

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра прикладної математики і механіки

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: «ДИНАМІКА ОБЕРТОВОГО
ОСЦИЛЯТОРА ІЗ НЕЛІНІЙНОЮ ФУНКЦІЄЮ
ДЕМПФУВАННЯ»

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1138

спеціальності 113 прикладна математика
(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми прикладна математика
(назва освітньої програми)

В.В. Дмитренко

(ініціали та прізвище)

Керівник завідувач кафедри прикладної математики і механіки,
професор, д.т.н. Гришак В.З.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент завідувач кафедри фундаментальної математики,
доцент, д.т.н. Гребенюк С.М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра прикладної математики і механіки

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 113 прикладна математика

(шифр і назва)

Освітня програма прикладна математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри прикладної математики і механіки, професор,
д.т.н.

Грицак В.З.

(підпис)

« 29 » 05 2019 р.

З А В Д А Н Н Я
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Дмитренко Вікторії Віталіївні

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Динаміка обертового осцилятора із нелінійною функцією демпфування

керівник роботи (проекту) Грицак Віктор Захарович, д.т.н., професор

(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 29 » 05 2019 року № 811-с

2. Строк подання студентом роботи 27.12.19

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.

2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

1. Постановка задачі

2. Основні теоретичні відомості

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)

Презентація, 7 рисунків

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	02.09.19-09.09.19	
2.	Збір вихідних даних.	10.09.19-23.09.19	
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	24.09.19-14.10.19	
4.	Розробка першого розділу.	15.10.19-04.11.19	
5.	Розробка другого розділу.	05.11.19-18.11.19	
6.	Розробка третього розділу	19.11.19-15.12.19	
7.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	16.12.19-27.12.19	
8.	Захист кваліфікаційної роботи.	16.01.2020	

Студент _____
(підпис)

В.В. Дмитренко _____
(ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____
(підпис)

В.З. Грицак _____
(ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____
(підпис)

В.В. Леонтєва _____
(ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Динаміка обертового осцилятора із нелінійною функцією демпфування»: 51 с., 7 рис., 29 джерел.

АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ, ГІБРИДИ АНАЛІТИКО-ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ, ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА, НЕЛІНІЙНА ДИНАМІКА, НЕЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ ПАРАМЕТРАМИ, НЕЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ ДЕМПФУВАННЯ.

Об'єкт дослідження: задача динаміки обертового математичного маятника із нелінійною функцією демпфування.

Мета роботи: отримання нових наближених аналітико-чисельних розв'язків актуальних нелінійних задач динаміки систем із нелінійною функцією демпфування.

Метод дослідження: аналітичний.

У кваліфікаційній роботі на базі гібридного асимптотичного підходу запропонована нова математична модель з аналітико-чисельним алгоритмом дослідження і візуалізацією досліджуваних процесів, а також отриманими наближеними аналітичними розв'язками задачі, яка описується сингулярним диференціальним рівнянням зі змінними параметрами.

Отримані наближені аналітичні розв'язки дозволяють рекомендувати здобуті у кваліфікаційній роботі залежності для подальшого розвитку теорії математичного моделювання, а також практичного використання при проектуванні конструкцій нової техніки.

Master's qualifying paper «Dynamics of Rotating Oscillator with Nonlinear Damping Function»: 51 pages, 7 figures, 29 references.

ASYMPTOTIC METHODS, HYBRID ANALYTICAL-NUMERICAL METHODS, DYNAMIC MODEL OF MATHEMATICAL OSCILLATION, NONLINEAR DYNAMICS, NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS, NONLINEAR DUMPING FUNCTION.

The object of the study is nonlinear problem of dynamics for rotating mathematical oscillation with nonlinear damping function under the action of a periodic external loading.

The aim of the study is obtaining a new approximate analytic-numerical solution of actual nonlinear problems of dynamics of systems with nonlinear damping function.

The method of research is analytical.

In this qualification paper on the basis of hybrid asymptotic approach a new mathematical model with analytical and numerical algorithm for the study and visualization of the are proposed. An approximate analytical solution of problems, which are described by singular differential equations with variable coefficients and their systems are obtained.

The approximate analytical solutions obtained allows to recommend the dependence obtained in the qualification work for the further development of the theory of mathematical modeling, as well as practical use in the design of structures of new technology.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	2
Реферат	4
Summary	5
Вступ.....	7
1 Сучасний стан досліджуваної проблеми	9
1.1 Аналітичний огляд сучасного стану проблеми нелінійної динаміки досліджуваних конструкцій із змінними параметрами	10
1.2 Гібридні аналітико-чисельні методи та їх застосування в задачах нелінійної динаміки	19
1.3 Висновки до розділу 1	22
2 Основні залежності задачі про вимушені коливання обертового математичного маятника з довжиною і масою, залежними від часу	25
2.1 Розрахункова схема та основні залежності.....	25
2.2 Чисельний розв'язок задачі динаміки математичного маятника змінної маси та довжини	26
2.3 Основне рівняння проблеми динаміки обертового маятника із змінними коефіцієнтами та нелінійною першою похідною.....	34
3 Наближений аналітичний розв'язок задачі про вимушені коливання обертового математичного маятника із нелінійною функцією демпфування	36
3.1 Формулювання задачі. Процедура розв'язку за методом фазних інтегралів (ВКБ-наближення). Застосування гібридного асимптотичного методу.....	37
Висновки	46
Перелік посилань.....	48

ВСТУП

Кваліфікаційне дослідження присвячене здобуттю ефективного наближеного аналітичного розв'язку основного сингулярного нелінійного рівняння зі змінними коефіцієнтами вимушених коливань, яке із застосуванням сучасних комп'ютерних комплексів моделює поведінку осцилятора з нелінійною функцією демпфування.

Вивчення рухів математичного маятника виявляє багато якісних властивостей динаміки нелінійної системи і викликає як самостійний інтерес у сучасних дослідників, так і в прикладних задачах, коли плоскі рухи досліджуваних систем і об'єктів при різних спрощеннях моделюють математичним маятником.

Розв'язок вказаної задачі, що зводиться до сингулярних нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, базуються на застосуванні прямих чисельних методів інтегрування або асимптотичних підходів, зокрема гібридного підходу на базі методів збурення ВКБ-Гальоркін методу. Такий підхід дозволяє будувати досить точне наближення незалежно від величини параметра при старшій похідній та здобути наближений аналітичний розв'язок нелінійної динаміки математичного маятника з нелінійною функцією демпфування.

Вивчення руху обертового математичного маятника з нелінійною функцією демпфування виявляє значну кількість якісних властивостей геометрично нелінійних систем і тому викликає не лише самостійний інтерес, а й моделювання математичним маятником проблем нелінійної динаміки в прикладних задачах. Здобуті наближені аналітичні розв'язки можуть бути основою для подальших досліджень біфуркацій станів рівноваги та резонансних явищ у системах зі змінними за часом параметрами, а також

підвищення ефективності чисельних методів розрахунку реальних конструкцій і систем.

Так, наприклад, в роботі [1] вивчені біфуркації рівноваг і досліджені резонанси в завданні про коливання маятника змінної довжини на вібруючій підставі при великих частотах вібрацій і малих амплітудах коливань довжини маятника і точки його підвісу. В [2] за допомогою розділу теорії збурень і теорії малих коливань, в якому вивчаються умовно-періодичні рухи в гамільтонових системах, (КАМ-теорії) проаналізовані умовно-періодичні рухи системи в задачі про рух двох однакових маятників, пов'язаних лінійною пружною пружиною, в околиці їх стійкого вертикального положення рівноваги. Завдання про стабілізацію релейним керуванням програмних рухів маятника в змінному полі сили тяжіння при наявності неврахованих впливів вирішена в роботі [3] за допомогою методу граничних функцій і граничних систем [4].

1 СУЧАСНИЙ СТАН ДОСЛІДЖУВАНОЇ ПРОБЛЕМИ

Математичний маятник та його узагальнення широко використовуються в прикладних задачах при моделюванні рухів різних систем. Також він виявляє велику кількість якісних властивостей динаміки нелінійної системи, викликаючи самостійний інтерес у сучасних дослідників. Так, наприклад, в роботі [1] отримані біфуркаційні діаграми рівноваг, досліджено резонанси та показано наявність стохастичного павутиння поблизу рівноваг у задачі про коливання маятника змінної довжини на віброуючій основі при великих частотах вібрацій та малих амплітудах коливань довжини маятника та точки його підвісу. В [2] за допомогою методу граничних функцій та граничних систем [3] досліджена та розв'язана задача про стабілізацію релейним керуванням програмних рухів маятника в змінному полі сили тяжіння при наявності неврахованих впливів. Задачі про побудову асимптотично стійких заданих маятникових рухів волчка Лагранжа на рухомій платформі та руки робота-маніпулятора, модельованою двустепенним маятником змінної довжини, розв'язані в роботах [4, 5] відповідно.

Особлива увага дослідників аерокосмічних систем приділяється нелінійним динамічним моделям, що мають складну поведінку у зв'язку із наявністю характеристик конструкцій, які є під дією періодичних зовнішніх навантажень. Необхідність дослідження таких моделей стимулюється як загально науковими проблемами, зокрема внутрішнім розвитком теорії моделювання з пізнанням закономірностей нелінійних процесів і застосуванням їх у інформаційних технологіях, так і численними прикладними задачами проектування складних об'єктів аерокосмічної техніки.

У даному напрямку досліджень існує суттєвий прогрес, особливо для систем з характеристиками, не залежними від координат і часу. Даний аналітичний огляд сучасного стану проблеми математичного моделювання нелінійної динаміки систем із змінними параметрами пов'язаний

безпосередньо із задачами кваліфікаційної роботи, а також аналізом гібридних асимптотичних методів за даними досліджень останніх років.

1.1 Аналітичний огляд сучасного стану проблеми нелінійної динаміки досліджуваних конструкцій із змінними параметрами

Проблема управління математичним маятником із змінними за часом параметрами привертає останнім часом увагу дослідників у зв'язку з тим, що модель маятника може суттєво відображати основні динамічні ефекти у реальних системах. Актуальність проблеми полягає як з точки зору застосування сучасних математичних методів дослідження нелінійних задач динаміки систем із змінними у часі параметрами, так і з точки зору безпосереднього прикладного значення цієї проблеми. В цьому сенсі особлива увага привертається знаходженню законів заспокоєння коливань систем із заданими параметрами, залежними від часу. Необхідно зазначити, що існуючі розв'язки задач нелінійної динаміки математичного маятника, як правило, зводяться до вирішення рівняння Мат'є за умови наявності кубічної складової нелінійного рівняння динаміки системи із сталими параметрами.

До теперішнього часу для аналізу руху супутників відносно центру мас розроблено безліч аналітичних і чисельних методів. Незважаючи на це, дана проблема залишається актуальною і привертає інтерес дослідників. Це пояснюється ускладненням завдань, що вирішуються в процесі функціонування космічного апарату, підвищенням вимог до його надійності і економічності [21].

