МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра прикладної математики і механіки

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«МОДЕЛЮВАННЯ ТА АЛГОРИТМІЗАЦІЯ ПРОЦЕСУ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ МЕТОДАМИ ГРУПОВОЇ РОБОТИ»**

Виконав: студент 2 курсу, групи 8.1138-з
напряму підготовки 113 прикладна математика
(шифр і назва напряму підготовки)
С. О. Шестьоркін
(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри прикладної математики і механіки, доцент, к.ф.-м.н. Кондрат'єва Н.О.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент завідувач кафедри фундаментальної математики, доцент, д.т.н. Гребенюк С.М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра прикладної математики і механіки

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 113 прикладна математика
(шифр і назва)

Освітня програма прикладна математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри прикладної математики і механіки, д.т.н. професор

____________ Грищак В.З.
(підпис)

« 29 » 05 2019 р.

ЗАВДАННЯ

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ

Шестьоркіну Станіславу Олександровичу
(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Моделювання та алгоритмізація процесу прийняття рішень методами групової роботи

керівник роботи (проекту) Кондрат'єва Наталія Олександрівна, к.ф.-м.н., доцент
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 29 » 05 2019 р. № 812-с

2. Строк подання студентом роботи 27.12.19

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
   1. Постановка задачі.
   2. Основні теоретичні відомості.
   3. Розв'язання проблеми процесу прийняття рішення методами групової роботи.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		Завдання видав	Завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 29.05.19

К А Л Е Н Д А Р Н И Й   П Л А Н

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	02.09.19-08.09.19	
2.	Збір вихідних даних.	09.09.19-22.09.19	
3.	Обробка методичних та теоретичних	23.09.19-13.10.19	
	джерел.		
4.	Розробка першого розділу.	14.10.19-3.11.19	
5.	Розробка другого розділу.	4.11.19-17.11.19	
6.	Розробка третього розділу.	18.11.19-1.12.19	
7.	Практична частина	2.12.19-15.12.19	
8.	Оформлення та нормоконтроль	16.12.19-27.12.19	
	кваліфікаційної роботи.		
9.	Захист кваліфікаційної роботи.	09.01.20	

Студент ____________ С.О. Шестьоркін
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ____________ Н.О. Кондрат’єва
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено
Нормоконтролер ____________ В.В. Леонтьєва
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Моделювання та алгоритмізація процесу прийняття рішень методами групової роботи»: 84 с., 3 рис., 8 табл., 25 джерел, 1 додаток.

АЛЬТЕРНАТИВА, МЕТА, МЕТОД ГОЛОСУВАННЯ, ОСОБА ЩО ПРИЙМАЄ РІШЕННЯ, ТЕОРІЯ ВІДНОШЕННЯ, ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕННЯ.

Об'єкт дослідження – процедура прийняття рішення за результатами обробки експертної інформації.

Мета дослідження – алгоритмізація та розробка програмного забезпечення процесу прийняття рішень.

Метод дослідження – аналітичний.

У першому розділі розглянемо процес прийняття рішення. Введено поняття мети та альтернативи. Наведено основні типи залежності мети від альтернатив в задачах прийняття рішень. Розглянуто основні типи цілей і способи їх формалізації щодо прийняття рішення. Висвітлено основні поняття теорії відношень. Розглянуто способи задання відношень, операції над ними та їх властивості. Другий розділ присвячено висвітленню експертних методів оцінки. Дамо поняття що таке ранжування, безпосереднє ранжування та ранжування з порівняльною процедурою. Наведено групові методи прийняття рішень, а саме: метод Дельфі, метод мозкового штурму, а також принципи та методи голосування.

У третьому розділі наведена методика отримання оптимальних рішень груповими методами прийняття рішень та проведено чисельний експеримент за допомогою розробленого програмного продукту.

SUMMARY

Master's qualification work «Modeling and Algorithmization of Decision-making Process using the Methods of Group Work»: 84 pages, 3 figures, 8 table, 25 references, 1 supplement.

ALTERNATIVE, DECISION MAKER, DECISION MAKING THEORY, PURPOSE, RELATIONSHIP THEORY, VOTING METHOD.

The object of study is the decision-making process based on the results of expert information processing.

The purpose of the study is to algorithmize and develop the software of the decision-making process.

The research method is analytical.

The first section looks at the decision-making process. The concept of purpose and alternatives is introduced. The main types of goal dependence on alternatives in decision-making problems are given. The main types of goals and ways of formalizing them in decision making are considered. The basic concepts of the theory of relations are covered. The ways of defining relations, operations over them and their properties are considered.

The second section focuses on expert assessment methods. Let's give a notion of what is ranking, direct ranking and ranking with comparative procedure. Group methods of decision making are presented, namely: Delphi method, brainstorming method, as well as voting principles and methods.

The third section describes the method of obtaining optimal decisions by group decision-making methods and conducted a numerical experiment with the help of the developed software.

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія прийняття рішень – науковий напрям, що забезпечує науково обґрунтований підхід до вибору найкращого, в деякому розумінні, варіанту (варіантів) поведінки в умовах неповної інформації. Важливість наукового підходу до прийняття рішень полягає в тому, що рішення, які людина приймає інтуїтивно не завжди є раціональними. Науково обґрунтований вибір альтернатив з множини можливих варіантів базується на різних математичних постановках та відповідних методах, які залежать від змісту конкретної прикладної задачі прийняття рішень та може бути зведена до пошуку найкращої альтернативи за одним, або сукупністю критеріїв (процедур, правил). В реальних ситуаціях часто буває важко або неможливо дати характеристику окремої альтернативи у вигляді числового критерія або сукупності критеріїв (процедур, правил). Але якщо розглядати альтернативу не окремо, а в парі з іншою, то знаходяться підстави сказати, яка з них краща (переважає за іншу). Можливість порівнювати альтернативи дозволяє їх впорядкувати (ранжувати) на основі теорії бінарних відношень.

Дана кваліфікаційна робота присвячена моделюванню та алгоритмізації процесу прийняття рішень методами групової роботи.

Теорія статистичних рішень, яка є складовою теорії прийняття рішень поклала підґрунтя для теорії раціонального вибору, яка ґрунтується на моделях впорядкованого процесу мислення. За таким підходом поєднуються формальні методи вибору, які ґрунтуються на оцінках імовірності випадкових подій, та рішення, які приймає людина (ОПР), діючи неформально. Рішення вважається раціональним, якщо воно забезпечує найбільшу корисність. У цьому випадку аналізується не одне, а багато послідовних рішень, які оцінюються за обраним критерієм.

Відомим прийомом підвищення якості прийняття рішень є об’єднання спеціалістів, в тій чи інший області знань, у колектив, який виробляє спільне рішення. Ідею колективного рішення можна застосувати і до «колективу» формальних алгоритмів, що дозволяє підвищити ефективність достовірності розпізнавання ситуацій, що спостерігаються. Один з найбільш популярних методів інтеграції індивідуальних рішень експертів – метод голосування. Згідно з цим методом побудова колективного рішення ґрунтується на правилі більшості: за колективне рішення приймається альтернатива, що отримала найбільше число голосів експертів. Проблема голосування полягає в тому, що на основі конфліктуючих думок множини індивідуумів має бути вибране справедливе і дійсно краще колективне рішення при умові необхідності обробки великих обсягів даних у найкоротший проміжок часу[1-3].

Отже, актуальною є алгоритмізація процесу прийняття рішень методами групової роботи та розробка програмного продукту, який дозволить отримати оптимальне рішення і надати в руки користувачу інструмент для розв'язання вищезазначеної проблеми.

Для досягнення поставленої мети в роботі визначені наступні завдання:

– провести кваліфікацію задач прийняття рішень;

– провести класифікацію математичних методів сумісну із наведеною класифікацією задач прийняття рішень для вибору оптимального рішення;

– розробити програмний продукт, який дозволяє автоматизувати процес розв'язання задач прийняття рішень за допомогою правил прийняття рішень та застосувати їх до об'єктів будь якої фізичної природи.

Для реалізації поставлених задач в першій главі даної роботи розглянуто основні елементи процесу прийняття рішень, поняття невизначеність та її види, та кваліфікацію задач прийняття рішень.

Для досягнення поставленої мети у першому розділі розглянуті основні поняття теорії прийняття рішень, означення та гіпотези, поняття мети та альтернативи в теорії прийняття рішень а також наведені основи теорії відношень.

