

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра загальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: «РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ
ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЇ ПЛИТИ»

Виконав: студент 2 курсу, групи 8.1112

спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми математика
(назва освітньої програми)

А. О. Прудка

(ініціали та прізвище)

Керівник завідувач кафедри загальної математики,
доцент, доцент, к.ф.-м.н. Зіновєєв І. В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент завідувач кафедри фундаментальної та
прикладної математики, професор,
д.т.н. Гребенюк С. М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя

2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра загальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н.

Зіновєєв І. В.

(підпис)

« » 2023 р.

З А В Д А Н Н Я
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Прудкій Анні Олександрівні

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Розв'язання задач лінійної теорії пружності
для ортотропної плити

керівник роботи (проекту) Зіновєєв Ігор Валерійович, к.ф.-м.н., доцент
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 01 » травня 2023 року № 642-с

2. Строк подання студентом роботи 05.12.2023 р.

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

1. Огляд предметної галузі

2. Постановка задачі лінійної теорії пружності

3. Алгоритм розв'язання

4. Практична реалізація алгоритму

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)

Ілюстрації до тексту кваліфікаційної роботи, презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 15.05.2023 р.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи магістра	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	30.05.2023	
2.	Збір вихідних даних.	01.07.2023	
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	01.09.2023	
4.	Розробка першого розділу.	01.10.2023	
5.	Розробка другого розділу.	01.11.2023	
6.	Розробка третього розділу.	25.11.2023	
7.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи магістра.	05.12.2023	
8.	Захист кваліфікаційної роботи магістра.	11-17.12.2023	

Студент _____
(підпис)

А. О. Прудка
(ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____
(підпис)

І. В. Зіновєєв
(ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____
(підпис)

О. Г. Спиця
(ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Розв'язання задач лінійної теорії пружності для ортотропної плити»: 53 с., 5 рис., 1 табл., 20 джерел, 1 додаток.

ПЛИТА, ОРТОТРОПНА ПЛИТА, АПРОКСИМАЦІЯ, КРАЙОВІ УМОВИ, СІТКА РОЗБИТТЯ, КІНЦЕВА РІЗНИЦЯ, АЛГОРИТМ.

Об'єкт дослідження – пружне тіло, ортотропна плита (пластина), диференціальні рівняння у частинних похідних, кінцеві різниці, задача лінійної теорії пружності та методи її розв'язання.

Мета роботи: провести аналіз літературних та наукових джерел щодо підходів до розв'язання задач теорії пружності для ортотропних плит; розробити розрахунковий алгоритм та дослідити задачу теорії пружності для ортотропних плит.

Методи дослідження – аналітичний, чисельний, аналіз, синтез.

Робота присвячена аналізу й розробці методів обчислень ортотропних плит при різних статистичних навантаженнях.

У вступі описана актуальність поставленої теми, та степінь її вивчення, сформульовані основні поставлені цілі і задача дослідження, наукова новизна, теоретичне та практичне застосування у різних сферах діяльності.

У першому розділі викладений матеріал по результатам огляду літератури із розрахунками для ортотропних плит та пластин різного характеру. Описується історія розвитку даної теми та постановки задачі. На основі вивченого матеріалу розділу зроблені висновки, у яких визначені методи для проведення дослідження.

У другому розділі сформульована постановка задачі та наведені основні розрахункові формули, за допомогою яких здійснюється обчислення.

Сформульований алгоритм реалізований програмно. Проведена перевірка адекватності алгоритму розв'язанням тестової задачі.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis «Solution of the Problems of Linear Elasticity Theory for an Orthotropic Plate»: 53 pages, 5 figures, 1 table, 20 references, 1 supplemental.

PLATE, ORTHOTROPIC PLATE, APPROXIMATION, BOUNDARY CONDITIONS, PARTITIONING GRID, FINITE DIFFERENCE, ALGORITHM.

The object of the study – elastic body, orthotropic slab (plate), partial differential equations, finite differences, problem of linear theory of elasticity and methods of its solution.

The aim of the study: to analyze the literature and scientific sources on approaches to solving elasticity problems for orthotropic plates; to develop a computational algorithm and study the problem of elasticity for orthotropic plates.

The methods of research – analytical, numerical, analysis, synthesis.

This work is devoted to the analysis and development of methods for calculating orthotropic plates under various statistical loads.

The introduction describes the relevance of the topic and the degree of its study, formulates the main goals and objectives of the study, scientific novelty, theoretical and practical application in various fields of activity.

The first chapter presents the results of the literature review with calculations for orthotropic plates and plates of various types. The history of the development of this topic and the problem statement is described. On the basis of the material studied in this chapter, conclusions are drawn, which define the methods to be used in the study.

In the second section, the problem statement is formulated and the main calculation formulas are given, which are used for the calculation.

The formulated algorithm is implemented in software. The adequacy of the algorithm is verified by solving a test problem.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	2
Реферат.....	4
Summary.....	5
Вступ.....	7
1 Огляд літературних джерел та необхідний для дослідження довідковий матеріал.....	8
1.1 Заснування та розвиток теорії ортотропних плит.....	8
1.2 Історичний огляд використання ортотропних плит в мостобудівництві.....	12
1.3 Сучасні задачі моделювання поведінки ортотропних плит.....	13
1.4 Зв'язок кінцевих різниць із похідною функції.....	20
1.5 Висновки за розділом 1	24
2 Постановка задачі лінійної теорії пружності для ортотропної плити та побудова алгоритму розв'язання.....	25
2.1 Постановка задачі.....	25
2.2 Основні рівняння для плити прямокутного контуру.....	26
2.3 Перетворення зведених рівнянь до безрозмірного вигляду.....	30
2.4 Апроксимація диференціальних рівнянь і крайових умов різницевиими рівняннями.....	35
2.5 Алгоритм розв'язання та приклад практичної реалізації алгоритму....	42
2.5.1 Алгоритм розв'язання.....	42
2.5.2 Приклад практичної реалізації алгоритму.....	43
Висновки.....	45
Перелік посилань.....	46
Додаток А Програмний код реалізації алгоритму розв'язання задачі.....	48

ВСТУП

Ортотропні плити набули широкого застосування у різноманітних сферах діяльності, зокрема, у будівництві. У 1990 – 2000-х роках багато вчених працювала над вивченням ортотропних плит, їхнім застосування у будівництві мостів та удосконаленням різноманітних методів для обчислення. Така зацікавленість була пов’язана із такими перевагами:

- за умов статистичних і динамічних навантажень ортотропні плити дозволяють покращити якість та надійність проїзної частини;
- зменшення вартості мостових споруд та термінів будівництва;
- виключають необхідність застосування повздовжніх прогонових елементів в рівні їх розташування;
- у разі стиснення підвищують жорсткість тонких пластинчастих елементів.

Для досягнення поставленої мети необхідно:

- розробити постановку задачі та методику розрахунків ортотропних плит;
- скласти алгоритм та вивести розрахункові рівняння;
- провести чисельні розрахунки, отримати результати та порівняти їх на адекватність.

1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ ТА НЕОБХІДНИЙ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

1.1 Заснування та розвиток теорії ортотропних плит

Згідно малій гірничій енциклопедії [1], ізо­тропія, ізо­тропність (від грец. ἴσος — рівний, однаковий та грец. τρόλος — напрям) — рівномірність (однаковість) в усіх напрямках. Звертаючись до вивчення властивостей матеріалів це означає однаковість, ідентичність властивостей матеріалів вздовж будь-яких напрямків. Узагальнююче визначення твердих тіл, яким притаманні ізо­тропія, – аморфні тіла.

На відміну від ізо­тропії, анізо­тропія (від грец. ἀνίσος — нерівний, неоднаковий та грец. τρόλος — напрям) — відмінність властивостей середовища у різних напрямках.

В теоретичній механіці, теорії спротиву матеріалів, численних практичних застосуваннях розглядають частковий випадок анізо­тропії – ортотропію. Ор­тотропія (від грец. ὀρθος — прямий та τρόπος — напрям) – неоднаковість фізичних (фізико- хімічних властивостей середовища по двох (трьох) взаємно перпендикулярних напрямках. Ор­тотропія, звісно, є частковим випадком анізо­тропії.

Також слід зауважити, що на відміну від багатьох наукових понять, що є певними узагальненнями чи спрощенням реально існуючих явищ, на практиці можна дійсно виділити велику кількість матеріалів та конструкцій, які є ізо­тропними та ор­тотропними в широкому спектрі умов та з певним ступенем точності, достатнім для практичного застосування відповідних підходів.

Відповідно ізо­тропними називають матеріали та конструкційні елементи, властивості яких є ідентичними вздовж усіх напрямків, анізо­тропними – ті, властивості яких залежать від напрямку.

Ортотропними називають матеріали, що характеризуються наявністю в кожному елементарному об'ємі трьох взаємно перпендикулярних площин симетрії властивостей.

Найчастіше як в теорії спротиву матеріалів, так й на практиці вивчають властивості ортотропних пластин та ортотропних плит, які мають широке застосування в будівництві та машинобудуванні.

Ортотропна плита – плита, що складається з поздовжніх ребер, що перетинаються, і поперечних балок, приварених до листа настилу. Жорсткість такої плити різна у перпендикулярних напрямках, тому вона й названа ортотропною.

Започаткування теорії ортотропних плит приписують польському вченому німецького походження Максиміліану Титусу Губеру, який зробив суттєвий вклад у галузі теоретичної та практичної механіки, започаткував польську школу механіки. Базові концепції теорії сформульовані в деяких наукових працях Губера, що охоплюють 1904 – 1938 роки [3], [4], [5].

Зважаючи на майже відсутні можливості математичного моделювання у той період, згадані роботи присвячені аналітичним методам розрахунку, при чому стосувалося це ортотропних пластин. А вже в 1947 році німецький інженер В. Корнеліус пропонує застосувати цю теорію, із деякими уточненнями, саме до ортотропних плит [6]. Причому уточнення полягали в тому, що товщину пластини визначали в результаті врахування металевого листа і додаткового «розмазування» по ньому поздовжніх ребер і поперечних балок, виходячи з еквівалентної циліндричної жорсткості ортотропної плити і гладкої тонкої пластини. Подальшого розвитку теорія розрахунку ортотропних плит набула в 1957 році, коли інженери В. Пелікан і М. Есслінгер [7], [8] запропонували розглядати поздовжні ребра як нерозрізні балки на опорах, які пружно просідають, що дозволило дещо спростити розрахункові співвідношення внаслідок зневажання жорсткістю відкритих ребер у разі кручення.

На початку 90-х років минулого століття настає ера великих обчислень, що змінило напрямок вектору розвитку галузі у бік чисельних методів та математичного моделювання. Застосування обчислювальної техніки усунуло практично всі властиві аналітичним методам складнощі в частині постановки, деталізації і розмірності задачі досліджень, введення припущень і спрощень під час побудови розрахункових схем конструкцій, адекватного відображення діючих статичних і динамічних навантажень. Більш того, з'явилася можливість отримувати надійні результати, не тільки створюючи розрахункові схеми, які в повній мірі відображають конструктивні особливості реальних конструкцій, а й виконувати розрахунки як у лінійній, так і в нелінійній (геометричній і фізичній) постановці, моделювати поведінку конструкцій, що розглядаються, на тривалих інтервалах часу.

Зокрема, в роботах [9, 10] описано розрахункову схему ортотропної плити з детальним моделюванням вирізів у стінках поперечних балок задля пропуску поздовжніх ребер, наведено результати визначення напружень у стінках балок біля вирізів і змінювання їх величин залежно від втомної міцності, що уможливило розкрити причини розвинення втомних тріщин.

З огляду на розвиток теорії ортотропних плит можна зробити висновок, що більшість робіт, виключаючи базові, наприклад [11-13], присвячені вдосконаленню ортотропних плит, що мають два базові недоліки: малу міцність від втоми (утворення тріщин у місцях перетину поздовжніх ребер і поперечних балок) і руйнування асфальтобетонного покриття на плиті.

Численні теоретичні та практичні роботи, присвячені ортотропним плитам, знайшли відображення в нормах та рекомендаціях багатьох країн світу щодо проектування ортотропних сталевих плит мостових споруд.

Незважаючи на вражаючий розвиток теорії ортотропних плит, а також їх практичного застосування на ряді з численними теоретично обґрунтованими конструктивно – технічними вдосконаленнями, в більшості робіт не брався до уваги досить важливий аспект довготривалого використання ортотропних плит за умов накопичення втоми, розвинення й

накопичення різного роду пошкоджень, тобто того, що має місце в реальному світі на протязі численних років експлуатації мостових споруд.

