коефіцієнтами для *p* у зворотному порядку. Вони природнім чином з’являються у лінійній алгебрі, як характеристичний поліном від оберненої матриці.

Приклад

,

Властивості взаємних (відображених) многочленів.

Взаємні многочлени мають декілька зв’язків зі своїми вихідними многочленами, а саме:

1. степені вихідного та взаємного многочленів однакові;
2. перетворення многочлена у взаємний відбувається за формулою ;
3. корені взаємного многочлена обернені кореням вихідного прямого многочлена (*α* є [коренем](https://hmong.ru/wiki/Zero_of_a_function) многочлена *p* тоді и тільки тоді, коли *α−1* є коренем *p∗*);
4. взаємний многочлен до незвідного – незвідний;
5. якщо , то є [незвідним](https://hmong.ru/wiki/Irreducible_polynomial) тоді і тільки тоді , коли *р\** незвідний;
6. *p* є [примітивним](https://hmong.ru/wiki/Primitive_polynomial_%28field_theory%29) тоді і тільки тоді, коли *р\** примітивне;
7. якщо многочлен взаємний і незвідний, то він повинен мати однакову степінь.
	1. **Застосування властивостей взаємних многочленів при розв’язанні задач**

Розглянемо декілька застосувань поняття та властивостей взаємного многочлена при розв’язанні задач. Це як суто математичні застосування так і застосування при розв’язанні прикладних задач Перше з них стосується розв'язання рівнянь третього степеня.

Розглянемо рівняння третього степеня спеціального виду:

. (3.3)

Відомо, що для розв’язування рівнянь третього степеня застосовується метод Кардано [5]. Щоб безпосередньо можна було застосувати формули Кардано, необхідно привести рівняння до стандартного виду

. (3.4)

Це зазвичай здійснюється наступним чином. Спочатку ділимо праву і ліву частини рівняння на коефіцієнт , отримуємо. Далі покладемо *,* . Отримаємо рівняння:

. (3.5)

Шляхом використання заміни

, (3.6)

матимемо рівняння:

*.*

Замінивши , , отримаємо рівняння (3.4).

Ще один ефективний метод зведення рівняння виду (3.3) до стандартної форми (3.4) з’являється після залучення поняття взаємного многочлена [11]. Так, щоб знайти взаємний многочлен до многочлена треба скористатися формулою *,* де степінь многочлена.

Очевидно, що для спеціального виду рівнянь третього степеня, многочлен, взаємний до многочлена в лівій частині рівняння, після ділення на головний коефіцієнт, матиме вигляд (3.4), тобто рівняння набуде стандартного вигляду без використання заміни (3.6).

Таким чином, після зведення рівняння (3.3) до стандартного виду (3.4) і застосування формул Кардано , отримаємо корені *, ,*  рівняння (3.4).

Взаємні многочлени мають ряд корисних властивостей. Використаємо деякі з них. Зокрема, на цьому етапі знадобиться така властивість: корені взаємного многочлена обернені до коренів заданого многочлена. Застосовуючи цю властивість, одразу отримуємо корені шуканого многочлена (3.3) у вигляді:

*, ,*  .

Приклад 3.1 Розв’язати рівняння *.*

Знайдемо взаємний многочлен до многочлена , який знаходиться в лівій частині рівняння.

Отримаємо *.* Таким чином, далі будемо розглядати рівняння , поділивши праву і ліву частини якого на , отримаємо рівняння , яке має стандартний вид.

Застосуємо до нього формули Кардано і отримаємо корені y вигляді , , . Тому, застосовуючи відповідну властивість, отримуємо корені заданого рівняння:

*,* .

Розглянемо ще одну можливість застосування поняття взаємного многочлена для доведення незвідності многочлена. Як відомо, одним із найпоширеніших критеріїв для перевірки многочлена на незвідність над полем раціональних чисел є критерій Ейзенштейна [9]. Для того, щоб розпочати перевірку на незвідність за цим критерієм, необхідно знайти прості дільники вільного члена. Найчастіше виходить так, що вільний член не має простих дільників. У цьому випадку переходять до іншої змінної, наприклад за допомогою схеми Горнера . При цьому змінюється і вільний член.

Ще один спосіб підготовки многочлена до перевірки за критерієм Ейзенштейна виникає, якщо задіяти таку властивість взаємних многочленів: взаємний многочлен до незвідного – незвідний .Після того, як було знайдено многочлен, взаємний до даного, вільний член якого має найпростіші дільники, перевіряємо його на незвідність. Якщо він незвідний, то незвідним буде і заданий многочлен.

Приклад 3.2 Довести незвідність многочлена над полем раціональних чисел.

Вільний член цього многочлена не має простих дільників, отже, ми не маємо можливості розпочати перевірку на незвідність за критерієм Ейзенштейна. Побудуємо многочлен , взаємний до даного:

Число є простим дільником вільного члена многочлена . Тепер перевіряємо три умови з критерія Ейзенштейна:

1. старший коефіцієнт не ділиться на 7;
2. інші коефіцієнти діляться на 7;
3. вільний член не ділиться на .

