**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**Кафедра загальної математики**

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА**

на тему: **«МІНІМАЛЬНІ ПОВЕРХНІ ЕВКЛІДОВА ТА ПСЕВДОЕВКЛІДОВА ПРОСТОРІВ»**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Виконав: студент | 2 | курсу, групи | 8.1112-з |
| спеціальності | 111 математика |
|  | (шифр і назва спеціальності) |
| освітньої програми | Математика |
|  | (назва освітньої програми) |
| Я.В. Олійник |
| (ініціали та прізвище) |
| Керівник | доцент кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Гречнєва М.О. |
|  | (посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) |
|  |
| Рецензент | доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, доцент, к.ф.-м.н. Ткаченко І.Г. |
|  | (посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) |
|  |

Запоріжжя

2023

|  |
| --- |
| **МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  |
| **ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ** |
| Факультет | Математичний |
| Кафедра | загальної математики |
| Рівень вищої освіти | Магістр |
| Спеціальність | 111 математика |
|  | (шифр і назва) |
| Освітня програма | Математика |

|  |
| --- |
| **ЗАТВЕРДЖУЮ**Завідувач кафедри загальної математики, д.т.н., доцент |
|  | Зіновєєв І. В.  |
| (підпис) |  |
|  |
| « |  | » |  | 2023 р. |

**ЗАВДАННЯ**

**НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ (СТУДЕНТЦІ)**

|  |
| --- |
|  Олійник Яні Вікторівні |

(прізвище, ім’я та по-батькові)

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Тема роботи (проекту) | Мінімальні поверхні евклідова та псевдоевклідова просторів |
|  |
|  |
| керівник роботи (проекту) | Гречнєва Марина Олександрівна, к.ф.-м.н., доцент |
|  | (прізвище, ім’я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання) |
|  |
| затверджені наказом ЗНУ від | « | 01 | » | Травня | 2023 року № | 643-с |
|  |
| 2. Строк подання студентом роботи  |  |
|  |
| 3. Вихідні дані до роботи | 1. Постановка задачі. |
| 2. Перелік літератури. |
|  |
|  |
| 4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити) |  |
| 1. Постановка задачі. |
| 2. Основні теоретичні відомості. |
| 3. Практична частина |
|  |
| 5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов’язкових креслень) |  |
| Презентація |
|  |

6. Консультанти розділів роботи

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Розділ** | **Прізвище, ініціали та посада консультанта** | **Підпис, дата** |
| **завдання видав** | **завдання прийняв** |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| 7. Дата видачі завдання |  |

**КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Назва етапів кваліфікаційної роботи магістра** | **Строк виконання етапів роботи** | **Примітка** |
| 1. | Розробка плану роботи. |  |  |
|  |  |  |  |
| 2. | Збір вихідних даних. |  |  |
|  |  |  |  |
| 3. | Обробка методичних та теоретичних  |  |  |
|  | джерел. |  |  |
|  |  |  |  |
| 4. | Розробка першого та другого розділу. |  |  |
|  |  |  |  |
| 5. | Розробка третього розділу. |  |  |
|  |  |  |  |
| 6. | Оформлення та нормоконтроль |  |  |
|  | кваліфікаційної роботи магістра. |  |  |
|  |  |  |  |
| 7. | Захист кваліфікаційної роботи магістра. |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Студент |  |  | Я.В. Олійник |
|  | (підпис) |  | (ініціали та прізвище) |
|  |
| Керівник роботи  |  |  | М.О. Гречнєва |
|  | (підпис) |  | (ініціали та прізвище) |

**Нормоконтроль пройдено**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Нормоконтролер |  |  | О.Г. Спиця |
|  | (підпис) |  | (ініціали та прізвище) |

**РЕФЕРАТ**

Кваліфікаційна робота магістра «Мінімальні поверхні евклідова та псевдоевклідова просторів»: 47 с., рис. 3, 9 джерел.

ГЕЛІКОЇД, ЗАДАЧА ПЛАТО, КАТЕНОЇД, КРИВИНА, МІНІМАЛЬНІ ПОВЕРХНІ, ПОВЕРХНЯ ЕНЕПЕРА, ПОВЕРХНЯ ШЕРКА, ПРОСТІР, ПРОСТІР МІНКОВСЬКОГО, РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА.

Об’єктом дослідження кваліфікаційної роботи є мінімальні поверхні евклідова та псевдоевклідова просторів.

Мета кваліфікаційної роботи дослідити мінімальні поверхні евклідова та псевдоевклідова просторів.

Метод дослідження: аналітичний, порівняльний, описовий.

Предметом даної роботи є дослідження властивостей мінімальних поверхонь евклідових та псевдоевклідових просторів та можливостей їх застосування для розв’язання різних задач геометрії.

В кваліфікаційній роботі розкрито поняття евклідова та псевдоевклідова просторів. Наведено огляд мінімальних поверхонь та розкрита їх характеристика.

Результати даної роботи можуть бути використані при читанні спецкурсів з геометрії, для написання подібних робіт і застосовані в окремих сферах діяльності.

**SUMMARU**

Master's qualification work "Minimum Surfaces of Euclidean and Pseudo-Euclidean Spaces": 46 pages, 3 figures, 9 references.