У другому розділі розглянуті експертні та групові методи.

У третьому розділі наведена методика отримання оптимальних рішень груповими методами прийняття рішень та проведено чисельний експеримент за допомогою розробленого програмного продукту.

1 ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

1.1 Основні поняття про прийняття рішень

Поняття «прийняття рішення» найчастіше вживається як обмиркований намір, потреба зробити що-небудь на основі усвідомлення і постановки цілей, а також шляхів: досягнення при виникненні тієї чи іншої проблеми[1,2,4].

Прийняття рішення - директивний акт цілеспрямованої дії на об'єкт управління, заснований на аналізі достовірних даних, що характеризують конкретну ситуацію, визначення мети дій, і що містить програму досягнення мети. Рішення визначають і як процес, і як акт вибору з декількох альтернатив, і як результат вибору. Рішення як процес характеризується тим, що воно протікає в часі, здійснюється в кілька етапів (підготовка, формування, прийняття і реалізація рішення). Етап прийняття рішень можна трактувати як акт вибору особою, що приймає рішення за допомогою визначених правил.

Розробка рішення пов'язана з великим обсягом необхідної інформації, її аналізом, на основі якого ставиться мета і розглядаються найкращі варіанти (альтернативи) її досягнення.

Процес прийняття рішення характеризуються такими ознаками:

– можливість вибору єдиної дії з множини альтернатив;

– наявність мети;

– необхідність критеріїв якості (результатів).

Особа, що приймає рішення – це особа, яка відповідальна за прийняття рішення. Особа, яка приймає рішення, може бути не тільки окремою особою але і групою осіб.

З великої кількості підходів до вирішення проблем можна виділити три основних:

– дескриптивний (або якісно-предметний);

– нормативний (прийняття рішень за допомогою математичних методів);

– змішаний.

Розглянемо більш детально виділені підходи. Дескриптивний підхід заснований на психологічному моделюванні прийняття рішень. У першу чергу враховують особисті дані людини, яка приймає рішення, психологічні процеси, що її стосуються.

Нормативні моделі наголошують на тому, що особа, яка приймає рішення, повинна підходити до їх прийняття без урахування особистих вподобань. Математична теорія прийняття рішень заснована на застосуванні формальних методів прийняття рішень та не враховує людський фактор.

Досить часто сучасні ситуації прийняття рішень вимагають застосовувати як дескриптивні, так і нормативні методи, тобто мова йде про змішаний підхід до розв’язання задачі[5-7].

Перш за все особа, яка приймає рішення, повинна визначитися з методом розв'язання задачі. Якщо обраний метод найбільш підходить до розв'язання певної задачі, ефективність прийнятого рішення буде найвищою.

Виділяють наступні критерії вибору метода прийняття рішень:

– результативність;

– практичність;

– економність:

– часовий інтервал, необхідний для прийняття рішень.

Таким чином, метод прийняття рішення повинен бути таким, що обов’язково дасть оптимальний результат при розв’язанні задачі і буде практичним у використанні, а час прийняття рішення буде мінімальним. Залежно від умов зовнішнього середовища і ступеня інформативності особи, яка приймає рішення проводиться наступна класифікація задач прийняття рішень:

– в умовах визначеності;

– в умовах ризику;

– в умовах невизначеності;

– умовах конфлікту або протидії (активного супротивника).

умовах визначеності на виробництві зважуються багато короткострокової дії, наприклад, визначення раціональніших розмірів партії запуску і випуску виробів і т. і. В умовах ризику можуть зважуватися такі задачі, як: визначення оптимальної чисельності і раціонального розміщення обслуговуючого персоналу; вибір мір для ритмічного ходу виробництва і зниження собівартості; запобігання порушень, що перешкоджають безперебійному випуску продукції по всій номенклатурі і т. і.

Розв’язування задач в умовах невизначеності є складним завданням, тому що для них неможливо зробити достовірний прогноз чи оцінити ймовірність дії об'єктивних умов, що впливають на об'єкт дослідження[19]. У таких випадках вибір рішень може здійснюватися тільки дослідником, що обирає найкращій метод для розв'язання поставленої задачі. При формуванні варіантів рішень варто звернути увагу на два фактори – раціональність досягнення цілей і можливість реалізації отриманого рішення, для оцінки якого використовують ймовірність його здійснення. Ця ймовірність може бути вимірювана суб'єктивно особою, яка приймає рішення, чи експертами на основі аналізу багатьох причин, що можуть вплинути на реалізацію отриманого рішення.

1.2 Поняття мети та альтернативи в теорії прийняття рішень

Поняття мети та альтернативи є одними з ключових в теорії прийняття рішень[5]. Мета – це ідеальний або реальний предмет свідомого або несвідомого прагнення суб'єкта; кінцевий результат, на який навмисно спрямований процес. Проблема прийняття рішення ґрунтується на телеологічному підході, тобто має бути головна мета системи. Рішення, яке ухвалюють або приймають має бути скероване на досягнення поставленої мети. Якщо мети немає, то не виникає і потреби ухвалювати рішення. Керування надзвичайно важливо, чи може ОПР впливати на певний процес, у перебігу якого він зацікавлений. Якщо ОПР відчуває проблемність ситуації та може ідентифікувати її, але не має важелів впливу на неї, то проблеми прийняття рішення немає, і ОПР по суті перетворюється на пасивну сторону, яка лише спостерігає за тим, що відбувається. Альтернатива – цей структурний елемент є похідним від керованості: якщо є керованість, то існує й проблема вибору між кількома варіантами дій ОПР з більш-менш передбачуваними наслідками. Рішення приймають тоді, коли існує більше ніж один спосіб досягнення поставленої мети. Кожен зі способів можна характеризувати різною ймовірністю досягнення мети й витратами. Зауважимо, що одне і те саме прийняте рішення може мати різні моделі. Зокрема, розуміння того що є мета в даній ситуації, прийняття рішення залежить від ОПР. Таким чином поняття мети є суб’єктивним.

Ознайомимся з основними типами залежності мети від альтернатив в задачах прийняття рішень:

– простіший тип зв’язку альтернатив з метою – коли кожна альтернатива приводить до єдиної мети. В цьому випадку має місце функціональна залежність мети від альтернатив;

– більш складний тип зв’язку – коли кожна альтернатива може привести до декількох результатів, кожний з яких має деяку ймовірність появи. Тут має місце стохастична залежність цілей від альтернатив;

– якщо кожна з альтернатив може призвести до декількох результатів та буде відсутній навіть стохастичний зв’язок мети і альтернативи, то маємо третій тип зв’язку мети та альтернативи.

Взаємозв'язок цілей і альтернатив наочніше можна проілюструвати за допомогою методу «дерева цілей», (рис. 1.1).

Підцілі 1-го ступеня є альтернативами досягнення головної мети, але щодо підцілей 2-го ступеня, то вони виступають як мета. «Дерево цілей» завжди можна розвивати до такої деталізації, щоб на останньому рівні знаходилися альтернативні варіанти дії, які вже неможливо розглядати як цілі.

