

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА**

на тему: «ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО  
ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ  
МЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ»

Виконав: студент 2 курсу, групи 8.1112-з  
спеціальності 111 математика  
(шифр і назва спеціальності)  
освітньої програми математика  
(назва освітньої програми)

І. Ю. Пелих

(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної та  
прикладної математики. Клименко М.І.  
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент кандидат фіз.-мат. наук, доцент, доцент  
кафедри програмної інженерії. Кудін О.В.  
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя

2023

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Факультет математичний  
Кафедра фундаментальної та прикладної математики  
Рівень вищої освіти магістр  
Спеціальність 111 математика  
(шифр і назва)  
Освітня програма математика

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач кафедри  
фундаментальної та прикладної  
математики,  
д.т.н., професор

\_\_\_\_\_ Гребенюк С.М.  
(підпис)

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2023 р.

**З А В Д А Н Н Я  
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ (СТУДЕНТЦІ)**

\_\_\_\_\_ Пелих Ірина Юріївна

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проєкту) \_\_\_\_\_ Застосування інтегрального перетворення Фур'є для  
\_\_\_\_\_ моделювання механічних процесів

керівник роботи (проєкту) \_\_\_\_\_ Клименко Михайло Іванович доцент кафедри  
\_\_\_\_\_ фундаментальної та прикладної математики  
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 01 » травня 2023 року № 643-с

2. Строк подання студентом роботи \_\_\_\_\_

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.  
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)  
1. Постановка задачі.  
2. Основні теоретичні відомості.  
3. Застосування інтегрального перетворення Фур'є для моделювання механічних процесів.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) \_\_\_\_\_  
презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 15.05.2023

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи магістра	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	20.05.2023	
2.	Збір вихідних даних.	25.05.2023	
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	25.06.2023	
4.	Розробка першого та другого розділу.	15.08.2023	
5.	Розробка третього розділу.	29.09.2023	
6.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи магістра.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи магістра.		

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

І.Ю. Пелих \_\_\_\_\_  
(ініціали та прізвище)

Керівник роботи \_\_\_\_\_  
(підпис)

М.І. Клименко \_\_\_\_\_  
(ініціали та прізвище)

### Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер \_\_\_\_\_  
(підпис)

О.Г. Спиця \_\_\_\_\_  
(ініціали та прізвище)

## РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота «Застосування інтегрального перетворення Фур'є для моделювання механічних процесів»: 59с., 2 рис., 3 табл., 12 джерел.

Мета дослідження – розробка та застосування методики визначень переміщень у коливальних процесів під дією нестационарного навантаження. Об'єктом дослідження є вимушені коливання струни та тонкої оболонки під дією нестационарних навантажень. Предмет дослідження – застосування інтегрального перетворення Фур'є для розв'язування динамічних задач. Відповідно, для дослідження використано метод інтегральних перетворень, У роботі застосовано інтегральне перетворення Фур'є.

Розглянуто сутність та властивості інтегрального перетворення Фур'є у різних формах та досліджено можливості його застосування для розв'язування задач механіки суцільного середовища. Практичне застосування інтегрального перетворення Фур'є для дослідження механічних процесів розглянуто на прикладі розв'язання задачі про пружну рівновагу півплощини, а також плоскої задачі теорії пружності у напруженнях для нескінченної смуги. Здійснено розв'язування нестационарних задач механіки методом інтегрального перетворенням Фур'є. Цим методом розв'язано задачу про визначення переміщень точок нескінченної циліндричної оболонки під дією рухомого зосередженого навантаження. Актуальність дослідження пояснюється можливістю подальшого застосування отриманих результатів і запропонованого підходу до розв'язування практично важливих задач акустики та гідродинаміки.

## ABSTRACT

Qualification job «Application of the integral Fourier transform for modeling mechanical processes»: 59 p., 12 sources.

The purpose of the study is the development and application of the methodology for determining movements in oscillatory processes under the influence of non-stationary load. The object of the study is forced vibrations of the string and thin shell under the influence of non-stationary loads. The subject of research is the application of integral Fourier transform for solving dynamic problems. Accordingly, the method of integral transformations is used for the study, the integral Fourier transformation is applied In The work.

The essence and properties of integral Fourier transform in different forms are considered and possibilities of its application for solving problems of continuous medium mechanics are investigated. The practical application of integral Fourier transform for the study of mechanical processes is considered on the example of solving the problem of the elastic equilibrium of the half-plane, as well as the flat problem of elasticity theory in stress for the infinite band. The solution of non-stationary problems of mechanics by integral Fourier transformation method is carried out. This method solves the problem of determining the movement of points of an infinite cylindrical shell under the action of a moving concentrated load. The relevance of the study is explained by the possibility of further application of the obtained results and the proposed approach to solving almost important problems of acoustics and hydrodynamics.

# ЗМІСТ

<b>ЗАВДАННЯ</b> .....	2
<b>РЕФЕРАТ</b> .....	3
<b>ABSTRACT</b> .....	4
<b>ВСТУП</b> .....	7
<b>1 ПОНЯТТЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є</b> .....	9
1.1 Інтегральна формула Фур'є та інтегральне перетворення Фур'є.....	9
1.2 Основні властивості перетворення Фур'є.....	15
<b>2 ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ</b> .....	21
2.1 Задача про пружну рівновагу півплощини.....	21
2.2 Розв'язання плоскої задачі теорії пружності у напруженнях для нескінченної смуги.....	26
2.3 Застосування перетворення Фур'є до розв'язання плоскої задачі теорії пружності для нескінченної смуги у переміщеннях.....	32
<b>3 ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ</b> .....	36
3.1 Застосування перетворення Фур'є для дослідження одновимірних коливань.....	37
3.2 Застосування інтегрального перетворення Фур'є до дослідження деформування нескінченної тонкої циліндричної оболонки.....	46
<b>ВИСНОВКИ</b> .....	56
<b>ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ</b> .....	58

## ВСТУП

Важливе місце у сучасних науково-технічних дослідженнях займає математичне моделювання нестационарних процесів, які здебільшого описуються за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних відносно невідомих функцій, одним з аргументів яких є час. У таких задачах одна або кілька координат може змінюватися у нескінченних межах. Тому виникає можливість застосування для зменшення розмірності таких рівнянь інтегральних перетворень за відповідною змінною. У зв'язку з цим актуальною є задача розробки та реалізації методики застосування інтегрального перетворення Фур'є для дослідження нестационарних процесів у механіці, зокрема, коливальних процесів у струн, пластин та оболонок. Прикладом вирішення подібного завдання є дане магістерське дослідження.

Метою магістерської роботи є розробка та застосування методики визначень переміщень у коливальних процесах під дією нестационарного навантаження. Об'єктом дослідження є вимушені коливання струни та тонкої оболонки під дією нестационарних навантажень. Предмет дослідження – застосування інтегрального перетворення Фур'є для розв'язування динамічних задач. Відповідно, для дослідження використано метод інтегральних перетворень, зокрема, застосування інтегрального перетворення Фур'є.

Для досягнення мети магістерського дослідження у ньому вирішені наступні завдання.

Вивчено сутність та властивості інтегрального перетворення Фур'є у різних формах та досліджено можливості його застосування для розв'язування задач механіки суцільного середовища.

Практичне застосування інтегрального перетворення Фур'є для дослідження механічних процесів розглянуто на прикладі розв'язання задачі про пружну рівновагу півплощини, а також плоскої задачі теорії пружності у напруженнях для

нескінченної смуги. Застосування інтегрального перетворення Фур'є дозволяє звести ці задачі до інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь.

Розв'язування нестационарних задач механіки методом інтегрального перетворення Фур'є виконано у третьому розділі. Тут це перетворення застосовано для дослідження коливань нескінченної струни. Також цим методом розв'язано задачу про визначення переміщень точок нескінченної циліндричної оболонки під дією рухомого зосередження навантаження. Актуальність дослідження пояснюється можливістю подальшого розповсюдження застосування запропонованого підходу, що ґрунтується на застосуванні інтегрального перетворення Фур'є на інші класи практично значимих задач науки та техніки, зокрема, акустики та гідродинаміки.

Слід зауважити, що метод інтегральних перетворень суттєво розширює сферу своїх застосувань. Зокрема, вже зараз він, у формі операційного методу, широко застосовується у радіотехніці, електроніці, теорії автоматичного управління та регулювання, а також інших галузях науки та техніки, де виникає потреба у розв'язуванні лінійних рівнянь різних типів: звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь у частинних похідних, інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь. Використання цього методу дозволяє звести розв'язання таких рівнянь до розв'язання лінійних алгебраїчних рівнянь або звичайних диференціальних рівнянь. Перетворення Фур'є ставить у відповідність функції дійсної змінної її зображення – деяку функцію комплексної змінної. При цьому операції над зображеннями здебільшого виявляються простішими, ніж відповідні операції над вихідними функціями (оригіналами). Розв'язавши отримане рівняння відносно зображення, за знайденим зображенням відновлюють оригінал. Прикладом реалізації подібної методики для дослідження механічних процесів є дана магістерська робота.



# 1 ПОНЯТТЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

## 1.1 Інтегральна формула Фур'є та інтегральне перетворення Фур'є

Нехай задана функція дійсного аргументу  $f(x)$ . Її інтегральним перетворенням називається функція  $F(\lambda)$ , що визначається рівністю у [1]

$$F(\lambda) = \int_{\Gamma} K(\lambda, x) f(x) dx. \quad (1.1)$$

У цьому інтегралі  $\Gamma$  – скінченний чи нескінченний контур на координатній декартовій площині, функцію  $K(\lambda, x)$  називають ядром інтегрального перетворення. Функцію  $f(x)$  називають оригіналом при інтегральному перетворенні, функцію  $F(\lambda)$  – зображенням оригіналу. Найчастіше застосовують інтегральні перетворення, для яких  $K(\lambda, x) = K(\lambda x)$ , а  $\Gamma$  – дійсна вісь або її інтервал  $(a; b)$ , який може бути скінченний чи нескінченний. Якщо  $(a; b)$  є скінченним, то інтегральне перетворення називається скінченним. Формулу, що дає змогу відновити функцію-оригінал  $f(x)$  за відомим її зображенням  $F(\lambda)$  називають формулою обернення інтегрального перетворення.

Метод інтегральних перетворень є ефективним методом розв'язання та дослідження диференціальних та інтегральних рівнянь, що моделюють різноманітні фізичні процеси. Цей метод полягає у інтегруванні рівняння з деякою ваговою функцією, що є ядром інтегрального перетворення. У багатьох випадках це надає можливість спростити задачу. У залежності від ядра перетворення та кривої інтегрування розрізняють різні типи інтегральних

перетворень. Інтегральні перетворення найчастіше застосовуються при розв'язанні диференціальних рівнянь, причому вибір інтегрального перетворення залежить від вигляду рівняння, що розв'язується. Основним фактором, що впливає на вибір інтегрального перетворення, являється можливість перетворення заданого диференціального чи інтегрального рівняння в більш просте диференціальне чи алгебраїчне рівняння. При цьому повинна бути відомою формула для обернення інтегрального перетворення, що дає можливість по відомому зображенню знайти оригінал.

Широке застосування методів інтегральних перетворень у математичному моделюванні різноманітних фізичних процесів обумовлює актуальність наукових досліджень різноманітних інтегральних перетворень та можливостей їх застосувань. Основні інтегральні перетворення та особливості їх практичних застосувань розглядаються у роботах [1,2,3,4]. У роботах [1,2] висвітлюються обґрунтування застосування інтегрального перетворення Фур'є у різних формах до задач теплопровідності, коливання, розповсюдження електричного струму. Інші типи інтегральних перетворень на нескінченних проміжках, перетворення Лапласа, Ханкеля, Мелліна детально розглядаються у [1,2]. У [4] розглядаються інтегральні перетворення на нескінченних та скінченних проміжках. У багатьох наукових дослідженнях у області механіки суцільного середовища використовують інтегральні перетворення Лапласа, Фур'є, Ханкеля та інші. Тут слід відзначити роботи [5,6, 8, 11,12]. У навчальних виданнях з механіки суцільного середовища [7,8,9,10] наведено розв'язки важливих задач механіки методом інтегральних перетворень. Основу математичних моделей фізичних процесів, у тому числі механічних процесів, складають диференціальні рівняння. Можливо виділити два основних класів таких моделей [1]. Першим класом є моделі з зосереджених параметрів, що зводяться до розв'язання задачі Коші чи крайової задачі для звичайного диференціального рівняння чи систем таких рівнянь. Другий клас задач – це задачі з розподіленими параметрами, що зводяться до диференціальних рівнянь з частинними похідними. З математичного точки зору систему диференціальних рівнянь можна розглядати як деяке операторне рівняння, що

визначається деяким диференціальним оператором, що діє у певному функціональному просторі. Елементами такого функціонального простору є функції, що задовольняють деяким обмеженням типу неперервності, диференційовності, степеню зростання тощо. У багатьох випадках такий оператор є лінійним, тобто при перетворенні зберігає суму функцій та добутку суми функцій на число. Розв'язання операторного рівняння зводиться до побудови оператора, зворотного до заданого оператору. Для обернення оператора на сьогодні існує два підходи. Перший полягає у тому, щоб знайти базис у функціональному просторі, у якому оператор описується найпростіше. Такий підхід веде до розробки наближених методів розв'язання операторних рівнянь, що ґрунтується на спектральній теорії лінійних операторів. Другий підхід полягає у знаходженні нового функціонального простору, ізоморфного вихідному, у якому аналог потрібного оператору має найпростіший вигляд. У багатьох випадках у результаті такого ізоморфного перетворення лінійне диференціальне рівняння може бути перетворене у алгебраїчне рівняння, розв'язати якого можна досить просто. Ефективність другого підходу відображає загальну концепцію, згідно з якою лінійні оператори можна розглядати як елементи деякої алгебраїчної структури, в якій діють різні алгебраїчні операції: додавання, множення тощо. Наявність простих властивостей цих операцій (комутативність, асоціативність, дистрибутивність) дозволяє розглядати дію оператора як множення. Тобто операторне рівняння перетворюється у рівняння, що подібне до алгебраїчного рівняння.