HELICOID, PLATEAU PROBLEM, CATENOID, CURVE, MINIMAL SURFACES, ENEPER SURFACE, SHELL SURFACE, SPACE, MINKOWSKI SPACE, LAGRANGE'S EQUATIONS.

The object of research of the qualification work is minimal surfaces of Euclidean and pseudo-Euclidean spaces.

Research method: analytical, comparative, descriptive.

The subject of this work is the study of the properties of minimal surfaces of Euclidean and pseudo-Euclidean spaces and the possibilities of their application for solving various geometry problems.

The concept of Euclidean and pseudo-Euclidean spaces was revealed in the qualification work. An overview of minimal surfaces and their characteristics are disclosed.

The results of this work can be used when reading special courses on geometry, for writing similar works and applied in certain spheres of activity.

**ЗМІСТ**

Завдання на кваліфікаційну роботу……………………………………………...3

Реферат………………………………………………………………………….....4

Summary………………………………………………………………………...…5

Вступ……………………………………………………………………………....7

1. Евклідів та псевдоевклідів тривимірний простір……………………………9
	1. Визначення евклідового простору…………………………………….....9
	2. Вектори в евклідовому просторі………………………………………..12
	3. Псевдовклідів простір…………………………………………………...13
	4. Класифікація площин простору …………………………………....15

2 Диференційна геометрія двовимірної поверхні……………………………..17

2.1 Визначення поверхні. Дотична й нормаль поверхні………………….17

2.2 Фундаментальні форми поверхні……………………………………....19

2.3 Нормальна кривини кривої поверхні. Головні напрямки і головні кривини…………………………………………………………………………...21

3 Мінімальні поверхні евклідова та псевдоевклідова простору: визначення, характеристики, приклади………………………………………………………23

3.1 Визначення мінімальної поверхні……………………………………...23

3.2 Експерименти Плато з мильними плівками…………………………...24

3.3 Рівняння Лагранжа………………………………………………………25

3.4 Мінімальні поверхні обертання………………………………………...27

3.5 Мінімальні поверхні в класі поверхонь виду ……………...33

3.6 Мінімальні поверхні перенесення……………………………………...37

3.7 Мінімальні циліндричні поверхні……………………………………...38

3.8 Поверхня Енепера……………………………………………………….39

3.9 Мінімальні поверхні псевдоевклідова простору……………………..40

Висновки…………………………………………………………………………45Перелік посилань……………………………………………………………......46

**ВСТУП**

Поверхня в математиці – це двовимірний топологічний многовид.

Такі поверхні є прикладами тих, що виникають як межа тіла у звичайному тривимірному евклідовому просторі . Наприклад, це поверхня [кулі](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%83%D0%BB%D1%8F), сфери, псевдосфери. Є такі поверхні, які не вкладаються в тривимірний евклідів простір, або вкладаються з певними особливостями або самоперетинами. Прикладом таких поверхонь є пляшка Клейна.

Поверхня, в кожній точці якої існує окіл який можна відобразити без розриву на двовимірний круг, називається двовимірною.

В тривимірному просторі поверхню можна визначити неявно та явно. Якщо це неявна поверхня тривимірного простору, то її можна виразити через рівнянням, виду:

Поверхня, задана рівнянням , буде правильною поверхнею, якщо функція має часткові похідні в деякій точці, які є неперервними і хоча б одна з них не перетворюється на нуль.

Поверхня може бути визначена явно, якщо одну зі змінних, наприклад , можна виразити через інші:

Теорія векторних просторів, зокрема евклідових та псевдоевклідових просторів широко застосовується у практично кожній галузі математики: аналітичній і диференціальній геометрії, математичному аналізі та диференціальних рівняннях, тощо.

Визначення евклідової площини і тривимірного евклідового простору, ґрунтується на певних постулатах, а все інші – це теореми, в яких розкриваються властивості цих просторів. Для визначення раціональних чисел, використовують геометричні побудови, що є відношеннями співмірних довжин. На даний час, більш загальним стало визначення евклідового простору на основі векторних просторів, що дозволяють використовувати декартові координати і методи алгебри та диференціального і інтегрального числення. Точки визначають за допомогою трійок дійсних чисел, які називаються координатними векторами, а геометричні фігури можна описати певними рівняннями та нерівностями, в яких визначають співвідношення цих заданих координат. Такий підхід дозволяє легко узагальнити геометрію від евклідових просторів до просторів, які мають більшу розмірності.

Питання, пов'язані з вивченням мінімальних поверхонь евклідова та псевдоевклідова простору, давно викликають інтерес у геометрів. Геометрія мінімальних поверхонь є частиною сучасної геометрії.

Мінімальна поверхня – це поверхня, яка локально мінімізує її площу. Сам термін «мінімальна поверхню» використовуються тому, що дані поверхні виникли як поверхні, які зводяться до мінімуму загальної площі поверхні предмета до деякого обмеження.

Мінімальні поверхні стали інтенсивно досліджуватися в певних наукових галузях, особливо в таких, як молекулярна інженерія, матеріалознавства та загальна теорія відносності.

З усього вищевказаного випливає актуальність вибраної теми даної кваліфікаційної роботи.