Залежно від свого призначення, супутники можуть відрізнятися розмірами, геометрією мас, властивостями матеріалів, з яких вони виготовлені. З цієї причини чималий інтерес викликає питання про існування і властивості окремих приватних рішень, що описують характерні режими руху. До таких часткових розв'язків відносяться періодичні рухи супутника.

Важливість якісного дослідження таких рухів пояснюється ще й тим, що для більшості штучних супутників доводиться вирішувати складну проблему забезпечення їх орієнтації та стабілізації на орбіті.

Розглянуто нелінійну задачу [6] про стійкість для більшості (в сенсі міри Лебега) початкових умов або про формальну стійкість (стійкості в наближенні як завгодно високого кінцевого порядку). Виявлено кілька випадків, коли періодичні рухи, стійкі в першому наближенні, насправді нестійкі (через вторинні резонанси третього і четвертого порядків). Необхідно зазначити, що порівняльний аналіз застосування асимптотичних методів інтегрування рівняння площинних коливань з аналізом ефектів обертання супутника на основі методу усереднення з незалежними параметрами при явищах резонансу надано у роботі [7].

Розглядається рух супутника відносно центра мас на круговій орбіті. Досліджується задача про орбітальну стійкість його плоских маятникових коливань. Супутник моделюється твердим тілом, що володіє геометрією мас пластинки. Передбачається, що в незбуреному русі найменша вісь інерції супутника лежить в площині орбіти його центру мас, тобто площина супутника-пластинки перпендикулярна площині орбіти. У роботі [8] виконано нелінійний аналіз орбітальної стійкості плоских маятникових коливань для недосліджених раніше значень параметрів задачі, що відповідають кордонам областей стійкості в першому наближенні, на яких реалізуються резонанси першого або другого порядків. Доведено, що на зазначених межах плоскі маятникові коливання або формально орбітально стійкі, або орбітально стійкі в третьому наближенні.

Розглядається задача [9] про орбітальну стійкість плоских періодичних рухів динамічно симетричного важкого твердого тіла з однією нерухомою точкою. Передбачається, що центр мас тіла лежить в екваторіальній площині еліпсоїда інерції. Незбурений періодичний рух являє собою плоскі маятникові коливання або обертання тіла, при яких одна з його головних осей інерції зберігає незмінне горизонтальне положення.

У околі незбуреного періодичного руху введені локальні координати, і рівняння збуреного руху записані в гамільтонової формі. На основі лінійного аналізу знайдені області орбітальної нестійкості. Поза зазначених областей виконаний нелінійний аналіз з урахуванням членів до четвертого ступеня включно в розкладанні функції Гамільтона в ряд в околиці незбуреного руху. Нелінійна задача про орбітальну стійкість зведена до аналізу стійкості нерухомої точки симплектичного відображення, що генерується системою рівнянь збуреного руху. Коефіцієнти симплектичного відображення визначалися чисельно. На основі їх аналізу отримані строгі висновки про орбітальну стійкість або нестійкість незбуреного руху. Орбітальна стійкість досліджена аналітично в двохграничних випадках: коливання з малими амплітудами і обертання з великими кутовими швидкостями, коли вдається ввести малий параметр.

При проектуванні сучасних літальних апаратів (ЛА) все більш жорсткі вимоги висуваються до засобів автоматизації основних режимів польоту. В цьому зв'язку, в рамках вказаної проблеми керування рухом, слід особливо виділити задачу аналітичного синтезу автопілотів. Складність математичного опису польоту призводить до відомих методологічних ускладнень, що виникають при розв'язку цієї задачі за допомогою класичної теорії регулювання та сучасної теорії оптимального керування.

Розглянуто питання математичного опису динаміки польоту та викладені загальні підходи до автоматичного керування рухом ЛА. Представлено розв'язок задач синтезу систем взаємопов'язаного керування просторовим рухом ЛА та просторовою орієнтацією космічних ЛА [10].

Дан теоретичний аналіз довгоперіодичних (фугоїдних) коливань ЛА, що має підйомну силу та здійснює політ з гіперзвуковою швидкістю в довільній атмосфері. Причиною коливань є взаємний перехід кінетичної енергії в потенційну при польоті по траєкторії, що має коливальний характер і визначається в першу чергу регульованим поздовжнім моментом, рівним нулю при сталому польоті. Показано, що з наближенням швидкості до першої

космічної, зменшення сили тяжіння з висотою переважає над зменшенням щільності атмосфери так, що з ростом швидкості період фугоїдних коливань асимптотично прагне до відповідного періоду обертання літального апарату. Отримано аналітичні вирази для короткоперіодичних коливань [11].

Досліджується [12] нелінійна задача про рух двох однакових математичних маятників, пов'язаних лінійною пружною пружиною, в околиці їхнього стійкого вертикального положення рівноваги. Розглядається випадок, близький до резонансу 1:1, коли жорсткість пружини мала. Розв'язана задача про існування та орбітальну стійкість періодичних рухів маятників, які виникають з положення рівноваги. Відзначено існування рухів, асимптотичних до одного з періодичних рухів. Дан аналіз умовно-періодичних рухів наближеної системи, яка враховує члени до четвертого ступеня включно в нормалізованій функції Гамільтона. За допомогою КАМ-теорії розглянуто питання про збереження цих рухів в повній нелінійній системі, яка враховує члени всіх ступенів в розкладанні функції Гамільтона в ряд у досить малій околиці положення рівноваги.

Робота [21] частково присвячена отриманню наближеного аналітичного розв'язку задачі про нелінійні коливання і демпфування моделі літального апарату поблизу регулярно-збуреної поверхні. Механічним аналогом і математичною моделлю цього режиму може служити коливання математичного маятника у вертикальній площині з коливальною за заданим законом точкою підвісу. Розглянуто випадки, коли момент відновлюючих сил є нелінійною функцією порядку m , а безрозмірна амплітуда збурень μ може бути не малою величиною, через те, що в цьому випадку можливе погіршення динамічних характеристик літального апарату.

Стосовно задачі про вплив приєднаного динамічного абсорбера на характер демпфування досліджуваної системи, математична модель здобуває виду:

$$\varepsilon^2 \gamma''(\tau) + \bar{v} \gamma'(\tau) + b(\tau) \gamma(\tau) + \bar{\eta} \gamma^m(\tau) = 0, \quad (1.1)$$

де $(\quad)' = \frac{d(\quad)}{d\tau}$; $b(\tau) = \frac{a}{\mu} - 2 \cos 2\tau$; $\varepsilon^2 = \frac{1}{\mu}$; $\bar{v} = \frac{v}{\mu}$; $\bar{\eta} = \frac{\eta}{\mu}$; $v = \frac{2n}{I_x \omega}$; $a = \frac{4C_{11}}{I_x \omega^2}$; $\eta = \frac{4C_{22}}{I_x \omega^2}$; $\mu = \frac{aI_0}{h} = ka$; $2\tau = \omega t$; $h_1 = h_2 = h^* = h + I_0 \cos \omega t$.

Задача з приєднаним динамічним абсорбером зводиться до рівняння у формі:

$$\varepsilon^2 \gamma''(\tau) + B_1(\tau) \gamma(\tau) + \eta \gamma^m(\tau) = F(\gamma^0, \tau), \quad (1.2)$$

де ε і η є асимптотичними параметрами.

Застосовуючи гібридний підхід на базі методу збурення і двочленної апроксимації за методом фазних інтегралів наближений аналітичний розв'язок рівняння (1.2) отримується у формі:

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) = & \exp\left[-\frac{v(\tau)}{2}\right] \times \\ & \times \left\{ \sin K(\tau) \left[s_1 + \varepsilon \int \frac{F(\gamma_0, \tau) + \eta[\gamma_0(\tau)]^m}{B_1(\tau)^{0.25}} \cos K(\tau) d\tau \right] + \right. \\ & \left. + \cos K(\tau) \left[s_2 - \varepsilon \int \frac{F(\gamma_0, \tau) + \eta[\gamma_0(\tau)]^m}{B_1(\tau)^{0.25}} \sin K(\tau) d\tau \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

де розв'язок у нульовому наближенні має вид:

$$\gamma_0^0(\tau) = \frac{\exp\left[-\frac{v(\tau)}{2}\right]}{B_1^{0.25}(\tau)} [C_1 \sin K(\tau) + C_2 \cos K(\tau),] \quad (1.4)$$

s_1, s_2 , – довільні константи, які знаходяться у відповідності до початкових умов.

Запропонований у роботі [21] розв'язок може бути ефективним у випадках, коли відстань h літального апарату від середньої лінії хвилі і

коефіцієнт демпфування є функціями часу, що є перспективним для подальших досліджень динамічної стійкості літальних апаратів поблизу збуреної поверхні.

У роботі [23] на основі дослідження динаміки маятничого осцилятора, що обертається із швидкістю, залежною від часу, дається аналіз біфуркаційних станів складної динамічної «ієрархічної» системи за умови залежності її параметрів від часу. Визначено, що розташування точки біфуркації досліджуваної системи на діаграмі рівноважних станів істотно залежить від закону зміни швидкості обертання маятничого осцилятора від часу. Власна частота коливань досліджуваного лінійного маятника сповільнюється в системі відліку, що обертається, порівняно зі своїм значенням в інерціальній системі згідно із законом, обумовленим залежностями кутової швидкості обертання і довжини осцилятора від часу. Вплив на характер демпфування динамічного процесу має залежність довжини і маси осцилятора від часу, а також величина параметра управління.

Потенційна функція досліджуваної системи є періодичною функцією від кутової координати, а її залежність від часу відповідає функціям довжини і швидкості обертання за часом.

Основне вирішуюче рівняння вимушених коливань в роботі [23] надано у вигляді:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \omega_0^2 \sin v \{ \mu \cos v [1 + \eta(t)]^{-2} - 1 \} * \frac{1}{1 + \psi(t)} + \frac{D'(t)dv}{dt} + \tilde{F}(t). \quad (1.5)$$

Розглядається стійкість вирішення рівняння (1.5) за умови відсутності зовнішньої дії. Стаціонарні стани ($\ddot{v} = const$) вимагають одночасного виконання рівностей $v = 0$ і $\dot{v} = 0$, тобто

$$\sin v \{ \mu \cos v [1 + \eta(t)]^{-2} - 1 \} * \frac{1}{1 + \psi(t)} = 0. \quad (1.6)$$

Рівнянню (1.6) задовольняюся або $\sin v = 0$, $v = \pm k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), або $\cos v = 1/(\mu[1 + \eta(t)]^2)$, $\mu[1 + \eta(t)]^2 \geq 1$. Перший розв'язок відповідає «класичним», стаціонарним станам $v = 0$ (стійкий стан), що не обертаються, і $v = \pm k\pi$ (нестійкий стан).