Основна ідея ізоморфного перетворення полягає у переході з вихідного простору оригіналів, у новий простір – простір зображень. Задача розв'язується у просторі зображення, а далі, за знайденому зображенню розв'язку визначається розв'язок вихідної задачі у просторі оригіналів, тобто за знайденим зображенням відновлюється оригінал розв'язків. Найчастіше такі ізоморфні перетворення функціональних просторів виражаються з допомогою інтегралів спеціального виду, тому їх називають інтегральними перетвореннями.

Інтегральне перетворення Фур'є функції  $f(x)$  дійсного змінного  $x$  визначається рівністю у [1,2]:

$$F(\lambda) = \tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} f(x) dx. \quad (1.2)$$

Ядро інтегрального перетворення Фур'є  $K(\lambda, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda x}$ . Параметр  $\lambda$  інтегрального перетворення теж є дійсною величиною. Формула обернення інтегрального перетворення, що дозволяє по відомому зображенні  $F(\lambda)$  відновити функцію-оригінал, має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (1.3)$$

Перехід від функції  $f(x)$  до функції  $F(\lambda)$  називають інтегральним перетворенням функції  $f(x)$ , перехід від функції  $F(\lambda)$  до функції-оригіналу  $f(x)$  називають зворотним перетворенням Фур'є (оберненням перетворення Фур'є). Формули для інтегрального перетворення Фур'є та його обернення отримуються з відомої з курсу математичного аналізу інтегральної формули Фур'є.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (1.4)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.5)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dt \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1.6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\tau) \cos \frac{n\pi}{l} (\tau - x) d\tau. \quad (1.7)$$

Нехай функція  $f(t)$ , що має період  $2l$ , представлена рядом Фур'є (1.4). Формули для коефіцієнтів ряду Фур'є, мають вигляд (1.5), (1.6). Підставимо у рівність (1.4), формули для коефіцієнтів ряду Фур'є  $a_n$  та  $b_n$ , отримаємо вираз для функції  $f(x)$  (1.7).

Якщо покласти  $\frac{n\pi}{l} = \lambda$ ,  $\frac{\pi}{l} = \Delta\lambda$  і виконати граничний перехід при  $l \rightarrow \infty$ , то замість суми приходимо до інтегралу, і ми отримаємо інтегральну формулу Фур'є [2] (1.8). Вона представляє функцію, визначену на всій числовій прямій  $(-\infty, +\infty)$ , у той же час ряд Фур'є представляє функцію з скінченним періодом. Після перетворень можна звести формулу (1.8) до одного з наступних видів (1.9) або (1.10):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \lambda(\tau - x) d\tau. \quad (1.8)$$

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l e^{lx\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{l\lambda\tau} f(\tau) d\tau d\lambda \quad (1.9)$$

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin l(x - \tau)}{x - \tau} f(\tau) d\tau. \quad (1.10)$$

Інтеграл у правій частині формули (1.8) називають повторним інтегралом Фур'є, а формулу (1.9) – комплексною формою інтеграла Фур'є. Формулу (1.10) називають представленням функції  $f(x)$  за допомогою простого інтеграла Фур'є. Класичні умови справедливості вищезазначених формул визначаються у наступній теоремі [1].

**Теорема 1.** Нехай функція  $f(x)$  є інтегрованою на інтервалі  $(-\infty, +\infty)$  та є функцією обмеженої варіації на будь якому скінченному проміжку. Тоді формули

(1.8), (1.9), (1.10) мають місце, якщо замінити їх ліві частини на  $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$  у точках розриву  $f(x)$ . Формули (1.8), (1.9), (1.10) можуть бути записані також у наступному вигляді (1.11) де (1.12). Якщо  $f(t)$ -парна функція, тоді формула (1.11) набуває вид (1.13).

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(\lambda) \cos x\lambda + b(\lambda) \sin x\lambda] d\lambda, \quad (1.11)$$

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x\lambda dx, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin x\lambda dx. \quad (1.12)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos x\lambda d\lambda \int_0^{\infty} f(\tau) \cos \lambda\tau d\tau. \quad (1.13)$$

Безпосереднє знаходження перетворень Фур'є за формулою (1.2), що ґрунтується на застосуванні техніки інтегрування, можливе лише у найбільш простих випадках. У складніших випадків для досягнення результату використовують спеціальні підходи, наприклад, диференціювання під знаком інтегралу. Цей метод полягає у тому, що спочатку перетворення Фур'є  $\tilde{f}(\lambda)$ ,  $\tilde{f}^c(\lambda)$ ,  $\tilde{f}^s(\lambda)$  диференціюється за одним з параметрів під знаком інтегралу, а потім після обчислення інтегралу зображення відновлюється шляхом інтегрування по параметру. Цей підхід можна застосувати лише у випадку, коли диференціювання по параметру є допустимим і можливо обґрунтувати допустимість цієї операції, наприклад, рівномірної збіжності відповідності невласної інтегралу.

Для виконання прямого чи зворотного перетворення Фур'є інколи застосовується розвинення у степеневий ряд функції, що перетворення чи ядра перетворення і потім інтегрується отриманий ряд.

Для отримання перетворення Фур'є часто застосовують апарат теорії функції комплексної змінної, зокрема, використовують лишки. Нехай функція  $f(x)$  допускається аналітичне продовження  $f(z)$  на верхню півплощину ( $Imz \geq 0$ ) комплексної змінної  $z$ , що задовольняє наступні умови: 1)  $f(z)$  є регулярною у

півплощині  $Imz \geq 0$  за винятком скінченної кількості полюсів, при цьому на дійсній осі полюсів немає; 2)  $\max|f(z)| \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$  на півколах  $C_R$  у верхній півплощині радіуса  $R$  з центром у початку координат. Тоді виконується рівність у [3], 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum \text{res } f(z)e^{i\lambda z},$$
 де сума включає всі лишки за полюсами у верхній півплощині комплексної площини.

З означення інтегрального перетворення Фур'є як невласного інтеграла (1.2) випливають його властивості.

## 1.2 Основні властивості перетворення Фур'є

Формули, розглянуті вище, визначають взаємні співвідношення між парами функцій – оригіналом та зображенням при перетворенні Фур'є. Якщо покласти (1.14), то з формули (1.11) отримаємо (1.15)

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx, \quad (1.14)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{ix\lambda} d\lambda, \quad (1.15)$$

де невласний інтеграл у правій частині – це невласний інтеграл у сенсі головного значення, тобто він визначається як границя у [1]  $\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^l F(\lambda)e^{ix\lambda} d\lambda$ .

Функція  $F(\lambda)$  називається зображенням або трансформантою Фур'є функції  $f(x)$ .

Якщо функція  $f(x)$  інтегровна в інтервалі  $(-\infty, +\infty)$ , то функція  $F(\lambda)$  існує для всіх  $x$  [1,2]. Функція  $F(\lambda)$  та  $f(x)$ , що є перетворенням Фур'є одна

одною, називаються парою перетворень Фур'є. Вважаючи (1.16) отримаємо з формули (1.11)

$$F_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \quad (1.16)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(\lambda) \cos x \lambda d\lambda. \quad (1.17)$$

Функції, пов'язані вказаним чином, називаються парою косинус-перетворень Фур'є. Аналогічно, можна отримати пару синус-перетворень Фур'є:

$$F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin \lambda x dx, \quad (1.18)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\lambda) \sin x \lambda d\lambda. \quad (1.19)$$

Якщо  $f(x)$  – парна функція, то  $F(\lambda) = F_c(\lambda)$ ; якщо  $f(x)$  – непарна функція, то  $F(\lambda) = iF_s(\lambda)$ .

Перетворення Фур'є має властивість лінійності: зображення лінійної комбінацій функцій-оригіналів є лінійна комбінація їх зображень. Якщо зображенням  $f(x)$  є функція  $F(\lambda)$ , а функції  $g(x)$  – функція  $G(\lambda)$ , то для довільних сталих величин  $c_1$  та  $c_2$  зображенням функції  $c_1 f(x) + c_2 g(x)$  є функція  $c_1 F(\lambda) + c_2 G(\lambda)$ .

При інтегральному перетворенні Фур'є зображенням похідної функції  $f(x)$  є  $i\lambda F(\lambda)$ , де  $F(\lambda)$  є зображення  $f(x)$ . Тобто при перетворенні Фур'є операція диференціювання замінюється множення зображення на  $i\lambda$ , зображення похідної  $n$ -го порядку дорівнює добутку зображення функції на  $(i\lambda)^n$ . При



розв'язуванні звичайних диференціальних рівнянь застосування інтегрального перетворення Фур'є дозволяє переходити від них до алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо перетворення Фур'є частинних похідних [2,3,4]. Наприклад, якщо здійснюється інтегральне перетворення Фур'є функції  $u(x,t)$  і перетворення Фур'є здійснюється по змінній  $x$ , то зображення частинних похідних:  $u_x, u_{xx} \in (i\lambda)\tilde{u}, (i\lambda)^2\tilde{u}$ , зображенням частинної похідної  $n$ -го порядку  $\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \in (i\lambda)^n \tilde{u}$ . Цю властивість легко довести, використовуючи інтегруванням частинами у перетворенні Фур'є. Зображеннями частинних похідних по змінній  $t$  є відповідні частинні похідні зображення  $\tilde{u}(\lambda,t)$ , наприклад, зображенням  $\frac{\partial u}{\partial t} \in \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}$ .

Під дією перетворення Фур'є операція диференціювання по змінній  $x$ , по якій здійснюється перетворення Фур'є, замінюється множенням. Це використовується при розв'язуванні диференціальних рівнянь з частинними похідними. Нехай потрібно розв'язати крайову задачу для диференціального у частинних похідних відносно функції  $u(x,t)$ , де  $x$  – просторова координата, що може змінюватися у межах  $(-\infty; +\infty)$ ,  $t$  – час. Застосування перетворення Фур'є по змінній  $x$  дозволить усунути частинні похідні по цій змінній і отримаємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння відносно зображення  $\tilde{u}(\lambda,t)$ , тобто більш просту задачу. Розв'язавши її, знаходимо зображення  $\tilde{u}(\lambda,t)$ , після чого за формулою обернення перетворення Фур'є, знаходимо розв'язок  $u(x,t)$  вихідної задачі.

Можна застосовувати перетворення Фур'є по змінній  $x$ , що змінюється від 0 до  $\infty$ , при цьому застосовують синус-перетворення або косинус-перетворення Фур'є. Синус-перетворення Фур'є застосовується у випадку, коли виконується крайова умова  $u(x,0)=0$ .

Отримаємо перетворення Фур'є для згортки двох функцій [4]. Нехай функції  $F(\lambda)$  та  $G(\lambda)$  – перетворення Фур'є відповідно для функцій  $f(x)$  та  $g(x)$ , визначених формулами (1.14), (1.15).

Виконаємо наступні перетворення:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)G(\lambda)e^{-ix\lambda} d\lambda &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{-ix\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i\lambda\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{-i\lambda(x-\tau)} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(x-\tau)d\tau, \end{aligned} \quad (1.20)$$

тобто функції  $F(\lambda)G(\lambda)$  та  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(x-\tau)d\tau$  є парою перетворень Фур'є. Функція  $h(x)$  називається згортокою функцій  $f(x)$  та  $g(x)$ .