**1 ЕВКЛІДІВ ТА ПСЕВДОЕВКЛІДІВ ТРИВИМІРНИЙ ПРОСТІР**

* 1. **Визначення евклідового простору**

Евклідів простір — скінченовимірний дійсний векторний простір над полем з заданим на ньому скалярним добутком. Він є поняттям, що належить до Евклідової геометрії і розширює двовимірну евклідову площину до тривимірного простору. Термін "евклідовий" дозволяє простори, що розглядаються в сучасній геометрії, відрізняти від інших типів просторів і його можна узагальнювати і до більшої кількості вимірів.

Аксіоми за допомогою яких визначено Евклідів простір, не вказують як саме мають бути представлені точки цього простору. Його можна побудований один із можливих способів його представлення, наприклад, за допомогою декартової системи координат. Точки тривимірного Евклідового простору визначаються трьома координатами (рис. 1.1). В такому випадку, евклідів простір моделюють застосовуючи дійсний простір координат , що має таку ж розмірність. Для одного виміру - це шкала дійсних чисел; для двох вимірів, його предсталяють декартовою системою координат на площині; для більшої кількості вимірів - це є координатний простір із трьома або більше координатами, що представлені дійсними числами. Для позначення n-вимірного евклідового простору, математики використовують позначення , якщо хочуть підкреслити його природу та властивості, або позначення . Оскільки ці дві структури мають подібні властивості, тому їх не розрізняють. Дані простори мають скінченну кількість вимірів.

Ще в школі всі учні знайомляться з поняттям "евклідова геометрія", основні положення якої сфокусовані навколо декількох аксіом, що спираються на такі геометричні елементи, як точка, площина, пряма, руху. Всі вони в сукупності формують те, що вже давно відомо під терміном "евклідів простір".



Рисунок 1.1 - Позначення точки тривимірного Евклідового простору

Евклідів простір, визначення якого базується на положенні про скалярне множення векторів, є частинним випадком лінійного (афінного) простору, який задовольняє цілу низку вимог:

1. скалярний добуток векторів абсолютно симетричний, тобто вектор з координатами в кількісному плані тотожний вектору з координатами однак протилежний за напрямом;
2. в тому випадку, якщо знаходиться скалярний добуток вектора з самим собою, то результат цієї дії буде носити позитивний характер. Єдиним винятком стане випадок, коли початкова і кінцева координата цього вектора дорівнює нулю: в цьому випадку і добуток його з самим собою також буде дорівнювати нулю;
3. має місце дистрибутивність скалярного добутку, тобто можливість розкладання однієї з його координат на суму двох значень, що не спричинить за собою жодних змін у підсумковому результаті скалярного множення векторів;
4. при множенні векторів на одне і те ж дійсне число їх скалярний добуток також збільшиться в стільки ж разів.

У тому випадку, якщо виконуються всі ці чотири умови, ми можемо з упевненістю сказати, що перед нами евклідовий простір.

Евклідів простір з практичної точки зору можна охарактеризувати наступними конкретними прикладами:

Найпростіший випадок - це наявність безлічі векторів з певними за основними законами геометрії скалярними добутками.

Евклідів простір вийде і в тому випадку, якщо під векторами ми розумітимемо якусь кінцеву множину дійсних чисел із заданою формулою, яка описує їх скалярну суму чи добуток.

Окремим випадком евклідового простору слід визнати так званий нульовий простір, який виходить в тому випадку, якщо скалярна довжина обох векторів дорівнює нулю.

Евклідів простір має цілу низку специфічних властивостей:

* скалярний множник можна виносити за дужки як від першого, так і від другого множника скалярного добутку, результат від цього не зазнає жодних змін;
* поряд з дистрибутивністю першого елемента скалярного добутку, діє і дистрибутивність другого елемента. Крім того, крім скалярної суми векторів, дистрибутивність має місце і в разі віднімання векторів.
* при скалярному множенні вектора на нуль, результат також дорівнюватиме нулю.

Площини в просторі визначаються як множина розв'язків рівняння:

Для дійсних чисел таких, що хоча б одне з чисел не буде дорівнювати нулю. Будь-яка взята площина в евклідовому просторі є ізометрична до евклідової площини.

Сфера в просторі є формально тим самим колом в площині. Тому сфера з центром і радіусом - це сукупність точок в просторі, які лежать на відстані від .

Таким чином, евклідів простір - це найважливіше геометричне поняття, що використовується при вирішенні завдань із взаємним розташуванням векторів один відносно одного.

* 1. **Вектори в евклідовому просторі**

Вектори евклідового простору зручно зіставити з точками цього простору. Нехай вектор, який направлений від початку координат у точку , буде радіус-вектором цієї точки. Тоді декартові координати точки називатимемо координатами даного радіус-вектора.

Два вектори, які мають початок у точці направлені до точок та з координатами та можна складати покоординатно. Тобто отримаємо: .

Добутком вектора на число , причому , називається вектор , модуль якого дорівнює . Якщо , то вектори і - співнапрямлені; якщо , то вектори і - протилежно напрямлені.