Окрім цього слід звернути увагу на те, що сьогодні ортотропні плити використовуються не лише при будівлі мостів, а й інших дорожніх елементів; покриттів з високим навантаження – злітних смуг та вертолітних майданчиків; деяких типів фундаментів. Це породжує другу подібну групу задач досліджень – дослідження поведінки плити на пружній основі (фундамент на ґрунті). Найчастіше ґрунт в задачах моделювання описується моделлю Вінклера. З фізичного погляду модель Вінклера може бути представлена безліччю незв'язаних між собою однакових пружних пружин, що спираються на абсолютно жорстку основу. У більшості завдань приймається, що пружини можуть працювати як на стиск, так і на розтяг, що характеризує двосторонній зв'язок між балкою та основою. Деформація пружної основи, що відповідає моделі Вінклера, відбувається тільки в області навантаження, що додається до нього. Це досить добре відображає реальні властивості пухких та незв'язних основ. Для щільних і тим більше скельних основ модель Вінклера не відповідає дійсному характеру деформації основи, яка відбувається і за межами області застосування навантаження. Існують інші моделі пружної основи (наприклад, модель з двома коефіцієнтами ліжка, модель пружного напівпростору, тощо), які дозволяють враховувати роботу основи за межами області прикладених навантажень. Однак розрахунок балок та інших конструктивних елементів з використанням зазначених моделей досить складний.

Окрім того, найпоширеніші числові методи, зокрема метод скінчених елементів, метод непрямих граничних елементів, мають недостатню точність при застосуванні до цілої низки практичних задач.

Недосконалість існуючих моделей та низька точність розроблених числових методів по відношенню до цілої низки реальних задач спонукає спеціалістів продовжувати дослідження теорії ортотропних плит, пропонуючи шляхи вдосконалення моделей та методів обчислення, метою

яких є отримання достовірних результатів в більшому переліку практичних задач, пов'язаних з поведінкою ортотропних плит в реальних транспортних та будівельних конструкціях.

1.2 Історичний огляд використання ортотропних плит в мостобудівництві

Перші сталеві проїзні плити мостів, скріплені поздовжніми ребрами, були збудовані в США у 1930-х роках. У той же час німецькі інженери пробували вживати тонкі сталеві плити з ребрами для мостів над новими автодорогами. Економічним стимулом для подальшого розвитку легких сталевих плит цього типу, які діяли як інтегральні компоненти головних конструктивних елементів мостів, була потреба в 50-х роках ХХ ст. відбудувати великопрольотні мости в Німеччині, що були зруйновані воєнними діями. Спочатку вживалися такі "ортотропні" плити з "відкритими" ребрами, потім уведено більш ефективні плити, скріплені "замкненими" коробчастими ребрами. У 1960-х роках у Німеччині збудовано понад 40 мостів цього типу, за ними збудовано подібні мости в інших країнах.

У США цим методом будівництва сталевих мостів зацікавився Американський інститут сталевих конструкцій, який видав у 1963 році підручник для проектування [14], що спирався на спрощену методіку німецьких інженерів W. Pelikan, M. Esslinger [7], [8]. Перший ортотропний міст на американському континенті, Port Mann у західній Канаді, був збудований у 1965 році. Перший міст такого типу в США був через р. Міссісіпі у St. Louis (1967). Опісля багато ортотропних мостів збудовано в Японії, Південній Америці та в інших країнах світу. В Україні перший міст такого типу, вантовий міст у Києві з головним прольотом 300 м, був збудований 1976 року [15].

На початку ХХІ ст. було у світі вже кілька тисяч ортотропних автодорожніх і залізничних мостів [16], серед них монументальні підвісні і вантові споруди із довжинами прольотів, які були б неможливі без ортотропних плит легкої ваги, такі як підвісний міст Акаші в Японії (1991 м) і вантовий міст "Стонкаттерс" в Гонг Конгу (1018 м).

Взагалі, ортотропні мости працюють задовільно, але у деяких випадках можлива поява тріщин у зварних швах, а також були невдалі застосування захисних настилів на проїзних поверхнях. Причиною були звичайно невідповідні деталі, вживані у початкових проектах та недоброякісне виконання конструкції. Критичний розгляд цих випадків послужив для подальшого розвитку виробництва і застосування ортотропних плит.

1.3 Сучасні задачі моделювання поведінки ортотропних плит

Як було зауважено в першому підрозділі основним чинником розвитку досліджень в галузі ортотропних плит є недосконалість існуючих чисельних та аналітичних методів, моделей ортотропних плит. Загальний термін «недосконалість» може бути конкретизований поділом досліджень на декілька груп, серед яких:

- підвищення точності чисельних методів моделювання поведінки плит;
- створення нових моделей основ, що більш точно відтворюють різні типи реальних основ у порівнянні із загальноживаною вінклерівською моделлю;
- вивчення та моделювання поведінки ортотропних плит на тривалих проміжках часу, в тому числі накопичення втомленості та пошкоджень.

Розглянемо декілька задач, що є ілюстрацією наведених вище узагальнень.

Українськими та польськими науковцями було розроблено чисельний метод макроелементів (ММЕ), що є вдосконаленням методу скінчених елементів (надалі МСЕ). До переваг розробленого методу вчені відносять поділ за елементами реальної конструкції, а не за абстрактними дрібними елементами; зменшену (на декілька порядків) кількість рівнянь, необхідних для розв'язання задачі, а також збільшену у порівнянні з МСЕ точність.

Формулювання задачі, що розглядалася. Розглянемо тонку ортотропну прямокутну плиту з розмірами в плані $2a_1, 2a_2$, яка лежить на пружній основі Вінклера. Декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ виберемо з початком у геометричному центрі плити. Вісь Ox_3 направимо вниз, а осі Ox_1 і Ox_2 розташуємо в серединній площині плити так, щоби система координат була правою (рис. 1.1). На верхній основі плита завантажена довільно розподіленим поперечним навантаженням інтенсивності $q = q(x_1, x_2)$, а на нижній діє реакція основи Вінклера [2].

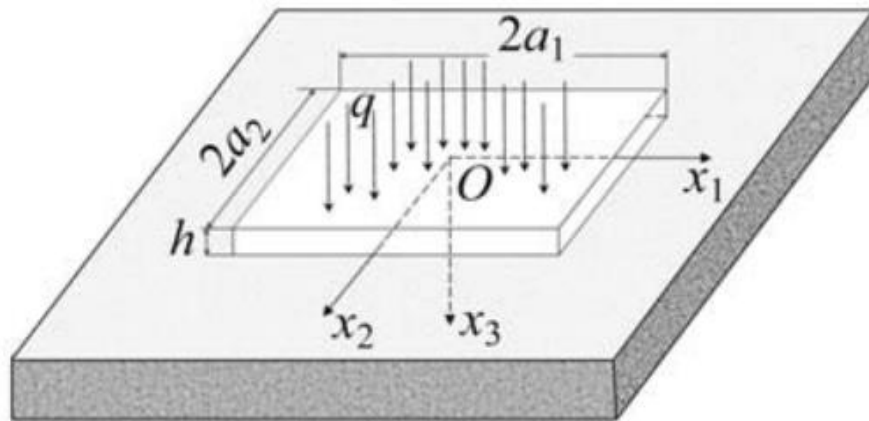


Рисунок 1.1 – Схема плити на пружній основі

Пружна рівновага такої плити описується диференціальним рівнянням у частинних похідних зі сталими коефіцієнтами

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2D_{33} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + K_0 w = q, \quad (1.1)$$

де D_{11}, D_{22} – жорсткості на згин у двох взаємоперпендикулярних напрямках;

$$D_{33} = D_{12} + 2D_{66};$$

D_{66} – жорсткість плити на кручення ортотропного матеріалу;

D_{12} – змішана жорсткість; w – прогин плити.

Загальний розв'язок рівняння (1.1) подано у вигляді

$$w_0(x_1, x_2) = R_{vpk}^{[j]} E_{vpk}^{[j]}(x_j) T_{pk}^{[3-j]}(x_{3-j}). \quad (1.2)$$

Якщо ввести функції, що мають назву координатних

$$W_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2) = E_{vpk}^{[j]}(x_j) T_{pk}^{[3-j]}(x_{3-j}) \quad (1.3)$$

то рівняння (1.2) набуде вигляду

$$w(x_1, x_2) = R_{vpk}^{[j]} W_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2) + w_*(x_1, x_2). \quad (1.4)$$

З використанням (1.2) в ортотропній плиті визначаються тангенціальні переміщення

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} = R_{vpk}^{[j]} U_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2, x_3) + U_*(x_1, x_2, x_3), \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} = R_{vpk}^{[j]} V_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2, x_3) + V_*(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Моменти

$$\begin{aligned} M_{11}(x_1, x_2) &= -\left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = R_{vpk}^{[j]} X_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2) + X_*(x_1, x_2), \\ M_{22}(x_1, x_2) &= -\left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = R_{vpk}^{[j]} Y_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2) + Y_*(x_1, x_2), \end{aligned}$$

$$M_{12}(x_1, x_2) = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = R_{vpk}^{[j]} Z_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2) + Z_*(x_1, x_2). \quad (1.6)$$

та поперечні сили

$$\begin{aligned} Q_1(x_1, x_2) &= -\left(D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right) = \\ &= R_{vpk}^{[j]} G_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2) + G_*(x_1, x_2), \\ Q_2(x_1, x_2) &= -\left(D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right) = \\ &= R_{vpk}^{[j]} H_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2) + H_*(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Перші доданки (1.5) – (1.7) пов'язані із загальним розв'язком однорідного рівняння w_0 , а другі доданки – з частковим розв'язком w_* неоднорідного рівняння.

Для ефективного числового моделювання роботи плитової конструкції на пружній основі отримані співвідношення (1.4) – (1.8) подають в матричному вигляді із застосуванням координатних матриць прогину, переміщень, моментів та поперечних сил.

Моделювання роботи плити полягає в записі крайових умов в окремих вузлових точках на її контурі. Вузлові точки розміщуються в один з двох способів: в кутових точках, а також у місцях прикладення зосереджених опор і в місцях розриву крайових умов, або в околі вказаних точок, які асимптотно наближаються до них.

В деяких інших наукових роботах автори називають запропонований метод також методом конструкційних елементів (МКЕ).

Група нігерійських науковців в статті «Застосування альтернативної теорії до аналізу вібрації та аналізу стійкості товстих прямокутних пластин (ізотропних та ортотропних)» також апелює до якості результатів, що можуть бути отримані з використанням методу скінчених елементів. За твердженням авторів метод призводить до завищеної оцінки власних частот через нехтування впливом поперечної деформації зсуву. Рейсснер і Міндлін,

наприклад, розробили теорії деформації зсуву пластин першого порядку (ТЗДП) з урахуванням ефектів поперечного зсуву та обертання інерційних ефектів шляхом лінійної варіації внутрішньої площини, що проходить через товщину пластини [17].

Розподіл деформації поперечного зсуву в теорії деформації зсуву першого (надалі ТДФПП) порядку вважається неперервним по глибині пластини, і тому для обґрунтування енергії деформації, зумовленої деформацією зсуву, необхідне значення поправки на зсув [17]. Ці коефіцієнти поправки на зсув, як правило, залежать від задачі. Для подолання обмежень МСЕ та ТДФПП, було розроблено багато теорій зсувної деформації пластин вищого порядку, до яких відносяться теорії деформації зсуву пластин вищого порядку [18], уточнені теорії [19], тригонометрична теорія деформації зсуву (надалі ТТДЗ) [20]. Але ці теорії були розроблені на основі припущень МСЕ, навіть якщо вдавалося уникнути вимоги лінійності зсувної деформації $f(z)$. Ще одним з недоліків цих розробок вважається надмірна для роботи проектувальних суворість.

Колектив авторів розробив уточнену теорію пластин, що має назву альтернативи I та II та не ґрунтується на допущеннях МСЕ. І хоча ця теорія є також теорією першого порядку, деформація зсуву, розподілена по глибині пластини, вважалася непостійною.