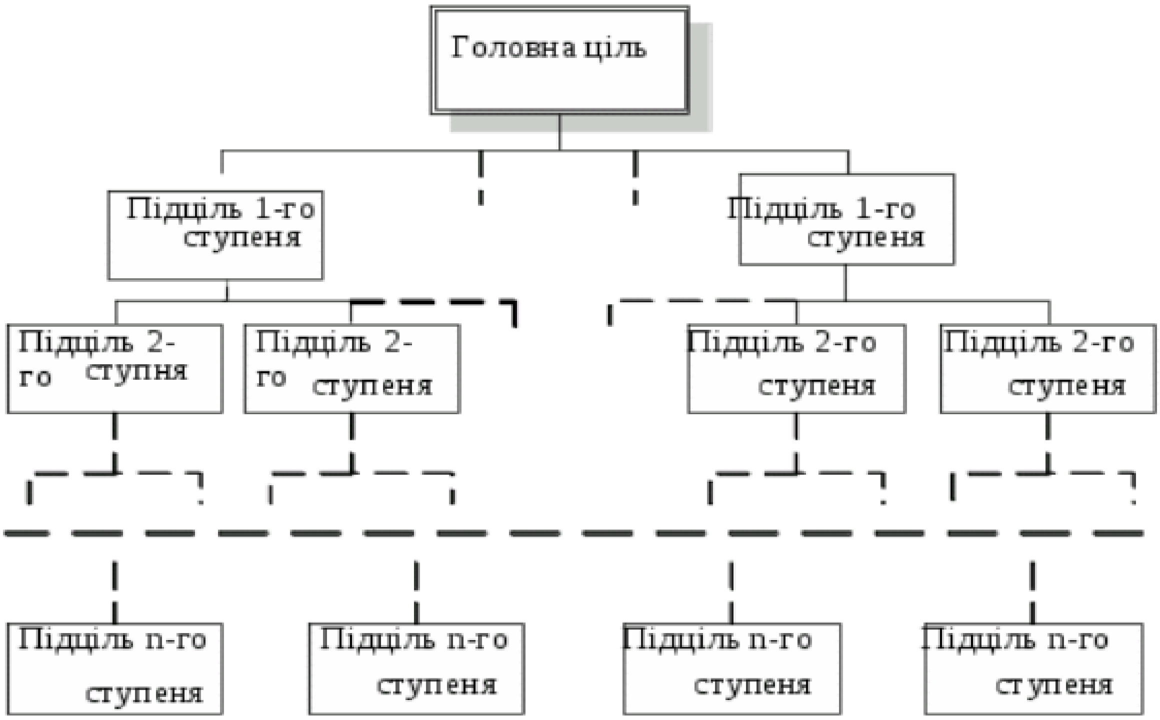

Рисунок 1.1 – Дерево цілей

Мета відображає призначення системи, яке не є детерміністично фіксованим. Воно може розвиватися в часі, і не обов’язково єдиним способом. Мета конкретизується за допомогою аспектів і цілей. Цілі в часовому аспекті поділяють на тактичні цілі (objectives), макроцілі (goals) й ідеали (ideals).

Тактичні цілі — це бажані результати, досягнення яких відбувається за певний порівняно короткий період часу. Для досягнення макроцілей потрібно більше часу, а також досягнення хоча б однієї тактичної цілі. Ідеали — це такі цілі, яких ніколи не досягають, але до яких система постійно наближається, реалізуючи деякі тактичні цілі та макроцілі. За наявністю інформації про способи досягнення цілей їх поділяють на функціональні цілі, цілі-аналоги та цілі розвитку. Функціональна мета характеризується тим, що спосіб її досягнення відомий системі, яка вже досягала її. Функціональні цілі повторюються в часі та просторі. Їх приклади – результати виконання періодично повторюваних, виробничих операцій, стандартні функції управління та ін. Мета-аналог – це образ, отриманий унаслідок дії іншої системи, якого жодного разу не досягала аналізована система, а якщо й досягала, то за інших умов зовнішнього середовища. Мета розвитку, або нова ціль – це така, яку ніколи і ніхто раніше не досягав. Вона по суті пов’язана з утворенням нових систем.

Розглянемо основні типи цілей і способи їх формалізації щодо прийняття рішення. Питання формального опису чи хоча б уточнення цілей виникають не лише під час прийняття рішень. Це складова частина системного аналізу. Якісна мета характеризується тим, що будь-який можливий результат або повністю відповідає їй, або зовсім не відповідає. При цьому результати, що відповідають меті, майже не різняться за ступенем її реалізації, так само нерозрізненні між собою результати, що їй не відповідають. За наявності якісної мети не мають сенсу твердження на кшталт «мету реалізовано наполовину» чи «мету досягнуто на 99%». Якісна мета може бути цілком досягнута чи зовсім не реалізована; вона відповідає принципу «все чи нічого». Максимізація заданої функції. Зазвичай у математичних моделях ухвалення рішень мету ототожнюють із максимізацією (чи мінімізацією) якоїсь функції (критерію якості, корисності), що задана на множині всіх результатів і має дійсні значення, яку називають цільовою. Очевидно, що мінімізація функції рівнозначна її максимізації з протилежним знаком, тому надалі говоритимемо лише про максимізацію цільової функції. Довільну якісну мету формально можна звести із втратами до максимізації певної цільової функції. Цільова функція – це функція, що зв'язує мету (змінну, що оптимізується) з керованими змінними в завданні оптимізації. Вона є математичним виразом деякого критерію якості одного об'єкту (рішення, процесу і т.д.) порівняно з іншим. Важливо, що критерій завжди привноситься ззовні, і тільки після цього шукається правило рішення, що мінімізує або максимізувало цільову функцію. В багатьох випадках результати діяльності можна характеризувати набором критеріїв ефективності. При цьому мета полягає в максимізації (збільшенні) значень усіх цих критеріїв. Таку багатовимірну мету зазвичай прагнуть звести до одновимірної за допомогою агрегування показників ефективності в один, згортанням векторного критерію в скалярний. Усі критерії, що відображають мету, поділяють на такі основні типи: технічні, техніко-економічні, соціологічні, психологічні, естетичні, соціальні. Значення лише технічних і техніко-економічних критеріїв найчастіше можна виміряти числами, що мають зміст, тобто критерії цих двох груп зазвичай кількісні. Інші ж групи критеріїв по суті якісні. Актуальною нині є тенденція до впровадження числових оцінок у різні галузі, де раніше застосовувалися лише якісні, словесні оцінки (заміни емоційних оцінок рейтингами, індексами популярності тощо.). Однак математичні дії з такими оцінками слід виконувати обережно. При цьому слід спиратися на результати, отримані в теорії вимірювань, у якій визначено класи припустимих перетворень. За наявності суб’єктивних і об’єктивних чинників інформацію, яку одержує ОПР, ніколи не можна вважати абсолютно достовірною та повною. Часто ОПР прагне підвищити ступінь її вірогідності та повноти, але нагромадження інформації потребує часу й витрат.

1.3 Теорія відношень

1.3.1 Способи завдання відношення

Властивості предметів навколишнього світу ми можемо розділити на два типи: властивості першого типу можуть бути віднесені до окремих предметів, наприклад «бути високим» (про людину), «бути парним» (про число), « бути зробленим з заліза »,« бути червоним»[2,3]. Властивості другого типу можуть бути віднесені лише до наборів предметів, наприклад, властивість «бути рідними» стосується пар людей, властивість «бути більше» - до пар чисел, «перебувати між" - до трійки предметів і т.і. Властивості другого типу прийнято називати відносинами. При цьому властивості, що відносяться до пар предметів, називаються бінарними відносинами, властивості що складається з n предметів, називаються n-арними відносинами; n може бути будь-яким натуральним числом. Надалі для нас найбільший інтерес представлятимуть бінарні відносини (заради стислості будемо називати їх іноді «відношеннями»).

Надалі будемо ототожнювати відношення з його об'ємом. Наприклад, ставлення «бути родичем» ототожнюється з безліччю пар людей, які є одне одному родичами, ставлення «бути більше» - з безліччю пар чисел, для яких перша компонента пари більша за другу. Таким чином, бінарне відношення можна визначити як множина, що складається з пар елементів.

Пара, що складається з елементів a і b, записується у вигляді (a,b), причому a - називається першою, a b - другою компонентною цієї пари. Відзначимо, що порядок компонент в парі істотний, тобто при $a \neq b$ пари (a,b) і (b,a) вважаються різними; ця обставина підкреслюють іноді словесно, кажучи про впорядкованість пари. Зазвичай бінарні відношення позначають грецькими буквами ρ, σ, τ та ін. Запис $(a,b) \in \rho$ крім прямого способу читання - «пара (a,b) належить відношенню ρ» - читають також і так: a знаходиться з b у відношенні щодо ρ. (Іноді знак відношення ставлять між елементами, тобто пишуть $a\rho b$).

Якщо всі елементи, які є першими компонентами упорядкованих пар, що входять у відношення ρ, належать деякій множині A, а елементи, які є другими компонентами, - деякій множині B, то в цьому випадку говорять, що ρ є відношенням між елементами множин A і B; якщо $A = B$ - то ставленням на множині A. Будемо надалі позначати через $A \times B$ множині, що складається з усіх упорядкованих пар (a,b) виду, де $a \in A$ і $b \in B$. Тоді будь-яке бінарне відношення між елементами множин A і B є підмножиною множини $A \times B$ і назад, якщо $\rho \subset A \times B$, то ρ є бінарне відношення між елементами множин A і B. Звичайно, будь-яке бінарне відношення ρ можна «перетворити» в бінарне відношення між елементами деяких множин A та B: найпростіше в якості A взяти множину всіх перших компонентів, а в якості B - множину усіх других компонентів упорядкованих пар, що належать відношенню ρ. Далі, вважаючи

C = A ∪ B, отримуємо, ρ ⊂ C×C що, тобто будь-яке відношення можна вважати відношенням на деякій множині.