Теорема 2. Нехай  $f(x)$  – перетворення Фур'є функції  $F(\lambda) \in L(-\infty, +\infty)$  а функція  $g(x) \in L(-\infty, +\infty)$  (так що її перетворення Фур'є  $G(\lambda)$  – обмежена функція). Тоді добуток  $\sqrt{2\pi}F(\lambda)G(\lambda)$  належить простору функцій, інтегрованих по Лебегу по всій числовій прямій, тобто простору  $L(-\infty, +\infty)$ . Оригінал, зображення якого при перетворення Фур'є є цей добуток, визначається формулою

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(x-\tau)d\tau.$$

Справедливість цієї теореми впливає із отримання вище рівності (1.20) за умови абсолютної збіжності інтегралів у цій рівності.

Теорема 3. Нехай  $f(x)$  та  $g(x)$  належать  $L(-\infty, +\infty)$ . Тоді функція  $h(x)$ , що є згортокою цих функцій, належить  $L(-\infty, +\infty)$  та її перетворенням Фур'є є функція  $\sqrt{2\pi}F(\lambda)G(\lambda)$ .

За аналогією з виразом (1.20) для косинус-перетворень отримуємо (1.21). Для випадку синус-перетворень маємо рівності (1.22).

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} F(\lambda)G(\lambda)\cos x\lambda d\lambda &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(\lambda)\cos x\lambda d\lambda \int_0^{\infty} g(\tau)\cos \tau\lambda d\tau = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(\tau)d\tau \int_0^{\infty} F_c(\lambda) [\cos|x-\tau|\lambda + \cos(x+\tau)\lambda] d\lambda = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} g(\tau) [f(|x-\tau|) + f(x+\tau)] d\tau. \tag{1.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} F_s(\lambda)G_s(\lambda)\sin x\lambda d\lambda &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\lambda)\sin x\lambda d\lambda \int_0^{\infty} g(\tau)\sin \lambda\tau d\tau = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(\tau)d\tau \int_0^{\infty} F_s(\lambda) [\cos|x-\tau|u - \cos(x+\tau)\lambda] d\lambda = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} g(\tau) [f(|x-\tau|) - f(x+\tau)] d\tau. \tag{1.22}
\end{aligned}$$

Процес утворення згортки можна повторювати  $n$  раз. Тоді матимемо [3]:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)F_1(\tau)\dots F_n(\tau)e^{-ix\tau} d\tau = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(\tau_n)d\tau_n \int_{-\infty}^{\infty} f_{n-1}(\tau_{n-1})d\tau_{n-1}\dots \\
&\quad \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau_1)f(t-\tau_1-\dots-\tau_n)d\tau_1. \tag{1.23}
\end{aligned}$$

Нехай  $f(x) \in L(-\infty, +\infty)$ , а функція  $g(x)$  інтегрована на кожному скінченному проміжку, і нехай  $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^l g(\tau)e^{ix\tau} d\tau$  для всіх  $x$ , причому

$G(x)$  є скінченною і належить  $L(-\infty, +\infty)$ . Тоді виконується рівність [3] (1.24).

Зокрема, якщо  $f = g$ , звідси отримуємо формулу (1.25):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)G(x)dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{ix\tau}d\tau = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x)e^{ix\tau}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(-\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \quad (1.25)$$

З формул (1.24) та (1.25) можна отримати формули для косинус- та синус-перетворень Фур'є. Зокрема, для парних функцій, маємо (1.26) та (1.27)

$$\int_0^{\infty} F_c(x)G_c(x)dx = \int_0^{\infty} f(x)g(x)dx \quad (1.26)$$

$$\int_0^{\infty} [F_c(x)]^2 dx = \int_0^{\infty} [f(x)]^2 dx. \quad (1.27)$$

Для непарних функцій отримуємо (1.28) та (1.29):

$$\int_0^{\infty} F_s(x)G_s(x)dx = \int_0^{\infty} f(x)g(x)dx \quad (1.28)$$

$$\int_0^{\infty} [F_s(x)]^2 dx = \int_0^{\infty} [f(x)]^2 dx. \quad (1.29)$$

Ці формули є аналогами відомої формули Парсеваля [1] з теорії рядів Фур'є

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (1.30)$$

При розв'язуванні рівнянь з використанням перетворення Фур'є часто використовують інтегральні формули, що містять під знаку інтеграла функції та їх перетворення Фур'є (тут  $\tilde{f}(\lambda)$  є зображення функції  $f(x)$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \tilde{f}(\lambda) \frac{\sin a\lambda}{\lambda} d\lambda &= \frac{1}{2} \int_{x-a}^{x+a} f(\xi) d\xi, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \tilde{f}(\lambda) \cos(a\lambda) d\lambda &= \frac{1}{2} [f(x+a) - f(x-a)]. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Розглянуті властивості інтегрального перетворення Фур'є широко застосовуються при розв'язанні крайових задач механіки.

## 2 ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

### 2.1 Задача про пружну рівновагу півплощини

При розгляді плоских статичних задач теорії пружності для нескінченної смуги у тому випадку, коли на межі області задані зовнішні сили, для розв'язування таких задач дуже зручно застосовувати інтегральне перетворення Фур'є безпосередньо до рівнянь теорії пружності в напруженнях, а також до крайових умов задач [6].

Застосуємо інтегральне перетворення Фур'є для розв'язування задачі про знаходження напруження у пружній півплощині, навантаженої на її контурі, причому виберемо декартову систему координат вважатимемо, що півплощина, що досліджується, займає область  $y \geq 0$ . Тоді задача, полягає у інтегруванні системи диференціальних рівнянь у частинних похідних відносно невідомих напружень  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\sigma_y$ , що залежать від координат точок півплощини – змінних  $x, y$ . Вона складається з рівнянь рівноваги для плоскої задачі [6] (2.1) та умови суцільності деформацій(2.2):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (2.2)$$

Крайові умови мають вигляд:

$$\sigma_y|_{y=0} = f(x), \quad \tau_{xy}|_{y=0} = g(x), \quad (2.3)$$

де  $f$  та  $g$  – задані функції.

Передбачається також, що, коли координати точки півплощини прямують до нескінченності, то напруження прагнуть до нуля разом із своїми першими похідними.

Застосуємо інтегральне перетворення Фур'є. Перетворення Фур'є напружень визначаються рівностями:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x e^{-i\lambda x} dx, & \tilde{\tau}_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy} e^{-i\lambda x} dx, \\ \tilde{\sigma}_y &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y e^{-i\lambda x} dx. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Помножимо рівняння (2.1) і (2.2) на  $e^{-i\lambda x}$  і інтегруючи по змінній  $x$  від  $-\infty$  до  $+\infty$ , отримуємо систему рівнянь, які після інтегрування частинами перетворюються на наступну систему звичайних диференціальних рівнянь щодо величин  $\tilde{\sigma}_x$ ,  $\tilde{\tau}_{xy}$ ,  $\tilde{\sigma}_y$ , що є функціями лише змінної  $y$ ,

$$\left. \begin{aligned} -i\lambda \tilde{\sigma}_x + \tilde{\tau}'_{xy} &= 0, \\ -i\lambda \tilde{\tau}_{xy} + \tilde{\sigma}'_y &= 0, \\ (\tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_y)'' - \lambda^2 (\tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Отже, застосувати інтегральне перетворення Фур'є дозволило знизити розмірність задачі. Перейшли від диференціальних рівнянь у частинних похідних до звичайних диференціальних рівнянь. Система (2.5) повинна бути розв'язана при крайових умовах

$$\tilde{\sigma}_y \Big|_{y=0} = \tilde{f}(\lambda), \quad \tilde{\tau}_{xy} \Big|_{y=0} = \tilde{g}(\lambda), \quad (2.6)$$

отриманих після перетворення за Фур'є умов (2.3). Тут  $\tilde{f}(\lambda), \tilde{g}(\lambda)$  – зображення функцій крайових умов при перетворенні Фур'є. Зауважимо, що тут і надалі ми завжди припускатимемо, що перетворення Фур'є як заданих крайових функцій, так і шуканих величин існують.

З системи (2.5) виключимо величини  $\tilde{\sigma}_y$  та  $\tilde{\tau}_{xy}$  за допомогою формул (2.7) отримаємо звичайне диференціальне рівняння четвертого порядку (2.8) для функції  $\tilde{\sigma}_y$ .

$$\tilde{\sigma}_x = -\frac{1}{\lambda^2} \tilde{\sigma}_y'', \quad \tilde{\tau}'_{xy} = \frac{1}{i\lambda} \tilde{\sigma}'_y \quad (2.7)$$

$$\tilde{\sigma}_y^{IV} - 2\lambda^2 \tilde{\sigma}_y'' + \lambda^4 \tilde{\sigma}_y = 0. \quad (2.8)$$

Вибираючи відповідно до умов на нескінченності (функція  $\tilde{\sigma}_y$  є обмеженою на нескінченності) загальний інтеграл рівняння (2.8) має вигляд:

$$\tilde{\sigma}_y = [A(\lambda) + yB(\lambda)] e^{-|\lambda|y}. \quad (2.9)$$

Задовольняючи перетвореним крайовим умовам (2.6), знаходимо наступні значення величин  $A$  і  $B$ :  $A = \tilde{f}$ ,  $B = \tilde{f} + \frac{\lambda}{|\lambda|} i\tilde{g}$ , після чого вирази для перетворених напружень набувають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_x &= \left[ (1 - |\lambda|y) \tilde{f} + \left( 2 \frac{|\lambda|}{\lambda} - \lambda y \right) i \tilde{g} \right] e^{-|\lambda|y}, \\ \tilde{\tau}_{xy} &= \left[ i \lambda y \tilde{f} + (1 - |\lambda|y) \tilde{g} \right] e^{-|\lambda|y}, \\ \tilde{\sigma}_y &= \left[ (1 + |\lambda|y) \tilde{f} + i \lambda y \tilde{g} \right] e^{-|\lambda|y}, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Остаточне розв'язання поставленої задачі отримаємо, виконавши зворотне перетворення Фур'є. Наприклад, для напруження  $\sigma_x$  знаходимо

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\sigma}_x e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ (1 - |\lambda|y) \tilde{f} + \right. \\ &\quad \left. + \left( 2 \frac{|\lambda|}{\lambda} - \lambda y \right) i \tilde{g} \right] e^{-|\lambda|y} e^{i\lambda x} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - |\lambda|y) e^{-|\lambda|y} e^{i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{-i\lambda \xi} d\xi + \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( 2 \frac{|\lambda|}{\lambda} - \lambda y \right) e^{-|\lambda|y} e^{i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Змінивши порядок інтегрування, отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \lambda y) e^{-\lambda y} \cos \lambda(x - \xi) d\lambda + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} (2 - \lambda y) e^{-\lambda y} \sin \lambda(x - \xi) d\lambda, \end{aligned}$$

що після взяття інтеграл за змінною  $\lambda$  дозволить отримати розв'язок у вигляді інтегралу



$$\sigma_x = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(\xi) + (x-\xi)g(\xi)}{|(x-\xi)^2 + y^2|^2} (x-\xi)^2 d\xi. \quad (2.12)$$

Аналогічним чином отримають формули для двох інших напружень:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(\xi) + (x-\xi)g(\xi)}{|(x-\xi)^2 + y^2|^2} (x-\xi)y d\xi, \\ \sigma_y &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(\xi) + (x-\xi)g(\xi)}{|(x-\xi)^2 + y^2|^2} y^2 d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Таким чином, отримано в інтегралах точний розв'язок у квадратурах, тобто виражений через інтеграли, задачі для довільного зовнішнього завантаження. У найпростіших випадках, коли інтеграли (2.13) можна обчислити аналітично, отримаємо розв'язок точний у скінченному вигляді [6]. Наприклад, розглянемо випадок, коли у початку координат прикладено сталу зосереджену силу  $\bar{F} = (N, T)$ . Тобто у цьому випадку функції  $f(x) = N\delta(x)$ ,  $g(x) = T\delta(x)$ , де  $\delta(x)$  – дельта-функція Дірака. Основною властивістю дельта-функції є те, що для довільної інтегровної функції  $\varphi(x)$  виконується рівність  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\delta(x) = \varphi(0)$ .