Розв'язок

$$v = \arccos\left\{\frac{1}{\mu[1 + \eta(t)]^2}\right\} = \arccos\{\mu[1 + \eta(t)]^2\}^{-1} \quad (1.7)$$

при кожному $\mu[1 + \eta(t)]^2 > 1$ породжує аналогічно для системи з постійними від часу параметрами дві симетричні гілки. При значеннях $\mu[1 + \eta(t)]^2 \rightarrow \infty$ маємо $\frac{1}{\mu[1 + \eta(t)]^2} \rightarrow 0$, $v \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Як впливає з приведенного аналізу, стійкий стаціонарний стан $v = 0$ стає нестійким, і нові нестійкі стаціонарні стани задаються співвідношенням (1.7) і є симетричними.

З приведенного у роботі [23] аналізу зроблено висновок, що розташування точки біфуркації досліджуваної системи на діаграмі рівноважних станів істотно залежить від закону зміни швидкості обертання маятникового осцилятора від часу. Залежність довжини і маси осцилятора від часу, а також величина параметра управління впливають на характер демпфування динамічного процесу. Такий аналіз може бути основою для подальшого дослідження резонансних явищ у складних динамічних системах з параметрами, залежними від часу.

У роботі [24] розглядається метод подвійного асимптотичного розкладу при аналізі стохастичної поведінки нелінійних нестаціонарних систем. Продемонстрована спроба застосувати деякі відомі в детерміністичних задачах механіки асимптотичні підходи для дослідження вимушених коливань систем з демпфуванням, описуваних стохастичними нелінійними диференціальними рівняннями другого порядку.

Стохастичне рівняння системи має вигляд:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2E(t) \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u + \mu u^3 = q(t) \quad (1.8)$$

де μ – деяка не випадкова постійна, $E(t)$ – змінний коефіцієнт демпфування, $q(t)$ – випадкова функція з відомими характеристиками. Рівняння (1.8) описує вимушені коливання системи з одним ступенем свободи з кубічної нелінійністю під дією випадкової сили і є ймовірним аналогом рівняння Дуффінга зі змінним коефіцієнтом демпфування [25].

У разі, якщо μ – малий параметр, систему (1.8) можна замінити рекурентною послідовністю лінійних систем. Для цього знайдено розв'язок у вигляді ряду за ступенями малого параметра [25] (зовнішня асимптотика):

$$u(t) = u_0(t) + \mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t) + \dots \quad (1.9)$$

Моментні функції вихідного процесу визначаються осередненням ряду (1.9). Так, для математичного очікування вихідного процесу

$$\langle u(t) \rangle = \langle u_0(t) \rangle + \mu \langle u_1(t) \rangle + \mu^2 \langle u_2(t) \rangle + \dots \quad (1.10)$$

в разі не випадкової функції демпфування $E(t)$ формула описана у вигляді:

$$\langle u(t) \rangle = \langle u_0(t) \rangle + \mu \int_{t_0}^t h(t, \tau) \langle u_0^3(\tau) \rangle d\tau + \dots \quad (1.11)$$

Зауважено також, що тут і надалі кутовими дужками позначена операція обчислення математичного очікування.

Моментні функції другого порядку визначаються як

$$\begin{aligned} \langle u(t_1)u(t_2) \rangle = & \langle u_0(t_1)u_0(t_2) \rangle + \mu \langle u_0(t_1)u_1(t_2) + u_0(t_2)u_1(t_1) \rangle + \\ & + \mu^2 \langle u_1(t_1)u_1(t_2) + u_0(t_1)u_2(t_2) + u_0(t_2)u_2(t_1) \rangle + \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

Після підстановки у рівність (1.12) виразів для функцій $u_1(t)$, $u_2(t)$ і т.д., знайдену функцію застосовують для обчислення кореляційної функції на виході системи Дуффінга (1.8):

$$\begin{aligned} K_u(t_1, t_2) = & K_{u_0}(t_1, t_2) - 3\mu \int_0^{t_2} h(t_2, \tau_2) K_{u_0}(t_1, \tau_2) K_{u_0}(\tau_2, \tau_2) d\tau_2 - \\ & - 3\mu \int_0^{t_1} h(t_1, \tau_1) K_{u_0}(t_2, \tau_1) K_{u_0}(\tau_1, \tau_1) d\tau_1 + \dots \end{aligned} \quad (1.13)$$

Використовуючи співвідношення (1.13), що зв'язують старші моментні функції через молодші, отримано:

$$\begin{aligned} K_u(t_1, t_2) = & K_{u_0}(t_1, t_2) - 3\mu \int_0^{t_2} \langle h(t_2, \tau_2) \rangle K_{u_0}(t_1, \tau_2) K_{u_0}(\tau_2, \tau_2) d\tau_2 - \\ & - 3\mu \int_0^{t_1} \langle h(t_1, \tau_1) \rangle K_{u_0}(t_2, \tau_1) K_{u_0}(\tau_1, \tau_1) d\tau_1 + \dots \end{aligned} \quad (1.14)$$

Автори роботи [24] розрахували моментні функції при різних станах коефіцієнта демпфування (у випадках: випадкової функції демпфування, постійного невідповідного коефіцієнта демпфування).

Детально ознайомившись з роботою [24] можна зробити висновок, що при збільшенні коефіцієнта демпфування збільшується загасання коливань кореляційної функції вихідного процесу. Тому асимптотичні підходи можуть бути використані при вирішенні багатьох інших завдань стохастичною механіки деформованого тіла, які зводяться до нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

1.2 Гібридні аналітико-чисельні методи та їх застосування в задачах нелінійної динаміки

Серед причин, що ускладнюють точні розв'язки задач, з якими стискаються фізики, інженери і фахівці з прикладної математики при моделюванні явищ і процесів, можна вказати, наприклад, нелінійні рівняння руху, змінні коефіцієнти і нелінійні граничні умови на відомих або невідомих межах складної форми. Для вирішення подібних завдань, як правило, користуються різного роду наближеннями, комбінуючи чисельні і аналітичні методи дослідження. Серед наближених аналітичних методів досить потужними є методи збурень (асимптотичних розвинень) за «великими», чи «малими», значеннями параметру або координати. Аналітичні розв'язки дозволяють проаналізувати поведінку функцій в особливих точках, спрогнозувати подальшу поведінку конструкції в умовах зовнішнього навантаження.

Значення асимптотичних методів збільшилося в останні десятиріччя у зв'язку з розвитком обчислювальних машин. Часто висловлюється думка, що завдяки розвитку обчислювальної техніки та методів обчислювальної математики зменшується значення аналітичних методів. Однак, ефективні обчислювальні методи розв'язку тієї чи іншої задачі, економні з точки зору витрати машинного часу, завжди повинні використовувати інформацію про аналітичну природу задачі. Розглянемо, наприклад, задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. Якщо відомо заздалегідь, що розв'язок представляє собою функцію, що повільно змінюється, то будь-який численний метод розв'язку задачі Коші, наприклад метод Рунге-Кутта, виявляється задовільним. Припустимо, що розв'язок – функція, що швидко коливається. Для її знаходження формально може бути використано будь-який чисельний метод. Проте крок різницевої схеми для забезпечення заданої точності повинен бути обраний доволі малим, тобто для забезпечення заданої точності

необхідно розбити досліджуваний інтервал незалежної змінної на велику кількість кроків. В той же час, велика кількість кроків у свою чергу призводить до накопичення помилки, отже знижує точність кінцевого результату. Крім того, дроблення кроку значно збільшує машинний час, що витрачається на розв'язок задачі. Вихід з цього положення полягає у використанні асимптотичних методів. Вони дозволяють провести попередню обробку рівнянь, відкинути деякі «малі доданки» і ввести нові змінні. Такі змінні будуть функціями, що повільно змінюються і можуть бути точно та швидко обчислені на машині.

Теорія малого параметру Ляпунова-Пуанкре лежить в основі цілого ряду методів в астрономії, теорії коливань, тощо. Її значення полягає не лише в тому, що вона дозволяє відшукати періодичні розв'язки квазілінійних рівнянь. Для цілого ряду задач, що вирішуються в рамках цієї теорії, наразі наявні більш ефективні методи, придатні для більш широкого класу рівнянь.

На початку 20-х років цього століття голландський інженер Ван-дер-Поль відкрив новий підхід до вивчення коливальних рухів та поклав початок новій та важливій області в теорії коливань. Її основний зміст зводиться до побудови такої заміни змінних, що дозволяє відокремити «швидкі» змінні від «повільних». Крилов Н.М. та Боголюбов Н.Н. розробили асимптотичний метод, що в якості першого доданку давав розв'язок, який можна було отримати методом Ван-дер-Поля. Ці роботи поклали початок новому напрямку в теорії асимптотичних методів. Воно глибоко проникло в різні області теоретичної фізики, в прикладну астрономію, динаміку космічних апаратів, тощо. Останнім часом став очевидним його зв'язок з теорією адіабатичних інваріантів, що розвивається самостійно.

У останні роки виникла нова галузь в асимптотичній теорії розв'язання лінійних і нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами - гібридні асимптотичні методи.

Як відомо, асимптотичні методи мають ряд недоліків, головним з яких є обмежена область використання отриманих рішень. При збільшенні малого

параметра похибка цих методів різко збільшується. Виникає необхідність залучення в рішення все більшої кількості членів розкладання, що в більшості випадків істотно збільшує складність обчислень. Саме тому виникає необхідність «поліпшення» існуючих асимптотичних рішень без залучення великої кількості членів розкладання.

Оскільки не всі звичайні диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами мають аналітичні рішення, для вирішення конкретного завдання використовують чисельні методи, які, однак, не дають можливості провести якісний аналіз отриманих рішень.

Для розширення області застосування асимптотичного підходу по параметру в ряді робіт [13, 14] запропонований гібридний метод ВКБ-Гальоркіна для певного виду сингулярних диференціальних рівнянь.

Для розширення області застосування асимптотичного підходу в ряді робіт J.F. Geer і С.М. Andersen [15, 16] запропонований гібридний метод, що поєднує метод збурень з принципом ортогоналізації Гальоркіна, для задач сингулярного типу - гібридний ВКБ-Гальоркін метод [13, 17, 18], а також метод, що поєднує варіаційні методи з методом фазових інтегралів [19]. Рішення лінійних задач математичної фізики, що зводяться до рівнянь зі змінними коефіцієнтами та їх систем, включає, як правило, два етапи. На першому етапі будується аналітичне рішення крайової задачі за методом збурень в разі рівняння регулярного типу, або за методом фазових інтегралів (метод ВКБ) для рівнянь сингулярного типу. На другому етапі невідомі параметри «уточнюючого» гібридного розв'язку визначаються використанням критерію ортогоналізації Гальоркіна, або дослідженням на екстремум функції кінцевого числа змінних, в яку перетворюється вихідний функціонал, який реалізує рівняння крайової задачі, при підстановці в нього розв'язку першого етапу.