Бінарне відношення можна задати, перераховуючи всі вхідні в нього пари (якщо відношення складається з кінцевого числа пар) або вказуючи загальне властивість пар, що належать цьому відношенню, наприклад:

$$\rho_1 = \{(p,r), (s,q), (r,p), (p,p), (s,r), (p,s)\}$$

Для бінарних відношень на кінцевих множинах використовуються ще два наступних способу завдання.

За допомогою графа. Нехай ρ - бінарне відношення на множині A. Зобразимо елементи множини A у вигляді точок на площині. Для двох точок a, b проводимо стрілку → з a в b тоді і тільки тоді, коли (a,b) ∊ ρ. При цьому, якщо одночасно (a,b) ∊ ρ і (b,a) ∊ ρ то точки a і b з'єднуються стрілкою ↔, а якщо (a,a) ∊ ρ, то в точці a зображується петля. На рисунку. 1.2 намальований граф заданого вище відношення ρ_1. При зображенні відношення за допомогою графа прийнято точки, що зображують елементи множини A, називати вершинами графа, а стрілки - його дугами; (a,b) пари, що належать відношенню ρ, іноді називають дугами відношень ρ. Граф відношення ρ, заданого на множені A, будемо записувати у вигляді пари (A,ρ).

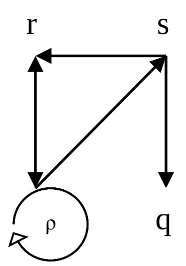

Рисунок 1.2 – Зображення відношення ρ_1 у вигляді графа

За допомогою булевих матриць. Нехай, ρ ⊂ A×B де A={a_1,…,a_n}, B={b_1,…,b_n}. Розглянемо n×m-матрицю, в перший стовпець якої виписані елементи множини A, а в перший рядок - елементи множини B. На перетині рядка елемента a_i і стовпці b_j записується 1, якщо $(a_i, b_j) \in \rho$, то 0. Така таблиця називається булевої матрицею відношень; булева матриця відношення ρ_1 виглядає так (див. таб. 1.1):

Таблиця 1.1 – Булева матриця відношення ρ_1

ρ	*p*	*q*	*r*	*s*
p	1	0	1	1
q	0	0	0	0
r	1	0	0	0
s	0	1	1	0

Нехай ρ - довільне бінарне відношення між елементами множин A і B, a ∊ A множина тих елементів, з якими елемент a перебуває у відношенні ρ, називається зрізом (або перетином) відносини ρ через елемент a і позначається через ρ(a). Якщо бінарне відношення ρ представлено за допомогою графа, то ρ(a) складається з тих вершин, в які з вершини a йде стрілка. Підкреслимо, що зріз відносини через елемент це деяка множина, яке може містити декілька елементів, один елемент і жодного (пуста).

1.3.2 Операції над відношеннями

Оскільки бінарні відношення є множинами, то до них застосовуються усі поняття, які вводяться для множин: поняття рівності, включення, а також операції перетину, об'єднання і доповнення. Зокрема, для двох бінарних відносин ρ і σ включення $\rho \subset \sigma$ розуміється таким чином, що будь-яка впорядкована пара елементів, що належить відношенню ρ, належить і відношенню σ; рівність $\rho = \sigma$ означає, що відношення ρ і σ складаються з одних і тих же упорядкованих пар. Перетину $\rho \cap \sigma$ відношень ρ і σ є нове відношення, що складається з упорядкованих пар, що належать обом відношенням одночасно; об'єднання $\rho \cup \sigma$ відносин ρ і σ складається з упорядкованих пар, що належать хоча б одній з цих відношень; різницю відносин ρ і σ, що позначається через $\rho \backslash \sigma$, є множина впорядкованих пар, що належать відношенню ρ і не належать відношенню σ. Якщо ρ - бінарне відношення між елементами множин A і B, то його доповненням (відносно $A \times B$) називається різниця $A \times B \backslash \rho$.

Вводяться також операції об'єднання і перетину довільних сімейств відношень. Якщо $(\rho_i)_{i \in I}$ - сімейство відношень, то об'єднання цього сімейства є відношення $\bigcup\limits_{i \in I} \rho i$, що складається з упорядкованих пар, що належать хоча б одній з відношень ρ_i, а перетин цього сімейства - відношення $\bigcap\limits_{i \in I} \rho i$, що складається з упорядкованих пар, що належать всім відношенням ρ_i.

Відзначимо, що наведені вище визначення є просто перефразування відповідних визначень для звичайних множин і все властивості теоретико-множинних операцій перетину, об'єднання і доповнення, які відбуваються для довільних множин, виконуються і для відношень. Крім теоретико-множинних операцій для відношень вводяться деякі додаткові операції, які пов'язані з їх специфічною структурою (що виявляється в тому, що всі елементи відношень впорядковані пари). Ми розглянемо дві такі операції:

– зворотне відношення. Якщо в кожній впорядкованої парі, що належить відношенню ρ, поміняти місцями першу і другу компоненту, то отримаємо нове відношення, яке називається зворотним для відносини ρ і позначається через ρ^{-1}. Наприклад, для відношення ρ_1 маємо

$$\rho_1^{-1} = \{(r,p),\ (q,s),\ (p,r),\ (p,p),\ (r,s),\ (s,p)\}.$$

отримаємо, що граф відношення ρ^{-1} з графа відношення ρ переорієнтацією всіх стрілок; якщо відношення ρ задано за допомогою булевої матриці, то, помінявши в ній ролями рядки і стовпці, отримаємо булеву матрицю ρ^{-1} відносини;

– множення відношень. Позначимо дві впорядковані пари виду (a,b), (b,c) сусідніми (тобто одна впорядкована пара примикає до іншої, якщо перша компонента другої впорядкованої пари збігається з другої компонентою першої впорядкованої пари). Для двох сусідніх упорядкованих пар (a,b) і (b,c) їх твором вважається впорядкована пара (a,c). Таким чином, результат добутку пар отримується «викиданням» елемента, за яким відбувається примикання, і «змиканням» залишившихся компонентів цих пар.

Нехай тепер ρ і σ - два бінарних відношення. Добутком відношення ρ до відношення σ називається нове відношення, що складається з результатів добутку всіх таких прилеглих пар, перша з яких належить відношенню ρ, а друга – відношенню σ. Добуток відношення ρ на відношення σ позначається $\rho\cdot\sigma$. Таким чином, умова $(a,c) \in \rho\cdot\sigma$ означає, що для деякого елемента b виконується $(a,b) \in \rho$ і. $(b,c) \in \rho$. Добуток відношень взагалі не комутативним (тобто залежить від порядку співмножників), але асоціативний для будь-яких трьох відносин ρ, σ, τ виконується $(\rho\cdot\sigma)\cdot\tau=\rho\cdot(\sigma\cdot\tau)$. З огляду на асоціативності добутку відношень єдиним чином визначено n-кратний добуток відношення ρ самого на себе, що позначається ρ^n. Якщо відносини ρ і σ задані за допомогою графів, то пари (a,c) до добутку $\rho\cdot\sigma$ означає, що з вершини a в вершину c можна потрапити за два кроки, причому перший робиться по дузі відносини ρ, а другий - по дузі відносини σ. Для вираження матриці добутку двох відношень, заданих булевими матрицями, введемо поняття «булевого складання» $\oplus$, визначивши його так:

$$0 \oplus 0 = 0 \quad 1 \oplus 0 = 1$$
$$0 \oplus 1 = 1 \quad 1 \oplus 1 = 1.$$

Нехай тепер відношення ρ представлено булевою матрицею $U = \|u_{ij}\|$, а відношення σ - булевою матрицею $V = \|v_{jk}\|$, (i,j,k=1,…,n). Побудуємо матрицю $W = \|w_{ik}\|$, де

$$w_{ik} = u_{i1} \cdot v_{1k} \oplus u_{i2} \cdot v_{2k} \oplus \ldots \oplus u_{in} \cdot v_{nk} /$$

Матриця W називається булевим добутком матриці U на матрицю V.

1.3.3 Спеціальні властивості відношень

Рефлексивність. Відношення ρ на множині A називається рефлексивним, якщо кожен елемент множини A знаходиться в відношенні ρ сам із собою, (a,a)∈ρ для будь-кого a∈A.