Якщо існують одиничні вектори з координатами , які мають довжину, що дорівнює 1, а самі вектори будуть взаємно перпендикулярні, то будь-який вектор може бути розкладений по одиничних векторах: . Тут розглядається тривимірний простір. Для будь-якого *n-*вимірного простору все робиться аналогічно. Евклідів простір визначається також як лінійний простір, або його ще називають векторним, в ньому квадрат відстані між точками, тобто кінцями радіус-векторів, визначається за формулою:

* 1. **Псевдоевклідів простір.**

Псевдоевклідів простір – скінченовимірний дійсний векторний простір або його ще називають афінний простір з невиродженним індефінітним скалярним добутком

*Означення 1*. Векторний простір називають псевдоевклідовим векторним простором (напівевклідовим векторним простором), якщо на ньому визначено узагальнений скалярний добуток і . Число називається позитивним індексом інерції. Псевдоевклідів простір індекса позначають Якщо ранг білінійної форми, а її дефект, то псевдоевклідів векторний простір індексу і дефекту позначають .

Псевдоевклідів тривимірний простір індексу 1, який будемо позначати символом , його можна визначити як множину елементів двох родів (точками і векторами). До них уводять такі операції, як: додавання векторів, множення вектора на дійсне число, відкладання вектора від точки і скалярного добутку векторів.

Існують три попарно ортогональних вектори такі, що *.*

В псевдоевклідовому просторі, як і в евклідовому просторі, два вектора називаються ортогональними, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю.

*Означення 2*. Вектори простору , скалярні квадрати яких додатні, називаються евклідовими векторами. Вектори з від’ємними скалярними квадратами називаються псевдоевклідовими векторами. Ненульові вектори, скалярні квадрати яких дорівнюють , називаються ізотропними векторами. Згідно з визначенням ізотропних векторів два колінеарних ізотропних вектора ортогональні.

Довжину вектора визначають, як і в евклідовому просторі, формулою . В просторі скалярні квадрати векторів можуть бути додатними, від’ємними та рівними нулю, тоді з формули довжини вектора випливає, що ненульові вектори в цьому просторі можуть мати дійсну довжину (якщо ), уявну довжину (якщо ) та нульову довжину (якщо ).

У псевдоевклідовому просторі при нормуванні евклідового вектора будемо використовувати формулу а при нормуванні псевдоевклідового вектора – формулу .

Нормовані евклідові вектори називаються одиничними, а нормовані псевдоевклідові вектори – уявно одиничними. Всі ізотропні вектори будемо вважати нормованими.

Із аксіоми випливає, що в просторі завжди існує ортонормований базис, який складається з одного уявно одиничного і двох одиничних векторів. Уявно одиничний вектор вибирають першим вектором базису. Неважко показати, що всі ортогональні базиси простору складаються з одного псевдоевклідового і двох евклідових векторів, тобто справджується закон інерції ортогональних базисів.

Координати векторів в ортонормованому базисі так само, як і в евклідовому просторі, називати декартовими. Скалярний добуток векторів і , заданих декартовими координатами, має вигляд: , а скалярний квадрат вектора  *.*

 *.*

**1.4 Класифікація площин простору**

Класифікацію площин простору зручно проводити з використанням поняття ізотропного конуса. Відкладають всі вектори простору від початку координат. Тоді кінці ізотропних векторів будуть лежати на поверхні: , яку називають ізотропним конусом. Кінці евклідових радіус-векторів лежать у зовнішній області ізотропного конуса, а кінці псевдоевклідових радіус-векторів – в його внутрішній області.

Прямі псевдоевклідового простору діляться на три типи:

– евклідові, якщо довжина направляючого вектора дійсна;

– псевдоевклідові, якщо довжина напрямного вектора уявна;

– ізотропні, якщо довжина напрямного вектора дорівнює .

Для класифікації двовимірних площин досліджують властивості ортогональних векторів. У просторі ортогональними можуть бути пара евклідових векторів, евклідів і псевдоевклідів вектори, евклідів та ізотропний вектори.

Розглянемо в просторі двовимірні площини, в яких всі вектори евклідові і площини, в яких є вектори всіх трьох типів. Називатимемо їх відповідно евклідовими і псевдоевклідовими площинами. Евклідові та псевдоевклідові площині називаються неізотропними. У просторі можливі також площини, в яких є тільки евклідові та ізотропні вектори - це ізотропні площини.

Розглянемо два неколінеарних вектори в просторі . Вони утворюють направляючий підпростір деякої двовимірної площини. Щоб визначити тип цієї площини, потрібно розглядати різні лінійні комбінації векторів. Але якщо на базі цих векторів побудувати ортогональну систему векторів, то в разі евклідової площини, ця система обов'язково складається з евклідових векторів, у разі псевдоевклідової площини – з псевдоевклідового і евклідового векторів, у випадку ізотропної площини – з ізотропного і евклідового векторів. Тобто тип площини легко розпізнавати по набору з двох ортогональних направляючих векторів.

Зауважимо, що площина, яка містить вершину ізотропного конуса і не має з ізотропним конусом інших спільних точок, є евклідовою. Якщо ж вона перетинає ізотропний конус по двом твірним, то така площина є псевдоевклідова. Площина, яка дотикається ізотропного конуса по твірній, є ізотропною (рис. 1.2).



Рисунок 1.2 - Взаємне розміщення площини та ізотопного конуса

**2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ ДВОВИМІРНОЇ ПОВЕРХНІ**

**2.1 Визначення поверхні. Дотична площина й нормаль поверхні**

*Означення 1.* Нехай - деяка область на площині з декартовими координатами . Параметризованою поверхнею називається неперервне відображення з області в простір , при якому кожній парі відповідає точка простору . Змінні називаються параметрами поверхні. Образ області називається образом або носієм поверхні.