Можливо поєднання зазначених методів для вирішення, зокрема, нелінійних задач [20]. При цьому на першому етапі будується асимптотичний розв'язок з використанням методу збурень по параметру нелінійності

досліджуваного завдання, на другому - застосовуються зазначені вище гібридні підходи.

У [22] розглянуто тришарову п'єзоелектричну ортотропну пластину, що знаходиться в електричному полі під дією динамічного зовнішнього навантаження, з урахуванням змінного в часі коефіцієнта демпфірування. Розв'язок поставленої задачі засновано на використанні гібридного ВКБ-Гальоркіна. Отриманий аналітичний розв'язок може бути використано в разі коливань одношарової п'єзоелектричної пластини, ефект пов'язаності електричного та механічного полів якої знаходить відображення в зміні жорсткісних характеристик, а також у випадку коливань біморфної п'єзоелектричної пластини. Із останніх публікацій цього напрямку слід відмітити дисертаційну роботу [21], в якій гібридні асимптотичні підходи обговорюються до вирішення проблеми нелінійної динаміки обертового маятника змінної маси і довжини.

У роботі [28] проаналізовано детерміновану та стохастичну складові реалізацій поздовжніх коливань стрижня з тріщиною, які знаходять за допомогою числових розв'язків нелінійного диференціального рівняння зі стохастичною вимушувальною силою. Продемонстровано, що коефіцієнт демпфування суттєво впливає на структуру вимушених коливань, що призводить до зміни діагностичних параметрів. Наведено результати аналізу залежностей характеристик коливань від частот несучої стохастичної вимушувальної сили, а також від швидкості замикання кореляційних зв'язків її огинаючої.

1.3 Висновки до розділу 1

Як відомо, асимптотичні методи мають ряд недоліків, головним з яких є обмежена область використання отриманих рішень. При збільшенні малого параметра похибка цих методів різко збільшується. Виникає необхідність

залучення в розв'язок все більшої кількості членів розкладання, що в більшості випадків істотно збільшує складність обчислень. Саме тому виникає необхідність «поліпшення» існуючих асимптотичних розв'язків без залучення великої кількості членів розкладання.

Як свідчить з наведених чисельних результатів у роботі [29], для певного класу неоднорідних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами запропоновані гібридний ВКБ-Гальоркін і його розширена модифікація дають досить надійні результати при відносній простоті аналітичних залежностей. Таким чином, розширений ВКБ-Гальоркін метод у ряді випадків є ефективним засобом побудови наближених аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, зокрема в задачах про теплопровідність систем зі змінними геометричними параметрами на прикладі тонкого стрижня кінчної форми [30].

Наведений огляд сучасного стану досліджуваної у роботі проблеми свідчить про те, що традиційні задачі нелінійних коливань конструкцій аерокосмічної техніки не можна вважати остаточно дослідженими. У розглянутих вище роботах, що пов'язані з аерокосмічними системами, не повною мірою освітлене питання асимптотичного аналізу задач. Для розвитку цього питання необхідне розширення застосування сучасних гібридних методів для дослідження математичних моделей нелінійної динаміки систем із змінними у часі параметрами.

У задачах механіки пластин та оболонок ці проблеми пов'язані з дослідженням конструкцій зі зламами серединної поверхні, стрибкоподібною зміною жорсткісних характеристик, а також зовнішнім навантаженням, що являє собою функцію координат та часу. Як відомо, моделі керованих систем практично завжди являються ідеалізованими, тому розвиток теорії оптимального керування у випадках, коли диференціальні обмеження містять малі параметри, представляється важливим з інженерної точки зору. В цьому сенсі подальший аналітико-чисельний аналіз нелінійної динаміки обертового маятника із змінними у часі параметрами є актуальним.

ОСНОВНІ ЗАЛЕЖНОСТІ ЗАДАЧІ ПРО ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ОБЕРТОВОГО МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА З ДОВЖИНОЮ І МАСОЮ, ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ЧАСУ

У даному розділі обговорюються основні залежності для дослідження задачі про вимушені коливання обертового математичного маятника з довжиною і масою, залежними від часу при заданому характері зовнішнього навантаження. На основі гібридного асимптотичного підходу надаються чисельні розрахунки в задачі вирішення нелінійної динаміки маятника із заданими параметрами.

Розрахункова схема та основні залежності

Розглядається обертаючий математичний маятник із змінними параметрами під дією зовнішнього навантаження, тобто системи (опис надається у [21]), яка складається з коливального шару, маса якого є функцією часу, що «вкладена» у внутрішню поверхню твердого тонкостінного двомірного тору радіусу $L(t)$: шар може без тертя ковзати у внутрішній поверхні тору, а сам тор може обертатися, як показано на рисунку 2.1 з кутовою швидкістю Ω , в загальному випадку залежною від часу.

У випадку, якщо тороїдальна оболонка не обертається, дана система з маятником із не залежними від часу маси і довжини [22] має два стаціонарних стану: один стійкий ($\nu = 0$), другий не стійкий ($\nu = \pm\pi$). Тому необхідно з'ясувати вплив характеру зміни параметрів маятника у часі та введення нового степеня свободи, а саме обертання тороїдальної оболонки із заданою швидкістю, на динамічну поведінку системи. Особлива увага у даному дослідженні привертається до визначення критичного параметру кутової швидкості від характеру зміни характеристик системи від часу і яким чином

змінні параметри обертового маятника впливають на біфуркаційну діаграму досліджуваної системи.

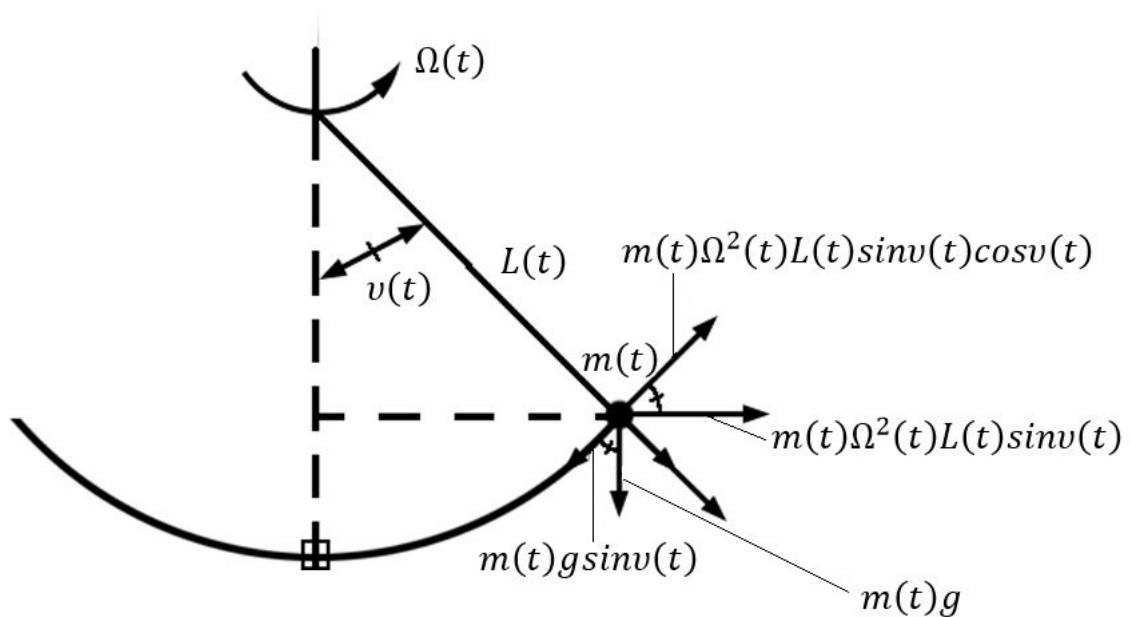


Рисунок 2.1 – Обертаючий нелінійний маятниковий осцилятор зі змінними за часом параметрами[22]

В неінерціальній системі координат на масу діють тангенціальна складова ваги і тангенціальна складова центробіжної сили.

Чисельний розв'язок задачі динаміки математичного маятника змінної маси та довжини

Розрахункова схема динаміки математичного маятника маси $m(t)$ і довжини $L(t)$ представлена на рисунку 2.1.

Основне розрахункове диференціальне рівняння задачі представлено у формі:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial m(t)\omega L(t)}{\partial t} \right] = m(t) \frac{\partial}{\partial t} \left[L(t) \frac{\partial V}{\partial t} \right]. \quad (2.1)$$

При цьому початкові умови вважаються заданими.

Рівняння (2.1) є диференціальним рівнянням зі змінними в часі коефіцієнтами, точний аналітичний розв'язок якого можливо отримати лише у виняткових випадках зміни коефіцієнтів. Тому, в загальному випадку використовуються прямі чисельні методи інтегрування, або наближені аналітичні підходи на базі асимптотичних методів.

У останні роки стали інтенсивно розвиватися гібридні асимптотичні підходи, зокрема ВКБ-Гальоркіна, або варіаційний-Гальоркін методи, які в поєднанні з методом збурень (у разі наявності нелінійних складових у вихідному рівнянні) дозволяють ефективно розв'язувати задачі Коші для диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. При цьому істотно розширюється інтервал величини скалярного параметра асимптотичного розкладу шуканого розв'язку.

У результаті простих перетворень вихідне рівняння (2.1) з урахуванням співвідношень

$$\begin{aligned}\frac{\partial(m\omega L)}{\partial t} &= mL \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \\ \omega &= \frac{\partial V}{\partial t}, \\ m(t)L \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -m(t)g \sin v,\end{aligned}\tag{2.2}$$

в припущенні слабкої швидкості зміни маси $m''(t)$, може бути представлено у вигляді:

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + \varphi(t) \frac{dV}{dt} + \frac{g}{L_0} \frac{1}{\varphi(t)} \sin V = 0,\tag{2.3}$$

де

$$L(t) = L_0 \varphi(t),$$

$$\varphi(t) = 2 \left(\frac{L'(t)}{L(t)} + \frac{m'(t)}{m(t)} \right) \quad (2.4)$$

Увівши заміну $\omega_0^2 = \frac{g}{L_0}$, і розклавши $\sin V$ в ряд Тейлора з утриманням двох членів ряду, початкове рівняння приводиться до вигляду:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 V}{dt^2} + \varepsilon^2 \varphi(t) \frac{dV}{dt} + \phi_0(t)V - \lambda \phi_0(t)V^3 = 0, \quad (2.5)$$

де

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{\omega_0^2},$$

$$\phi_0(t) = \frac{1}{\varphi(t)}, \quad \lambda = 1/6. \quad (2.6)$$

Відповідно до методу збурень розв'язок рівняння (2.5) шукається в формі розкладання функції $V(t)$ по малому параметру λ і порівняння коефіцієнтів при однакових λ приводить до системи рівнянь для відшукування складових розв'язку вихідного рівняння:

$$\lambda^0: \varepsilon^2 V_0'' + \varepsilon^2 \varphi(t) V_0' + \phi_0(t) V_0 = 0, \quad (2.7)$$

$$\lambda^1: \varepsilon^2 V_1'' + \varepsilon^2 \varphi(t) V_1' + \phi_0(t) V_1 = \varphi_0(t) V_0^3. \quad (2.8)$$