Якщо відношення представлено за допомогою графа, то рефлексивність цього відношення означає, що в кожній вершині графа обов'язково є петля; для відношення, заданого за допомогою булевої матриці, його рефлексивність рівнозначна тому, що по головній діагоналі цієї матриці стоять лише одиниці.

Абсолютно протилежним для рефлексивності є властивість антирефлексивність, яке визначається так: відношення ρ , задане на множині A, називається антирефлексивним, якщо жоден елемент з множини A не знаходиться в відношенні ρ з самим собою: (a,a)∉ρ для кожного a∈A. Звичайно, відношення, що не є рефлексивним, не повинно бути антирефлексивне. Якщо відношення рефлексивно на A, то, «викинувши» з нього всі пари виду (a,a), де, a∈A отримаємо антирефлексивне ставлення на A; якщо відношення антирефлексивне на A, то, «додавши» до нього всі пари виду (a,a), отримаємо рефлексивне відношення. Таким способом встановлюється взаємно-однозначна відповідність між рефлексивними і антирефлексівними відношеннями на даній множині, тому розгляд одних можна звести до розгляду інших. Наприклад, відношення «≥» між дійсними числами рефлексивно; відповідним йому антирефлексивне відношенням є відношення «>».

Відзначимо, що властивості рефлексивності і антирефлексивне відношень відносяться не тільки до розглянутого відношення, але і до множини, на якої це відношення задано: одне і те ж відношення може бути рефлексивним чи ні в залежності від того, на якої множині це відношення розглядається. Однак можна визначити «внутрішні» властивості рефлексивності і антирефлексивне так, щоб вони залежали тільки від самого відношення; це робиться в такий спосіб. Позначимо відношення ρ внутрішньорефлексивним, якщо

$$(a,b)\in\rho \Rightarrow (a,a)\in\rho,\quad (b,b)\in\rho,$$

і внутрішньоантирефлексивне, якщо

$$(a,b)\in\rho \Rightarrow (a,a)\notin\rho,\quad (b,b)\notin\rho.$$

Отримаємо, що, якщо в якості множини А взяти $pr_1\rho \cup pr_2\rho$ (тобто множина тих елементів, які «беруть участь» у цьому відношенні в якості перших чи других компонент), то властивості рефлексивності і антирефлексивне відношень на цій множині А співпадуть з відповідними «внутрішніми »властивостями.

Симетричність. Ставлення ρ називається симетричним, якщо разом з кожною впорядкованої парою воно містить і впорядковану пару з переставленими компонентами:

$$(a,b)\in\rho \Rightarrow (b,a)\in\rho.$$

У графі симетричного відношення усі стрілки подвійні (тому замість стрілок можна малювати просто відрізки прямих); матриця симетричного відношення симетрична щодо головної діагоналі. За допомогою операції звертання відношень умова симетричності відношення ρ можна записати у вигляді $\rho^{-1}=\rho$.

1.3.4 Структура «домінування – байдужість»

При вивченні відношення переваг між реальними об'єктами в ньому можна виділити дві сторони: одна відображає перевагу (рівнозначні за змістом терміни - переважання, домінування) одного об'єкта над іншим, а інша - схожість (рівнозначні терміни - байдужість, індиферентність) об'єктів. Іншими словами, можна виділити два відношення між об'єктами, які в подальшому будемо називати відношення домінування і відношення байдужості. Розглянемо декілька прикладів:

– турнір, де результатом зустрічі двох учасників є виграш одного з них або нічия. На множині учасників турніру в такий спосіб визначаються відношення домінування і байдужості: a домінує b означає, що a виграв у b; a й b байдужі означає, що a і b зіграли внічию.

– голосування, проведене для групи кандидатів. На множині кандидатів виникають відношення домінування і байдужості: a домінує над b, якщо за a подано більше голосів, ніж за b; a й b байдужі, якщо за них подано однакова кількість голосів;

– відношення переваги за віком. Для двох людей a й b вважаємо, що a домінує над b, якщо a старше b; a й b БАЙДУЖІ, якщо вони мають однаковий вік;

– для цілей психологічного аналізу більше підходить таке визначення відношень домінування і байдужості людей за віком, при якому домінування означає істотну перевагу, а байдужість - близькість віку. Наприклад, для двох людей a й b вважаємо, що a домінує b, якщо a старше b не менше ніж на 5 років; a й b байдужі, якщо різниця їх віку не перевищує двох років;

– відношення підпорядкування між членами організації. Два члена організації перебувають у відношенні байдужості тоді і тільки тоді, коли вони тотожні. Для двох різних членів організації один домінує іншого, якщо перший є начальником другого.

Попри всю різноманітність ситуацій, в яких розглядаються відношення домінування і байдужості, у цих відношеннях спостерігається ряд загальних властивостей. Позначимо через α відношення домінування (a,b)∈α (означає,що a домінує b);і через β відношення байдужості (a,b)∈β (означає, що a і b байдужі).

По-перше, ставлення домінування асиметрично: не може бути такого, щоб, кажімо, в турнірі a переміг b і b переміг a; щоб кандидат a зібрав голосів більше, ніж кандидат b, а b - більше, ніж a (при одному голосуванні), і т.і. Таким чином $\alpha \cap \alpha^{-1} = \emptyset$.

По-друге, відношення байдужості симетрично: наприклад, якщо a зіграв внічию з b, то і b зіграв внічию з a; якщо вік a близький до віку b, то і вік b близький до віку a, і т.і. Отримуємо $\beta^{-1} = \beta$.

По-третє, жодна пара об'єктів не належить одночасно і стосовно домінування, і стосовно байдужості, тобто $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

Нарешті, накладемо ще одну умову на відношення β: будемо вважати, що кожен об'єкт байдужий по відношенню до самого собе (тобто що відношення байдужості рефлексивно). Ця умова носить скоріше характер угоди, оскільки в ситуаціях, аналогічних наведеним вище прикладам, об'єкт сам з собою не порівнюється, але прийняття цього умови цілком узгоджується зі змістом, який зазвичай вкладається в поняття байдужості.

Наведеними чотирма умовами вичерпуються всі загальні властивості відносин такого типу. Зафіксуємо цю обставину в наступному формальному визначенні. Будемо говорити, що пара відношень (α,β), заданих на множині A, визначає на цій множині структуру «домінування - байдужість» і називати α відношенням домінування, а β – відношенням байдужості, якщо α асиметрично, β симетрично і рефлексивно (тобто відношення толерантності), $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

Якщо (α,β) - структура «домінування - байдужість» на А, то пара відносин (α^{-1},β) також утворює структуру «домінування - байдужість» на А; α^{-1} будемо називати відношенням домінантності. Для цілей логічного аналізу в принципі байдужості, що прийняти за домінування, а що за домінантність.

Важливим є така властивість структури «домінування - байдужість», коли будь-які два об'єкти з даної множини або байдужі, або один з них домінує інший (як в прикладах 2 і 3); таку структуру «домінування - байдужість» будемо називати лінійної. Відзначимо, що для прикладу 1 структура «домінування - байдужість» буде лінійної, якщо турнір проведено за коловою системою (кожен зіграв з кожним); для прикладу 5 - якщо з будь-яких двох членів організації один є начальником іншого, для прикладу 4 властивість лінійності в загальному випадку не має місця. Зручно висловити властивість лінійності структури «домінування - байдужість», ввести поняття порівнянності об'єктів. Об'єкти а й b називаються порівнянними, якщо вони або байдужі, або один з них домінує інший; в іншому випадку об'єкти а й b називаються непорівнянні.

Множина пар порівнянних об'єктів утворює відношення порівнянності, а множина пар непорівнянних об'єктів - відношення непорівнянність. Структура «домінування - байдужість» на А буде лінійної тоді і тільки тоді, коли будь-яка пара об'єктів порівнянна, тобто коли відношення порівнянності є $A \times A$. Взагалі, для будь-яких двох об'єктів а й b, довільно взятих з множини, а якому задана структура «домінування - байдужість», виконується точно одне з наступних чотирьох умов:

а) а домінує b;

б) b домінує а;

в) а і b байдужі;

г) а і b непорівнянні.