Зазначена у визначенні відповідність за умови фіксування в реперу визначає неперервну вектор-функцію . Тому, інакше кажучи, поверхнею в називається годограф неперервної вектор-функції . Рівняння називається векторним рівнянням поверхні, векторна функція - параметризацією поверхні, а рівняння – параметричними рівняннями поверхні.

*Означення 2.* Поверхня , задана векторною функцією , називається поверхнею класу *,* якщо ця вектор-функція має неперервні частинні похідні до -го порядку включно. Якщо крім цього виконується умова , то поверхня називається регулярною.

*Означення 3.* Площина, що проходить через точку поверхні й містить всі дотичні прямі до всіх регулярних кривих поверхні, що проходять через цю точку, називається дотичною площиною поверхні в даній точці. Позначають .

Дотична площина визначається точкою й напрямним бівектором . Дотична площина має з поверхнею не обов'язково єдину спільну точку. Наприклад, дотична площина в довільній точці циліндра містить всю твірну, що проходить через цю точку.

Для складання рівняння дотичної площини поверхні в точці потрібно знайти

Потім варто записати детермінантне рівняння дотичної площини:

Можна спочатку обчислити нормальний вектор площини й записати рівняння дотичної площини по точці й нормальному вектору:

.

*Означення 4.* Нормаллю регулярної поверхні в даній її точці називається пряма, що проходить через цю точку й перпендикулярна дотичній площині поверхні в даній точці.

Для поверхні в точці канонічні рівняння нормалі мають вигляд

Неявною поверхнею будемо називати підмножину тривимірного евклідового простору, яка задана рівнянням:

 , (2.1)

де – деяка функція від змінних .

Точка неявної поверхні, заданої рівнянням (2.1), називається неособливою, якщо в ній вектор ненульовий, або, інакше, якщо . Неявна поверхня називаєтьсярегулярною, якщо всі її точки є неособливими.

*Означення 5*. Регулярною поверхнею тривимірного евклідового простору називається підмножина цього простору, яка або є носієм регулярної параметризованої поверхні, або є регулярною неявною поверхнею.

Рівняння дотичної площини й нормалі неявної поверхні (2.1) в точці мають відповідно вигляд:

**2.2 Фундаментальні форми поверхні**

Нехай – регулярна поверхня, задана рівнянням . У будь-якій точці існує дотична площина . Розглянемо дотичну площину як двовимірний векторний простір. Вектори якого мають вигляд , де – локальний репер поверхні. Введемо в структуру евклідового простору за допомогою скалярного добутку векторів і знайдемо

,

або, позначивши

,

одержимо:

. *–*

квадратичну форму від змінних *.* Вона називається квадратичною формою поверхні і визначена в дотичній площині поверхні

Матриця називається матрицею першої квадратичної форми, а – її детермінантом**.**

Для коефіцієнтів першої квадратичної форми використовують ще позначення й записують .

*Означення 6.* Другою квадратичною формоюрегулярної параметризованої поверхні в її точці називається квадратична форма , визначена в дотичному векторному просторі до поверхні, - одиничний вектор нормалі поверхні в точці *.*

Оскільки векторні функції та залежать від параметрів , то друга квадратична форма набуває вигляду:

,

а після позначення коефіцієнтів символами відповідно, можемо записати другу квадратичну форму поверхні у вигляді:

 . (2.2)

Розгорнуті формули для обчислення коефіцієнтів набувають вигляду

**2.3 Нормальна кривина кривої на поверхні. Головні напрямки і головні кривини**

Нехай крива лежить на поверхні класу і має рівняння , де – натуральний параметр. Тоді – зовнішнє рівняння кривої і , – вектор кривини кривої.

*Означення 7.* Нормальною кривиною кривої на поверхні називається ортогональна скалярна проекція вектора кривини цієї кривої на нормаль поверхні: **.**

Нормальна кривина кривої на поверхні обчислюється за формулою

 (2.3)

де – друга квадратична форма поверхні, – перша квадратична форма поверхні.

*Означення 8.* Нормальним перерізом поверхні у точці називається плоска крива, що є перерізом поверхні з площиною, що проходить через нормаль поверхні в точці .

Нехай – нормальний переріз, параметризація кривої натуральна, – одиничний вектор головної нормалі, отже . Тоді . Тому . Тобто кривина нормального перерізу поверхні в даній її точці співпадає з точністю до знаку з нормальною кривиною нормального перерізу. Крім того, всі криві поверхні, що мають одну і ту ж дотичну в їх спільній точці , мають в цій точці одну і ту ж нормальну кривину.

Отже, маємо ще одну властивість нормальної кривини кривої.

*Наслідок.* Нормальна кривина кривої на поверхні в даній точці є з точністю до знаку кривина нормального перерізу поверхні в цій точці, що має з даною кривою загальну дотичну пряму.

Ці властивості дозволяють спростити обчислення нормальної кривини і розглядати тільки кривини нормальних перерізів.

*Означення 9.* Головними кривинами поверхні в точці називаються найменша та найбільша з усіх нормальних кривин поверхні в цій точці. Головними напрямками поверхні в точці називаються напрямки нормальних перетинів, які мають головні кривини. Головні кривини позначаються .