Наприклад, знайдемо напруження  $\sigma_x$ , використовуємо цю властивість:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yN\delta(\xi) + (x-\xi)T\delta(\xi)}{[(x-\xi)^2 + y^2]^2} (x-\xi)^2 d\xi = \frac{2N}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(x-\xi)^2 \delta(\xi)}{[(x-\xi)^2 + y^2]^2} d\xi + \\ &+ \frac{2T}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\xi)\delta(\xi)}{[(x-\xi)^2 + y^2]^2} (x-\xi)^2 d\xi = \frac{2N}{\pi} \cdot \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2x^3 T}{\pi(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

З врахуванням основної властивості функції Дірака з формул (2.13) отримуємо розв'язок задачі для цього випадку зосередженого навантаження:

$$\sigma_x = \frac{2x^2}{\pi} \cdot \frac{yN + xT}{(x^2 + y^2)^2}, \tau_{xy} = \frac{2xy}{\pi} \cdot \frac{yN + xT}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\sigma_y = \frac{2y^2}{\pi} \cdot \frac{yN + xT}{(x^2 + y^2)^2}.$$

На цьому прикладі ми бачимо, що, застосування інтегрального перетворення Фур'є, дозволило суттєво спростити розв'язання плоскої задачі теорії пружності, звівши її до інтегрування системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь.

## 2.2 Розв'язання плоскої задачі теорії пружності у напруженнях для нескінченної смуги

Розглянемо пружну рівновагу нескінченної смуги  $(-\infty < x < +\infty, |y| \leq b)$  під впливом заданих зусиль на її межах. Задача полягає в інтегруванні рівнянь (2.1) і (2.2) плоскої задачі теорії пружності, якщо задані на межах смуги  $y = \pm b$  значення напружень  $\sigma_y$  та  $\tau_{xy}$  [6].

Застосування інтегрального перетворення Фур'є до рівнянь рівноваги і суцільності призводить, як показано у пункті 2.1, до звичайного диференціального рівняння четвертого порядку (2.8) щодо зображення напруження  $\tilde{\sigma}_y$ , причому зображення напружень  $\tilde{\sigma}_x$  та  $\tilde{\tau}_{xy}$  виражаються через зображення  $\tilde{\sigma}_y$  за формулами (2.7).

Розіб'ємо поставлену задачу на дві: симетричну та антисиметричну по координаті  $y$ . Спочатку розглянемо випадок, коли граничні значення напруження  $\sigma_y$  симетричні по координаті  $y$ , а граничні значення  $\tau_{xy}$  антисиметричні по  $y$ . Це означає, що в протилежних точках меж смуги  $(x = x_0, y = \pm b)$  напруження мають

однакову величину, причому нормальні напруження мають протилежні напрями, у той час як дотичні напруження спрямовані однаково ( рис. 1) [6].

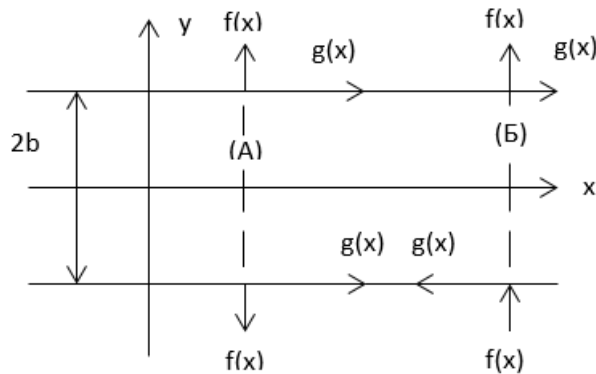


Рисунок 2.1 - Розподіл напружень на межах смуги

Припустимо, що прикладені до смуги зовнішні сили (2.15) врівноважуються; це в даному випадку призводить до умови (2.16):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y|_{y=\pm b} &= f(x), \\ \tau_{xy}|_{y=\pm b} &= \pm g(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 0 \quad (2.16)$$

Для розв'язання задачі, візьмемо загальний інтеграл рівняння (2.8) у вигляді функції, парної за координатою  $y$ , тобто у вигляді (2.17) і, розглядаючи верхню половину смуги ( $0 \leq y \leq b$ ), визначимо значення сталих  $A$  і  $B$  з зображень при перетворенні Фур'є крайових умов (2.18).

$$\tilde{\sigma} = A(\lambda) ch\lambda y + B(\lambda) \lambda y sh\lambda y \quad (2.17)$$

$$\tilde{\sigma}_y|_{y=b} = \tilde{f}(\lambda), \quad \tilde{\tau}_{xy}|_{y=b} = \tilde{g}(\lambda). \quad (2.18)$$

Оскільки, згідно (2.7) маємо рівність (2.19), то для визначень значень  $A$  і  $B$  отримуємо систему рівнянь (2.20), з якої знаходимо (2.21), де введено позначення (2.22).

$$\tilde{\tau}_{xy} = \frac{1}{i} |Ash\lambda y + B(\lambda ych\lambda y + sh\lambda y)|, \quad (2.19)$$

$$\left. \begin{aligned} Ach\mu + B\mu sh\mu &= \tilde{f}, \\ Ash\mu + B(\mu ch\mu + sh\mu) &= \tilde{g}, \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= 2 \frac{\tilde{f}(\mu ch\mu + sh\mu) - \tilde{g}i\mu sh\mu}{sh2\mu + 2\mu}, \\ B &= 2 \frac{-\tilde{f}sh\mu + \tilde{g}ich\mu}{sh2\mu + 2\mu}, \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

$$\mu = \lambda b. \quad (2.22)$$

Таким чином, повний розв'язок поставленої задачі надається рівностями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Ach\lambda y + B(\lambda ysh\lambda y + 2ch\lambda y)] e^{i\lambda x} d\lambda, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Ash\lambda y + B(\lambda ych\lambda y + sh\lambda y)] e^{i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_y &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Ach\lambda y + B\lambda ysh\lambda y] e^{i\lambda x} d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Досліджуємо тепер збіжність інтегралів, що входять в отриманий розв'язок, в точці  $\lambda = 0$ , де знаменник у формулах (2.21) перетворюється в нуль. При  $\lambda \rightarrow \pm\infty$  ці інтеграли є збіжними.

Неважко бачити, що умовою збіжності при  $\lambda = 0$  будуть вимоги обмеженості величин  $A(0)$  та  $B(0)$ , що у свою чергу призводить до умови

$$\tilde{g}(0) = 0 \quad (2.24)$$

Але оскільки  $\tilde{g}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\lambda x} dx$ , то остання умова виконана, бо вона

збігається з умовою рівноваги (2.16).

Аналогічним чином отримаємо точне розв'язання відповідної антисиметричної задачі, коли граничні значення напруження  $\sigma_y$  антисиметричні, а значення  $\tau_{xy}$  симетричні по координаті  $y$  (рис. 1).

Умови рівноваги у цьому випадку мають вигляд (2.25) і можуть бути записані ще в наступній формі (2.26):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} [xf(x) - bg(x)]dx = 0 \quad (2.25)$$

$$f(0) = 0, \quad \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = ibg(0). \quad (2.26)$$

Оскільки у цьому випадку напруження  $\sigma_y$  є непарною функцією змінної  $y$ , то загальний інтеграл рівняння (2.8) слід вибрати в такому вигляді (2.27) причому досить розглянути лише область  $0 \leq y \leq b$ .

$$\bar{\sigma}_y = C(\lambda)sh\lambda y + D(\lambda)\lambda ych\lambda y, \quad (2.27)$$

Складаючи вираз для перетвореного дотичного напруження (2.28) і підставляючи (2.27) і (2.28) у перетворені крайові умови (2.18), ми отримаємо наступну систему рівнянь щодо невідомих величин  $C$  та  $D$  (2.29), розв'язуючи яку, знайдемо (2.30).

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{i} [Cch\lambda y + D(\lambda ysh\lambda y + ch\lambda y)] \quad (2.28)$$

$$\left. \begin{aligned} Csh\mu + D\mu ch\mu &= \tilde{f}, \\ Cch\mu + D(\mu sh\mu + ch\mu) &= i\tilde{g}, \end{aligned} \right\} (\mu = \lambda b) \quad (2.29)$$

$$\left. \begin{aligned} C &= 2 \frac{\tilde{f}(\mu sh\mu + ch\mu) - \tilde{g}i\mu ch\mu}{sh2\mu - 2\mu}, \\ D &= 2 \frac{-\tilde{f}ch\mu + \tilde{g}ish\mu}{sh2\mu - 2\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Використовуючи формули оберненого перетворення Фур'є, вирази для напружень має вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Csh\lambda y + D(\lambda ych\lambda y + 2sh\lambda y)] e^{i\lambda x} d\lambda, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Cch\lambda y + D(\lambda ysh\lambda y + ch\lambda y)] e^{i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_y &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Csh\lambda y + D\lambda ych\lambda y] e^{i\lambda x} d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Можна перевірити, що перетворені за Фур'є умови рівноваги (2.26) забезпечують збіжність при  $\lambda = 0$  інтегралів, що входять до цього розв'язку.

В отриманих розв'язках (2.23) або (2.31) всі три шукані напруження виражаються невласними інтегралами виду

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\mu)}{sh2\mu \pm 2\mu} e^{i\mu x} d\mu, \quad (2.32)$$

які можна знаходити наближено, використовуючи чисельні методи.

Поряд з цим невласні інтеграли типу (2.32) подаються за певних умов у вигляді нескінченного ряду за допомогою апарату теорії функцій комплексної змінної, зокрема, теореми про лишки. Для цього інтеграл по дійсній осі доповнюється півколом радіус  $R \rightarrow \infty$  з центром на початку координат, проведеним у верхній (при  $\xi < 0$ ) або нижній (при  $\xi > 0$ ) півплощині, і розглядається інтеграл по замкнутому контуру від функції, що отримується з підінтегральної функції (2.32) заміною дійсної змінної на комплексну (наприклад,

$2\mu$  на  $z$ ). Якщо отримана при цьому функція  $\Phi(z) = F\left(\frac{z}{2}\right)$  є раціональною функцією, то інтеграл по замкнутому контуру, згідно з теоремою Коші, дорівнює помноженій на  $2\pi$  сумі лишків  $\sum a_{-1}$  підінтегральної функції у верхній (нижній) півплощині комплексної змінної  $z$ . Якщо вдається довести, що інтеграл по півколу прагне до нуля при  $R \rightarrow \infty$ , то значення функції  $f(\xi)$  буде дорівнювати  $2\pi \sum a_{-1}$ .

У даному випадку для кусково-неперервних зовнішніх навантажень, прикладених на скінченній відстані від початку координат, функції типу  $\Phi(z)$  є цілими на всій комплексній площині, причому інтеграл по півколу, проведеному у відповідній півплощині, при  $R \rightarrow \infty$  прагне до нуля. Таким чином, всі напруження, визначаються у вигляді  $2\pi \sum a_{-1}$ , де особливими точками (простими полюсами) є корені рівняння (2.33) для симетричних крайових умов та корені рівняння (2.34) - в антисиметричному випадку.

$$\operatorname{sh}z + z = 0 \quad (2.33)$$

$$\operatorname{sh}z - z = 0 \quad (2.34)$$

Корені цих рівнянь визначають полюси підінтегральної функції у інтегралах (2.31).

Таблиця 2.1 [6] - Полюси підінтегральної функції у інтегралах (2.31) оберненого перетворення Фур'є

$\operatorname{sh}z + z = 0$		$\operatorname{sh}z - z = 0$	
$x_k$	$y_k$	$x_k$	$y_k$
2.251	4.213	2.769	7.498
3.103	10.71	3.352	13.90
3.551	17.07	3.717	20.24
3.900	23.40	3.983	26.56
4.094	29.71	-	-

Перші корені  $z_k = \pm x_k \pm iy_k$  цих рівнянь, що є простими полюсами, наведені у таблиці 2.1. При обчислення інтегралів оберненого перетворення Фур'є

використовуємо лише полюси з додатними уявними частинами, що розташовані у верхній півплощині комплексної площини.

### 2.3 Застосування перетворення Фур'є до розв'язання плоскої задачі теорії пружності для нескінченної смуги у переміщеннях

Розглянемо застосування інтегрального перетворення Фур'є до розв'язування крайової задачі теорії пружності для того випадку, коли на межі тіла задані значення пружних переміщень [7]. При розв'язуванні плоскої задачі теорії пружності звичайно використовують подання переміщень через бігармонічну функцію. Інший підхід до розв'язання цієї задачі полягає у використанні функцій Папковича-Нейбера, який можна застосувати до розв'язання задачі у напружень, так і для розв'язування змішаної задачі, коли на межі області задані напруження та переміщення.

Наведемо загальний розв'язок рівнянь плоскої задачі теорії пружності [7], що містить, згідно з Папковичем-Нейбером, три гармонійні функції -  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,

$$2Gu = -\frac{\partial F}{\partial x} + 4(1-\nu)\Phi_1, \quad 2Gv = -\frac{\partial F}{\partial y} + 4(1-\nu)\Phi_2, \quad (2.35)$$

де  $u$ ,  $v$  - зміщення,  $F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2$ ,  $\nu$  - коефіцієнт Пуассона.