Припущення, сформульовані в альтернативній теорії:

- переміщення u , v та w є малими у порівнянні з товщиною пластини;
- зсуви в середині пластини є диференційованими по x , y та z у той час, як зсуви ззовні пластини (прогинання) є диференційованими лише по x та y ;
- вплив нормального напруження поза площиною на повну реакцію пластини є малим у порівнянні з іншими напруженнями (в середині);
- МСЕ – компонента плоских деформацій не дорівнює нулеві, тобто спрацьовують наступні співвідношення:

$$u = z \frac{dw}{dx} dx + z\phi_x, \quad (1.8)$$

$$v = z \frac{dw}{dy} dy + z\phi_y, \quad (1.9)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = 2 \frac{dw}{dx} + \phi_x, \quad (1.10)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 2 \frac{dw}{dy} + \phi_y; \quad (1.11)$$

– максимальне вертикальне напруження зсуву (τ_{xzm} або τ_{yzm}), розподілене по товщині пластини є добутком номінального вертикального напруження зсуву (τ_{xz} або τ_{yz}) та коефіцієнта форми $G(z)$. Тобто

$$\tau_{xzm} = \tau_{xz} G(z) = \frac{EG(z)}{2(1+\mu)} \gamma_{xz}; \quad (1.12)$$

– вертикальний переріз, який є нормальним до серединної площини пластини до згинання, не залишається таким в процесі згинання, тобто $\phi \neq \theta c$, де ϕ – повний вертикальний обертання середньої поверхні, а θc – це СРТ-компонента вертикального повороту серединної площини.

Можна узагальнити, що запропонована теорія ставить метою наближення моделі ортотропної плити до реальних умов без підвищення порядку, оскільки запропонована теорія також є теорією першого порядку.

Шляхом порівняння розрахунків за запропонованою теорією та результатів експериментів, дослідниками було зроблено висновок, що запропонована теорія дозволяє знизити відносну похибку розрахунку частоти вібрації втричі у порівнянні з МСЕ, з 0.035 до 0.011. Таким чином, запропоновано теорія розрахунків дозволяє знизити ризики нестабільності та вібрації конструкції, що неминуче призводить до появи ранніх тріщин, осідання та прогинання елементів конструкції.

На останнє розглянемо дослідження, що ставило метою вивчення та моделювання впливу зовнішніх факторів на втому, деформацію та

пошкодження плити. Ця тематика дещо відрізняється від аналітичного, числового та комбінованого розгляду замкнених систем, плита – основа й наближає моделювання до реального світу.

В розглянутій моделі автори вивчають втомну довговічність плити під стохастичним транспортним навантаженням та впливом природніх факторів зовнішнього середовища, що вважаються ними основними причинами деформації та передчасного руйнування ортотропних конструкційних елементів.

На думку авторів, існує два типи втомних пошкоджень мостів при довготривалих великих навантаженнях. Перший тип – це пошкодження дорожнього покриття, наприклад, поздовжні тріщини і як наслідок втрата монолітності конструкції на межі сталь – бетон.. Пошкодження асфальтобетонного покриття спричиняє ущільнення та напружений стан ортотропної сталеві плити, що пришвидшує пошкодження та створює ризик руйнування конструкції.

Другий тип – це розтріскування ортотропної сталеві плити. Тріщини, як правило, з'являються під спільним впливом низької жорсткості плити і численних важких вантажівок, що призводить до великих амплітуд напружень в деяких типових місцях мосту.

Автори дослідження пропонують систематичну процедуру для прогнозування втомної довговічності компонентів ортотропної плити.

Спочатку з вимірних даних транспортного навантаження виділяють навантаження на вісь, швидкість, смугу руху та іншу інформацію про транспортний засіб, а потім моделюють довготривале транспортне навантаження за допомогою методу Монте-Карло. До того створюється локальна уточнена тривимірна МСЕ модель, яка навантажувється одиничним навантаженням для створення поверхні впливу напружень на схильні до втоми деталі, після чого історія напружень отримується за допомогою навантажування поверхні впливу. Далі, відповідно до методу підрахунку дощового потоку, визначається спектр напружень схильної до втоми деталі

під впливом стохастичних транспортних навантажень. Нарешті, відповідно до критерію лінійної кумулятивної пошкоджуваності Майнера та класифікації категорій деталей на S-N кривих, визначається втомна довговічність схильних до втоми деталей.

Незважаючи на те, що дослідження авторів було розроблено для прогнозування довговічності окремо взятого мосту в Хейхе, ними був побудований фреймворк, базовими теоріями для якого є метод Монте-Карло, метод скінчених елементів, алгоритм дощового потоку.

1.4 Зв'язок кінцевих різниць із похідною функції

Похідна функції f у точці x визначається за допомогою границі:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (1.13)$$

Чисельник дробу під знаком границі – різниця функції f , а знаменник – крок цієї різниці. Тому найпростішим методом апроксимації похідної є використання кінцевих різниць функції f з деяким досить малим кроком h . Запишемо вираз, що наближає похідну функції f у точці x з точністю до величини, пропорційної h :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (1.14)$$

Використання виразу

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (1.15)$$

дозволяє скоротити помилку наближення до величини, пропорційної h^2 .

Кінцевими різницями можна наближати похідні вищих порядків.

Якщо відомі значення функції f у деяких вузлах x_1, \dots, x_N , то можна побудувати інтерполяційний поліном $P_N(x)$ (наприклад, у формі Лагранжа або у формі Ньютона) і приблизно взяти

$$f^{(r)}(x) \approx P_N^{(r)}(x), 0 \leq r \leq N. \quad (1.16)$$

Такі вирази називають формулами чисельного диференціювання.

Іноді поряд з наближеною рівністю вдається (наприклад, використовуючи формулу Тейлора) отримати точну рівність, що містить залишковий член $R(x)$, званий похибкою чисельного диференціювання:

$$f^{(r)}(x) = P_N^{(r)}(x) + R(x), 0 \leq r \leq N. \quad (1.17)$$

Такі вирази називаються формулами чисельного диференціювання із залишковими $h = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \dots, N\}$ членами. Ступінь, з якою величина входить у залишковий член, називається порядком похибки формули чисельного диференціювання.

Наведемо декілька формул чисельного диференціювання з залишковими членами першої ($r = 1$) та другої ($r = 2$) похідних для рівновіддалених вузлів з постійним кроком $h > 0$ отриманих з використанням формули Лагранжа:

– $r = 1, N = 1$ (два вузла):

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi), \\ f'(x_1) &= \frac{f_1 - f_0}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi); \end{aligned} \quad (1.18)$$

– $r = 1, N = 2$ (три вузла):

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \frac{-3f_0+4f_1-f_2}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi), \\
f'(x_1) &= \frac{f_2-f_0}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \\
f'(x_2) &= \frac{f_0-4f_1+3f_2}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi);
\end{aligned} \tag{1.19}$$

– $r = 2, N = 2$ (три вузла)

$$\begin{aligned}
f''(x_0) &= \frac{f_0-2f_1+f_2}{h^2} - hf'''(\xi), \\
f''(x_1) &= \frac{f_0-2f_1+f_2}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \\
f''(x_2) &= \frac{f_0-2f_1+f_2}{h^2} + hf'''(\xi);
\end{aligned} \tag{1.20}$$

– $r = 2, N = 3$ (чотири вузла):

$$\begin{aligned}
f''(x_0) &= \frac{2f_0-5f_1+4f_2-f_3}{h^2} + \frac{11h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \\
f''(x_1) &= \frac{f_0-2f_1+f_2}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \\
f''(x_2) &= \frac{f_1-2f_1+f_3}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \\
f''(x_3) &= \frac{-f_0+4f_1-5f_2+2f_3}{h^2} + \frac{11h^2}{12} f^{(4)}(\xi).
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Тут $f_i = f(x_i), i = 0, \dots, N$, а ξ — деяка проміжна точка між найбільшим та найменшим із вузлів.

У загальному випадку коефіцієнти формул чисельного диференціювання можна обчислити для довільної сітки вузлів і будь-якого порядку похідної.

Приведемо таблицю коефіцієнтів центральних скінченних різниць для першої та другої похідної (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Коефіцієнти центральних скінченних різниць

Похідна	Точність	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4
		1	2				$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	
4				$\frac{1}{12}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{12}$		
6			$-\frac{1}{60}$	$\frac{3}{20}$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{60}$	
8	$-\frac{1}{280}$		$-\frac{4}{105}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{105}$	$-\frac{1}{280}$
2	2				1	-2	1			
	4			$-\frac{1}{12}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{12}$		
	6		$\frac{1}{90}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{49}{18}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{90}$	
	8	$-\frac{1}{560}$	$\frac{8}{315}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{205}{72}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{315}$	$-\frac{1}{560}$

1.5 Висновки за розділом 1

Ключовими напрямками досліджень в галузі ортотропних плит в поточному столітті можна вважати вдосконалення чисельних методів моделювання навантажень та реакції плит, що дозволяє наближувати

отримані результати до реальних умов. Розглянуті в розділі підходи дозволяють розширити застосовність аналітичних та чисельних методів моделювання напружень в ортотропних плитах до широкого кола реальних умов, що включає різні типи основи в місцях контакту ортотропної плити з довколишнім середовищем.

Аналіз літературних джерел та наукових робіт за напрямком дослідження ортотропних плит дозволяє зробити висновок, що досить ефективним та зручним інструментом є використання методу скінченних різниць (МСР), методу сіток. Тому для розв'язання поставленої задачі доцільним є використання методу скінченних різниць.

В наступному розділі спираючись на обраний метод виведемо для подальших розрахунків формули.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЇ ПЛИТИ ТА ПОБУДОВА АЛГОРИТМУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Постановка задачі

Розглянемо ортотропну прямокутну плиту з розмірами в плані $2a_1, 2a_2$.

Декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ виберемо з початком у геометричному центрі плити. Вісь Ox_3 направимо вниз, а осі Ox_1 і Ox_2 розташуємо в серединній площині плити так, щоби система координат була правою (рис. 2.1). Тоді плита представляє із себе прямокутне пружне тіло товщини h , що обмежено паралельними площинами $x_1 = \pm a_1, x_2 = \pm a_2, x_3 = \pm \frac{h}{2}$. На верхній основі плита завантажена довільно розподіленим поперечним навантаженням інтенсивності $q = q(x_1, x_2)$, що діє в області Γ .

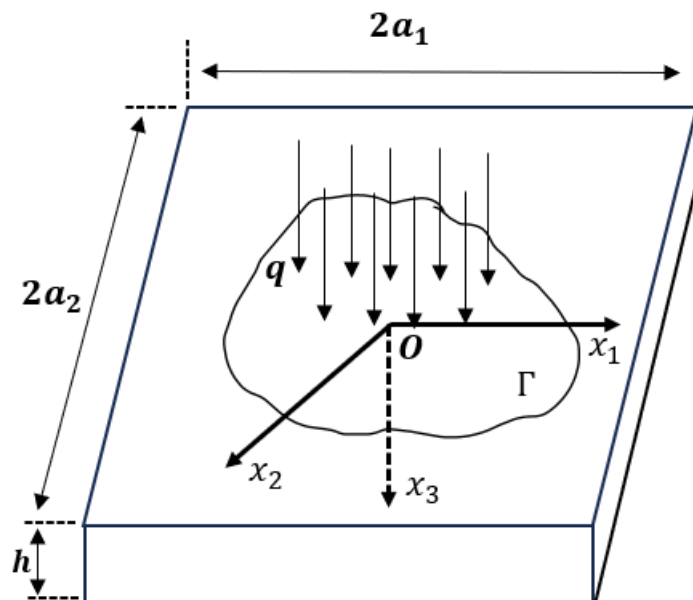


Рисунок 2.1 – Схема плити на пружній основі

Крайові умови: шарнірне опирання; жорстке закріплення; вільний край.

Матеріал плити задається пружними характеристиками – модулями пружності, коефіцієнтами Пуассона та модулями Юнга. Напрямки ортотропії є такими, що паралельні координатним площинам введеної системи координат.

Потрібно визначити вигини серединної поверхні плити в довільній точці.

2.2 Основні рівняння для плити прямокутного контуру

Вважаємо, що матеріал пластини щодо своїх пружних властивостей має три площини симетрії і вони приймаються як координатні площини. Такі пластини називаються ортотропними [18].