*Означення 10.*Повною (гаусовою) кривиною поверхні в її регулярній точці називається добуток головних кривин в цій точці: .

*Означення 11.* Середньою кривиною поверхні в її регулярній точці називається напівсума головних кривин в цій точці: .

*Теорема 1.*Головні кривини і поверхні є коренями квадратного рівняння

 . (2.4)

Повна кривина і середня кривина обчислюються за формулами

 (2.5)

 (2.6)

**3 МІНІМАЛЬНІ ПОВЕРХНІ ЕВКЛІДОВА ТА ПСЕВДОЕВКЛІДОВА ПРОСТОРІВ**

**3.1 Визначення мінімальної поверхні**

Мінімальна поверхня – це поверхня нульової середньої кривизни. Першими хто почав досліджувати у своїх роботах такі поверхні були Пуассона і Плато. Згідно з теоремою Пуассона, середня кривизна поверхні розділу двох фізичних середовищ, що знаходяться в рівновазі, пропорційна різниці тисків в цих середовищах. Якщо тиски однакові – поверхня розділу середовищ буде мінімальною, при ненульовій різниці маємо поверхні сталої середньої кривини.

Нехай та двовимірні гладкі поверхні, де відноситься до декартових координат Нехай поверхня задається радіус-вектором:

  (3.1)

де параметри змінюються в деякій області на евкідовій площині, причому вони визначають регулярні координати в околі точки .

В такому випадку перша квадратична форма має вигляд:

де .

Для даної поверхні друга квадратична форма бути мати вигляд:

де .

- одиничний вектор нормалі до поверхні.

Мінімальна поверхня визначається наступними властивостями: якщо на поверхні взяти любу досить малу область з границею , то площа цієї області буде найменшою серед усіх гладких поверхонь з цією границею.

**3.2 Експерименти Плато з мильними плівками**

Бельгійський фізик Плато коли розпочав досліди про вивчення конфігурації мильних плівок, навіть не підозрював, що вони стануть поштовхом до виникнення значного наукового напрямку, який і в сьогоднішній час бурхливо розвивається і відомий під назвою проблема Плато.

В 1866 році Плато встановив, що якщо занурити в мильний розчин замкнений контур (наприклад із проволоки), то після його вилучення звідти утвориться поверхня мінімальної площі порівняно з будь-якою іншою поверхнею, яку можна натягнути на цей контур, тобто мінімальна поверхня.

З фізичної точки зору мильна плівка прагне зайняти в просторі положення, що відповідає екстремуму енергії, яка в даному випадку пропорційна площі поверхні. Тому, з математичної точки зору, мильні плівки описуються як критичні точки функціонала площі. Мінімальні поверхні - критичні точки функціонала площі, що розглядається на класі поверхонь, що затягують один і той же контур, відносно малих деформацій поверхні.

**3.3 Рівняння Лагранжа**

Розглянемо мінімальні поверхні типу

 (3.2)

тобто поверхні для яких .

Перейдемо до параметричного завдання поверхні (3.2). Для цього представимо, що тоді і тому поверхню (3.2) можна подати в наступному параметричному вигляді вектор-функції:

 (3.3)

Обчислимо коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні (3.2). Так як

то

Так як , то випливає що:

 (3.4)

Підставимо в формулу (3.4) значення для отримаємо:

*.*

Звідси:

Враховуючи, що , останнє рівняння матиме вигляд:

 *.* (3.5)

Рівняння (3.5) називається рівнянням Лагранжа. Це нелінійне рівняння другого порядку часткових похідних було отримане Лагранжем в 1760 році при мінімалізації площі поверхні .

**3.4 Мінімальні поверхні обертання**

Мінімальна поверхня обертання у [математиці](https://www.wikidata.uk-ua.nina.az/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0.html) — це [поверхня обертання](https://www.wikidata.uk-ua.nina.az/%D0%9F%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D1%80%D1%85%D0%BD%D1%8F_%D0%BE%D0%B1%D0%B5%D1%80%D1%82%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F.html), яка визначається двома [точками](https://www.wikidata.uk-ua.nina.az/%D0%A2%D0%BE%D1%87%D0%BA%D0%B0.html) на [півплощині](https://www.wikidata.uk-ua.nina.az/%D0%9F%D1%96%D0%B2%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%96%D1%80.html), межею якої є вісь обертання поверхні. Поверхня утворюється [кривою](https://www.wikidata.uk-ua.nina.az/%D0%9A%D1%80%D0%B8%D0%B2%D0%B0.html), яка лежить у півплощині та з'єднує дві точки. Серед усіх поверхонь, які можна створити таким чином, мінімальною поверхнею буде та, яка [мінімізує](https://www.wikidata.uk-ua.nina.az/%D0%9E%D0%BF%D1%82%D0%B8%D0%BC%D1%96%D0%B7%D0%B0%D1%86%D1%96%D1%8F_%28%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%29.html) [площу поверхні](https://www.wikidata.uk-ua.nina.az/%D0%9F%D0%BB%D0%BE%D1%89%D0%B0_%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D1%80%D1%85%D0%BD%D1%96.html). Основною задачею [варіаційного числення](https://www.wikidata.uk-ua.nina.az/%D0%92%D0%B0%D1%80%D1%96%D0%B0%D1%86%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F.html) є знаходження кривої між двома точками, яка створює цю мінімальну поверхню обертання.