Користуючись довільністю однієї з гармонічних функцій, покладемо  $\Phi_1 \equiv 0$  і перетворимо співвідношення (2.35) до наступної форми (2.36) де покладено (2.37):

$$2Gu = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - y\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \quad 2Gv = x\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} - y\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}, \quad (2.36)$$



$$x = 3 - 4\nu. \quad (2.37)$$

Потрібно тепер, очевидно, знайти дві гармонічні функції  $\Phi_0$  і  $\Phi_2$ , що задовольняють наступним крайовим умовам на межах смуги  $y=0$  та  $y=b$ :

$$u|_{y=0} = u_0(x), \quad u|_{y=b} = u_b(x), \quad v|_{y=0} = v_0(x), \quad v|_{y=b} = v_b(x), \quad (2.38)$$

де  $u_0, u_b, v_0, v_b$  - задані функції.

Представляючи гармонічні функції  $\Phi_0$  і  $\Phi_2$  у вигляді інтегралів Фур'є

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\lambda)ch\lambda y + B(\lambda)sh\lambda y] e^{-i\lambda x} \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [C(\lambda)ch\lambda y + D(\lambda)sh\lambda y] e^{-i\lambda x} d\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

отримаємо на підставі (2.36) наступні вирази для пружних переміщень:

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Ach\lambda y + Bsh\lambda y + \lambda y(Cch\lambda y + Dsh\lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ 2Gv &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [-(Ash\lambda y + Bch\lambda y) + C(xch\lambda y - \lambda ysh\lambda y) + \\ &\quad + D(xsh\lambda y - \lambda ych\lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

Підставляючи далі (2.40) у граничні умови (2.38) та розкладаючи праві частини останніх в інтегралі Фур'є, ми приходимо до наступної системи рівнянь щодо  $A, B, C, D$ :

$$\left. \begin{aligned} iA &= 2G\bar{u}_0, \quad xC - B = 2G\bar{v}_0, \\ Ach\mu + Bsh\mu + \mu(Cch\mu + Dsh\mu) &= \frac{2G^-}{i}u_b, \\ (xch\mu - \mu sh\mu)C + (xsh\mu - \mu ch\mu)D - (Ash\mu + Bch\mu) &= 2G\bar{v}_b, \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

де риска, над знаком функції тут, означає зображення при перетворення Фур'є.

Виключаючи тепер величини  $A$  та  $B$  за допомогою співвідношень (2.42) приходимо до системи двох рівнянь із двома невідомими величинами  $C$  і  $D$  (2.43):

$$A = -2Gi\bar{u}_0, \quad B = xC - 2G\bar{v}_0, \quad (2.42)$$

$$\left. \begin{aligned} (xsh\mu - \mu ch\mu)C + \mu sh\mu D &= \\ = 2G(\bar{v}_0 sh\mu + ich\mu\bar{u}_0 - i\bar{u}_b) &= \Psi_1(\mu), \\ -\mu sh\mu C + (xsh\mu - \mu ch\mu)D &= \\ = 2G(\bar{v}_b - \bar{v}_0 ch\mu - i\bar{u}_0 sh\mu) &= \Psi_2(\mu). \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

Визначивши із (2.43) значення  $C$  і  $D$ :

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{(xsh\mu - \mu ch\mu)\psi_1 - \mu sh\mu\psi_2}{x^2 sh^2 \mu - \mu^2}, \\ D &= \frac{\mu sh\mu\psi_1 + (xsh\mu + \mu ch\mu)\psi_2}{x^2 sh^2 \mu - \mu^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

і підставивши в (2.42) і (2.39), отримаємо розв'язок задачі.

Переміщення  $u$  та  $v$  визначаються за формулами (2.40), а напруження  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  та  $\sigma_y$  виражаються через введені функції  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  за допомогою наступних залежностей:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2(1-\nu)\Phi_1 - \frac{\partial\Phi_0}{\partial x} \right] + 2\nu \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \left( x \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2} \right), \\
 \tau_{xy} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial\Phi_0}{\partial y} + x \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} + y \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} \right] + \\
 &\quad + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial y} + (1-2\nu) \left( \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} \right), \\
 \partial_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2(1-\nu)\Phi_2 - \frac{\partial\Phi_0}{\partial y} \right] + 2\nu \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - \left( x \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2} + y \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2} \right),
 \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

так що для отримання напружень у розглянутій задачі достатньо покласти  $\Phi_1 \equiv 0$  і підставити у (2.45) вираз (2.39).

Для обернення отриманих зображень шуканих функцій потрібно знати особливі точки цих зображень.

У таблиці 2.2 надано значення декількох коренів  $z = \pm\sigma \pm i\tau$  рівнянь

$$shz - \frac{z}{3-4\nu} = 0, \quad shz + \frac{z}{3-4\nu} = 0, \quad (2.46)$$

необхідні при обчисленні отриманих інтегралів за теоремою про лишки (значення коефіцієнта  $\nu$  прийнято рівним  $\frac{1}{3}$  та  $\frac{1}{4}$ ).

Таблиця 2.2 [7]. Особливі точок зображень напружень при перетворенні Фур'є у задачі плоскої деформації

$shz - \frac{z}{3-4\nu} = 0$				$shz + \frac{z}{3-4\nu} = 0$			
$\nu = \frac{1}{3}$		$\nu = \frac{1}{4}$		$\nu = \frac{1}{3}$		$\nu = \frac{1}{4}$	
$\sigma$	$\tau$	$\sigma$	$\tau$	$\sigma$	$\tau$	$\sigma$	$\tau$
0	1.660	0	1.896	1.692	4.315	1.488	4.350
2.238	7.560	2.047	7.582	2.581	10.76	2.393	10.77
2.834	13.94	2.648	13.95	3.035	17.10	2.850	17.11
3.202	20.26	3.017	20.27	3.345	23.42	3.161	23.43
3.470	26.57	3.287	26.58	3.581	29.72	3.398	29.73

Зауважимо, що рівняння  $xsh z - z = 0$  відноситься до випадку задачі, симетричної щодо середньої лінії  $y = \frac{b}{2}$ , а рівняння  $xsh z + z = 0$  - до відповідного антисиметричного випадку.

Розглянуте завдання належало до випадку плоскої деформації. Для плоского напруженого стану у всіх формулах слід замінити величину  $\nu$  на  $\frac{\nu}{1+\nu}$ . Зокрема, замість (2.46) матимемо

$$sh z \mp \frac{1+\nu}{3-\nu} z = 0. \quad (2.47)$$

Результати розрахунку коренів цього рівняння  $\nu = \frac{1}{4}$  зведені в табл. 2.3 ( $z = \pm\sigma \pm i\tau$ ). Зауважимо, що значення  $z$  в (2.47) при  $\nu = \frac{1}{3}$  збігаються зі значеннями  $z$  в (3.12) при  $\nu = \frac{1}{4}$ .

Таблиця 2.3 [7]. Особливі точок зображень напружень при перетворенні Фур'є у задачі про плоский напружений стан

$sh z - \frac{1+\nu}{3-\nu} z = 0,$ $\nu = \frac{1}{4}$		$sh z + \frac{1+\nu}{3-\nu} z = 0,$ $\nu = \frac{1}{4}$	
$\sigma$	$\tau$	$\sigma$	$\tau$
0	2.001	1.378	4.368
1.946	7.593	2.296	10.78
2.551	13.96	2.754	17.12
2.922	20.28	3.065	23.43
3.190	26.58	3.302	29.73

Порівняння отриманих рішень з результатами, що відносяться до вирішення розв'язання основних задач теорії пружності за допомогою інших методів [6],

переконливо ілюструє простоту та ефективність методу інтегральних перетворень при розв'язуванні плоских задач теорії пружності.

### 3 ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ

#### 3.1 Застосування перетворення Фур'є для дослідження одновимірних коливань

Застосування інтегрального перетворення Фур'є є ефективним засобом розв'язання крайових задач для одновимірного хвильового рівняння. Для розв'язування таких задач відносно невідомої функції  $u(x, t)$ , що описує коливання об'єкту дослідження застосовуємо інтегральне перетворення Фур'є за просторовою змінною  $x$ , якщо вона змінюється у нескінченних межах [8]. При цьому отримуємо звичайне диференціальне рівняння відносно зображення невідомої функції, що є функцією однієї змінної – часу  $t$ . Розв'язавши отриману задачу Коші – знаходимо зображення, виконавши обернене перетворення Фур'є, знаходимо оригінал – розв'язання вихідної задачі.

Особливості застосування такого підходу розглянемо на прикладі розв'язання наступної крайової задачі для хвильового рівняння [8] :

$$\begin{aligned} u_{tt} = a^2 u_{xx}; 0 < x < +\infty; 0 < t < +\infty \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}; x \in (0; +\infty); t \in (0; +\infty), \\ u_x(0, t) = 0; u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Враховуючи, що змінна  $x$ , змінюючи від 0 до  $\infty$ , застосуємо косинус-перетворення Фур'є за змінною  $x$ , що має вигляд (3.2). Перевіримо виконання крайової умови  $u_x(0, t) = 0$ , маємо (3.3). Диференціюючи по  $x$ , отримуємо (3.4)

$$\tilde{u}^c(\lambda, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(x, t) \cos \lambda x dx. \quad (3.2)$$

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{u}^c(\lambda, t) \cos(\lambda x) d\lambda. \quad (3.3)$$

$$u_x(x, t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda \int_0^{+\infty} \tilde{u}^c(\lambda, t) \sin(\lambda x) d\lambda. \quad (3.4)$$

З цієї рівності випливає, що  $u_x(0, t) = 0$ .

Друга похідна по часу від зображення невідомої функції  $\tilde{u}_{tt}(\lambda, t)$  є зображенням другої похідної по часу невідомої функції (3.5) зображення другої похідної шуканої функції по просторовій координаті  $x$  має вигляд (3.6)

$$\tilde{u}_{tt}^c(\lambda, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} u_{tt}(x, t) \cos \lambda x dx, \quad (3.5)$$

$$-\lambda^2 \tilde{u}^c(\lambda, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} u_{xx}(x, t) \cos \lambda x dx. \quad (3.6)$$

Зображенням крайової задачі для хвильового рівняння у частинних похідних є задача Коші для звичайного диференціального рівняння, що має вигляд (3.7)

$$\frac{d^2 \tilde{u}^c(\lambda, t)}{dt^2} + a^2 \lambda^2 \tilde{u}^c(\lambda, t) = 0, t > 0,$$

$$\tilde{u}^c(\lambda, 0) = \tilde{f}^c(\lambda), \tilde{u}_t^c(\lambda, 0) = \tilde{g}^c(\lambda) \int_0^{+\infty} u_{tt}(x, t) \cos \lambda x. \quad (3.7)$$

Отримали лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння має вигляд:  $k^2 + a^2\lambda^2 = 0$  з коренями  $k_{1,2} = \pm a\lambda i$ . Їм відповідає розв'язок  $\tilde{u}^c(\lambda, t) = C_1 \cos(a\lambda t) + C_2 \sin(a\lambda t)$ . Використовуючи зображення початкових умов, підставляючи їх у цей розв'язок отримуємо значення сталих інтегрування  $C_1, C_2$ . Розв'язок задачі Коші для косинус-перетворення невідомої функції має вигляд (3.8)

$$\tilde{u}^c(\lambda, t) = \tilde{f}^c(\lambda) \cos(a\lambda t) + \tilde{g}^c(\lambda) \frac{\sin(a\lambda t)}{a\lambda}. \quad (3.8)$$

Шуканий розв'язок даної крайової задачі знайдем, виконавши зворотне косинус-перетворення Фур'є (3.9)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{u}^c(\lambda, t) \cos(\lambda x) d\lambda = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \left[ \tilde{f}^c(\lambda) \cos(a\lambda t) + \tilde{g}^c(\lambda) \frac{\sin(a\lambda t)}{a\lambda} \right] \cos(\lambda x) d\lambda = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{f}^c(\lambda) \cos(a\lambda t) \cos(\lambda x) d\lambda + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{g}^c(\lambda) \frac{\sin(a\lambda t)}{a\lambda} \cos(\lambda x) d\lambda. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Далі перетворимо добутки (3.10)

$$\begin{aligned} \cos(a\lambda t) \cos(\lambda x) &= \frac{1}{2} [\cos(\lambda(x + at)) + \cos(\lambda(x - at))] \\ \sin(a\lambda t) \cos(\lambda x) &= \frac{1}{2} [\sin(\lambda(x + at)) - \sin(\lambda(x - at))] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Далі розглянемо два випадки [8].