Диференціальне рівняння поперечного вигину ортотропних плит має вигляд:

$$D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = q \quad (2.1)$$

де W – вертикальне переміщення точки плити;

q – інтенсивність розподіленого по поверхні пластини поперечного навантаження;

D_x, D_y – жорсткості згину щодо осей y, x ;

H – жорсткість на крутіння;

Після визначення прогинів W із формули (2.1) моменти згину в напрямі координатних осей x, y ; моменти кручення та поперечні сили обчислюються за такими формулами [18]:

$$\begin{cases} M_x = -\left(D_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right); \\ M_y = -\left(D_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right); \end{cases} \quad (2.2)$$

$$M_{xy} = 2D_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}; \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} Q_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right); \\ Q_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + H \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right); \end{cases} \quad (2.4)$$

У виразах (2.1) – (2.4):

$$\begin{cases} H = D_1 + 2D_{xy}; \\ D_{xy} = \frac{G \cdot \delta^3}{12}; \\ D_1 = \frac{E'' \cdot \delta^3}{12}; \\ D_x = \frac{E_x \cdot \delta^3}{12}; \\ D_y = \frac{E_y \cdot \delta^3}{12}; \end{cases} \quad (2.5)$$

E_x ; E_y ; E'' ; G – пружні характеристики матеріалу, які визначаються експериментально; δ – товщина пластини.

Припустимо, що величини (2.5) відомі.

Якщо, як у випадку залізобетонних плит, $H = \sqrt{D_x D_y}$, то введення нової змінної $y_1 = y \sqrt{\frac{D_x}{D_y}}$ диференціальне рівняння (2.1) можна привести до виду, справедливого для ізотропних пластин [18]. Алгоритм розрахунку ізотропних плит детально розроблений науковцями щодо невідомих M і W , де $M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu}$; ν – коефіцієнт Пуассона. Тому нижче розглянемо загальний випадок, коли необов'язково $H = \sqrt{D_x D_y}$.

Зазначимо, що для ортотропних плит, як і для ізотропних, справедливими є гіпотези Кіргофа-Лява [18]. Це дозволяє описувати крайові умови аналогічні таким в ізотропних пластинах.

Вважаючи так, розглянемо крайові умови при $y = 0$ (рис. 2.2).

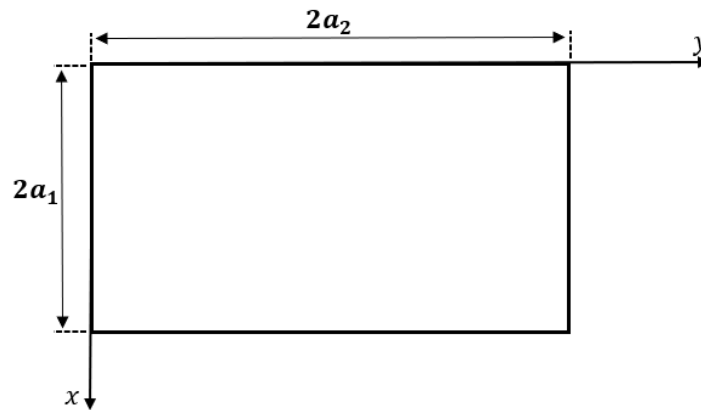


Рисунок 2.2 – Модель серединної поверхні плити

Шарнірне (вільне) опирання плити у загальному випадку маємо: $W = W_0(x)$; $M_y = M_y^0(x)$, тобто. при $y = 0$ величини прогинів і моментів згину в напрямку осі y можуть бути задані у вигляді деякої неперервної диференційованої функції аргументу x . Тоді відомо $\frac{\partial^2 W_0(x)}{\partial x^2}$, і з формули (2.2)

$$\text{слідуює: } \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{1}{D_y} \left[M_y^0(x) + D_1 \frac{\partial^2 W_0(x)}{\partial x^2} \right].$$

Для випадку, що найчастіше зустрічається на практиці $W_0(x) = 0$; $M_y^0(x) = 0$, отримаємо:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0. \quad (2.6)$$

Жорстко закріплений край плити:

$$W = W_0(x); \quad \frac{\partial W}{\partial y} = W_y^0(x), \quad (2.7)$$

де $W_y^0(x)$ – задані у вигляді функції x значення кута повороту $\frac{\partial W}{\partial y}$.

В частинному випадку:

$$W = 0; \frac{\partial W}{\partial y} = 0. \quad (2.8)$$

Вільний від закріплень край: $M_y = M_y^0(x); V_y = V_y^0(x)$, де $V_y^0(x)$ – задані значення узагальненої поперечної сили краю плити, зокрема, рівні нулю.

Враховуючи, що $V_y = Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$ та формули (2.3), (2.4) отримаємо:

$$V_y = -D_y \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} - (H + 2D_{xy}) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y}. \quad (2.9)$$

Крім крайових умов, можуть знадобитися умови у кутових точках.

Розглянемо ці умови за $x = 0; y = 0$ (рис. 2.2).

Якщо шарнірно обперті пластини перетинаються в куту сторони або жорстко замуровані, то в кутовій точці: $W = W_0; \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W_0(x)}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 W_0(y)}{\partial y^2}$, де W_0 – заданий осад кутової точки; $W_0(x), W_0(y)$ – функціонально задані осадки плити відповідно на краях при $y = 0$ та $x = 0$. Часто зустрічаються задачі, де $W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$ в кутовій точці.

Якщо обидві сторони плити у кутовій точці вільні від закріплень, то $M_x = M_x^0; M_y = M_y^0; R = R_0$, де M_x^0, M_y^0, R_0 – задані значення M_x, M_y і зосередженої сили у кутовій точці.

При заданих M_x, M_y відповідні значення $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$ можна знайти із спільного розв'язку рівнянь (2.2). В реальних задачах: $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = R_0 = 0$.

Можливі ще два випадки: одна сторона вільно від закріплень, інша – або шарнірно оперта або жорстко замурована. Тут ми обмежуємося

розглядом однорідних умов в кутовий точці, тобто коли задані величини свідомо дорівнюють нулю: у першому випадку $W_0 = 0$; $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$; в другому: $W = 0$; $\frac{\partial W}{\partial y} = 0$ або $\frac{\partial W}{\partial x} = 0$. При цьому мається на увазі, що сторони плити, перетинаючись під прямим кутом, мають на околицях точки перетину деяку перехідну зону.

2.3 Перетворення зведених рівнянь до безрозмірного вигляду

Щоб отримати чисельний розв'язок в загальному вигляді запишемо диференціальне рівняння (2.1) у безрозмірних величинах:

$$\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\gamma \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} = p, \quad (2.10)$$

де

$$\alpha = \frac{D_x}{D_y}; \gamma = \frac{H}{D_y}; p = \frac{q}{q_0}; \xi = \frac{x}{a}; \eta = \frac{y}{a}; w = \frac{W D_y}{q_0 a^4}; \quad (2.11)$$

q_0 – інтенсивність навантаження у фіксованій точці; a – довжина однієї сторони плити.

З (2.11) помітно, що визначивши безрозмірні прогини w можна обчислити розмірні величини w при будь-яких заданих значеннях D_y, q_0, a .

Аналогічно у безрозмірних величинах можна записати інші диференціальні вирази. Із (2.2) – (2.4) отримаємо:

$$\begin{cases} m^{(\xi)} = -\left(\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right); \\ m^{(\eta)} = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right); \\ m^{(\xi\eta)} = \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}; \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} q^{(\xi)} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right); \\ q^{(\eta)} = -\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right); \end{cases} \quad (2.13)$$

У формулах (2.12) – (2.13):

$$m^{(\xi)} = \frac{M_x}{q_0 a^2}; \quad m^{(\eta)} = \frac{M_y}{q_0 a^2}; \quad m^{(\xi\eta)} = \frac{M_{xy}}{q_0 a^2}; \quad (2.14)$$

$$q^{(\xi)} = \frac{Q_x}{q_0 a}; \quad q^{(\eta)} = \frac{Q_y}{q_0 a}; \quad \mu = \frac{D_1}{D_y}; \quad \lambda = \gamma - \mu. \quad (2.15)$$

Вирази, які описують крайові умови, можна записати у безрозмірних величинах. В одному із випадків, для однорідних умов, будемо мати для краю (за пунктом 2.2) $\eta = 0$ наступне:

Опертий шарнірно край:

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0. \quad (2.16)$$

Жорстко закріплений край:

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0. \quad (2.17)$$

Також розглянемо в загальному випадку вільний від закріплень край:

$$\begin{cases} m^{(\eta)} = {}^0m^{(\eta)} = \frac{M_y^0}{q_0 a^2}; \\ {}^0v^{(\eta)} = \frac{v_y^0}{q_0 a} = -\frac{\partial w^{\eta\eta}}{\partial \eta} - (2\gamma - \mu) \frac{\partial w^{\xi\xi}}{\partial \eta} \end{cases} \quad (2.18)$$

Для вільного краю при $\xi = 0$ маємо:

$$\begin{cases} m^{(\xi)} = {}^0m^{(\xi)} = \frac{M_x^0}{q_0 a^2}; \\ {}^0v^{(\xi)} = \frac{v_x^0}{q_0 a} = -\frac{\partial w^{\xi\xi}}{\partial \xi} - (2\gamma - \mu) \frac{\partial w^{\eta\eta}}{\partial \xi} \end{cases} \quad (2.19)$$

Якщо сторони пластинки шарнірно оперті або жорстко закріпленні, і перетинаються під прямим кутом, то в кутовій точці:

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0. \quad (2.20)$$

Якщо обидві сторони плити в кутовій точці вільні від закріплень, то в кутовій точці:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = r = 0; \\ r = \frac{R}{q_0 a^2}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Якщо одна сторона плити в кутовій точці шарнірно оперта, а друга – вільна від закріплень, то справедливий вираз (2.20).

Якщо одна сторона плити в кутовій точці жорстко закріплена, а друга – вільна від закріплень, то маємо:

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0; \quad (2.22)$$

або

$$w = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0; \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0. \quad (2.23)$$

Введемо позначення:

$$w^{\xi\xi} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}; \quad w^{\xi\eta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}; \quad w^{\eta\eta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}. \quad (2.24)$$

Враховуючи(2.24) із диференціального рівняння четвертого порядку (2.10) отримаємо диференціальне рівняння частинних похідних другого порядку відносно двох невідомих $w^{\xi\xi}$; $w^{\eta\eta}$:

$$\alpha \frac{\partial^2 w^{\xi\xi}}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^2 w^{\xi\xi}}{\partial \eta^2} + \gamma \frac{\partial^2 w^{\eta\eta}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w^{\eta\eta}}{\partial \eta^2} = p. \quad (2.25)$$

Враховуючи (2.24) формули (2.13), (2.14) приймуть такий вигляд:

$$\begin{cases} m^{(\xi)} = -(\alpha w^{\xi\xi} + \mu w^{\eta\eta}); \\ m^{(\eta)} = -(w^{\eta\eta} + \mu w^{\xi\xi}); \end{cases} \quad (2.26)$$

$$m^{(\xi\eta)} = \lambda w^{\xi\eta}; \quad (2.27)$$

$$\begin{cases} q^{(\xi)} = -\frac{\partial}{\partial \xi} (\alpha w^{\xi\xi} + \gamma w^{\eta\eta}); \\ q^{(\eta)} = -\frac{\partial}{\partial \eta} (w^{\eta\eta} + \gamma w^{\xi\xi}). \end{cases} \quad (2.28)$$

Крайові умови при $\eta = 0$ запишемо у такому вигляді:

Шарнірно опертий край:

$$w = 0; \quad w^{\xi\xi} = w^{\eta\eta} = 0. \quad (2.29)$$

Жорстко закріплений край:

$$w = 0; w^{\xi\xi} = 0; w^{\eta\eta} = 0. \quad (2.30)$$

де $w^{\eta} = \frac{\partial w}{\partial \eta}$.

Вільний від закріплень край:

$$\left\{ \begin{array}{l} m^{(\eta)} = {}^0m^{(\eta)} = \frac{M_y^0}{q_0 a^2}; \\ {}^0v^{(\eta)} = \frac{v_y^0}{q_0 a} = -\frac{\partial w^{\eta\eta}}{\partial \eta} - (2\gamma - \mu) \frac{\partial w^{\xi\xi}}{\partial \eta}. \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Для вільного від закріплень краю при $\xi = 0$ будемо мати:

$$\left\{ \begin{array}{l} m^{(\xi)} = {}^0m^{(\xi)} = \frac{M_x^0}{q_0 a^2}; \\ {}^0v^{(\xi)} = \frac{v_x^0}{q_0 a} = -\frac{\partial w^{\xi\xi}}{\partial \xi} - (2\gamma - \mu) \frac{\partial w^{\eta\eta}}{\partial \xi}. \end{array} \right. \quad (2.32)$$

З урахуванням введення нових невідомих замість (2.20), (2.22) отримаємо відповідно (2.29), (2.30).