З метою усунення першої похідної розв'язок рівняння (2.7) знаходиться у вигляді

$$V_0(t) = U_0(t) \exp \int \left(-\frac{\varphi(t)}{2} dt \right), \quad (2.9)$$

$$V_0'(t) = \left[U_0'(t) - \frac{\varphi(t)}{2} U_0(t) \right] \exp \int \left(-\frac{\varphi(t)}{2} dt \right), \quad (2.10)$$

$$V_0''(t) = \left[U_0''(t) - \frac{\varphi(t)}{2} U_0(t) - \varphi(t) U_0'(t) - \frac{\varphi^2(t)}{4} U_0 \right] \times \\ \times \exp \int \left(-\frac{\varphi(t)}{2} dt \right). \quad (2.11)$$

Підставимо (2.9) – (2.11) у рівняння (2.7)

$$\varepsilon^2 U_0''(t) + \left[\varphi_0(t) - \varepsilon^2 \frac{\varphi(t)}{2} - \frac{3}{4} \varepsilon^2 \varphi^2(t) \right] U_0(t) = 0. \quad (2.12)$$

Розв'язком рівняння (2.12) у двох ВКБ-наближеннях за другим етапом гібридного асимптотичного підходу буде

$$U_0(t) = \frac{1}{Q(t)^{0.25}} [c_1 \sin K_0(t) + c_2 \cos K_0(t)], \quad (2.13)$$

де $K_0(t) = \int \varepsilon^{-1} Q(t)^{1/2} dt$, $Q(t) = \varphi_0(t) - \varepsilon^2 \frac{\varphi(t)}{2} - \frac{3}{4} \varepsilon^2 \varphi^2(t)$.

З урахуванням (2.13) розв'язок (2.9) має форму:

$$V_0(t) = \exp \int \left(-\frac{\varphi(t)}{2} dt \right) \left\{ \frac{1}{Q(t)^{0.25}} [c_1 \sin K_0(t) + c_2 \cos K_0(t)] \right\}. \quad (2.14)$$

Для отримання довільних сталих початкові умови задаються у вигляді:

$$V_0(0) = 1, \dots V_0'(0) = 0. \quad (2.15)$$

Що стосується нелінійної задачі, то рівняння (2.8) розв'язується відповідно до замін

$$a_1(t) = \varepsilon^2 \phi(t), \quad a_2 = \frac{1}{\varphi(t)}, \quad f(t) = \frac{V_0^3}{\varphi(t)} \quad (2.16)$$

рівнянням

$$\varepsilon^2 V_1''(t) + a_1 V_1'(t) + a_2 V_1(t) = f(t). \quad (2.17)$$

При цьому розв'язується спочатку однорідне рівняння

$$\varepsilon^2 V_1''(t) + a_1 V_1'(t) + a_2 V_1(t) = 0, \quad (2.18)$$

$$V_1''(t) + \bar{a}_1 V_1'(t) + \bar{a}_2 V_1(t) = 0, \quad (2.19)$$

$$V_1(t) = U_1(t) \exp\left(\int -\frac{\bar{a}_1(t)}{2} dt\right), \quad (2.20)$$

$$V_1'(t) = \left[U_1'(t) - U_1(t) \frac{\bar{a}_1(t)}{2} \right] \exp\left(\int -\frac{\bar{a}_1(t)}{2} dt\right), \quad (2.21)$$

$$V_1''(t) = \left[U_1''(t) - U_1'(t) \bar{a}_1(t) - U_1(t) \frac{\bar{a}_1(t)}{2} + U_1(t) \frac{\bar{a}_1^2(t)}{4} \right] \times \\ \times \exp\left(\int -\frac{\bar{a}_1(t)}{2} dt\right) \quad (2.22)$$

де $\bar{a}_i(t) = \frac{a_i(t)}{\varepsilon^2}$.

Підставляючи (2.20) – (2.22) в рівняння (2.18), отримаємо:

$$U_1''(t) + \left[\bar{a}_2(t) - \frac{\bar{a}_1(t)}{2} - \frac{3\bar{a}_1^2(t)}{4} \right] U_1(t) = 0. \quad (2.23)$$

Розв'язком рівняння (2.23) буде

$$U_1(t) = c_1(t) \sin K_1(t) + c_2(t) \cos K_1(t), \quad (2.24)$$

де

$$K_1(t) = \int \varepsilon^{-1} Q_1^{1/2}(t) dt, \quad (2.25)$$

$$Q_1(t) = \bar{a}_2(t) - \frac{\bar{a}_1(t)}{2} - \frac{3\bar{a}_1^2(t)}{4},$$

$$c_1(t) = \int \frac{f(t) \cos K_1(t)}{K_1'(t)} dt + d_1, \quad (2.26)$$

$$c_2(t) = - \int \frac{f(t) \sin K_1(t)}{K_1'(t)} dt + d_2. \quad (2.27)$$

Отже, розв'язок $V(t)$ нелінійної задачі має вигляд:

$$\begin{aligned} V(t) &= V_0 + \lambda V_1. \\ V(t) &= \left[\exp \int \left(-\frac{\varphi(t)}{2} dt \right) \right] \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{Q(t)^{0.25}} \left[\sin K_1(t) \left(s_1 + \lambda \int \frac{f(t) \cos K_1(t)}{K_1'(t)} dt \right) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \cos K_1(t) \left(s_2 - \int \frac{f(t) \sin K_1(t)}{K_1'(t)} dt \right) \right] \right\}, \quad (2.28) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 + \lambda d_1, \\ s_2 &= c_2 + \lambda d_2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

З урахуванням обертання маятника та наявності змушуючої зовнішньої сили розв'язок нелінійної задачі управління математичного маятника змінної довжини і маси за часом буде мати вигляд:

$$\begin{aligned}
 V(t) = & \left[\exp \int \left(-\frac{\varphi(t)}{2} dt \right) \right] \times \\
 & \times \left\{ \frac{1}{Q(t)^{0.25}} \left[\sin K_1(t) \left(s_1 + \int \frac{\tilde{F}(t) \cos K_1(t)}{K_1'(t)} dt + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \lambda \int \frac{N(t) \cos K_1(t)}{K_1'(t)} dt \right) + \cos K_1(t) \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \left(s_2 - \int \frac{\tilde{F}(t) \sin K_1(t)}{K_1'(t)} dt - \lambda \int \frac{N(t) \cos K_1(t)}{K_1'(t)} dt \right) \right] \right\}. \quad (2.30)
 \end{aligned}$$

де

$$a_2 = \mu \left[2\beta_0^2 \varphi(t) - \frac{1}{\psi(t)} \right], \quad N(t) = \mu \left[2\beta_0^2 \varphi(t) - \frac{1}{\psi(t)} \right] V_0^3(t). \quad (2.31)$$

Для випадку власних лінійних коливань обертового маятника із сталою кутовою швидкістю розв'язок задачі у другому ВКБ-наближенні із заданими початковими умовами (2.15) і вказаними параметрами має вигляд:

$$v_0(t) = \left(\frac{100}{\exp[t]} - 2 \right)^{-0.25} [0.0375 \sin K_1(t) + \cos K_1(t)], \quad (2.32)$$

де

$$\begin{aligned}
 K_1(t) &= \int \varepsilon^{-1} Q_1^{1/2}(t) dt = \\
 &= \int 10 \left(\frac{100}{\exp[t]} - 2 \right)^{0.5} dt = 99t - 25.2t^2 + 4.12t^3 - 0.527t^4, \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