Таким чином, многочлен незвідний над полем раціональних чисел. Згідно вищезгаданій властивості, і заданий многочлен  незвідний над полем раціональних чисел.

Розглянемо ще одне чисто математичне застосування властивостей взаємного многочлена до розв'язування задач. Цього разу ми будемо використовувати наступну властивість: корені взаємного многочлена обернені кореням вихідного многочлена, та характеристичний многочлен оберненої матриці є взаємним до характеристичного многочлену вихідної матриці

Продемонструємо, як її використовувати на двох наступних прикладах.

Приклад 3.3 Знайти корені характеристичного многочлена матриці, оберненої до матриці:

.

Розв'яжемо спочатку цю задачу, не використовуючи поняття взаємного многочлена. Знайдемо матрицю методом алгебраїчних доповнень, отримаємо:

За означенням характеристичного многочлена потрібно знайти визначник матриці, попередньо віднявши 𝜆 від кожного елемента головної діагоналі:

Прирівнявши отриманий многочлен до нуля, та помноживши, для зручності, обидві частини на 6, тримаємо квадратне рівняння відносно 𝜆:

,

яке має корені: та .

Скористаємося тепер наведеною вище властивістю. Відповідно до якої, отримані значення будуть обернені кореням характеристичного многочлена матриці *A*. Знайдемо їх. Характеристичний многочлен матриці *A* має вид:

Прирівнявши квадратне рівняння до нуля, отримаємо наступні корені: та

Виходячи з вищенаведених властивостей, шукані значення дорівнюють та .

Приклад 3.4 Знайти корені характеристичного многочлена матриці оберненої до матриці

Характеристичний многочлен матриці *A* має вид:

Прирівняємо кубічне рівняння до нуля і знайдемо корені рівняння:

Корені рівняння:

Щоб розв’язати цю задачу, не використовуючи поняття взаємного многочлена. Знайдемо матрицю методом алгебраїчних доповнень, отримаємо:

Знаходимо визначник матриці, попередньо віднявши 𝜆 від кожного елемента головної діагоналі:

Для зручного розв’язку, множимо обидві частини рівняння на 36. Отримуємо кубічне рівняння:

,

Перевіримо дільники вільного члена :

,

.

Побудуємо таблицю коефіцієнтів за схемою Горнера і результати запишемо в таблицю 3.1

Таблиця Коефіцієнти рівняння за схемою Горнера

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  | 7 |  |
|  |  |  |  |  |

Отримаємо квадратне рівняння:

Корені якого дорівнюють:.

Відповідно до властивостей взаємних многочленів, отримані значення коренів оберненої матриці обернені кореням характеристичного многочлена матриці *A*. Корені характеристичного многочлена для матриці *A* ( обернені до коренів, які було отримано в результаті розв’язку характеристичного многочлена оберненої матриці . Отже многочлени є взаємними.

Виходячи з цих двох прикладів, можна зробити висновки про доцільність використання розглянутої властивості. Видно, що при застосуванні цієї властивості етап знаходження оберненої матриці виключається з процесу розв'язання, що є досить суттєвим спрощенням, особливо для матриць порядку вище за третій. Таким чином, при розв’язанні прикладної задачі використання відповідної властивості взаємних поліномів дає певний виграш у часі, трудовитратах, значно знижує можливість обчислювальних помилок.

* 1. **Використання додаткових властивостей взаємних многочленів у задачах зв’язку**

Застосування властивостей взаємних поліномів до задач генерації псевдовипадкових послідовностей (ПВП). Зокрема, у вигляді максимальних послідовностей періодів (М-послідовності) широко використовуються практично у всіх блочних системах передачі даних для забезпечення цикличної синхронізації, в зашумлених системах сигнального зв'язку і т.д.

Єдиним відомим способом генерації М-послідовності є використання для цієї мети регістра зсуву зі зворотним зв'язком. Цей регістр (завдяки наявності зворотного зв'язку) має нескінченну імпульсну характеристику, тому при будь-якому ненульовому впливі він виробляє періодично повторювану послідовність імпульсів. Ця послідовність має максимальний період (якщо многочлен незвідний)

*,* (3.7)

де *k* – порядок многочлена.

У цьому регістрі наступний символ обчислюється шляхом вирішення рівняння виду

.

Наприклад, для стандартного многочлена , рівняння:

забезпечує обчислення:

, (3.8)

де *t* – номер символу в послідовності.

При , – вектор початкового впливу. Очевидно, що він ненульовий.

У зв'язку з періодичністю М-послідовності, не обов'язково виконувати процедуру генерації для кожної програми, досить запам'ятати один її зсув, всі інші значення можуть бути відновлені циклічним зсувом послідовності.

Тому досить один раз сформувати М-послідовність, запам'ятати її і застосовувати багато разів, коли виникне така необхідність.