У разі лінійної структури виконується точно одне з перших трьох умов. Структуру «домінування - байдужість» зручно представити за допомогою таблиці наступного типу (матриці домінування - байдужість): в клітці, відповідному рядку елемента a й одну елемента b, ставиться 1, якщо a домінує b;0, якщо b домінує a;1/2, якщо a і b байдужі, тобто матриця домінування - байдужість будується за тим же принципом, що і таблиця спортивних турнірів. Відзначимо, що структура «домінування - байдужість» буде лінійною тоді і тільки тоді, коли в її матриці немає порожніх клітин.

2 ЕКСПЕРТНІ МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

2.1 Ранжування

Існує багато задач, рішення яких не може бути отримано на основі точних розрахунків через різноманітність факторів, відсутність або дуже швидку зміну кількісних характеристик цих факторів чи явищ. У таких випадках застосовуються методи експертної оцінки[9].

В основі прогнозу лежить судження спеціалістів, засноване на професійному, науковому та практичному досвіді.

При цьому експертними оцінками вважаються якісні оцінки, що засновані на інформації некількісного (якісного) характеру, які можуть бути отримані тільки за допомогою спеціалістів – експертів. Враховуючи високу кваліфікацію експерта, можна сказати, що він також покладається на свій досвід, знання, інтуїцію та вміння оцінювати складні фактори (явища) та спроможний створювати свою власну обґрунтовану (інтуїтивну) модель явища чи проблеми, яку аналізують, якщо він має для цього початкову інформацію.

Застосування математико-статистичних методів значно розширює можливості використання інформації, отриманої від експертів. Для збору, узагальнення та аналізу експертних оцінок застосовуються спеціальні процедури, математичні методи та логічні прийоми, які отримали назву методів експертних оцінок.

При використанні цього методу завжди присутні три основних етапи роботи: підготовка, опитування експертів, обробка результатів.

Підготовка передбачає формування цілей застосування процедури та визначення складу інформації, яку в подальшому треба отримати від експертів. Також на стадії підготовки зазвичай визначається ознаки, за якими експерти будуть оцінювати альтернативи, та вид допустимої множини оцінок.

Крім цього, на етапі підготовки формується група експертів. Для отримання задовільних та якомога точних результатів бажано мати достатньо велику групу експертів, чисельність якої складає не менше десяти висококваліфікованих спеціалістів. Але в деяких випадках допускається відступ від такого принципу.

Обробка результатів опитування може проводитись різними методами. За інформацією, що отримано в результаті обробки опитування експертів, дослідник виносить судження про задовільність процедури. Окрім того, він може отримати інформацію про властивості групи експертів та кожного експерта окремо. Останнє дозволяє при повторенні етапів опитування провести коригування складу експертної групи.

В подальшому буде розглянуто декілька методів експертної оцінки та розглянуто їх переваги та недоліки у порівнянні з іншими в тому чи іншому випадку.

У випадках, коли безпосередня оцінка неможлива або недоцільна, має місце застосовувати експертне ранжування. При цьому ранжування об’єктів містить лише інформацію про те, якому з них надано більшу перевагу, проте невідомо у скільки разів чи на скільки він переважає той чи інший об’єкт. Рангом вважається степінь відмінності по деякій ознаці, а ранжування є самим процесом визначення рангів, відносних кількісних оцінок степенем відмінності за якісними ознаками. Існують наступні методи ранжування: метод простого ранжування, метод безпосередньої оцінки, метод парних порівнянь, ранжування за сумою оцінок та ін.

Перш ніж розглядати деякі з наведених методів, слід сказати, що ранжування може бути строгим та нестрогим. Строге ранжування не передбачає вказування на рівноцінність елементів та, отже, кожен елемент займає своє окреме місце в ранжируваному ряді та набуває свого унікального рангу. При нестрогому ранжуванні декілька елементів можуть займати однакове місце в ранжованому ряді та їм буде приписано однаковий ранг.

Ранжування здійснюється у згоді з порядковою шкалою. Зазвичай на рангові шкали накладають особливі вимоги. Наприклад, частіше за все вимагається, щоб порядкові шкали, що були отримані в результаті строгого ранжування, задовольняли умові рівності числа ранжируваних об'єктів загальному числу рангів. При нестрогому ранжуванні цього може не відбутись, тому додатково вимагається забезпечити рівність сум рангів при строгому та нестрогому ранжуванні. В результаті об'єднання цих двох вимог при нестрогому ранжуванні тим елементам, які мають однаковий ранг, присвоюється стандартизований ранг, тобто середнє арифметичне суми місць, поділених між елементами з однаковими рангами.

До основних недоліків метода ранжирування можна віднести втрату інформації про оцінювані об'єкти внаслідок упорядкування їх лише за взаємним розміщенням без урахування степеня вираженості будь-якої їх якості. Тому метод ранжування не завжди використовується в «чистому вигляді». Частіше за все він поєднується з іншими методами, які забезпечують більш чітку відмінність між об'єктами. Одним із них є метод безпосередньої оцінки і деякі його різновиди, зокрема ранжирування за порівнянною шкалою. Даний метод є простим, не вимагає задіяння великої кількості людських та обчислювальних ресурсів.

При проведенні дослідження за допомогою експертного ранжування важливо правильно обрати шкалу вимірювання. Введемо поняття емпіричної системи для формального опису множини об'єктів та відношень між ними при умові, що показники порівняння фіксовані:

$$M =< X, R > ,$$

де $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ – множина об'єктів, що потребує ранжування;

$R = (R_{1,} R_2, \dots, R_s)$ – множина відношень між заданими об'єктами. В якості об'єктів можуть виступати предмети, ситуації, цілі, рішення тощо.

Відношення є загальною формою опису взаємозв'язків між об'єктами. Окремим випадком відношення є функція.

В якості універсальної системи відношень використовується числова система

$$N =< C, S >,$$

де C – множина дійсних чисел,

$S = (S_{1,} S_2, \dots, S_s)$ – множина відношень між числами. При цьому числова система називається повною, якщо C є множиною всіх дійсних чисел. Числова система використовується для уніфікації процесу вимірювання. Вимірювання полягає у відображенні об'єктів емпіричної системи на множину чисел у числовій системі таким чином, щоб відношення між числами, які відображують об'єкти, зберігали відношення між самими об'єктами.

$$M =< X, R > \overset{f}{\Rightarrow} N =< C, S >.$$

За допомогою функції f кожному об'єкту емпіричної системи приписується число $c_i = f(x_i)$. При цьому відношення між числами повинні зберігати відношення між об'єктами.

Шкалою будемо називати сукупність емпіричної системи *M*, числової системи N та відображення *f*.

$$\text{Ш} =< M, N, f >.$$

Один і той же об'єкт може бути відображений за допомогою різних шкал по-різному. В залежності від виду та властивостей функції відображення f виділяють різні типи шкал вимірювання. У даному методі ранжування застосовується так звана шкала відношень чи порівнянна шкала. В цій шкалі числа відображують відношення властивостей об'єктів, тобто у скільки разів властивість одного об’єкта перебільшує ту ж саму властивість іншого об’єкта. Функцією відображення для шкали відношень є перетворення подібності:

$$f(x) = ax.$$

2.1.1 Алгоритм експертних процедур

При використанні експертних методів завжди є присутніми три великі етапи: підготовка, опитування експертів, обробка результатів[10,11]. Підготовка припускає формування цілей застосування експертної процедури і визначення складу інформації передбачуваною до отримання у експертів. Вона включає визначення ознак, по яких експерти оцінюватимуть альтернативи і виду допустимої множини оцінок. Окрім цього, в етап підготовки включається формування групи експертів. Для отримання задовільних результатів бажано мати відносно велику групу експертів, чисельність якої складає не менше десяти висококваліфікованих фахівців. Проте у ряді випадків доводиться відступати від такого принципу, обмежуючись групою у складі трьох-чотирьох чоловік.

Опитування експертів визначається зрештою запропонованим їм видом множини допустимих оцінок і зводиться до вибору кожним експертом "своєї" оцінки, визначеної по відповідній сукупності ознак. Обробка результатів опитування може проводитися різними методами (статичними, алгеброю). Конкретний метод обробки результатів значною мірою визначається видом множини допустимих оцінок. За інформацією, отриманою в результаті обробки даних опитування, дослідник виносять судження про задовільність процедури. Окрім цього, він може отримати інформацію про властивості групи експертів і кожного експерта окремо. Останнє дозволяє при повторенні етапів опитування провести коригування.