а)  $x - at > 0$ .

Тоді отримуємо (3.11)

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tilde{f}^c(\lambda) [\cos \lambda(x+at) + \cos \lambda(x-at)] d\lambda + \\
&+ \frac{1}{2a} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{g}^c(\lambda) \frac{[\sin \lambda(x+at) - \sin \lambda(x-at)]}{\lambda} d\lambda = \\
&= \frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{g}^c(\lambda) \int_{x-at}^{x+at} \cos(\lambda s) d\lambda = \\
&= \frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

б)  $x - at < 0$ .

Тоді отримуємо(3.12)

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{f}^c(\lambda) [\cos \lambda(x+at) + \cos \lambda(at-x)] d\lambda + \\
&+ \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{g}^c(\lambda) \frac{[\sin \lambda(x+at) + \sin \lambda(at-x)]}{\lambda} d\lambda = \\
&= \frac{f(x+at) + f(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{g}^c(\lambda) \left( \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds \right) d\lambda.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Оскільки функція  $g(x)$  визначена лише для додатних значень  $x$ , то останній інтеграл можливо перетворити до вигляду (3.13)

$$\begin{aligned}
\int_{x-at}^{x+at} \cos(\lambda s) ds &= \int_{x-at}^0 \cos(\lambda s) ds + \int_0^{x+at} \cos(\lambda s) ds = - \int_{at-x}^0 \cos(\lambda s) ds + \\
&+ \int_0^{x+at} \cos(\lambda s) ds = \int_0^{at-x} \cos(\lambda s) ds + \int_0^{x+at} \cos(\lambda s) ds.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{g}^c(\lambda) \left( \int_{x-at}^{x+at} \cos(\lambda s) ds \right) d\lambda = \\
& = \left[ \int_0^{x+at} ds \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{g}^c(\lambda) \cos(\lambda s) d\lambda \right) + \int_0^{at-x} ds \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{g}^c(\lambda) \cos(\lambda s) d\lambda \right) \right] = \\
& = \int_0^{x+at} g(s) ds + \int_0^{at-x} g(s) ds.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Виходячи з цієї рівності, отримуємо шуканий розв'язок крайової задачі у вигляді (3.14)

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \\
& + \frac{1}{2a} \left[ \int_0^{x+at} g(s) ds - \text{sign}(x-at) \int_0^{|x-at|} g(s) ds \right],
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\text{де } \text{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

У випадку крайової задачі на промені  $x \in (0; +\infty)$  з крайовою умовою  $u(0,t) = 0$  [11 потрібно використати синус-перетворення Фур'є. Оскільки, якщо

$$\begin{aligned}
\tilde{u}^c(\lambda,t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(x,t) \sin(\lambda x) dx, \\
u(x,t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{u}^c(\lambda,t) \sin(\lambda x) d\lambda.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

З останньої рівності отримаємо  $u(0,t) = 0$ .

Розглянемо випадок, коли розв'язується неоднорідне хвильове рівняння [8] (3.16) при заданих однорідних початкових умовах (3.17)

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in \square, \quad t \geq 0, \quad (3.16)$$

$$u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (3.17)$$

Для розв'язання даної задачі Коші використаємо інтегральне перетворення Фур'є. Нехай  $\tilde{u}(\lambda, t)$  – це зображення Фур'є шуканого розв'язку  $u(x, t)$  хвильового рівняння при заданих початкових умов. Зображенням заданого хвильового рівняння є звичайне диференціальне рівняння, розв'язком якого є зображення  $\tilde{u}(\lambda, t)$ , що повинне задовольняти перетворення початкових умов  $\tilde{u}(\lambda, 0) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\lambda, 0) = 0$ . Перетворене рівняння має вигляд (3.18), що характеризує щільність зовнішньої сили, під дією якої струна здійснює вимушені коливання.

$$\frac{1}{a^2} \frac{d^2 \tilde{u}}{dt^2} = -\lambda^2 \tilde{u} + \tilde{f}(\lambda, t), \quad (3.18)$$

де  $\tilde{f}(\lambda, t)$  – зображення правої частини хвильового рівняння.

Загальний розв'язок однорідного рівняння, що відповідає перетвореного рівняння з нульовою правою частиною має вигляд (3.19)

$$u(\lambda, t) = C_1 \cos(a\lambda t) + C_2 \sin(a\lambda t). \quad (3.19)$$

Використовуючи метод варіації довільних сталих [11] та враховуючи однорідність початкових умов, частинний розв'язок перетвореного рівняння можна записати у вигляді (3.20). Виконаємо зворотне перетворення Фур'є, щоб отримати оригінал розв'язку задачі (3.21)

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \frac{1}{a\lambda} \int_0^t \tilde{f}(\lambda, \tau) \sin a\lambda(t - \tau) d\tau. \quad (3.20)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a\lambda} \left( \int_0^t \tilde{f}(\lambda, \tau) \sin a\lambda(t-\tau) d\tau \right) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (3.21)$$

Змінивши порядок інтегрування, отримаємо (3.22)

$$u(x,t) = \frac{1}{a} \int_0^t \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda, \tau) \frac{\sin a\lambda(t-\tau)}{\lambda} e^{i\lambda x} d\lambda \right) d\tau. \quad (3.22)$$

Згідно з властивостями перетворення Фур'є, виконуються наступні рівності (тут  $\tilde{f}(\lambda)$  є зображення функції  $f(x)$ ) (3.23)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \tilde{f}(\lambda) \frac{\sin a\lambda}{\lambda} d\lambda &= \frac{1}{2} \int_{x-a}^{x+a} f(\xi) d\xi, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \tilde{f}(\lambda) \cos(a\lambda) d\lambda &= \frac{1}{2} [f(x+a) - f(x-a)]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Застосуємо першу з цих формул до внутрішнього інтегралу у виразі для  $u(x,t)$ , де замість величини  $a$  потрібно використати  $a(t-\tau)$ , тоді спрощений вираз матиме вигляд [11] (3.24)

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left( \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \right) d\tau \quad (3.24)$$

У такому інтегральному виду отриманий розв'язок задачі для довільної допустимої функції  $f(x, t)$ .

Інтегральне перетворення Фур'є можна використовувати для визначення коливання нескінченної струни, що моделюється більш складним рівнянням. Розв'яжемо наступну крайову задачу [11] (3.25). Застосуємо до рівняння з частинними похідними цієї задачі перетворення Фур'є за змінною  $x$ .

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= a^2 u_{xx} + c^2 u + f(x, t), \quad x \in \square, \quad t > 0, \\
u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \square.
\end{aligned}
\tag{3.25}$$

Отримаємо звичайне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з нульовому початковими умовами (3.26). Для розв'язання цієї задачі Коші скористаємося методом Дюамеля. Для цього, потрібно спочатку розв'яжемо допоміжну задачу для однорідного рівняння (3.27). Тоді розв'язок початкової задачі надається формулою (3.28). Використавши початкові умови, отримуємо (3.29)

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{tt}(\lambda, t) + (a^2 \lambda^2 - c^2) \tilde{u}(\lambda, t) &= \tilde{f}(\lambda, t), \quad t > 0, \\
\tilde{u}(\lambda, 0) = \tilde{u}_t(\lambda, 0) &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
v_{tt} + (a^2 \lambda^2 - c^2) v &= 0, \quad v = v(\lambda, t, \tau), \quad t > \tau, \\
v|_{t=\tau} = 0, \quad v_t|_{t=\tau} &= \tilde{f}(\lambda, \tau).
\end{aligned}
\tag{3.27}$$

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \int_0^t v(\lambda, t, \tau) d\tau,$$

$$v(\lambda, t, \tau) = C_1 \cos(\sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2} t) + C_2 \sin(\sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2} t).
\tag{3.28}$$

$$\begin{cases}
0 = C_1 \cos(\sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2} \tau) + C_2 \sin(\sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2} \tau), \\
\tilde{f}(\lambda, \tau) = -C_1 \sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2} \sin(\sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2} \tau) + \\
+C_2 \sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2} \cos(\sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2} \tau).
\end{cases}
\tag{3.29}$$

Позначимо  $\sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2} = b$ . Тоді систему з початкових умов можна записати у вигляді (3.30). Розв'язавши цю систему методом Крамера, отримуємо значення  $C_1$  та  $C_2$  (3.31). Отже, отримуємо вираз для допоміжної функції у вигляді (3.32)

$$\begin{cases} C_1 \cos(b\tau) + C_2 \sin(b\tau) = 0, \\ -C_1 \sin(b\tau) + C_2 \cos(b\tau) = \frac{\tilde{f}(\lambda, \tau)}{b}. \end{cases} \quad (3.30)$$

$$C_1 = -\frac{\tilde{f}(\lambda, \tau)}{b} \sin(b\tau), \quad C_2 = \frac{\tilde{f}(\lambda, \tau)}{b} \cos(b\tau). \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} v(\lambda, t, \tau) &= -\frac{\tilde{f}(\lambda, \tau)}{b} \sin(b\tau) \cos(bt) + \frac{\tilde{f}(\lambda, \tau)}{b} \cos(b\tau) \sin(bt) = \\ &= \frac{\tilde{f}(\lambda, \tau)}{b} \sin b(t - \tau) = \frac{\tilde{f}(\lambda, \tau)}{\sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2}} \sin \sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2} (t - \tau). \end{aligned}$$

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \int_0^t \frac{\tilde{f}(\lambda, \tau)}{\sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2}} \sin \sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2} (t - \tau) d\tau. \quad (3.32)$$

По знайденому зображенню розв'язку, застосувавши формулу оберненого перетворення Фур'є, знаходимо оригінал розв'язку задачі.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\lambda, t) e^{i\lambda x} d\lambda = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda, \tau) e^{i\lambda x} \frac{\sin\left((t - \tau)\sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2}\right)}{\sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2}} d\lambda. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Отримали розв'язок задачі у квадратурі, тобто виражений через інтеграл. У простих функцій-зображень  $\tilde{f}(\lambda, t)$ , наприклад, многочленів своїх аргументів, ці інтеграли можна обчислити аналітично, використовуючи класичні методи інтегрування або системи комп'ютерної математики, наприклад, Maple тощо, у більш складних випадків – наближені методи чисельного інтегрування.

### 3.2 Застосування інтегрального перетворення Фур'є до дослідження деформування нескінченної тонкої циліндричної оболонки

Розглянемо задачу про деформування тонкої циліндричної оболонки, що знаходиться під дією рухомого навантаження [6]. Нехай вздовж осі нескінченної циліндричної оболонки зі сталою швидкістю  $c_0$  рухається зосереджене одиничне кільцеве навантаження. Визначимо радіальні переміщення, тобто прогини точок оболонки у процесі вісесиметричного деформування при дією описаного рухомого навантаження. Ця задача часто виникає при розв'язуванні задач акустики, зокрема, звукоізоляції, наприклад, при визначення коефіцієнта проходження звуку. Тут важливо знати прогин оболонки.

Нехай вісь  $Oz$  співпадає з віссю циліндра. Рівняння коливань нескінченної тонкої циліндричної оболонки під дією рухомого зосередженого одиничного навантаження мають вигляд [6] (3.34)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\nu}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\nu}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - \frac{w}{R^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1-\nu^2}{E \cdot h} \delta(z - c_0 \cdot t), \end{cases} \quad (3.34)$$

де  $u = u(z, t)$  – осьове переміщення,

$w = w(z, t)$  - радіальне переміщення точок оболонки,

$\nu$  – коефіцієнт Пуассона,

$R$  – радіус серединної поверхні оболонки,

$E$  – модуль пружності першого роду,

$h$  – товщина оболонки,

$\delta(x)$  –  $\delta$ - функція Дірака,

$t$  – час, параметр

$c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$  – швидкість розповсюдження вільних хвиль у тонкій

пластині з матеріалу оболонки,

$\rho$  – щільність матеріалу оболонки.