Нехай крива , належать площині і обертається навколо осі . Тоді рівняння отриманої поверхні обертання буде мати вигляд:

 (3.6)

Якщо виключити параметри та з формули (3.6), отримаємо:

 *.* (3.7)

Скористаємося полярними координатами:

 (3.8)

Тепер можна легко знайти наступні співвідношення:

Так як функція не залежить від , то

  (3.10)

Враховуючи формули (3.9) та (3.10) маємо:

(3.11)

.

Використовуючи співвідношення (3.11), рівняння Лагранжа прийме такий вид:

*.*

Знайдемо рішення цього рівняння. Отримаємо:

 (3.12)

Допустимо, що , тоді і рівняння (3.12) буде мати вигляд:

Так як

то:

де С-постійна.

Розв'язавши дане рівняння відносно , отримаємо такий результат:

Поверхня симетрична відносно площини , тому візьмемо верхню частину для якої

Так як то

 (3.13)

де – постійна, яку можна представити рівною , так як цього завжди можна досягти перемістивши зсувом на постійну величину всією поверхнею вздовж осі

Із рівняння (3.13) виходить:

Склавши отриманні рівняння в результаті будемо мати наступний вираз:

звідси

 або . (3.14)

Рівняння (3.14) є рівнянням катеноїда, тобто поверхні отриманої обертанням ланцюгової лінії навколо осі

 (3.15)

Дійсно рівняння (3.15) можна записати в наступному вигляді:

звідси

Або в параметричному вигляді

 (3.16)

де –параметр.

Обертаючи криву навколо , отримаємо рівняння катеноїда в параметричному вигляді

 (3.17)

Виключивши параметр і , отримаємо рівняння катеноїда

 –

в явному вигляді, або

 –

в неявному вигляді.

Так як при функція дорівнює , радіус кола перетину катеноїда з площиною дорівнює .

Таким чином єдиною поверхнею обертання, яка буде задовольняти рівняння Лагранжа, тобто являтися мінімальною поверхнею обертання, буде катеноїд.

Задача 1. Дано катеноїд . Знайти - середню кривину.

Розв’язання:

Знайдемо першу квадратичну форму поверхні

.

Оскільки

то

Знайдемо другу квадратичну форму поверхні.

.

Головні кривини поверхні

Гаусова кривина:

Середня кривина:

Отже, поверхня мінімальна.

**3.5 Мінімальні поверхні в класі поверхонь виду**

Розглянемо клас поверхонь виду:

 (3.18)

де криволінійними координатами і є полярні координати.

Виділимо з цього класу мінімальні поверхні, тобто поверхні, які задовольняють рівняння Лагранжа (3.5).

Використавши (3.4), для поверхонь виду (3.18) запишимо

Використовуючи ці співвідношення, знаходимо, що рівняння Лагранжа (3.5) приймає для таких поверхонь особливо простий вигляд:

Двічі проінтегрувавши це рівняння, отримуємо

  (3.19)

де і постійні.

Константу можна розглядати як рівну нулю, тобто цього завжди можна досягти перемістивши на цю постійну величину всю поверхню вздовж осі .

Враховуючи (3.19), поверхня (3.18) буде мати вигляд

 (3.20)

Використовуючи параметри та, отримаємо рівняння поверхні в явному вигляді:

 (3.21)

яка називається гелікоїдом – поверхнею, утвореною прямою лінією, яка обертається навколо осі і одночасно рухається паралельно їй (гвинтова поверхня).

Таким чином, єдиною мінімальною поверхнею класу (3.18) являється гелікоїд (3.21) (гвинтова поверхня).

Задача 2. Дано гелікоїд . Знайти середню кривину.

Розв’язання:

Знайдемо першу квадратичну форму поверхні

Оскільки

то

Знайдемо другу квадратичну форму поверхні.

Головні кривини поверхні

Гаусова кривина:

Середня кривина:

Отже, поверхня мінімальна.

**3.6 Мінімальні поверхні перенесення**

Поверхнею перенесення називається поверхня, отримана в результаті руху кривої без деформації вздовж іншої кривої .

Поверхню перенесення можна зобразити в наступному векторному вигляді:

 (3.22)

Теорема 1. Єдиною мінімальною поверхнею перенесення являється поверхня Шерка.

 (3.23)

Те, що поверхня (3.23) являється поверхнею перенесення, випливає з того, що її можна представити у вигляді (3.22), де

або в параметричному вигляді

 (3.24)

Виключивши, параметри та в рівнянні (3.24), приходимо до явного зображення поверхні Шерка

 (3.25)

**3.7 Мінімальні циліндричні поверхні**

Поверхня, утворена прямими, паралельними заданій прямій і перетинаючими задану криву , називається циліндричною поверхнею (або циліндром) (рис. 3.1).

 l

 L

Рисунок 3.1 - Циліндрична поверхня

Криву називають напрямною циліндра. Прямі, які утворюють циліндр називаються твірними циліндра.

*Теорема 2* Єдиною мінімальною циліндричною поверхнею являється площина.