$$0 \leq t \leq 1,$$

$$\varphi(t) = \cos 10t, \quad (2.34)$$

$$N(t) = \sin(2\omega t), \quad (2.35)$$

$$F(t) = 1 + \sin 2t. \quad (2.36)$$

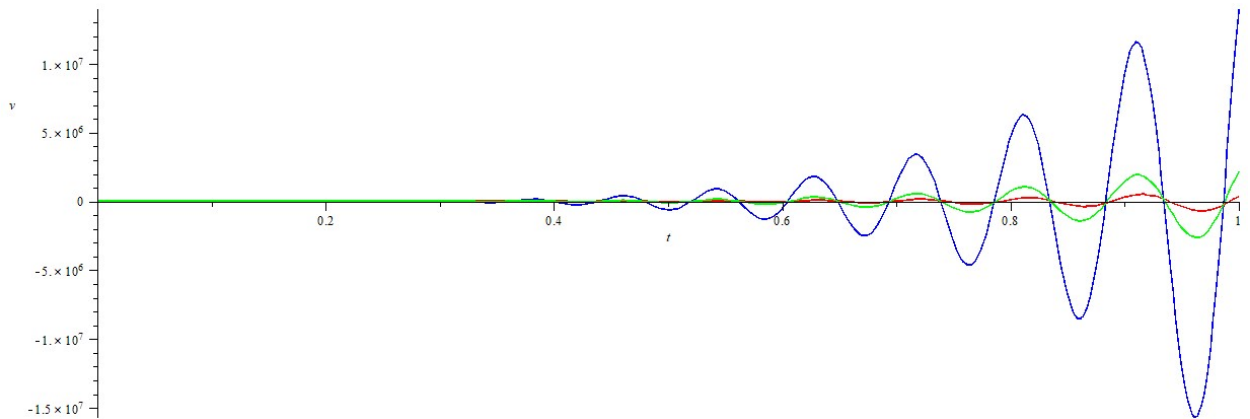


Рисунок 2.2 – Порівняння чисельних розв'язків лінійної задачі

вимушених коливань обертового маятника

при $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 50$, $\omega_3 = 100$

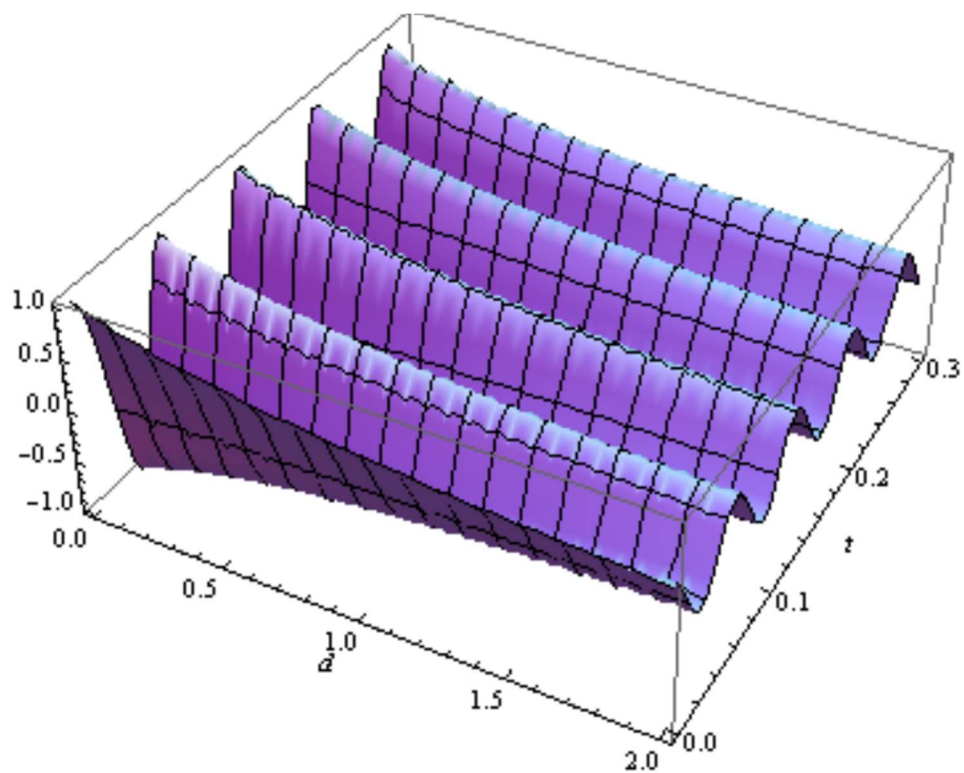


Рисунок 2.3 – Вплив параметру демпфування на динамічну поведінку

маятникового осцилятора

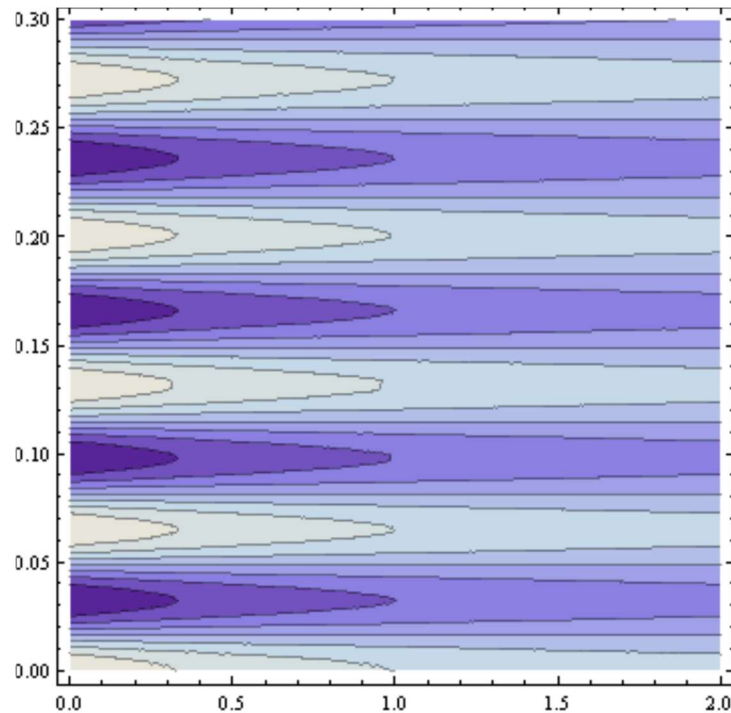


Рисунок 2.4 – Контурне зображення впливу параметра демпфування на динамічну поведінку маятнікового осцилятора зі змінними за часом параметрами

Даний розв'язок може бути основою для аналізу резонансних (зокрема параметричних) коливань і оцінки зв'язку між амплітудою і фазою обертальних коливань нелінійного маятника. Як показав аналіз чисельних результатів, при певних (достатньо не великих) величинах скалярних параметрів асимптотичного розкладу шукане аналітичне рішення не суттєво залежить від закону зміни довжини маятника в часі і величини параметра сингулярності ε вихідного диференціального рівняння.

Основне рівняння проблеми динаміки обертового маятника із змінними коефіцієнтами та нелінійною першою похідною.

Запишемо рівняння маятника для кінцевих коливань від стану рівноваги, як це зображено на рисунку 2.1. Діюча сила є проекція на дотичну ваги коливальної маси дорівнює $m(t)g \sin v$, частота коливань – $\omega = \frac{dv}{dt}$, $m(t) \frac{dv}{dt}$ – інерціальна складова. Діючі сили дорівнюють проекції на дотичну ваги коливальної маси – $m(t)g \sin v$ та від обертання $m(t)\Omega^2 \sin v \cos v$.

Основне диференціальне рівняння вимушених коливань після перетворень може бути представлено у вигляді:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \varepsilon D'_0(t) \left(\frac{dv}{dt} \right)^n = \sin v [\Omega^2(t) \cos v - G(t)] + \tilde{F}(t). \quad (2.38)$$

де

$$\begin{aligned} D'_0(t) &= \frac{m'(t)}{m(t)} + \frac{L'(t)}{L(t)}, \\ Q(t) &= \Omega^2(t), \\ \tilde{F}(t) &= \frac{F(t)}{m(t)L(t)}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$G(t) = \frac{g}{L(t)} = \frac{g}{L_0[1 + \psi(t)]} = \frac{\omega_0^2}{[1 + \psi(t)]}.$$

Параметри системи задано у формі функцій від часу:

$$\begin{aligned} m(t) &= m_0[1 + \varphi(t)], \\ L(t) &= L_0[1 + \psi(t)], \\ \Omega(t) &= \Omega_0[1 + \eta(t)]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Основне рівняння (2.38) представляється у формі

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 v}{dt^2} + \varepsilon D'_0(t) \left(\frac{dv}{dt} \right)^n = \\ & = \omega_0^2 \left\{ \frac{\Omega_0^2}{2\omega_0^2} [1 + \eta(t)]^2 \sin 2v - \frac{\sin v}{[1 + \psi(t)]} \right\} + \tilde{F}(t). \end{aligned} \quad (2.41)$$

У нових позначеннях рівняння (2.41) має вигляд

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \varepsilon D'_0(t) \left(\frac{dv}{dt} \right)^n = \mu \left[\beta_0^2 \phi(t) \sin 2v - \frac{\sin v}{1 + \psi(t)} \right] + \tilde{F}(t), \quad (2.42)$$

де $\mu = \frac{g}{L_0} = \omega_0^2$ – параметр власної частоти коливань лінеаризованої системи, тобто частоти, з якою коливається лінійний гармонічний маятник при малих відхиленнях від рівноваги; $\phi(t) = [1 + \eta(t)]^2$ – функція зміни швидкості обертання маятника від часу; $\beta_0^2 = \frac{\Omega_0^2}{2\omega_0^2}$ – відносний параметр частот коливань;

$$D'_0(t) = \frac{\varphi'(t)}{[1 + \varphi(t)]} + \frac{\psi'(t)}{[1 + \psi(t)]} \quad (2.43)$$

– функція зміни маси та довжини маятника за часом.

Отримали рівняння (2.42), що є нелінійним неоднорідним диференціальним рівнянням із змінними коефіцієнтами, яке в загальному вигляді не допускає точного аналітичного розв'язку. У цих випадках застосовуються, як правило, прямі чисельні методи інтегрування, або наближені асимптотичні підходи.

НАБЛИЖЕНИЙ АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ПРО

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ОБЕРТОВОГО МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА ІЗ НЕЛІНІЙНОЮ ФУНКЦІЄЮ ДЕМПФУВАННЯ

Даний розділ присвячено ефективному асимптотичному підходу вирішення актуальної проблеми динаміки обертового математичного осцилятора зі змінними у часі параметрами із суттєвою нелінійністю.

Як свідчить огляд, наведений у розділі 1, значна кількість нелінійних задач динаміки систем із змінними в часі параметрами можуть бути отримані наближеними аналітичними розв'язками на базі гібридних асимптотичних підходів [13, 17, 20, 26] і служать еталоном для подальшого ефективного впровадження чисельних методів.

Зауважимо також, що, як правило, здобуті наближені аналітичні розв'язки нелінійних задач обмежуються наявністю кубічної нелінійності, яка приводить до можливості асимптотичного аналізу рівнянь типу Дуффінга [27]. Не визначеним залишається вплив на наближений аналітичний розв'язок нелінійних складових вищого порядку. Цей розділ також присвячено побудові наближеного аналітичного розв'язку й аналізу впливу нелінійної складової вищого порядку на базі гібридного асимптотичного підходу.

Формулювання задачі. Процедура розв'язку за методом фазних інтегралів (ВКБ-наближення). Застосування гібридного асимптотичного методу

Застосований гібридний асимптотичний метод проілюструємо на розв'язку наступного нелінійного неоднорідного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами (2.42). Представимо рівняння (2.42) у формі:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \varepsilon D'_0(t) \left(\frac{dv}{dt} \right)^n = \omega_0^2 \sin v \left[\mu_0 \phi^2(t) \cos v - \frac{1}{l(t)} \right] + \tilde{F}(t), \quad ((3.1))$$

де

$$\mu(t) = \mu_0 \phi^2(t),$$

$$D'_0(t) = \frac{m'(t)}{m(t)} + \frac{L'(t)}{L(t)} = \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} + \frac{l'(t)}{l(t)}.$$

Лінеаризація рівняння (3.1) без зовнішнього навантаження на досліджувану систему приводить до рівняння:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \varepsilon D'_0(t) \left(\frac{dv}{dt} \right)^n + \omega_0^2 \left[\mu_0 \phi^2(t) - \frac{1}{l(t)} \right] v = 0. \quad (3.2)$$

Нехай

$$\omega_0^2 \left[\mu_0 \phi^2(t) - \frac{1}{l(t)} \right] = \omega_0^2 G(t),$$

тоді рівняння (3.2) прийме вигляд

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \varepsilon D'_0(t) \left(\frac{dv}{dt} \right)^n + \omega_0^2 G(t) v = 0. \quad (3.3)$$

За допомогою методу збурень, отримаємо ряд у вигляді:

$$v(t) = v_0(t) + \varepsilon v_1(t) + \varepsilon^2 v_2(t) + \dots + \varepsilon^p v_p(t) + \dots \quad (3.4)$$

Скориставшись двома першими членами ряду (3.4) будемо мати загальний розв'язок

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \varepsilon D'_0(t) \left(\frac{dv}{dt} \right)^n + \omega_0^2 G(t) [v_0(t) + \varepsilon v_1(t)] = 0. \quad (3.5)$$

Із урахуванням (3.4), прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметру ε у рівнянні (3.2), отримаємо систему зв'язаних неоднорідних сингулярних лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами:

$$\varepsilon^0: v_0''(t) + \omega_0^2 G(t) v_0(t) = 0, \quad (3.6)$$

$$\varepsilon^1: v_1''(t) + D'_0(t) \left(\frac{d[v_0 + \varepsilon v_1]}{dt} \right)^n + G(t) \omega_0^2 v_1(t) = 0. \quad (3.7)$$