Введемо рухому систему координат, пов'язану з навантаженням, що рухається вздовж осі оболонки. Для цього введемо змінну  $\eta$  за формулою (3.35)

$$z - c_0 \cdot t = \eta. \quad (3.35)$$

Тоді система рівнянь (3.34) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{c_0^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \\ \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} - \frac{w}{r^2} - \frac{c_0^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = \frac{1-\nu^2}{E \cdot h} \delta(\eta) \end{cases} \quad (3.36)$$

Застосуємо до рівнянь системи (3.36) перетворення Фур'є (3.37) за змінною  $\eta$ .

$$\tilde{u}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\eta) e^{i\lambda\eta} d\eta, \quad \tilde{w}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\eta) e^{i\lambda\eta} d\eta \quad (3.37)$$

$$\begin{cases} (i\lambda)^2 \tilde{u} - \frac{\nu}{R} i\lambda \tilde{w} - \frac{c_0^2}{c^2} (i\lambda)^2 \tilde{u} = 0, \\ \frac{\nu}{r} i\lambda \tilde{u} - \frac{h^2}{12} (i\lambda)^4 \tilde{w} - \frac{\tilde{w}}{R^2} - \frac{c_0^2}{c^2} (i\lambda)^2 \tilde{w} = \frac{1-\nu^2}{E \cdot h}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\lambda^2 \tilde{u} - \frac{\nu}{R} i\lambda \tilde{w} + \frac{c_0^2}{c^2} \lambda^2 \tilde{u} = 0, \\ \frac{\nu}{R} i\lambda \tilde{u} - \frac{h^2}{12} \lambda^4 \tilde{w} - \frac{\tilde{w}}{R^2} + \frac{c_0^2}{c^2} \lambda^2 \tilde{w} = \frac{1-\nu^2}{E \cdot h}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left( -\lambda^2 + \frac{c_0^2}{c^2} \lambda^2 \right) \tilde{u} - \frac{\nu}{R} i\lambda \tilde{w} = 0, \\ \frac{\nu}{R} i\lambda \tilde{u} + \left( \frac{c_0^2}{c^2} \lambda^2 - \frac{h^2}{12} \lambda^4 - \frac{1}{R^2} \right) \tilde{w} = \frac{1-\nu^2}{E \cdot h}. \end{cases} \quad (3.38)$$

Знайдемо з системи (3.38) зображення радіального переміщення  $\tilde{w}$ . Для цього скористаємося методом Крамера.

Знаходимо визначник системи.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} -\lambda^2 + \frac{c_0^2}{c^2} \lambda^2 & -\frac{\nu}{R} i \lambda \\ \frac{\nu}{R} i \lambda & -\frac{h^2}{12} \lambda^4 - \frac{1}{R^2} + \frac{c_0^2}{c^2} \lambda^2 \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^2 \left( -1 + \frac{c_0^2}{c^2} \right) \left( -\frac{h^2}{12} \lambda^4 - \frac{1}{R^2} + \frac{c_0^2}{c^2} \lambda^2 \right) + \left( \frac{\nu}{R} i \lambda \right)^2 = \\ &= \lambda^2 \left( -1 + \frac{c_0^2}{c^2} \right) \left( -\frac{h^2}{12} \lambda^4 - \frac{1}{R^2} + \frac{c_0^2}{c^2} \lambda^2 \right) - \frac{\nu^2}{R^2} \lambda^2. \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} -\lambda^2 + \frac{c_0^2}{c^2} \lambda^2 & 0 \\ \frac{\nu}{R} i \lambda & \frac{1-\nu^2}{Eh} \end{vmatrix} = \lambda^2 \left( -1 + \frac{c_0^2}{c^2} \right) \frac{1-\nu^2}{Eh}. \\ \tilde{w} = \frac{\Delta_1}{\Delta} &= \frac{\lambda^2 \left( -1 + \frac{c_0^2}{c^2} \right) \frac{1-\nu^2}{Eh}}{\lambda^2 \left( -1 + \frac{c_0^2}{c^2} \right) \left( -\frac{h^2}{12} \lambda^4 - \frac{1}{R^2} + \frac{c_0^2}{c^2} \lambda^2 \right) - \frac{\nu^2}{R^2} \lambda^2} = \\ &= \frac{\left( -1 + \frac{c_0^2}{c^2} \right) \frac{1-\nu^2}{Eh}}{\left( -1 + \frac{c_0^2}{c^2} \right) \left( -\frac{h^2}{12} \lambda^4 - \frac{1}{R^2} + \frac{c_0^2}{c^2} \lambda^2 \right) - \frac{\nu^2}{R^2}}. \end{aligned}$$

Для знаходження шуканої функції прогину  $w(\eta)$  – оригіналу для знайденого зображення, виконаємо зворотнє перетворення Фур'є знайденого зображення  $\tilde{w}(\lambda)$ . При цьому враховуємо, що  $\tilde{w}(\lambda)$  є парною функцією, тому маємо:



$$\begin{aligned}
 w(\eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{w}(\lambda) e^{-i\lambda\eta} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{w}(\lambda) (\cos \lambda\eta - i \sin \lambda\eta) d\lambda = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{w}(\lambda) \cos \lambda\eta d\lambda.
 \end{aligned}
 \tag{3.39}$$

Підставивши в (3.39) знайдене зображення  $\tilde{w}(\lambda)$ , отримаємо вираз для оберненого інтегрального перетворення:

$$w(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\left(-1 + \frac{c_0^2}{c^2}\right) \frac{1-v^2}{Eh}}{\left(-1 + \frac{c_0^2}{c^2}\right) \left(-\frac{h^2}{12} \lambda^4 - \frac{1}{R^2} + \frac{c_0^2}{c^2} \lambda^2\right) - \frac{v^2}{R^2}} \cos \lambda\eta d\lambda
 \tag{3.40}$$

Інтеграл (3.40) – це невласний інтеграл виду  $\int_0^{+\infty} R(x) \cos \alpha x dx$ , де  $R(x)$  – правильний раціональний дріб,  $\alpha = \eta > 0$ . Для розв'язування цієї задачі достатньо обчислити невласний інтеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{i\alpha x} dx$  з врахуванням парності та непарності функції  $R(x)$ . Використовуємо рівності:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos \alpha x dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{i\alpha x} dx.
 \tag{3.41}$$

Для обчислення інтеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{i\alpha x} dx$  використаємо апарат теорії функцій комплексної змінної. Відомо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \cdot \sigma,
 \tag{3.42}$$

де  $\sigma$  – сума лишків функції  $f(z) = R(z)$  комплексної змінної  $z = x + iy$ , де лишки обчислюються в ізольованих особливих точках цієї функції, що розташовані у верхній півплощині комплексної площини  $Oxy$ .

Обчислимо (3.40), для цього введемо наступну заміну  $\frac{c_0^2}{c^2} = \theta$ . Знаменник у інтегралі (3.40) набуде наступний вигляд:

$$(-1 + \theta) \left( -\frac{h^2}{12} \lambda^4 - \frac{1}{R^2} + \theta \lambda^2 \right) - \frac{v^2}{R^2} \quad (3.43)$$

Для того, щоб розкласти (3.43) на множники та обчислити інтеграл (3.40), необхідно знайти корені знаменника – виразу (3.43). Прирівнявши (3.43) до нуля, отримаємо рівняння:

$$(1 - \theta) \frac{h^2}{12} \lambda^4 + \theta(-1 + \theta) \lambda^2 - \frac{(-1 + \theta) + v^2}{R^2} = 0. \quad (3.44)$$

Виберемо швидкість руху навантаження такою, щоб дискримінант бікватратного рівняння (3.46) був від'ємним, у цьому випадку всі корені цього рівняння є комплексні і інтеграл (3.40) існує:

$$D = (\theta^2(-1 + \theta))^2 - 4(-1 + \theta) \frac{h^2}{12} \frac{(-1 + \theta) + v^2}{R^2}. \\ (\theta - 1) \left[ \theta^2(\theta - 1) - \frac{(((-1 + \theta) + v^2)h^2)}{3R^2} \right] < 0, \quad (3.45)$$

Розглядаємо випадок, коли  $\theta \neq 1$ , зокрема у реальних механічних об'єктах, маємо  $c < c_0$ , тобто  $0 \leq \theta < 1$ . Знайдемо, при яких значеннях виконується нерівність (3.45). Знайдемо корені лівої частини її.

$$\begin{aligned}
(\theta - 1) \left[ \theta^2 (\theta - 1) - \frac{((-1 + \theta) + \nu^2) h^2}{3R^2} \right] &= 0, \\
\theta \neq 1, \theta^2 (\theta - 1) - \frac{((-1 + \theta) + \nu^2) h^2}{3R^2} &= 0, \\
\theta^3 - \theta^2 - \frac{h^2 \theta}{3R^2} + \frac{h^2 (1 - \nu^2)}{3R^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Розглянемо деформування нескінченної циліндричної оболонки з алюмінію з фізико-механічними характеристиками  $\nu = 0,3$ ,  $E = 0,72 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho = 2700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ . Оболонка має товщину  $h = 0,02$  м та радіус серединної поверхні  $R = 0,3$  м. Для даної оболонки значення параметра  $c$ ,

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}} \approx 5413 \left( \frac{\text{м}}{\text{с}} \right).$$

Рівняння (3.46) при таких значеннях параметрів задачі матиме наступний вигляд:

$$\theta^3 - \theta^2 - 1,5 \cdot 10^{-3} \theta + 1,3 \cdot 10^{-3} = 0. \tag{3.47}$$

Корені цього рівняння були знайдені за формулою Кардано:

$$\theta_1 = 0,0366, \theta_2 = 1,0001, \theta_3 = -0,0367.$$

Проміжок  $0 < \theta < 0,0366$  входить до множини розв'язків нерівності (3.45). Знайдемо значення швидкості  $c_0$  руху навантаження, що відповідає значенням  $\theta$  з цього проміжку.

$$0 < \frac{c_0^2}{c^2} < 0,0366,$$

Виберемо  $\theta = 0,01$ , тоді швидкість руху навантаження вздовж осі оболонки

$$c_0 = \sqrt{\theta} \cdot c = 0,1 \cdot 6172 = 617,2 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1},$$

тоді інтеграл (3.40) запишеться у вигляді (3.48):

$$w(\eta) = \frac{-6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda \eta}{0,33\lambda^4 - 0,0099\lambda^2 + 0,001} d\lambda, \quad (3.48)$$

Введемо допоміжну функцію комплексної змінної  $z$ :

$$f(z) = \frac{e^{iz\eta}}{0,33z^4 - 0,0099z^2 + 0,001}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = 2\pi i \sigma. \quad (3.49)$$

Особливі точки функції (3.49) є корені знаменника. Прирівнявши його до нуля, знайдемо 4 комплексні корені  $z_1 = -0,1871 - 0,1415i$ ,  $z_2 = 0,1871 + 0,1415i$ ,  $z_3 = -0,1871 + 0,1415i$ ,  $z_4 = 0,1871 - 0,1415i$ . Всі ці особливі точки є простими полюсами. У верхній півплощині комплексної площини розташовані полюси з додатними уявними частинами:  $z_2, z_3$ . Знаходимо суму лишків функції  $f(z)$  у цих точках.

$$\sigma = \operatorname{res}_{z_2} \left[ \frac{-6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{e^{iz\eta}}{0,33z^4 - 0,0099z^2 + 0,001} \right] +$$

$$+ \operatorname{res}_{z_3} \left[ \frac{-6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{e^{iz\eta}}{0,33z^4 - 0,0099z^2 + 0,001} \right], \quad (3.50)$$

$$z_2 = 0,1871 + 0,1415i,$$

$$z_3 = -0,1871 + 0,1415i.$$

Знайдемо лишки.

$$\operatorname{res}_{z_2=0,1871+0,1415i} \frac{-6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{e^{iz\eta}}{0,33z^4 - 0,0099z^2 + 0,001} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z_2 \rightarrow 0,1871+0,1415i} \frac{-6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{e^{iz\eta}(z - 0,1871 - 0,1415i)}{(z + 0,1871 + 0,1415i)(z - 0,1871 - 0,1415i)} \cdot \\
&\quad \cdot \overline{(z + 0,1871 - 0,1415i)(z - 0,1871 + 0,1415i)} = \\
&= \frac{-6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{e^{i(0,1871+0,1415i)\eta}}{2 \cdot (0,1871 + 0,1415i) \cdot 2 \cdot 0,1871 \cdot 2 \cdot 0,1415i} = \\
&= \frac{-6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{e^{0,1871i\eta} e^{-0,1415\eta}}{8 \cdot (0,1871 + 0,1415i) \cdot 0,1871 \cdot 0,1415i} = \\
&= \frac{-6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{e^{0,1871i\eta} e^{-0,1415\eta} (0,1871 - 0,1415i)i}{8 \cdot (0,1871 + 0,1415i) \cdot 0,1871 \cdot 0,1415i \cdot (0,1871 - 0,1415i) \cdot i} = \\
&= \frac{6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{e^{0,1871i\eta} e^{-0,1415\eta} (0,1871i + 0,1415)}{0,011} = \\
&= i \frac{6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{e^{-0,1415\eta}}{0,011} \cdot (0,1871 \cos 0,1871\eta - 0,1415 \sin 0,1871\eta) + \\
&\quad + \frac{6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{e^{-0,1415\eta}}{0,011} \cdot (0,1871 \sin 0,1871\eta + 0,1415 \cos 0,1871\eta).
\end{aligned}$$