У загальному випадку алгоритм експертної процедури може бути представлений в наступному виді:

а) аналіз початкової інформація і побудова безлічі можливих альтернатив для реалізації сформульованої системи цілей;

б) аналіз ознак можливих альтернатив, виділення системи визначальних ознак і формування комплексу аспектів (і критеріїв) для оцінки альтернатив;

в) нормування множини допустимих оцінок, організація і проведення експертного опитування з метою рішення одного з наступних завдань; - впорядкування альтернатив по кожному з аспектів - отримання чисельних оцінок альтернатив по окремих критериям; - визначення системи заміщень, що відбивають інформацію про взаємну цінність окремих критеріїв і (чи) аспектів:

– визначення області переважних альтернатив при їх сукупній оцінці за системою критеріїв і (чи) аспектів; - виявлення безлічі переважних альтернатив.

г) обробка результатів опитування експертів : - побудова системи даних для вирішення завдання опитування:

– визначення індивідуальних особливостей членів експертної групи;

– коригування складу групи експертів;

– ухвалення рішення про задовільність результатів; якщо результати задовольняють дослідника, то перехід до п. (д); якщо результати не задовольняють дослідника, то повернення до п. (в).

д) оформлення результатів експертної процедури.

2.1.2. Методи безпосереднього ранжування та парних порівнянь

Ранжування є поширеною процедурою отримання експертної інформації. Експертові пред'являється набір альтернатив, які підлягають оцінюванню, і пропонується впорядкувати їх за уподобаннями та приписати їм числа натурального ряду - ранги. Найбільш краща альтернатива отримує ранг, рівний 1, наступна за нею альтернатива - ранг 2 і т.д.

Як правило, процедура ранжирування здійснюється наступним чином.

Розглянемо процес ранжирування (тобто розташування факторів у порядку їх суттєвості) факторів x_i $(i = 1, ..., n)$.

Ранжируваний ряд може будуватися двома способами.

1. На перше місце ставиться найістотніший, слідом за ним менш суттєвий, але найважливіший з решти і т.д.

Отриманий таким чином ранжируваних ряд має вигляд

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}, \qquad (2.1)$$

де i_1 – номер найсуттєвішого фактора,

i_2- номер менш істотного і т.д. до i_n- номера найбільш несуттєвого фактора в цьому ряді.

2. Кожному фактору x_iпоставити у відповідність деяке ціле число - його ранг k_i, тобто номер фактора в ранжируваному ряді (2.1):

$$\begin{gathered} x_1, x_2, \dots, x_n, \\ k_1,\ k_2, \dots,\ k_n, \end{gathered} \qquad (2.2)$$

Бачимо, що перший ранг ($k_i = 1$) має вхід x (найбільш впливає на реалізацію мети в об'єкті. Другий і наступні ранги (до k_i= 2 і т.д.) у порядку спадання їх важливості мають входи, вплив яких не настільки істотний.

Наприклад, якщо ранги (2.2) виявилися рівними

$$\begin{aligned} x_i &= x_1,\ \ x_2,\ \ x_3,\ \ x_4,\ \ x_5 \\ k_i &= 3,\ \ 1,\ \ 5,\ \ 4,\ \ 2 \end{aligned} \qquad (2.3)$$

то ранжируваний ряд має вигляд $x_2,\ x_5,\ x_1,\ x_4,\ x_3,$. Дійсно, з (2.3) видно, що перший ранг ($k_i = 1$) має другий фактор, другий - п'ятий і т.д. Тепер, якщо доведеться створювати систему управління з обмеженою інформацією про середовище (n = 3), вибір істотних чинників з (3) очевидний. Це $x_1,\ x_2$ та x_5. Четвертим і третім факторами при цьому нехтуємо, причому очевидно, що збиток від цього рішення буде мінімальним, оскільки відкинуті найбільш несуттєві фактори. Завдання побудови рангового ряду (1) або еквівалентне їй завдання визначення рангів (2) вирішується експертами і зводиться до організації експертного опитування і обробки результатів цього опитування, з тим щоб отримати шукані ранги і оцінити їх достовірність, тобто узгодженість експертів.

Розглянемо два методи експертного ранжирування:

– безпосереднього ранжирування (в даному методі експерти відразу привласнюють ранги факторам, що їм представлені для ранжирування);

– парних порівнянь (в даному методі використовується парне порівняння факторів, що спрошує задачу експерта, але потребує подальшого оброблення результатів для отримання ранжируваного ряду).

Метод безпосереднього ранжирування. Нехай N експертів ранжирують nфакторів $x_1, \dots, x_n$. Кожному фактору кожен експерт присвоює ранг - ціле число від 1 до n. Так, i-му фактору (x_i,) j-й експерт присвоює ранг k_{ij}. В результаті виходить матриця суджень експертів розмірністю$N \times n$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array} \\ \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{21} & \dots & k_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{1N} & k_{2N} & \dots & k_{nN} \end{Vmatrix} \end{array} \qquad (2.4)$$

При призначенні рангів експертами потрібно дотримуватися таких умов:

– сума рангів, призначених всім чинникам кожним експертом, повинна бути однакова:

$$\sum_{i=1}^{n} k_{ij} = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad j = 1, \dots, N;$$

– якщо експерт якісь qчинників вважає еквівалентними або однаковими за важливістю, то він надає їм один ранг, що дорівнює середньому з с q цілих рангів, таких, які вийшли б за умови, що експерту вдалося їх проранжувати.

Для остаточного визначення шуканих рангів слід обчислити середні ранги кожного фактора:

$$\bar{k}_j = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} k_{ij},$$

де на перше місце ставиться фактор з мінімальним середнім рангом

$$\bar{k}_l = \min_{i=1,\dots,n} \{\bar{k}_i\},$$

тобто фактор x_l, на друге місце – фактор, що має мінімальний з решти ранг тощо.

Отримані ранги дозволяють побудувати ранжируваних ряд факторів, який і буде відповідати усередненій оцінці колективу N експертів.

Узгодженість суджень експертів визначається за допомогою коефіцієнта конкордації (критерію узгодженості)$0 \le W \le 1$:

$$D(\bar{k}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{k_\iota} - M(\bar{k})\right)^2, \qquad M(\bar{k}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{n+1}{2},$$

$$D_{max} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(i - \frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

При $W = 0$ судження експертів повністю розходяться, а при $W = 1$ вони висловлюються одноголосно.

Приклад. Нехай судження експертів представляються матрицею виду (2.4). А об’єктивний ряд ранжирування має вигляд $x_1 \succ x_2 \succ x_3$. Середні ранги $\bar{k}_1 = 5/3, \bar{k}_2 = 2, \bar{k}_3 = 7/3$ відображують об’єктивне ранжирування. Визначимо узгодженість суджень експертів:

$$W = D(\bar{k})/D_{\max} = (2/27)/(2/3) = 1/9,$$

тобто їх судження виявились дуже погано узгодженими. Тим не менш, остаточне ранжирування виявилось правильним. Це вийшло за рахунок усереднення суджень експертів, котре виключило їх індивідуальні особливості, а разом з ними і помилки.

Метод парних порівнянь. Експерту пропонується ранжувати фактори попарно, тобто кожній парі факторів x_i та x_l поставити у відповідність число

$$q_{il} = \begin{cases} 1, \text{якщо } x_i \succ x_l, \\ 0, \text{якщо } x_i \sim x_l, \\ -1, \text{якщо } x_i \prec x_l. \end{cases}$$

При цьому $q_{il} = -q_{il}$. Кожний j-й експерт своє судження представляє у вигляді матриці

$$Q^j = \left\| q_{il}^i \right\|, \qquad i, l = 1, \dots, n; \qquad j = 1, \dots, N,$$

Для усереднення суджень експертів побудуємо матрицю розмірністю $n \times n$

$$\bar{Q} = \|\bar{q}_{il}\|,$$

де

$$\bar{q}_{il} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} q_{il}^{j}.$$

Узгодженість суджень експертів $0 \leq W \leq 1$ визначається виразом

$$W = \frac{D(\bar{q})}{D_{max}} = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,l=1}^{n}(\overline{q_{\iota l}})^2,$$

де

$$D(\bar{q}) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,l=1}^{n}(\bar{q}_{il})^2 ,$$

$$D_{max} = 1.$$

При $W = 1$ судження експертів повністю узгоджені, а при $W = 0$ вони суперечать один одному.