Умови (2.21), (2.23) запишуться у вигляді:

$$w^{\xi\xi} = w^{\eta\eta} = r = 0; \quad (2.33)$$

$$w = 0; w^{\xi} = 0; w^{\eta\eta} = 0. \quad (2.34)$$

де $w^{\xi} = \frac{\partial w}{\partial \xi}$.

2.4 Апроксимація диференціальних рівнянь і крайових умов різницевиими рівняннями

Запишемо різницеву апроксимацію диференціального рівняння другого порядку в загальному вигляді:

$$\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \delta \frac{\partial w}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \sigma \frac{\partial w}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi^2} + \delta_i \frac{\partial w_i}{\partial \xi} + \beta_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi \partial \eta} + \sigma_i \frac{\partial w_i}{\partial \eta} + \gamma_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial \eta^2} \right) = -p. \quad (2.35)$$

Диференціальне рівняння (2.25) є частинним випадком (2.35). Значення невідомих w ; w_i в рівнянні (2.25) виконують величини, які підлягають визначенню величини $w^{\xi\xi}$; $w^{\eta\eta}$. Тому для апроксимації (2.25) різницевиими рівняннями зробимо заміну: w на $w^{\xi\xi}$ при $\delta = \beta = \sigma = 0$ і w_1 на $w^{\eta\eta}$ при $\alpha_1 = \gamma$; $\delta_1 = \beta_1 = \sigma_1 = 0$; $\gamma_1 = 1$, а друга частину рівняння слід замінити на $-p$. В результаті отримаємо різницеве рівняння відносно невідомих $w^{\xi\xi}$ і $w^{\eta\eta}$.

Запишемо це рівняння на рівномірній сітці з кроком h і τ , допускаючи, що p в межах норми елементів I, II, III, IV (рис. 2.3) постійно, але на границя має розрив I роду.

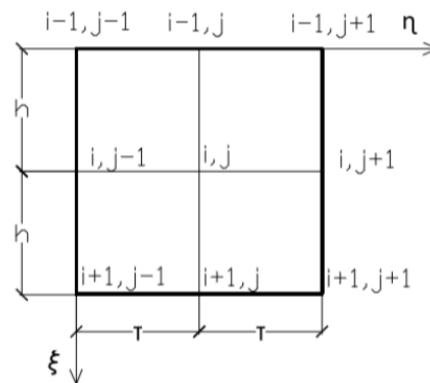


Рисунок 2.3 – Частина розрахункової сітки для обраної точки

Записуючи різницеву апроксимацію диференціального рівняння (2.25) будемо вважати, що функції $w^{\xi\xi}$ і $w^{\eta\eta}$ неперервні; можливі кінцеві розриви частинних похідних цих функцій:

$$\begin{aligned}
& \left(\alpha \frac{\tau}{h} + \gamma \frac{h}{\tau}\right) w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + 2 \left(5\alpha \frac{\tau}{h} - \gamma \frac{h}{\tau}\right) w_{i-1,j}^{\xi\xi} + \left(\alpha \frac{\tau}{h} + \gamma \frac{h}{\tau}\right) w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - \\
& - 2 \left(\alpha \frac{\tau}{h} - 5\gamma \frac{h}{\tau}\right) w_{i,j-1}^{\xi\xi} - 20 \left(\alpha \frac{\tau}{h} + \gamma \frac{h}{\tau}\right) w_{i,j}^{\xi\xi} - 2 \left(\alpha \frac{\tau}{h} - 5\gamma \frac{h}{\tau}\right) w_{i,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + \left(\alpha \frac{\tau}{h} + \gamma \frac{h}{\tau}\right) w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + 2 \left(5\alpha \frac{\tau}{h} - \gamma \frac{h}{\tau}\right) w_{i+1,j}^{\xi\xi} + \left(\alpha \frac{\tau}{h} + \gamma \frac{h}{\tau}\right) w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} - \\
& - h \left[\gamma \frac{h}{\tau} {}^{I-II} \Delta w_{i,j-1}^{\xi\xi\xi} - \left(2\alpha \frac{\tau}{h} + \gamma \frac{h}{\tau}\right) \left({}^{I-II} \Delta w_{i,j}^{\xi\xi\xi} + {}^{III-IV} \Delta w_{i,j}^{\xi\xi\xi} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \gamma \frac{h}{\tau} {}^{III-IV} \Delta w_{i,j+1}^{\xi\xi\xi} \right] - \tau \left[\gamma \frac{h}{\tau} {}^{I-III} \Delta w_{i-1,j}^{\xi\xi\eta} - \left(\alpha \frac{\tau}{h} + 2\gamma \frac{h}{\tau}\right) \times \right. \\
& \quad \left. \times \left({}^{I-III} \Delta w_{i,j}^{\xi\xi\eta} + {}^{II-IV} \Delta w_{i,j}^{\xi\xi\eta} \right) + \alpha \frac{\tau}{h} {}^{II-IV} \Delta w_{i+1,j}^{\xi\xi\eta} \right] + \\
& + 4\alpha\tau \left({}^{I-II} \Delta w_{i,j-\frac{1}{2}}^{\xi\xi\xi} + {}^{III-IV} \Delta w_{i,j+\frac{1}{2}}^{\xi\xi\xi} \right) + 4\gamma h \left({}^{I-III} \Delta w_{i-\frac{1}{2},j}^{\xi\xi\eta} + {}^{II-IV} \Delta w_{i+\frac{1}{2},j}^{\xi\xi\eta} \right) + \\
& + \left(\gamma \frac{\tau}{h} + \frac{h}{\tau}\right) w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + 2 \left(5\gamma \frac{\tau}{h} - \frac{h}{\tau}\right) w_{i-1,j}^{\eta\eta} + \left(\gamma \frac{\tau}{h} + \frac{h}{\tau}\right) w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} - \quad (2.36) \\
& - \left(2\gamma \frac{\tau}{h} - 5\frac{h}{\tau}\right) w_{i,j-1}^{\eta\eta} - 20 \left(\gamma \frac{\tau}{h} + \frac{h}{\tau}\right) w_{i,j}^{\eta\eta} - 2 \left(\gamma \frac{\tau}{h} - 5\frac{h}{\tau}\right) w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + \left(\gamma \frac{\tau}{h} + \frac{h}{\tau}\right) w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + 2 \left(5\gamma \frac{\tau}{h} - \frac{h}{\tau}\right) w_{i+1,j}^{\eta\eta} + \left(\gamma \frac{\tau}{h} + \frac{h}{\tau}\right) w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} - \\
& - h \left[\frac{h}{\tau} {}^{I-II} \Delta w_{i,j-1}^{\eta\eta\xi} - \left(2\gamma \frac{\tau}{h} + \gamma \frac{h}{\tau}\right) \left({}^{I-II} \Delta w_{i,j}^{\eta\eta\xi} + {}^{III-IV} \Delta w_{i,j}^{\eta\eta\xi} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{h}{\tau} {}^{III-IV} \Delta w_{i,j+1}^{\eta\eta\xi} \right] - \tau \left[\gamma \frac{h}{\tau} {}^{I-III} \Delta w_{i-1,j}^{\eta\eta\eta} - \left(\gamma \frac{\tau}{h} + 2\frac{h}{\tau}\right) \times \right. \\
& \quad \left. \times \left({}^{I-III} \Delta w_{i,j}^{\eta\eta\eta} + {}^{II-IV} \Delta w_{i,j}^{\eta\eta\eta} \right) + \gamma \frac{\tau}{h} {}^{II-IV} \Delta w_{i+1,j}^{\eta\eta\eta} + \right. \\
& \quad \left. + 4\gamma\tau \left({}^{I-II} \Delta w_{i,j-\frac{1}{2}}^{\eta\eta\xi} + {}^{III-IV} \Delta w_{i,j+\frac{1}{2}}^{\eta\eta\xi} \right) \right] + \\
& + 4\gamma h \left({}^{I-III} \Delta w_{i-\frac{1}{2},j}^{\eta\eta\eta} + {}^{II-IV} \Delta w_{i+\frac{1}{2},j}^{\eta\eta\eta} \right) = 3\tau h ({}^I p_{ij} + {}^II p_{ij} + {}^III p_{ij} + {}^IV p_{ij})
\end{aligned}$$

При $\tau = h$ рівняння (2.36) спрощується і записується у вигляді (2.37):

$$\begin{aligned}
& (\alpha + \gamma)w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - \gamma)w_{i-1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j-1}^{\xi\xi} - \\
& - 20(\alpha + \gamma)w_{i,j}^{\xi\xi} - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j+1}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - \gamma)w_{i+1,j}^{\xi\xi} + \\
& + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} + (\gamma + 1)w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma - 1)w_{i-1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} - \\
& - 2(\gamma - 5)w_{i,j-1}^{\eta\eta} - 20(\gamma + 1)w_{i,j}^{\eta\eta} - 2(\gamma - 5)w_{i,j+1}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + \\
& + 2(5\gamma - 1)w_{i+1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} + \quad (2.37) \\
& + h\left\{\frac{\gamma}{\alpha} \text{I-II} \Delta q_{i,j-1}^{(\xi)} - 4 \text{I-II} \Delta q_{i,j-1/2}^{(\xi)} - \left(2 + \frac{\gamma}{\alpha}\right) \left[\text{I-II} \Delta q_{i,j}^{(\xi)} + \text{III-IV} \Delta q_{i,j}^{(\xi)} \right] - \right. \\
& \quad \left. - 4 \text{III-IV} \Delta q_{i,j+1/2}^{(\xi)} + \frac{\gamma}{\alpha} \text{III-IV} \Delta q_{i,j+1}^{(\xi)}\right\} + \\
& + h\left\{\gamma \text{I-III} \Delta q_{i-1,j}^{(\eta)} - 4 \text{I-III} \Delta q_{i-1/2,j}^{(\eta)} - (2 + \gamma) \left[\text{I-III} \Delta q_{i,j}^{(\eta)} + \text{II-IV} \Delta q_{i+1/2,j}^{(\eta)} \right] - \right. \\
& \quad \left. - 4 \text{II-IV} \Delta q_{i+1/2,j}^{(\eta)} + \gamma \text{II-IV} \Delta q_{i+1,j}^{(\eta)}\right\} = 3h^2(\text{I}p_{ij} + \text{II}p_{ij} + \text{III}p_{ij} + \text{IV}p_{ij}).
\end{aligned}$$

$$\text{У (2.36): } \text{I-II} \Delta w_{i,j}^{\xi\xi\xi} = \text{I} \Delta w_{i,j}^{\xi\xi\xi} - \text{I} \Delta w_{i,j}^{\xi\xi\xi}; \quad \text{I-III} \Delta w_{i,j}^{\xi\xi\eta} = \text{I} \Delta w_{i,j}^{\xi\xi\eta} - \text{III} \Delta w_{i,j}^{\xi\xi\eta};$$

$$w^{\xi\xi\xi} = \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3}; \quad w^{\xi\xi\eta} = \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta}. \quad \text{Всі інші величини подібного вигляду мають}$$

аналогічний сенс. Наприклад, $\text{I-III} \Delta w_{i,j}^{\eta\eta\eta} = \text{I} \Delta w_{i,j}^{\eta\eta\eta} - \text{III} \Delta w_{i,j}^{\eta\eta\eta}$; $w^{\eta\eta\eta} = \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3}$.

Верхній лівий індекс означає приналежність розривної величини тому чи іншому елементу. Наприклад, $\text{I}p_{ij}$ – що належить I елементу (рис. 2.3) значення p в точці ij , в якій p може мати кінцевий розрив. Або $\text{I-II} \Delta w_{i,j-1}^{\eta\eta\xi} = \text{I} \Delta w_{i,j-1}^{\eta\eta\xi} - \text{II} \Delta w_{i,j-1}^{\eta\eta\xi}$; $w^{\eta\eta\xi} = \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^2 \partial \xi}$; $\text{II} \Delta w_{i,j-1}^{\eta\eta\xi}$ – значення $w^{\eta\eta\xi}$ в точці $i, j - 1$; що належить елементу II. Тільки у випадку якщо в плиті є циліндричний шарнір, розташований паралельно осі η , величини $\Delta w^{\eta\eta\xi}$ будуть відмінні від нуля.

Наведені формули (2.36), (2.37) відповідають внутрішнім вузлам сітки розбиття. Для вузлів, що розташовані на межах області замість

центральних кінцево – різницевих формул використовуємо ліві та праві формули третього порядку точності.