Однорідне диференціальне рівняння другого порядку при першому наближенні ε^0 (3.6) перепишемо у формі:

$$\lambda^2 v_0''(t) + G(t) v_0(t) = 0, \quad (3.8)$$

де було використано заміну $\omega_0^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Шукаючи розв'язок однорідного диференціального рівняння (3.6) по відношенню до $v_0(t)$ вводиться змінна:

$$v_0(t) = \exp \int \varphi(t) d\xi, \quad (3.9)$$

Функцію $\varphi(t)$ розкладемо за оберненими степенями λ .

$$\varphi(t) = \lambda^{-1} \varphi_0(t) + \varphi_1(t) + \lambda \varphi_2(t) + \dots \quad (3.10)$$

Розглядаючи лише перший член розвинення у рівнянні (3.10), знайдемо першу та другу похідні $v_0(t)$:

$$\begin{aligned}
 v_0'(t) &= \varphi \exp \int \varphi(t) d\xi, \\
 v_0''(t) &= (\varphi^2 + \varphi') \exp \int \varphi(t) d\xi,
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Підставивши (3.9) та (3.11) у рівняння (3.8) буде знайдено розв'язок для функції φ_0 :

$$\begin{aligned}
 \varphi_0^2 + G(t) &= 0, \\
 \varphi_0^2 &= -G(t).
 \end{aligned}$$

Таким чином, маємо розв'язок функції φ_0 :

$$\varphi_{0,1,2} = \pm iG(t).$$

Отже, розв'язок рівняння (3.8) за методом ВКБ має вигляд:

$$v_0(t) = C_1 \sin K(t) + C_2 \cos K(t), \tag{3.12}$$

де $K = \int \lambda^{-1} G(t)^{\frac{1}{2}} dt$.

В результаті, розв'язок (3.12) можна представити у вигляді:

$$v_0(t) = C_1 \sin \left(\int \lambda^{-1} G(t)^{\frac{1}{2}} dt \right) + C_2 \cos \left(\int \lambda^{-1} G(t)^{\frac{1}{2}} dt \right), \tag{3.13}$$

На другому наближенні, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε^1 отримуємо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку:

$$v_1''(t) + D_0'(t) \left(\frac{d[v_0 + \varepsilon v_1]}{dt} \right)^n + G(t) \omega_0^2 v_1(t) = 0. \quad (3.14)$$

$$v_1''(t) + G(t) \omega_0^2 v_1(t) = -D_0'(t) \left(\frac{d[v_0 + \varepsilon v_1]}{dt} \right)^n. \quad (3.15)$$

Прирівняємо ліву частину рівняння (3.7) до нуля:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \varepsilon D_0'(t) \left(\frac{dv}{dt} \right)^n = 0. \quad (3.16)$$

Для розв'язку рівняння (3.16) скористаємося методом подвійного асимптотичного розкладання, у відповідності з яким зовнішнє розкладання будується за методом збурень, маючи параметр ε :

$$v(t) = v_0(t) + \varepsilon v_1(t) + \varepsilon^2 v_2(t) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i v_i(t). \quad (3.17)$$

Знайдемо першу та другу похідну v :

$$\begin{cases} v'(t) = v_0'(t) + \varepsilon v_1'(t), \\ v''(t) = v_0''(t) + \varepsilon v_1''(t). \end{cases} \quad (3.18)$$

Обмежимося двома членами розкладу, при підстановці (3.18) в (3.16):

$$v_0''(t) + \varepsilon v_1''(t) + \varepsilon D_0'(t) [v_0'(t) + \varepsilon v_1'(t)]^n = 0. \quad (3.19)$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε отримаємо рекурентну систему лінійних диференціальних рівнянь для визначення функції $v_i(t)$.

Згрупуємо коефіцієнти при ε^0 :

$$v_0''(t) = 0. \quad (3.20)$$

$$v_0'(t) = C_1. \quad (3.21)$$

$$v_0(t) = C_1 t + C_2. \quad (3.22)$$

Аналогічно згрупуємо коефіцієнти при ε^1 :

$$v_1''(t) + D_0'(t)[v_0'(t)] = 0. \quad (3.23)$$

$$v_1''(t) = -D_0'(t)[C_1 t + C_2]^n \approx -A_0(t). \quad (3.24)$$

$$v_1'(t) = - \left[\int A_0(t) dt \right]. \quad (3.25)$$

$$v_1(t) = - \int \left[\int A_0(t) dt + \int D_1 dt \right] = - \iint A_0(t) dt + D_1 t. \quad (3.26)$$

Таким чином маємо:

$$v(t) = v_0(t) + \varepsilon v_1(t) = C_1 t + C_2 + \varepsilon \left[- \iint A_0(t) dt + D_1 t \right],$$

$$v(t) = C_1 t + C_2 - \varepsilon \iint A_0(t) dt. \quad (3.27)$$

$$A_0(t) = D_0'(t)[C_1 t + C_2]^n. \quad (3.28)$$

$$\begin{cases} v(0) = v^0 = 1, \\ v'(0) = 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

З рівняння (3.22):

$$\begin{aligned} v_0(t) &= 1, \\ C_2 &= 1, C_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Таким чином, можемо визначити A_0 :

$$A_0 = D'_0(t), \quad (3.31)$$

$$D_0(t) = \alpha t^2, \quad (3.32)$$

$$D'_0(t) = 2\alpha t. \quad (3.33)$$

$$A_0 = 2\alpha t, \quad (3.34)$$

де $\alpha = \text{const}$. Отже

$$\iint A_0(t) dt = \int \alpha t^2 dt = \frac{\alpha t^3}{3}. \quad (3.35)$$

$$v(t) = \bar{C}_1 t + 1 - \varepsilon \alpha \frac{t^3}{3}. \quad (3.36)$$

$$v'(0) = 0.$$

$$\bar{C}_1 - \varepsilon \alpha \cdot 0 = 0, \bar{C}_1 = 0. \quad (3.37)$$

Підставивши (3.35) – (3.37) в (3.27) отримаємо:

$$v(t) = -\varepsilon \frac{\alpha}{3} t^3. \quad (3.38)$$

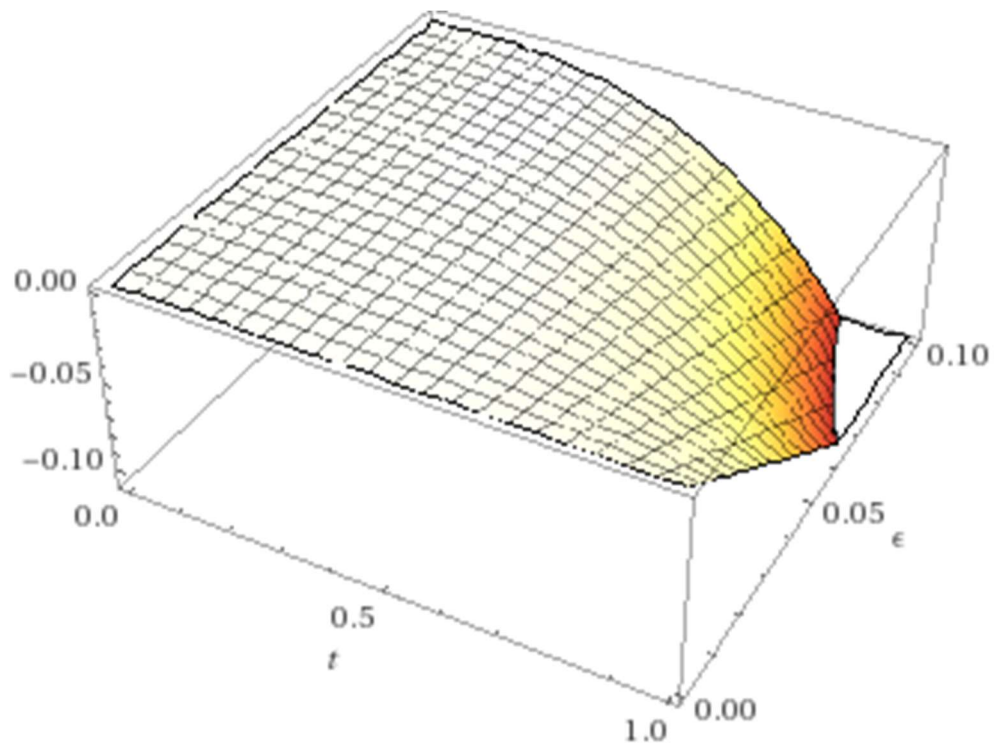


Рисунок 3.1 – Розв’язок нелінійної неоднорідної задачі залежно від значень параметру ϵ