Знайдемо тепер другий лишок:

$$\begin{aligned}
&= \underset{z_3 = -0,1871+0,1415i}{res} \frac{-6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{e^{iz\eta}}{0,33z^4 - 0,0099z^2 + 0,001} = \\
&= \lim_{z_3 \rightarrow -0,1871+0,1415i} \frac{-6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{e^{iz\eta}(z + 0,1871 - 0,1415i)}{(z + 0,1871 + 0,1415i)(z - 0,1871 - 0,1415i)} \cdot \\
&\quad \cdot \overline{(z + 0,1871 - 0,1415i)(z - 0,1871 + 0,1415i)} = \\
&= \frac{-6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{e^{i(-0,1871+0,1415i)\eta}}{2 \cdot (-0,1871 + 0,1415i) \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 0,1871 \cdot 2 \cdot 0,1415i} = \\
&= \frac{6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{e^{-0,1871i\eta} e^{-0,1415\eta}}{8 \cdot (-0,1871 + 0,1415i) \cdot 0,1871 \cdot 0,1415i} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{e^{-0,1871i\eta} e^{-0,1415\eta} (0,1871 + 0,1415i)i}{8 \cdot (0,1871 - 0,1415i) \cdot 0,1871 \cdot 0,1415i \cdot (0,1871 + 0,1415i) \cdot i} = \\
&= \frac{6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{e^{-0,1871i\eta} e^{-0,1415\eta} (0,1871i - 0,1415)}{0,011} = \\
&= \frac{-6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{e^{-0,1415\eta} (\cos 0,1871\eta - i \sin 0,1871\eta) (0,1871i - 0,1415)}{0,011} = \\
&= \frac{6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{e^{-0,1415\eta}}{0,011} \cdot (0,1871i \cos 0,1871\eta + \\
&\quad + 0,1871 \sin 0,1871\eta - 0,1415 \cos 0,1871\eta + 0,1415i \sin 0,1871\eta) = \\
&= i \frac{6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{e^{-0,1415\eta}}{0,011} \cdot (0,1871 \cos 0,1871\eta + 0,1415 \sin 0,1871\eta) + \\
&\quad + \frac{6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{e^{-0,1415\eta}}{0,011} \cdot (0,1871 \sin 0,1871\eta - 0,1415 \cos 0,1871\eta).
\end{aligned}$$

Отже, маємо:

$$\begin{aligned}
&\frac{-6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda\eta} d\lambda}{0,3333\lambda^4 - 2 \cdot 10^{-5} \lambda^2 + 0,001} = 2\pi i \sigma, \\
&\frac{-6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\cos \lambda\eta + i \sin \lambda\eta) d\lambda}{0,3333\lambda^4 - 2 \cdot 10^{-5} \lambda^2 + 0,001} = \\
&= \frac{6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{2\pi i}{0,011} \left[ i e^{-0,1415\eta} \cdot (0,1871 \cos 0,1871\eta - 0,1415 \sin 0,1871\eta) + \right. \\
&\quad + e^{-0,1415\eta} \cdot (0,1871 \sin 0,1871\eta + 0,1415 \cos 0,1871\eta) + \\
&\quad + i e^{-0,1415\eta} \cdot (0,1871 \cos 0,1871\eta + 0,1415 \sin 0,1871\eta) + \\
&\quad \left. + e^{-0,1415\eta} \cdot (0,1871 \sin 0,1871\eta - 0,1415 \cos 0,1871\eta) \right] \quad (3.51) \\
&\frac{-6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos k\eta dk}{0,33k^4 - 0,0099k^2 + 0,001} + \\
&\quad + i \frac{-6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin k\eta dk}{0,33k^4 - 0,0099k^2 + 0,001} =
\end{aligned}$$

$$= 6,25 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{2e^{-0,1415\eta}}{0,011} [-2 \cdot 0,1871 \cos 0,1871\eta + 2i \cdot 0,1871 \sin 0,1871\eta]$$

Відокремлюючи зліва та справа дійсні та уявні частини, отримуємо (3.52), таким чином радіальне переміщення  $w(\eta)$  має вигляд (3.53)

$$\begin{aligned} & \frac{-6,25 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda \eta d\lambda}{0,3333\lambda^4 - 2 \cdot 10^{-5} \lambda^2 + 0,001} = \\ & = -\frac{4 \cdot e^{-0,1415\eta} \cdot 6,25 \cdot 10^{-7} \cdot 0,1871 \cos 0,1871\eta}{0,011}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$w(\eta) = -\frac{4 \cdot e^{-0,1415\eta} \cdot 6,25 \cdot 10^{-7} \cdot 0,1871 \cos 0,1871\eta}{0,011}. \quad (3.53)$$

Графік цього переміщення наведено на рисунку 3.1.

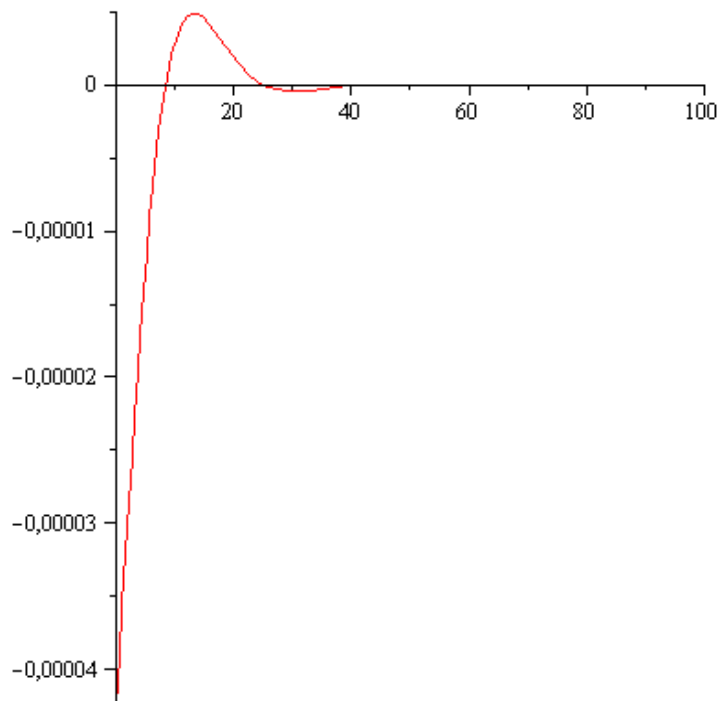


Рисунок 3.1. Розподіл радіального переміщення точок тонкої оболонки

Максимальне значення радіального переміщення спостерігається при  $\eta \rightarrow 0$  та становить за абсолютною величиною близько 0,00004 см. Це відповідає

значення цієї величини, отриманої за наближеної формули, наведеної у роботі [11]. Там це значення використане для розрахунку коефіцієнту звукоізоляції циліндричного шару. Хоча система диференціальних рівнянь (3.9) є лінійною, проте для її розв'язування не можна застосувати методу, що ґрунтується на складанні характеристичного рівняння або зведення до одного рівняння, оскільки у правій частині другого рівняння знаходиться функція Дірака. Застосування інтегрального перетворення Фур'є дає змогу успішно отримати розв'язок цієї системи. У роботі [12] розв'язана задача про визначення вимушених коливань багатошарових циліндричних оболонок, де для цього поєднано метод інтегрального перетворення Фур'є та метод скінченних елементів. Там для випадку вісесиметричного рухомого кільцевого навантаження, що діє на тришарову оболонку, отримали розподіл радіальних переміщень, що якісно відповідає отриманому у даному дослідженні аналогічному розподілі для тонкої оболонки.

## ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі магістра було здійснено дослідження особливостей застосування методу інтегральних перетворень до розв'язання задач визначення характеристик хвильових процесів у нескінченних циліндричних оболонках. Даний метод був застосований для знаходження переміщень точок тонкої нескінченної циліндричної оболонки, що знаходиться під дією рухомого навантаження.

У першому розділі магістерської роботи розглянуто теоретичні засади застосування методу нескінченного інтегрального перетворення Фур'є до розв'язання задач математичної фізики, зокрема, поняття прямого та оберненого інтегрального перетворень Фур'є, їх властивості та також умови, що забезпечують існування цього інтегрального перетворення.

У другому розділі магістерської роботи розглянуто застосування інтегрального перетворення Фур'є для моделювання механічних процесів на прикладі розв'язання статичної плоскої задачі теорії пружності. Застосування



перетворення Фур'є дозволяє понизити розмірність задачі та привести її до інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь.

Третій розділ магістерського дослідження висвітлює особливості застосування методики, до динамічних задач механіки. Спочатку розв'язані одновимірні рівняння коливання струни методом інтегрального перетворення Фур'є. Здійснено дослідження вільних та вимушених коливань нескінченної струни, а також напівнескінченної струни. У цьому випадку у залежності від типу крайової умови на кінці струни використовуємо або синус- або косинус-перетворення Фур'є. Використання інтегрального перетворення Фур'є дозволило розв'язати у роботі задачу про деформування тонкої циліндричної нескінченної оболонки, яка знаходиться під дією навантаження, що рухається зі сталою швидкістю, зокрема, визначено радіальне переміщення точок оболонки при цьому виду динамічного навантаження. Знаходження його потрібним для розв'язання багатьох динамічних задач гідроакустики.

Тут розглянуто випадок дії зосередженого кільцевого навантаження, що рухається зі сталою швидкістю вздовж осі оболонки. Застосування інтегрального перетворення Фур'є дозволяє звести розв'язання системи диференціальних рівнянь з частинними похідними, що описує рух точок оболонки, до знаходження розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно трансформант переміщень. При знаходженні оригіналів для обчислення невластних інтегралів використано методи теорії функції комплексної змінної, зокрема, теорія лишків.

Дослідження показали, що застосування інтегрального перетворення Фур'є є ефективним для розв'язання рівнянь у частинних похідних та їх систем, оскільки після застосування інтегрального перетворення отримана задача відносно зображень є значно простішою ніж вихідна, і знайшовши її розв'язок, за допомогою оберненого перетворення знаходять розв'язок вихідної задачі. Методика розв'язання крайових задач для рівнянь з частинними похідними за допомогою інтегрального перетворення Фур'є складається з наступних етапів. На першому застосовуємо до задачі цього перетворення. Це зменшує розмірність задачі, що спрощуємо її розв'язання. Використання інтегрального перетворення

дозволяє знизити розмірність задачу, що спрощує її розв'язування. На другому етапі знаходимо розв'язок задачі у зображення. Останній третій етап може бути найскладнішим. Він передбачає знаходження оригіналу для знайденого розв'язку, для чого звичайно доводиться обчислювати невластні інтеграли.

Розглянутий метод інтегрального перетворення Фур'є можна застосовувати при розв'язанні широкого класу задач механіки, зокрема, задач дослідження хвильових процесів у суцільному середовищі. Його можна розповсюдити і на розв'язування динамічних задач деформування двовимірних та тривимірних об'єктів.

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Теорія функцій комплексної змінної. Інтегральні перетворення Фур'є та Лапласа / Рудавський Ю. К. та ін. Львів: Львівська політехніка, 2010. 384 с.
2. Вайсфельд Н. Д., Реут В.В. Рівняння математичної фізики. Одеса: ОНУ, 2018. 194 с.
3. Маркович Б. М. Рівняння математичної фізики. Львів: Львівська політехніка, 2010. 384 с.
4. Kazumi Watanabe. Integral Transform Techniques for Green's Function. Boston: Springer. 278 p.
5. Wolf K. B. Integral Transforms in Science and Engineering. New York: Springer, 498 p.
6. Мироненко М. І. Інтегральні перетворення в теорії пружності. Харків: РЦНІТ, 2003. 439 с.
7. Карвацький А. Я. Механіка суцільних середовищ. Київ: КПІ ім. І. Сікорського, 2016. 290 с.
8. Бабенко А. Я. Коливання стержнів, пластин та оболонок. Київ: КПІ ім. І. Сікорського, 2022. 252 с.
9. Трач В. М., Подворний А. В. Опір матеріалів (спеціальний курс), теорія пружності та пластичності. Київ: Каравела, 2016. 434 с.

- 10.Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пружності. Львів: Світ, 1994. 580 с.
- 11.Filippi P., Habault D. Sound radiation by a baffled cylindrical shell: f numerical technique based on boundary integral equations. Pt.1 // J. Sound and Vibrat., 1999, v.131, №1. P.13-23.
12. Сисоєв Ю.О., Клименко М.І. Дія вісесиметричного рухомого навантаження на багатопарову циліндричну оболонку. // Вісник Запорізького державного університету, 2000. С.69-73