При $\eta = 0, \xi \neq 0, \xi \neq 1$:

$$\begin{aligned} & \gamma \cdot \left(2w_{i1}^{\xi\xi} - 5w_{i2}^{\xi\xi} + 4w_{i3}^{\xi\xi} - w_{i4}^{\xi\xi} \right) + \left(2w_{i1}^{\eta\eta} - 5w_{i2}^{\eta\eta} + 4w_{i3}^{\eta\eta} - w_{i4}^{\eta\eta} \right) + \\ & + \alpha \cdot \left(w_{(i-1)1}^{\xi\xi} - 2w_{i1}^{\xi\xi} + w_{(i+1)1}^{\xi\xi} \right) + \gamma \cdot \left(w_{(i-1)1}^{\eta\eta} - 2w_{i1}^{\eta\eta} + w_{(i+1)1}^{\eta\eta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

При $\xi = 0, \eta \neq 0, \eta \neq 1$:

$$\begin{aligned} & \gamma \cdot \left(w_{1(j-1)}^{\xi\xi} - 2w_{1j}^{\xi\xi} + w_{1(j+1)}^{\xi\xi} \right) + \left(w_{1(j-1)}^{\eta\eta} - 2w_{1j}^{\eta\eta} + w_{1(j+1)}^{\eta\eta} \right) + \\ & + \alpha \cdot \left(2w_{1j}^{\xi\xi} - 5w_{2j}^{\xi\xi} + 4w_{3j}^{\xi\xi} - w_{4j}^{\xi\xi} \right) + \\ & + \gamma \cdot \left(2w_{1j}^{\eta\eta} - 5w_{2j}^{\eta\eta} + 4w_{3j}^{\eta\eta} - w_{4j}^{\eta\eta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

При $\eta = 1, \xi \neq 0, \xi \neq 1$:

$$\begin{aligned} & \gamma \cdot \left(2w_{in}^{\xi\xi} - 5w_{i(n-1)}^{\xi\xi} + 4w_{i(n-2)}^{\xi\xi} - w_{i(n-3)}^{\xi\xi} \right) + \\ & + \left(2w_{in}^{\eta\eta} - 5w_{i(n-1)}^{\eta\eta} + 4w_{i(n-2)}^{\eta\eta} - w_{i(n-3)}^{\eta\eta} \right) + \\ & + \alpha \cdot \left(w_{(i-1)n}^{\xi\xi} - 2w_{in}^{\xi\xi} + w_{(i+1)n}^{\xi\xi} \right) + \gamma \cdot \left(w_{(i-1)n}^{\eta\eta} - 2w_{in}^{\eta\eta} + w_{(i+1)n}^{\eta\eta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

При $\xi = 1, \eta \neq 0, \eta \neq 1$:

$$\begin{aligned} & \gamma \cdot \left(w_{n(j-1)}^{\xi\xi} - 2w_{nj}^{\xi\xi} + w_{n(j+1)}^{\xi\xi} \right) + \left(w_{n(j-1)}^{\eta\eta} - 2w_{nj}^{\eta\eta} + w_{n(j+1)}^{\eta\eta} \right) + \\ & + \alpha \cdot \left(2w_{nj}^{\xi\xi} - 5w_{(n-1)j}^{\xi\xi} + 4w_{(n-2)j}^{\xi\xi} - w_{(n-3)j}^{\xi\xi} \right) + \\ & + \gamma \cdot \left(2w_{nj}^{\eta\eta} - 5w_{(n-1)j}^{\eta\eta} + 4w_{(n-2)j}^{\eta\eta} - w_{(n-3)j}^{\eta\eta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

При $\eta = 0, \xi = 0$:

$$\begin{aligned}
& \gamma \cdot \left(2w_{11}^{\xi\xi} - 5w_{12}^{\xi\xi} + 4w_{13}^{\xi\xi} - w_{14}^{\xi\xi} \right) + \left(2w_{11}^{\eta\eta} - 5w_{12}^{\eta\eta} + 4w_{13}^{\eta\eta} - w_{14}^{\eta\eta} \right) + \\
& \quad + \alpha \cdot \left(2w_{11}^{\xi\xi} - 5w_{21}^{\xi\xi} + 4w_{31}^{\xi\xi} - w_{41}^{\xi\xi} \right) + \\
& \quad + \gamma \cdot \left(2w_{11}^{\eta\eta} - 5w_{21}^{\eta\eta} + 4w_{31}^{\eta\eta} - w_{41}^{\eta\eta} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

При $\eta = 1, \xi = 1$:

$$\begin{aligned}
& \gamma \cdot \left(2w_{nn}^{\xi\xi} - 5w_{n(n-1)}^{\xi\xi} + 4w_{n(n-2)}^{\xi\xi} - w_{n(n-3)}^{\xi\xi} \right) + \\
& \quad + \left(2w_{nn}^{\eta\eta} - 5w_{n(n-1)}^{\eta\eta} + 4w_{n(n-2)}^{\eta\eta} - w_{n(n-3)}^{\eta\eta} \right) + \\
& + \alpha \cdot \left(2w_{nn}^{\xi\xi} - 5w_{(n-1)n}^{\xi\xi} + 4w_{(n-2)n}^{\xi\xi} - w_{(n-3)n}^{\xi\xi} \right) + \\
& \quad + \gamma \cdot \left(2w_{nn}^{\eta\eta} - 5w_{(n-1)n}^{\eta\eta} + 4w_{(n-2)n}^{\eta\eta} - w_{(n-3)n}^{\eta\eta} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

При $\eta = 0, \xi = 1$:

$$\begin{aligned}
& \gamma \cdot \left(2w_{n1}^{\xi\xi} - 5w_{n2}^{\xi\xi} + 4w_{n3}^{\xi\xi} - w_{n4}^{\xi\xi} \right) + \left(2w_{n1}^{\eta\eta} - 5w_{n2}^{\eta\eta} + 4w_{n3}^{\eta\eta} - w_{n4}^{\eta\eta} \right) + \\
& \quad + \alpha \cdot \left(2w_{n1}^{\xi\xi} - 5w_{(n-1)1}^{\xi\xi} + 4w_{(n-2)1}^{\xi\xi} - w_{(n-3)1}^{\xi\xi} \right) + \\
& \quad + \gamma \cdot \left(2w_{n1}^{\eta\eta} - 5w_{(n-1)1}^{\eta\eta} + 4w_{(n-2)1}^{\eta\eta} - w_{(n-3)1}^{\eta\eta} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

При $\eta = 1, \xi = 0$:

$$\begin{aligned}
& \gamma \cdot \left(2w_{1n}^{\xi\xi} - 5w_{1(n-1)}^{\xi\xi} + 4w_{1(n-2)}^{\xi\xi} - w_{1(n-3)}^{\xi\xi} \right) + \\
& \quad + \left(2w_{1n}^{\eta\eta} - 5w_{1(n-1)}^{\eta\eta} + 4w_{1(n-2)}^{\eta\eta} - w_{1(n-3)}^{\eta\eta} \right) + \\
& + \alpha \cdot \left(2w_{1n}^{\xi\xi} - 5w_{2n}^{\xi\xi} + 4w_{3n}^{\xi\xi} - w_{4n}^{\xi\xi} \right) + \gamma \cdot \left(2w_{1n}^{\eta\eta} - 5w_{2n}^{\eta\eta} + 4w_{3n}^{\eta\eta} - \right. \\
& \quad \left. w_{4n}^{\eta\eta} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Якщо циліндричні шарніри відсутні, тоді в (2.36) всі $\Delta w^{\eta\eta\xi} = 0$; аналогічно всі $\Delta w^{\xi\xi\eta} = 0$. Якщо врахувати, що існують розташовані вздовж осей координат смугові навантаження, то із (2.28) отримаємо:

$$\Delta w^{\xi\xi\xi} = -\frac{1}{2}\Delta q^{(\xi)}; \Delta w^{\eta\eta\eta} = -\Delta q^{(\eta)}. \quad (2.46)$$

Запишемо додаткові рівняння для визначення $w^{\xi\xi}$, $w^{\eta\eta}$, і відносно цих змінних побудуємо алгоритм розрахунку.

При неперервних w , w^η і $w^{\eta\eta}$ на рівномірній сітці з кроком h скористаємось рівнянням для визначення безрозмірних прогинів w :

$$w_{i,j-1} - 2w_{ij} + w_{i,j+1} = \frac{h^2}{12} \left(w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 10w_{i,j}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta} \right) + \frac{h^3}{12} \Delta q_{ij}^{(\eta)}. \quad (2.47)$$

Запишемо рівняння (2.47) в напрямку осі ξ (замінімо відповідно у формулі (2.47) η , i , j на ξ , i , j):

$$w_{i-1,j} - 2w_{ij} + w_{i+1,j} = \frac{h^2}{12} \left(w_{i-1,j}^{\xi\xi} + 10w_{i,j}^{\xi\xi} + w_{i+1,j}^{\xi\xi} \right) + \frac{h^3}{12} \Delta q_{ij}^{(\xi)}. \quad (2.48)$$

Рівняння (2.48) справедливе для паралельних ліній осі ξ , а рівняння (2.47) – для всіх паралельних ліній сітки осі η .

У випадку якщо плита шарнірно оперта по всьому контуру, $w = w^{\xi\xi} = w^{\eta\eta} = 0$, для визначення трьох невідомих $w^{\eta\eta}$, $w^{\xi\xi}$ і w у всіх внутрішніх точках сітки рівняння (2.46), (2.47), (2.48) утворюють замкнуту систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), які записані для всіх розрахункових точок з врахуванням крайових умов.

Якщо хоча б одна сторона пластини вільна від закріплень або жорстко закріплена, то СЛАР потрібно розв'язувати разом із рівняннями для крайових точок, які слідує різницевої апроксимації крайових умов.

З урахуванням формули (2.30) у випадку квадратної сітки для точки ij лівого жорстко закріпленого краю прямокутної плити маємо:

$$\begin{aligned}
& 7w_{i-1,j}^{\eta\eta} + 6w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} - w_{i-1,j+2}^{\eta\eta} + 2w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - w_{i-1,j+2}^{\xi\xi} - \\
& -14w_{i,j}^{\eta\eta} - 12w_{i,j+1}^{\eta\eta} + 2w_{i,j+2}^{\eta\eta} - 28w_{i,j+1}^{\xi\xi} + 2w_{i,j+2}^{\xi\xi} + \\
& +7w_{i+1,j}^{\eta\eta} + 6w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} - w_{i+1,j+2}^{\eta\eta} + 2w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} - w_{i+1,j+2}^{\xi\xi} + \\
& +2\frac{h}{\alpha} \left[\text{III-IV} \Delta q_{ij}^{(\xi)} - \text{III-IV} \Delta q_{i,j+1}^{(\xi)} \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Запишемо по аналогії (2.49) для точки ij верхнього закріпленого краю плити із заміною η, ξ, i, j відповідно на ξ, η, j, i при $\alpha = 1$.

У випадку вільного від закріплень лівого ($\eta = 0$) краю ортотропної пластини для точки ij справедливе рівняння:

$$\begin{aligned}
& (\alpha - \mu^2)w_{i-1,j}^{\xi\xi} + 2[\mu(2 + \mu) - \alpha - 2\gamma]w_{ij}^{\xi\xi} + 2(2\gamma - \mu)w_{i,j+1}^{\xi\xi} + \\
& +2w_{i,j+1}^{\eta\eta} + (\alpha - \mu^2)w_{i+1,j}^{\xi\xi} - h^2p_{ij} + 2h^0v_{ij}^{(\eta)} - \mu^0m_{i-1,j}^{(\eta)} + \\
& +2(1 + \mu)^0m_{i,j}^{(\eta)} - \mu^0m_{i+1,j}^{(\eta)} = 0
\end{aligned} \tag{2.50}$$

$$w_{ij}^{\eta\eta} = -\mu w_{ij}^{\xi\xi} - {}^0m_{ij}^{(\eta)} \tag{2.51}$$

Для точки ij верхнього ($\xi = 0$) вільного краю рівняння має вигляд:

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{\mu^2}{\alpha}\right)w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 2\left[\mu\left(2 + \frac{\mu}{\alpha}\right) - 1 - 2\gamma\right]w_{ij}^{\eta\eta} + \left(1 - \frac{\mu^2}{\alpha}\right)w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\
& +2(2\gamma - \mu)w_{i+1,j}^{\eta\eta} + 2\alpha w_{i+1,j}^{\xi\xi} - h^2p_{ij} + 2h^0v_{ij}^{(\xi)} - \\
& -\frac{\mu_0}{\alpha}m_{i,j-1}^{(\xi)} + 2\left(1 + \frac{\mu}{\alpha}\right){}^0m_{i,j}^{(\xi)} - \frac{\mu}{\alpha}{}^0m_{i,j+1}^{(\xi)} = 0
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Величина $w_{ij}^{\xi\xi}$ у розрахункових точках вільного краю при ($\xi = 0$) обчислюється по формулі:

$$w_{ij}^{\xi\xi} = -\frac{\mu}{\alpha} w_{ij}^{\eta\eta} - \frac{m_{ij}^{(\xi)}}{\alpha}. \quad (2.53)$$

У рівняннях (2.50) – (2.45): ${}^0v^{(\eta)}$, ${}^0v^{(\xi)}$, ${}^0m^{(\eta)}$, ${}^0m^{(\xi)}$ – відповідно задані значення узагальнених поперечних сил і згинаючих моментів на вільних від закріплень краях плити.