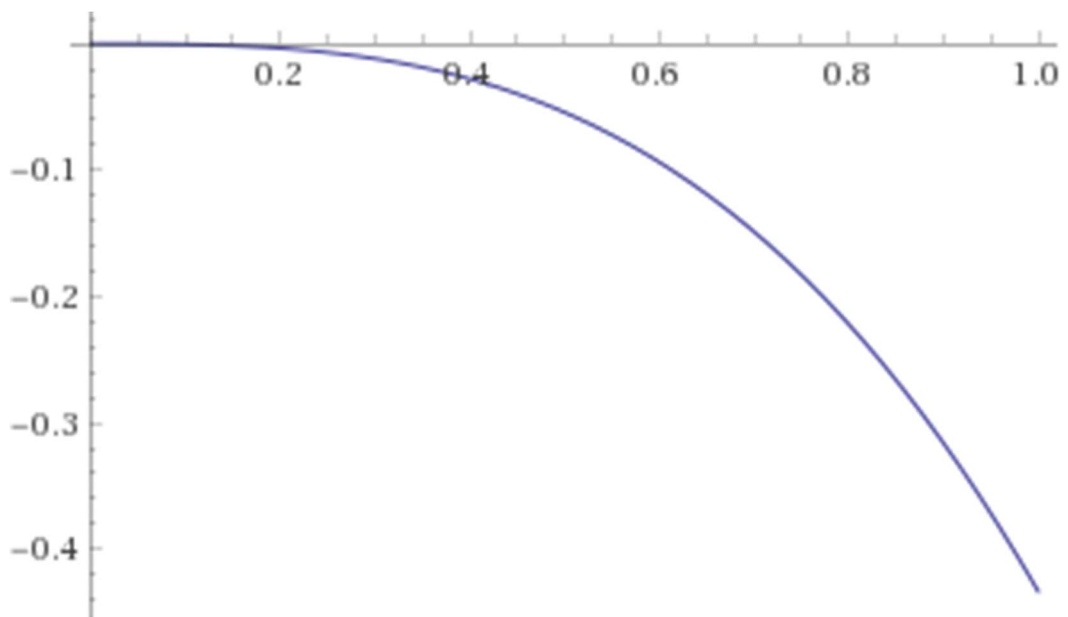


Рисунок 3.2 – Поведінка чисельного розв’язку при $\epsilon = 0.1$, $\alpha = 13$

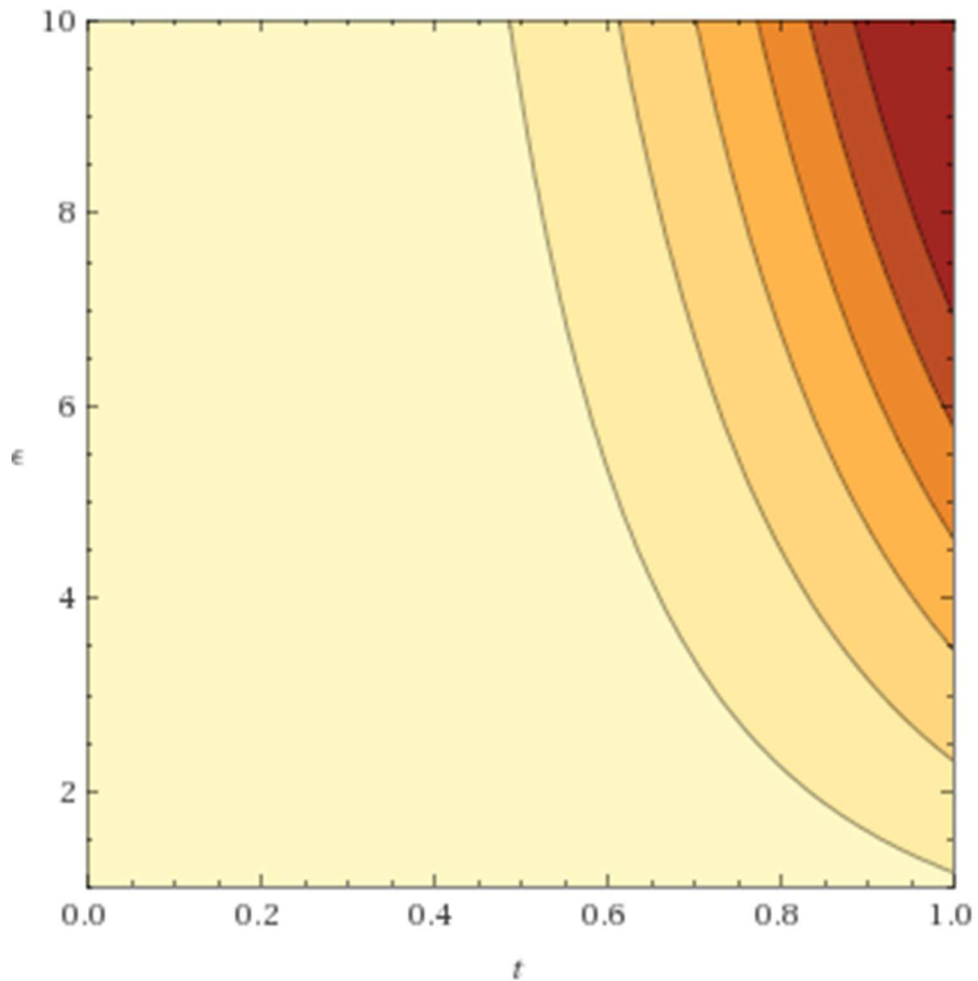


Рисунок 3.3 – Контурне зображення впливу параметра асимптотичного розвинення за методом збурення ϵ на характер розв'язку.

Побудовано наближений аналітичний розв'язок нелінійних задач динаміки обертового математичного маятника зі змінними параметрами довжини та маси із суттєвою нелінійністю на базі гібридних асимптотичних методів. Запропонований у роботі розв'язок може бути перспективним для досліджень динамічної стійкості літальних апаратів поблизу збуреної поверхні.

ВИСНОВКИ

На основі аналізу літературних джерел, опублікованих як у вітчизняних так і закордонних журналах, надано аналітичний огляд сучасного стану і висвітлено передумови виникнення проблем дослідження за темою кваліфікаційної роботи.

Наведений огляд сучасного стану проблеми математичного моделювання нелінійної динаміки математичного маятника зі змінними в часі параметрами свідчить про те, що підходи асимптотичного аналізу недостатньо повно освітлені. Тому кваліфікаційне дослідження спрямоване на вдосконалення математичного моделювання та методів чисельного аналізу нелінійних динамічних процесів та розширення області застосування гібридних асимптотичних методів.

У роботі вперше надається аналіз біфуркаційної діаграми обертового нелінійного математичного осцилятора змінної маси і довжини, залежності критичного параметру частоти обертання від часу при фіксованому переміщенні осцилятора, а також чисельний розв'язок лінійної задачі вимушених коливань обертового маятника, тривимірна залежність впливу параметру демпфування на динамічну поведінку маятникового осцилятора та контурне зображення впливу параметра демпфування на динамічну поведінку маятникового осцилятора із змінними за часом параметрами.

Результати дослідження можуть бути застосовані для поширення використання гібридного асимптотичного підходу для отримання розв'язків актуальних нелінійних задач динаміки конструкцій і систем зі змінними параметрами при наявності двох степенів свободи.

На базі гібридного асимптотичного підходу аналізується запропонований наближений аналітичний розв'язок задачі про нелінійні коливання математичного маятника з нелінійною функцією демпфування.

Чисельний аналіз запропонованого розв'язку показав, що для певного відрізка часу розв'язок не є суттєво чутливим до нелінійного індикатору n початкового рівняння. Для розширення діапазону зміни скалярних параметрів асимптотичного розвинення представляється перспективним застосування гібридного ВКБ-Гальоркін методу на базі методу збурення.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Красильников П. С. О нелинейных колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании. Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. № 1. С. 36–51.
2. Андреев А. С. Метод функций Ляпунова в задачах управления. Журнал Средневолжского математического общества. 2010. Т. 12. № 4. С. 64–73.
3. Андреев А. С. Об устойчивости положения равновесия неавтономной механической системы. Прикладная математика и механика. 1996. Т. 60. № 3. С. 388–396.
4. Безгласный С. П., Мысина О. А. Стабилизация программных движений твердого тела на подвижной платформе. Известия Саратовского университета. 2008. Т. 8. №. 4. С. 44–52.
5. Безгласный С. П., Батина Е. С., Воробьев А. С. Синтез асимптотически устойчивых движений руки робота-манипулятора. Известия Саратовского университета. 2013. Т.13. № 4, ч. 1. С. 36–42.
6. Маркеев А. П. Нелинейные колебания спутника относительно центра масс. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. №4 (2). С. 223–224.
7. Красильников П. С. Малые плоские колебания спутника на эллиптической орбите. Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. №4. С. 671–696.
8. Бардин Б. С., Чекина Е. А. Об устойчивости плоских колебаний спутника-пластинки в случае резонанса основного типа. Нелинейная динамика. 2017. Т. 13. №4. С. 465–476.
9. Бардин Б. С., Савин А. А. Об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний и вращений симметричного твердого тела с неподвижной точкой. Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. №2. С. 249–266.

10. Колесников А. А. Новые нелинейные методы управления полетом. Москва: Физматлит, 2013. 196 с.
11. Сидняев Н. И., Глушков П. А. Длиннопериодические колебания летательных аппаратов при гиперзвуковых скоростях. Математическое моделирование и численные методы. 2014. №1. С. 99–114.
12. Маркеев А. П. Нелинейные колебания симпатических маятников. Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. №3. С. 605–621.
13. Грищак В. З., Дмитрієва О. М. Застосування гібридного ВКБ-Гальоркін методу до розв'язання деяких крайових задач механіки. Доповіді Національної Академії наук України. 1999. № 4. С. 63–67.
14. Погребницкая А. М. К вопросу эффективности ВКБ-Галеркин метода в дифференциальных уравнениях с переменными коэффициентами. Математичні методи та фізико-механічні поля. 2008. Т. 51. №1. С. 82–88.
15. Geer J. F., Andersen C. M. A Hybrid Perturbation-Galerkin Method for Differential Equations Containing a Parameter. Pan American Congress on Appl. Mech. 1991. P. 460–463.
16. Geer J. F., Andersen C. M. A Hybrid Perturbation Galerkin Technique with Combined Multiple Expansions. SIAM J. Appl. Math. Vol. 42. 1990. P. 1474–1495.
17. Грищак В. З. Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування. Запоріжжя: ЗНУ, 2009. 225 с.
18. Грищак В. З. К проблеме асимптотических решений некоторых задач устойчивости и колебаний тонкостенных конструкций переменной жесткости. Актуальные проблемы механики деформируемых сред: сб. науч. трудов. Днепропетровск: Днепропетровский государственный университет, 1979. С. 84–90.
19. Найфэ А. Введение в методы возмущений. Москва: Мир, 1984. 536 с.
20. Грищак В. З., Кабак В. М. Про один асимптотичний підхід для дослідження вимушених коливань прямокутних пластин, параметри яких

залежать від часу. Вісник Запорізького державного університету. 1999. № 1. С. 35–40.

21. Грищак Д. Д. Математичні моделі нелінійної динаміки аерокосмічних систем на базі гібридних асимптотичних методів: дис... канд. фіз.-мат. наук / Запорізький національний університет. Запоріжжя, 2017. 157 с.

22. Николис Дж. Динамика иерархических систем. Эволюционное представление. Москва: Мир, 1981. 486 с.

23. Грищак Д. В., Грищак Д. Д., Кадет Н. П. Біфуркацій стан обертового маятникового осцилятора з параметрами довжини і маси, залежними від часу. Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. 2018. № 2. С. 11–17.

24. Грищак В. З., Лысенко В. В. Метод двойного асимптотического разложения при анализе стохастического поведения нелинейных нестационарных систем. Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. 2000. № 2. С. 60–65.

25. Найфе А. Х. Методы возмущений: пер. с англ. Москва: Мир, 1976. 456 с.

26. Gristchak V. Z., Gristchak D. D., Fatieieva Yu. A. Hybrid asymptotic methods theory and applications. Zaporizhzhya: Zaporizhzhya National University, 2016. 108 p.

27. Піксаков М. М., Адашевська І. Ю., Дрігваль Н. А. Інтерактивний спосіб визначення циклічних розв'язків рівняння Дуффінга. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2012. Вип. 90. С. 245–253.

28. Мацько І. Й., Яворський І. М., Юзефович Р. М., Закжевські З. Вплив параметрів демпфування та стохастичного навантаження на властивості поздовжніх коливань стрижня з тріщиною. Фізико-хімічна механіка матеріалів. 2016. № 4. С. 118–125.

29. Грищак В. З., Погребницкая С. И. Эффективность расширенного ВКБ-Галеркин метода в дифференциальных уравнениях с переменными

коефіцієнтами. Вісник ЗНУ. Серія: фізико-математичні науки. 2010. № 1. С. 45–50.

30. Погребицька Г. М. Застосування асимптотичного розширеного гібридного ВКБ-Гальоркін підходу в задачі про теплопровідність тонкого стрижня кінчної форми. Вісник ЗНУ. Серія: фізико-математичні науки. 2014. № 1. С. 122–127.