Поставимо задачу на обчислення М-послідовності або одного з її зсувів від породжуючого многочлена , не вдаючись до процедури генерації за рівнянням (3.7). Крім того, визначимо, скільки різних М-послідовностей існує у векторному просторі розмірності 2T, оскільки відповіді на це питання на сьогоднішній день не існує. Одна з цих послідовностей (нижнього ступеня) буде називатися базовою послідовністю і позначатися як . Решта послідовностей будуть отримані циклічним зсувом. Решта послідовностей виходять шляхом циклічного зсуву, тобто шляхом обчислення

. (3.9)

Для розв'язання задачі визначення базової М-послідовності скористаємося виразом:

, (3.10)

де додатково зазначимо, що послідовність представлена як добуток кількох пар прямий взаємний многочлен.

Наприклад:

для

для , де ;

для

Враховуючи, що кількість одиниць (вага послідовності) завжди парна в М-послідовності, легко показати, що М-послідовність рівномірно ділиться як на , так і на *,* , тому

*.* (3.11)

Решту послідовностей одержують циклічним зсувом, згідно з формулою (3.8).

Визначимо

*.* (3.12)

Враховуючи, що обидві частини порівняння і модуль мають спільний множник, після ділення отримаємо

та. (3.13)

Таким чином, базова М-послідовність може бути отримана з розкладу (3.10), всі інші значення якого є похідними від (3.9) або (3.12).

За аналогією з (3.9) запишемо, що М-послідовність, породжена взаємним многочленом:

. (3.14)

Враховуючи, що

,

тоді:

З огляду на вищесказане, стало відомо, що М-послідовності, породжені взаємними многочленами, є взаємними.

Теорема 3.1 М-послідовності, породжені взаємними многочленами, є взаємними, тобто:

Доведення. Оскільки

*,*

То

**

В силу симметрії :

що і потрібно було довести.

Приклад 3.5 Нехай *Т=15* розкладання набуває вигляду:

*=*

,

,

Звідси витікає, що різних послідовностей, які можуть бути використані для розв’язку задач зв’язку у просторі , стільки, скільки пар прямий-взаємний многочлен у розкладі Наприклад, у просторі розмірністю 7 (вихідний поліном 3 степеня) існує тільки одна послідовність.У просторі розмірністю 15 (вихідний поліном 4 степеня) також існує тільки одна послідовність. У просторі розмірністю31 (вихідний поліном 5 степеня) існує три послідовності. Таким чином, розкладання на прості множники бінома , виділення пар прямийвзаємний многочлен визначає загальна кількість послідовностей довжини *Т* у просторі та їх вихідні многочлени.

Виконана робота дала можливість знайти альтернативу загальноприйнятій процедурі будування генераторів послідовностей, заснованій на використанні регістрів зсуву зі зворотними зв'язками, альтернативні процедури, описані рівняннями (3.11) и (3.13). Також стало відомо, що різних послідовностей у просторі , різних кодових поліномів стільки, скільки пар "прямий- взаємний" многочлен у разкладанні двочлена . Отримані результати розширюють можливості кодуючих пристроїв, забеспечують можливість розв’язання послідовностей у векторному просторі 2Т.

**ВИСНОВКИ**

У цій роботі було розглянуто основні властивості взаємних многочленів.

При розв’язанні задач, які були наведені у якості прикладів, встановлювали і використовували властивості взаємних та незвідних многочленів. Деякі властивості взаємних та незвідних поліномів пов’язані, тому доречно використовувати цю залежність. Розв’язання прикладів задач, які було запропоновано у цій роботі, надало можливість зробити висновки про доцільність використання деяких властивостей взаємних поліномів. Видно, що при їх застосуванні, деякі етапи виключаються з процесу розв'язання, що є досить суттєвим спрощенням, особливо для рівнянь високого степеня та для матриць порядку вище за третій. Таким чином, при розв’язанні прикладної задачі використання відповідних властивостей взаємних поліномів дає певний виграш у часі, трудовитратах, значно знижує можливість обчислювальних помилок.

**ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ**

* 1. Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. Вища математика : Повний курс у прикладах і задачах. Київ : Книги України ЛТД, 2015. 470 с.
	2. Гоменюк С. І., Гребенюк С. М., Зіновєєв І. В., Манько Н. І.-В., Спиця О. Г., Ткаченко І. Г. Методичні вказівки до написання курсових і кваліфікаційних робіт для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра та магістра математичного факультету. Запоріжжя. 2017. 68 с.
	3. Дубчак В. М., Пришляк В. М., Новицька Л. І. Вища математика в прикладах та задачах : навч. посіб. Вінниця : ВНАУ, 2018. 254 c.
	4. Коваль В. О. Практикум з вищої математики : навч. посіб. Житомир : ЖДТУ, 2008. 448 с.
	5. Курінний Г. Ч. Многочлени. Навчально-методичний посібник з алгебри для студентів 1-го курсу механіко-математичного факультету. Харків : ХНУ, 2007. 74 с.
	6. Пожуєв В. І. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії : навч. посіб. для студентів усіх спеціальностей ЗДІА. Запоріжжя, 2006. 160 с.
	7. Пономаренко В. С. Вища математика : базовий підручник для вузів. Харків :Фоліо. 2016. 669 с.
	8. Харченко А. П., Гаєвська В. О., Лисянська Г. В. Вища математика в прикладах і задачах, частина II : навч. посіб. Харків : НТМТ, 2017. 233 с.