2.5 Алгоритм розв'язання та приклад практичної реалізації алгоритму

2.5.1 Алгоритм розв'язання

Таким чином, наведений вище матеріал дає нам замкнену систему різницевих рівнянь, розв'язок якої забезпечує розв'язання поставленої задачі.

Сформулюємо алгоритм розв'язання поставленої задачі.

- а) записати повну систему рівнянь (2.1), (2.6) – (2.8);
- б) перехід до безрозмірних рівнянь (2.10), (2.16) – (2.17), (2.19) – (2.20);
- в) визначити сітку для запису кінцево-різницевих рівнянь;
- г) записати кінцево-різницеві рівняння для внутрішніх вузлів сітки (2.10);
- д) записати кінцево-різницеві рівняння для крайових точок (2.10);
- е) записати кінцево-різницеві формули для крайових умов (2.29), (2.30);

ж) сукупність рівнянь отриманих в п.4 – 6 утворює математичну модель тонкої ортотропної плити. Для системи рівнянь отриманих у пунктах 4 – 6 записати розширену матрицю коефіцієнтів;

з) розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь;

и) аналіз отриманих результатів. Перевірка крайових умов.

Зрозумілим є що при невеликих розмірностях матриці системи (400×400) отримати її розв'язок засобами систем комп'ютерної математики, наприклад Maple або Maxima не є складною задачею. Отриманий розв'язок буде мати прийнятну похибку.

Для випадку матриць великих розмірностей розв'язання точними методами буде давати велику похибку, тому рекомендується застосування ітераційних методів, зокрема методу Зейделя.

При використанні методу Зейделя необхідно розрахункові рівняння подати у вигляді, які задовольняють необхідній умові збіжності ітераційного процесу. Для цього нам необхідно записати рівняння так, щоб коефіцієнти при невідомих у правій частині рівнянь, формально розв'язаних щодо невідомого в точці ij сітки, не перевищували за абсолютним значенням одиниці.

Сформульований вище алгоритм програмно реалізований в СКА Maple.

2.5.2 Приклад практичної реалізації алгоритму

В якості тестової задачі для сформульованого алгоритму розглянуто задачу про визначення поперечного прогину квадратної ортотропної плити розмірами $a \times a$, $a = 8$ м, $h = 0,3$ м.

Крайові умови: на всіх ділянках контуру плити умова шарнірного обпирання; всі ділянки контуру жорстко закріплені.

На поверхню плити $x_3 = \frac{h}{2}$ в області: $\Gamma: -\frac{a}{2} \leq x_1 \leq \frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \leq x_2 \leq \frac{a}{2}$ діє нормальне розподілене навантаження з інтенсивністю $q = 1 \cdot 10^3$ Н/м².

Обчислення проводилися при наступних значеннях: $D_{x1} = 5,589 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$, $D_{y1} = 1,769 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$.

Крок розбиття сітки обирався 0,1, 0,2, 0,15.

Розроблена програма, генерує розширену матрицю коефіцієнтів системи розрахункових рівнянь (Додаток А).

На рисунку 2.4 зображено вигнуту поверхню плити.

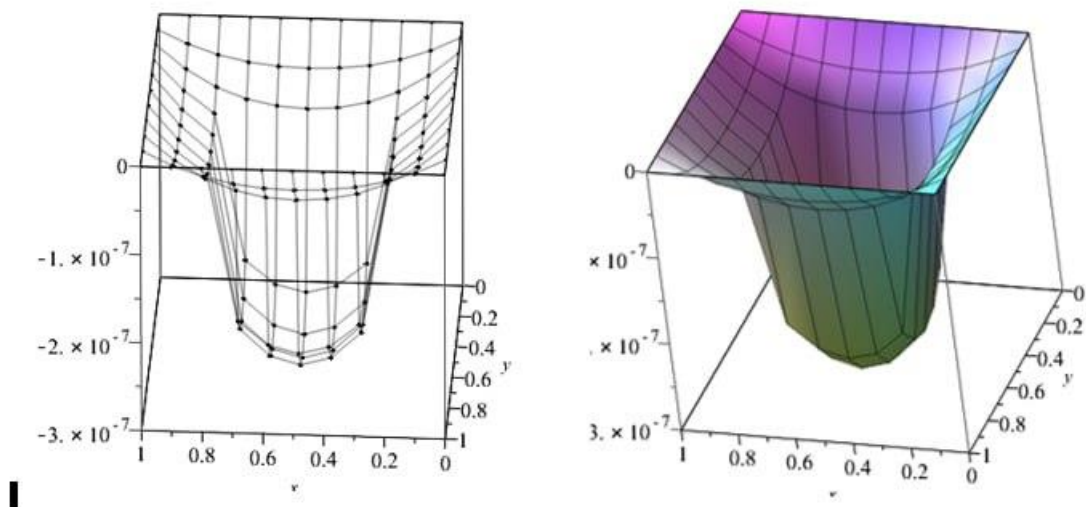


Рисунок 2.4 – Вигин w середньої поверхні плити

Отриманні результати відповідають очікуваному характеру вигину, що свідчить про адекватність обраного підходу.

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження виконано у відповідності до поставленої задачі.

В даній роботі отримані наступні результати:

- сформульована задача та її математична постановка;
- побудована математична модель тонкої ортотропної плити;
- наведенні необхідні для обчислень розрахункові рівняння;
- сформульований алгоритм розрахунку, який дозволяє визначити вигини серединної поверхні плити в довільній точці;
- розроблений програмний код для розв'язку поставленої задачі;
- реалізована перевірка на розв'язані тестової задачі;
- отримані результати не протирічають фізичному змісту, тому можна вважати що поставлена у роботі задача розв'язана;

Матеріали роботи можна використовувати в майбутніх інженерних розрахунках і науково-дослідницьких роботах.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Колектив авторів. Мала гірнича енциклопедія. Т. 1. / за ред. В. С. Білецького. Донецьк: Донбас. 2004. 640 с.
2. Делявський М. В., Здолбіцька Н. В., Онишко Л.Й., Здолбіцький А. П. Визначення напружено-деформованого стану в тонких ортотропних плитах на пружній основі Вінклера. Фізико-хімічна механіка матеріалів. 2014. № 6. С. 15 – 22.
3. Huber M. T. Die Theorie der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten nebst Anwendungen auf mehrere bautechnisch wichtige Aufgaben über rechteckige Platten. Der Bauingenier. 1923. S. 354–360.
4. Huber M. T. Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten. New York: Macmillan Company. 1938. 89 p.
5. Huber M. T. Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper. Annalen der Physik. 1904. S. 153–163.
6. Cornelius W. Die Berechnung der ebenen Flächentragwerke mit Hilfe der Theorie der orthogonal-anisotropen Platte. Der Stahlbau. 1952. S.21–24.
7. Pelikan W. Die Stahlfahrbahn-Berechnung und Konstruktion. MAN-Forschungsheft. 1957. S. 23–46.
8. Pelikan W., Esslinger M. Die Stahlfahrbahn. Berechnung und Konstruktion. M.A.N. Forschungsheft. № 7. 1957.
9. De Corte W. Examination of Local Stresses in Relation to Fatigue Failure at the Rib to Floorbeam Joint of Orthotropic Plated Bridge Decks. Bridge Structures: Assessment, Design and Construction. 2007. Issue 3. P. 183–191.
10. De Corte W. Improvements for the Analysis of Floorbeams with Additional Webs Cutouts for Orthotropic Plated Decks with Closed Continuous Ribs. Steel and Composite Structures. 2007. Issue 1. P. 1–18.
11. Wolchuk R. Secondary stresses in closed orthotropic deck ribs at floorbeams. Journal of Structural Engineering. 1992. Issue 2. P. 582–595.

12. Chen Mu. Orthotropic Analysis of Steel Deck-Girder-Rib Systems Subjected to Transverse Load. *International Journal of Steel Structures*. 2019. № 19. P.1010–1022.
13. Chen Stuart S. Proposed Effective Width Criteria for Composite Bridge Girders. *Journal of Bridge Engineering*. 2007. № 12, Issue 3. P. 325–338.
14. Wolchuk. R. Design Manual for Orthotropic Steel Plate Deck Bridges. American Institute of Steel Construction. 1963.
15. Kornijiv M. Orthotropic Deck Bridges in Ukraine. Orthotropic Bridge Conference, Sacramento. 2004.
16. Wolchuk R. Steel Orthotropic Decks, Developments in the 1990. National Washington DC1999: Academy Press.
17. Sayyad. A. S. Flexure of thick orthotropic plates by exponential shear deformation theory. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2013. p.473–490.
18. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. 1989.
19. Noor A. K., Burton W. S. Assessment of Shear Deformation Theories for Multilayered Composite Plates. 1989.
20. Ghugal M., Shimpi R. P. A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2002. p. 775– 813.

ДОДАТОК А

Програмний код реалізації алгоритму розв'язання задачі

```

restart: with(linalg) :
Dx := 55.89: Dy := 17692:
a := 8: δ := 8: q0 := 8: q := 1000: H := 0.3:
α :=  $\frac{Dx}{Dy}$ : p := q/q0:
ξ :=  $\frac{x}{a}$ : η :=  $\frac{y}{a}$ :
unprotect('γ'): γ :=  $\frac{H}{Dy}$ :
#w :=  $\frac{WDy}{q0 a^4}$ :
n := 5: h :=  $\frac{1}{n}$ :
wξξ := matrix(n, n, [ ]) : wηη := matrix(n, n, [ ]) : A := matrix(3
·n2, 3·n2, 0) : B := matrix(3·n2, 1, 0) :
k := 0:
#print(A):
#Рівняння для внутрішніх точок
for i from 2 to n - 1 do
for j from 2 to n - 1 do
k := k + 1:
#print(k):
A[k, n·(i - 1 - 1) + j - 1] := α + γ: A[k, n·(i - 1 - 1) + j]
:= 2·(5·α - γ): A[k, n·(i - 1 - 1) + j + 1] := α + γ:
A[k, n·(i - 1) + j - 1] := -2·(α - 5·γ): A[k, n·(i - 1) + j] :=
-20·(α + γ): A[k, n·(i - 1) + j + 1] := -2·(α - 5·γ):
A[k, n·(i + 1 - 1) + j - 1] := α + γ: A[k, n·(i + 1 - 1) + j] := 2
·(5·α - γ): A[k, n·(i + 1 - 1) + j + 1] := α + γ:
A[k, n2 + n·(i - 1 - 1) + j - 1] := γ + 1: A[k, n2 + n·(i - 1 - 1)
+ j] := 2·(5·γ - 1): A[k, n2 + n·(i - 1 - 1) + j + 1] := γ
+ 1:
A[k, n2 + n·(i - 1) + j - 1] := -2·(γ - 5): A[k, n2 + n·(i - 1)
+ j] := -20·(γ + 1): A[k, n2 + n·(i - 1) + j + 1] := -2·(γ
- 5):
A[k, n2 + n·(i + 1 - 1) + j - 1] := γ + 1: A[k, n2 + n·(i + 1 - 1)
+ j] := 2·(5·γ - 1): A[k, n2 + n·(i + 1 - 1) + j + 1] := γ
+ 1:
if (n - 1 > j > 2 and n - 1 > i > 2) then B[k, 1] := 1: end if:
end do: end do:
#print('k=', k):