Доведення. Те, що площина являється мінімальною поверхнею слідує з того, що функція (3.26) задовольняє рівняння Лагранжа (3.5)

 (3.26)

Так як будь-яку циліндричну поверхню можна отримати переміщенням напрямної вздовж будь-якої її утворювальної, тоді циліндрична поверхня являється поверхнями перенесення. Так як єдиною мінімальною поверхнею перенесення являється поверхня Шерка, яка не є циліндричною поверхнею, то з цього випливає справедливість теореми.

**3.8 Поверхня Енепера**

Поверхня Енепера – певний тип самоперетинаючої мінімальної поверхні.

Дана поверхня може бути описана параметрично

Задача 3: В Евклідовому просторі розглянемо поверхню Енепера

Координати першої і другої квадратичних форм мають вигляд:

Так, як і , то координатні лінії будуть лініями кривизни. Головні кривизни поверхні – рівні

Гаусова і середня кривизни поверхні Енепера будуть мати вигляд:

Так як , то поверхня мінімальна.

**3.9 Мінімальні поверхні псевдоевклідова простору**

Будемо розглядати такі двовимірні поверхні простору  або такі області на цих поверхнях, у яких тип дотичної площини зберігається в кожній точці.

*Означення 1.* Двовимірна поверхня псевдоевклідова простору  називається псевдоевклідовою (евклідовою, ізотропною), якщо дотична площина до неї в кожній точці є псевдоевклідова (евклідова, ізотропна).

Залишимо без змін критерій мінімальної поверхні псевдоевклідова простору таким самим як і для поверхонь евклідова простору, а саме, рівність нулю середньої кривини.

Розглянемо поверхні псевдоевклідова простору, які є аналогами мінімальних поверхонь евклідова простору.

Задача 4. Нехай – поверхня простору , для якої

Оскільки то поверхня є псевдоевклідовою. Будемо називати її псевдоевклідовим катеноїдом.

Знайдемо коефіцієнти другої квадратичної форми .

Головні кривини поверхні

Гаусова кривина:

Середня кривина:

Отже, поверхня мінімальна.

Задача 5. В просторі  розглянемо поверхню .

Знайдемо коефіцієнти першої квадратичної форми .

Оскільки , то поверхня є псевдоевклідовою, і будемо називати її псевдоєвклідовим гелікоїдом. Знайдемо його другу квадратичну форму.

Головні кривини поверхні

Гаусова кривина:

Середня кривина:

Отже, поверхня мінімальна.

**ВИСНОВКИ**

У даній кваліфікаційній роботі були розглянуті мінімальні поверхні евклідова та псевдоевклідова просторів.

В результаті проведеної роботи наведені окремі види мінімальних поверхонь, вивчено властивості даних поверхонь, розкрито основні поняття евклідова та псевдоевклідова просторів, з’ясовано та показано основні методи їх представлення. Теоретично обґрунтовано методичну систему вивчення їх геометричних образів у метричному просторі.

Для досягнення поставленої мети були виконані наступні завдання:

1. Проаналізовано матеріали з даної теми з формулюванням основних понять.

2. Наведено описи характеристик евклідова та псевдоевклідова просторів.

3. Систематизовано матеріал з основ диференціальної геометрії двовимірної поверхні для вивчення мінімальних поверхонь.

 4. Розглянуто приклади мінімальних поверхонь евклідова та псевдоевклідова просторів.

5. Показано розв’язання окремих задач.

Тема обраної кваліфікаційної роботи є актуальною та корисною на сьогоднішній день. Вона являється складовою процесу навчання у сфері мінімальних поверхонь і показує, що знання однієї області, можуть стати помічниками в інших галузях. Розв’язання теоретичних питань в свою чергу приводить до розширення спектру застосування розглянутих математичних об’єктів та розв’язаних задач.

Протягом роботи над дослідженням були підібрані матеріали для практичного застосування при знаходженні мінімальних поверхонь. Результати дослідження можна використовувати при вивченні дисципліни «Диференціальна геометрія».

**ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ**

1. Борисенко О.А. Диференційна геометрія та топологія: навч. посіб. Харків: Основа, 1995. 209 с.
2. Драганюк С.В., Куницька О.В. Евклідові простори. Лінійні відображення: тексти лекцій. Частина 2. Одеса: ДЗ «ПНПУ імені К.Д. Ушинського», 2015. 73 с.
3. Ілляшенко В.Я. Основи геометрії: навч. посіб. Луцьк: Вежа, 2012. 148 с.
4. Залевський В.Й., Залевський С.В. Курс лекцій з диференціальної геометрії для студентів фізико-математичного факультету. Частина 2 «Поверхні». Київ: 2013. 81 с.
5. Кованцов М. І. Диференціальна геометрія. Вид-во „Вища школа”, Київ: 1973. 276 с.
6. Курбатова І.М. Диференціальна геометрія: метод. посіб. Одеса: ОНУ, 2020. 66 с.
7. Пришляк О.О. Диференціальна геометрія Київ: Видавничо- поліграфічний центр «Київський університет», 2004. 68 с.
8. Стєганцева П.Г., Стєганцев Є.В., Гречнєва М.О. Диференціальна геометрія і топологія: навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2019. 160 с.
9. Стєганцева П. Г., Гречнєва М. О.Основи математики : навчально-методичний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2015. 85 с.