```

Рисунок А.1 – Скріншот програмного коду, аркуш 1


```

#Граничні умови на межах 2,4
for j from 2 to n - 1 do
  k := k + 1:
  B[k, 1] := 0:
  i := 1:
  # print(k):
  A[k, 2 · n2 + n · (i - 1) + j - 1] := 1: A[k, 2 · n2 + n · (i - 1) + j]
    := -2: A[k, 2 · n2 + n · (i - 1) + j + 1] := 1:
  A[k, n2 + n · (i - 1) + j - 1] := - $\frac{h^2}{12}$ : A[k, n2 + n · (i - 1) + j] :=
    - $\frac{10 \cdot h^2}{12}$ : A[k, n2 + n · (i - 1) + j + 1] := - $\frac{h^2}{12}$ :
  k := k + 1:
  B[k, 1] := 0:
  i := n - 1:
  A[k, 2 · n2 + n · (i) + j - 1] := 1: A[k, 2 · n2 + n · (i) + j] := -2:
    A[k, 2 · n2 + n · (i) + j + 1] := 1:
  A[k, n2 + n · (i) + j - 1] := - $\frac{h^2}{12}$ : A[k, n2 + n · (i) + j] :=
    - $\frac{10 \cdot h^2}{12}$ : A[k, n2 + n · (i) + j + 1] := - $\frac{h^2}{12}$ :
  #print( 'k=' k):
  #print(A):
end do:

```

```

#Граничні умови на межах 1,3
for i from 2 to n - 1 do
  k := k + 1:
  B[k, 1] := 0:
  j := 1:
  #print(k):
  A[k, 2 · n2 + n · (i - 2) + j] := 1: A[k, 2 · n2 + n · (i - 1) + j] :=
    -2: A[k, 2 · n2 + n · (i) + j] := 1:
  A[k, n · (i - 2) + j] := - $\frac{h^2}{12}$ : A[k, n · (i - 1) + j] := - $\frac{10 \cdot h^2}{12}$ : A[k,
    n · (i) + j] := - $\frac{h^2}{12}$ :
  k := k + 1:
  B[k, 1] := 0:
  j := n:
  #print(k):
  A[k, 2 · n2 + n · (i - 2) + j] := 1: A[k, 2 · n2 + n · (i - 1) + j] :=
    -2: A[k, 2 · n2 + n · (i) + j] := 1:
  A[k, n · (i - 2) + j] := - $\frac{h^2}{12}$ : A[k, n · (i - 1) + j] := - $\frac{10 \cdot h^2}{12}$ : A[k,
    n · (i) + j] := - $\frac{h^2}{12}$ :
end do:

```

Рисунок А.2 – Скріншот програмного коду, аркуш 2

```

#Рівняння на межі 1, 2
for i from 2 to n - 1 do
  k := k + 1:
  B[k, 1] := 0:
  #print(k):
  #η=0:
  A[k, n·(i - 2) + 1] := 2·γ: A[k, n·(i - 2) + 2] := -5·γ: A[k, n
    ·(i - 2) + 3] := 4·γ: A[k, n·(i - 2) + 4] := -γ:
  A[k, n2 + n·(i - 2) + 1] := 2: A[k, n2 + n·(i - 2) + 2] := -5:
    A[k, n2 + n·(i - 2) + 3] := 4: A[k, n2 + n·(i - 2) + 4] :=
    -1:
  A[k, n·(i - 2) + 1] := α: A[k, n·(i - 1) + 1] := -2·α: A[k, n·(i)
    + 1] := α:
  A[k, n2 + n·(i - 2) + 1] := γ: A[k, n2 + n·(i - 1) + 1] := -2·γ:
    A[k, n2 + n·(i) + 1] := γ:

  #η = 1:
  A[k, n·(i - 2) + n] := 2·γ: A[k, n·(i - 2) + n - 1] := -5·γ: A[k,
    n·(i - 2) + n - 2] := 4·γ: A[k, n·(i - 2) + n - 3] := -γ:
  A[k, n2 + n·(i - 2) + n] := 2: A[k, n2 + n·(i - 2) + n - 1] :=
    -5: A[k, n2 + n·(i - 2) + n - 2] := 4: A[k, n2 + n·(i - 2)
    + n - 3] := -1:
  A[k, n·(i - 2) + n] := α: A[k, n·(i - 1) + n] := -2·α: A[k, n·(i)
    + n] := α:
  A[k, n2 + n·(i - 2) + n] := γ: A[k, n2 + n·(i - 1) + n] := -2·γ:
    A[k, n2 + n·(i) + n] := γ:

end do:

```

Рисунок А.3 – Скріншот програмного коду, аркуш 3

```

#Рівняння на межі 3, 4
for i from 2 to n - 1 do
  k := k + 1:
  B[k, 1] := 0:
  #print(k):
  #ξ=0:
  A[k, n + j - 2] := γ: A[k, n + j - 1] := -2·γ: A[k, n + j] := γ:
  A[k, n2 + n + j - 2] := 1: A[k, n2 + n + j - 1] := -2: A[k, n2
    + n + j] := 1:
  A[k, n + j - 2] := 2·α: A[k, n·2 + j - 2] := -5·α: A[k, n·3 + j
    - 2] := 4·α: A[k, n·4 + j - 2] := -α:
  A[k, n2 + n + j - 2] := 2·γ: A[k, n2 + n·2 + j - 2] := -5·γ: A[k,
    n2 + n·3 + j - 2] := 4·γ: A[k, n2 + n·4 + j - 2] := -γ:

  #ξ=1:
  A[k, j - 2] := γ: A[k, j - 1] := -2·γ: A[k, j] := γ:
  A[k, n2 + j - 2] := 1: A[k, n2 + j - 1] := -2: A[k, n2 + j] := 1:
  A[k, n + j - 2] := 2·α: A[k, n - 1 + j - 2] := -5·α: A[k, n - 2
    + j - 2] := 4·α: A[k, n - 3 + j - 2] := -α:
  A[k, n2 + n + j - 2] := 2·γ: A[k, n2 + n - 1 + j - 2] := -5·γ:
  A[k, n2 + n - 2 + j - 2] := 4·γ: A[k, n2 + n - 3 + j - 2] :=
    -γ:

end do:

#Рівняння у граничній точці 1
for i from 2 to n - 1 do
  k := k + 1:
  B[k, 1] := 0:
  #print(k):
  #ξ=0, η=0:
  A[k, n + 1] := 2·γ: A[k, n + 2] := -5·γ: A[k, n + 3] := 4·γ:
  A[k, n + 4] := -γ:
  A[k, n2 + n + 1] := 2: A[k, n2 + n + 2] := -5: A[k, n2 + n + 3]
    := 4: A[k, n2 + n + 4] := -1:
  A[k, n + 1] := 2·α: A[k, n·2 + 1] := -5·α: A[k, n·3 + 1] := 4
    ·α: A[k, n·4 + 1] := -α:
  A[k, n2 + n + 1] := 2·γ: A[k, n2 + n·2 + 1] := -5·γ: A[k, n2 + n
    ·3 + 1] := 4·γ: A[k, n2 + n·4 + 1] := -γ:

end do:

```

Рисунок А.4 – Скріншот програмного коду, аркуш 4

#Рівняння у граничній точці 2

```

for  $i$  from 2 to  $n - 1$  do
 $k := k + 1$ :
 $B[k, 1] := 0$ :
 $\#print(k)$ :
 $\#\xi=1, \eta=1$ :
 $A[k, n] := 2 \cdot \gamma$ :  $A[k, n - 1] := -5 \cdot \gamma$ :  $A[k, n - 2] := 4 \cdot \gamma$ :  $A[k, n - 3] := -\gamma$ :
 $A[k, n^2 + n] := 2$ :  $A[k, n^2 + n - 1] := -5$ :  $A[k, n^2 + n - 2] := 4$ :  $A[k, n^2 + n - 3] := -1$ :
 $A[k, n] := 2 \cdot \alpha$ :  $A[k, n - 1] := -5 \cdot \alpha$ :  $A[k, n - 2] := 4 \cdot \alpha$ :  $A[k, n - 3] := -\alpha$ :
 $A[k, n^2 + n] := 2 \cdot \gamma$ :  $A[k, n^2 + n - 1] := -5 \cdot \gamma$ :  $A[k, n^2 + n - 2] := 4 \cdot \gamma$ :  $A[k, n^2 + n - 3] := -\gamma$ :
end do:

```

#Рівняння у граничній точці 3

```

for  $i$  from 2 to  $n - 1$  do
 $k := k + 1$ :
 $B[k, 1] := 0$ :
 $\#print(k)$ :
 $\#\xi=1, \eta=0$ :
 $A[k, 1] := 2 \cdot \gamma$ :  $A[k, 2] := -5 \cdot \gamma$ :  $A[k, 3] := 4 \cdot \gamma$ :  $A[k, 4] := -\gamma$ :
 $A[k, n^2 + 1] := 2$ :  $A[k, n^2 + 2] := -5$ :  $A[k, n^2 + 3] := 4$ :  $A[k, n^2 + 4] := -1$ :
 $A[k, n] := 2 \cdot \alpha$ :  $A[k, n - 1] := -5 \cdot \alpha$ :  $A[k, n - 2] := 4 \cdot \alpha$ :  $A[k, n - 3] := -\alpha$ :
 $A[k, n^2 + n] := 2 \cdot \gamma$ :  $A[k, n^2 + n - 1] := -5 \cdot \gamma$ :  $A[k, n^2 + n - 2] := 4 \cdot \gamma$ :  $A[k, n^2 + n - 3] := -\gamma$ :
end do:

```

#Рівняння у граничній точці 4

```

for  $i$  from 2 to  $n - 1$  do
 $k := k + 1$ :
 $B[k, 1] := 0$ :
 $\#print(k)$ :
 $\#\xi=0, \eta=1$ :
 $A[k, n] := 2 \cdot \gamma$ :  $A[k, n - 1] := -5 \cdot \gamma$ :  $A[k, n - 2] := 4 \cdot \gamma$ :  $A[k, 4n - 3] := -\gamma$ :
 $A[k, n^2 + n] := 2$ :  $A[k, n^2 + n - 1] := -5$ :  $A[k, n^2 + n - 2] := 4$ :  $A[k, n^2 + n - 3] := -1$ :
 $A[k, n] := 2 \cdot \alpha$ :  $A[k, 2 \cdot n] := -5 \cdot \alpha$ :  $A[k, 3 \cdot n] := 4 \cdot \alpha$ :  $A[k, 4 \cdot n] := -\alpha$ :
 $A[k, n^2 + n] := 2 \cdot \gamma$ :  $A[k, n^2 + 2 \cdot n] := -5 \cdot \gamma$ :  $A[k, n^2 + 3 \cdot n] := 4 \cdot \gamma$ :  $A[k, n^2 + 4 \cdot n] := -\gamma$ :
end do:

```

Рисунок А.5 – Скріншот програмного коду, аркуш 5

```

#w=0, wηη=0
for i from 1 to n do k := k + 1: B[k, 1] := 0: A[k, 2 · n2 + i] := 1:
end do:
for i from 1 to n do k := k + 1: B[k, 1] := 0: A[k, 3 · n2 - n + i]
:= 1: end do:
for i from 2 to n - 1 do k := k + 1: B[k, 1] := 0: A[k, 2 · n2 + n · (i
- 1) + 1] := 1: end do:
for i from 2 to n - 1 do k := k + 1: B[k, 1] := 0: A[k, 2 · n2 + n · (i
- 1) + n] := 1: end do:

#wξξ=0
for i from 1 to n do k := k + 1: B[k, 1] := 0: A[k, i] := 1: end do:
for i from 1 to n do k := k + 1: B[k, 1] := 0: A[k, n2 - n + i] := 1:
end do:
for i from 2 to n - 1 do k := k + 1: B[k, 1] := 0: A[k, n · (i - 1)
+ 1] := 1: end do:
for i from 2 to n - 1 do k := k + 1: B[k, 1] := 0: A[k, n · (i - 1)
+ n] := 1: end do:

#wηη=0
for i from 1 to n do k := k + 1: B[k, 1] := 0: A[k, n2 + i] := 1: end
do:
for i from 1 to n do k := k + 1: B[k, 1] := 0: A[k, 2 · n2 - n + i]
:= 1: end do:
for i from 2 to n - 1 do k := k + 1: B[k, 1] := 0: A[k, n2 + n · (i
- 1) + 1] := 1: end do:
for i from 2 to n - 1 do k := k + 1: B[k, 1] := 0: A[k, n2 + n · (i
- 1) + n] := 1: end do:

# print(A) :#print(B) :
rank(A): linsolve(A, B) :

```

Рисунок А.6 – Скріншот програмного коду, аркуш 6