Існують ситуації, коли за повної узгодженості експерти можуть суперечити один одному. Виявлення подібних суперечень здійснюється на основі правила транзитивності:

$$x_1 \succ x_2 \text{ і } x_2 \succ x_3, \text{то } x_1 \succ x_3; \tag{2.5}$$

для еквівалентності:

$$x_1 \sim x_2 \text{ і } x_2 \sim x_3, \text{то } x_1 \sim x_3.$$

Для виявлення рангів ранжируваних факторів використовуються наступні правила обчислення рангів за матрицею Q. Визначається середня перевага кожного фактору всім останнім:

$$\bar{q}_i = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} \bar{q}_{il}\,, \quad i = 1, \dots, n\,, \tag{2.6}$$

Таким чином будується ранжируваний ряд виду (2.2), де на перше місце ставиться фактор з максимальним середнім рангом

$$\bar{q}_v = \max_{i=1,\dots,n} \{\bar{q}_i\}.$$

На друге місце – фактор, який має максимальний серед тих, які залишилися середній ранг і т.д.

Кожна перевага q_{il}порівнюється з деяким обраним порогом $\delta\ (0 < \delta < 1)$. В результаті виходить наступне перетворення матриці середніх переваг $\overline{Q}$ в контрастну матрицю, елементами якої є:

$$\varphi_{il} = \varphi(q_{il}), \quad i \neq l = 1, \dots, n\,,$$

де:

$$\varphi(q) = \begin{cases} -1, \text{якщо } q \leq -\delta. \\ 0, \text{якщо } |q| < \delta. \\ 1, \text{якщо } q \geq \delta. \end{cases}$$

За контрасною матрицею будується ранжируваний ряд виду (2.2). Після цього визначається значення оптимального порога δ на «порозі протиріч», тобто таке значення δ*, невелике зменшення якого призводить до протиріччя.

Приклад. Нехай матриця середніх переваг має вигляд, приведений на рис.2.3, а. При $\delta = 0{,}7$ контрастна матриця дає наступний ряд ранжирування:

$$x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_1. \tag{*}$$

Нулі в цій матриці означають не тільки еквівалентність, але й не яскраво виражену перевагу. Через це отримане ранжирування несуперечливе. Згідно з алгоритмом понизимо поріг. При $\delta = 0{,}5$ контрастна матриця (*в*) вже має суперечення, оскільки . Мінімальний поріг, при якому не виходить суперечень, дорівнює $\delta^{*} = 0{,}52$ (див. рис. 2.3, *г*), що приводе до ранжируваного ряду (*), тобто, обравши поріг $\delta = 0{,}52$ та 0,7, отримаємо той же ряд (*).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	-0,7	-0,44	-0,52	0	-1	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1
x_2	0,7	0	-0,74	0,5	1	0	-1	0	1	0	-1	1	1	0	-1	0
x_3	0,44	0,74	0	-0,78	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1
x_4	0,52	-0,5	0,78	0	0	0	1	0	1	-1	1	0	1	0	1	0

а) **б)** **в)** **г)**

Рисунок 2.3 – Матриця середніх переваг; (а) контрасні матриці при δ = 0,7 (б), δ = 0,5 (в) і δ* = 0,52 (г)

Розглянемо застосування першого правила до цього прикладу. Отримуємо за допомогою (6) з рис. 2.3, *а* $\bar{q}_1 = -0{,}415, \bar{q}_2 = 0{,}1, \bar{q}_3 = 0{,}2$. Звідки згідно з першим правилом отримуємо ранжируваний ряд виду

$$x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_1.$$

Як видно, результат є відмінним від (*). Це означає, що або $x_3 \sim x_2$, або для більш точного рішення необхідно отримати нові данні, які б дозволили вияснити, який з двох рядів ранжирування (*) або (**) має місце у дійсності.

2.2 Групові методи прийняття рішень

Серед групових методів прийняття рішень найбільш поширеними є метод мозкового штурму, метод Дельфі, интервью и т.і.

2.2.1 Метод мозкового штурму

Метод мозкового штурму - оперативний метод вирішення проблеми на основі стимулювання творчої активності, при якому учасникам обговорення пропонують висловлювати якомога більшу кількість варіантів рішення, з числа відбирають найбільш вдалі[12-16].

Метод мозкового штурму включає проведення трьох етапів (постановка проблеми, генерація ідей, відбір і оцінка ідей), які відрізняються організацією і правилами проведення.

Розрізняють індивідуальні та колективні мозкові атаки.

Суть методу полягає в тому, що при прийнятті колективного рішення вирішуються дві основні задачі:

– генерування нових ідей щодо можливих варіантів розвитку процесу;

– аналіз і оцінка висунутих ідей.

Мозковий штурм є, по суті, найбільш вільною формою дискусії. Головна функція цієї технології - забезпечення процесу генерування ідей, без їх критичного аналізу та обговорення учасниками. Успіх проведення мозкового штурму залежить від дотримання двох головних принципів. Один з них полягає в наступному: при спільному обговоренні з'являються ідеї більш високої якості, ніж при індивідуальній роботі тих же людей. Це відбувається за рахунок того, що ідея, яка сама по собі може бути відкинута в силу недостатньої обґрунтованості або непрактичність, допрацьовується спільними зусиллями, і тим самим поліпшується, стає все більш конструктивною і придатною до здійснення. Другий принцип полягає в тому, що якщо учасники наради знаходяться в стані генерування ідей, то процес творчого мислення не можна гальмувати передчасною суб'єктивною оцінкою цих ідей. У цьому принципова відмінність мозкового штурму від будь-якої іншої технології [12].

Мозковий штурм, як і інші колективні методи прийняття рішень має певні переваги і недоліки. До найбільш важливих переваг мозкового штурму можна віднести заохочування творчого мислення та активізацію учасників процесу. Слід наголосити також недоліки мозкового штурму, що допоможе уникнути появи проблем при вирішенні задач методом мозкового штурму. У зв'язку з тим, що при мозковій атаці заохочується генерування будь-яких ідей, то найчастіше його учасники йдуть від реальної проблеми. У потоці різноманітних пропозицій буває часом досить важко знайти раціональні і продуктивні ідеї. Крім того, метод не гарантує ретельну розробку пропонованої ідеї. Мозковий штурм виключає управління мисленням - в цьому його принциповий недолік. Так само недостатньо розвинена здатність виділяти з великого числа напрацьованих ідей тільки ті, які будуть реально сприяти вирішенню проблеми або завдання і, отже, які можна перевести в конкретні дії. Отже, переваги метода "мозковий атаки" є висока оперативність отримання рішення. Основним недоліком його є важкість організації експертизи, оскільки інколи неможливо зібрати разом необхідних спеціалістів, створити невимушену атмосферу і виключити вплив посадових взаємовідносин.

Незважаючи на виділені недоліки та простату проведення даного методу, він отримав вагомий розвиток в наступних методах, заснованих на принципі (технології) мозкового штурму: брейнрайтінг, мозкова атака на дошці, мозковий штурм по-японськи, багатоступенева (каскадна) мозкова атака, індивідуальний мозковий штурм, зворотний мозковий штурм, мозковий штурм з оцінкою ідей, мозгова облога, метод «635», метод корабельної ради, мозковий штурм онлайн, мозковий штурм з чергуванням індивідуальної і групової роботи, візуальний мозковий штурм, мозковий штурм на основі зображень, зворотний мозковий штурм.

2.2.2 Метод Дельфі

Метод Дельфі - багатоетапний метод, який передбачає початкове ізольоване винесення експертами своїх суджень і подальшу багаторазову їх коригування на базі ознайомлення кожного експерта з судженнями інших експертів до тих пір, поки величина розкиду оцінок не буде знаходитися в рамках заздалегідь встановлюється бажаного інтервалу варіювання оцінок[17-20]. Що отримуються за допомогою даних методик оцінки носять статичний і одноразовий характер, в результаті чого виникає необхідність повторного звернення до експертів при складанні прогнозу частки ринку на наступні періоди. Крім того, метод внутрішнього і зовнішнього експертного прогнозування характеризується певним ступенем суб'єктивності.

Надійність методу "Дельфі" вважається високою при прогнозуванні на період як від 1 до 3 років, так і на більш віддалений період часу. Залежно від мети прогнозу для отримання експертних оцінок може залучатися від 10 до 150 експертів. Якісний підхід дозволяє оцінити специфіку кожної конкретної ситуації. У деяких випадках уважне дослідження різних специфічних елементів, що визначають ситуацію, може бути більш важливим, ніж проведення систематичної кількісної оцінки. Великим недоліком цього методу є надмірна суб'єктивність оцінок. Старі стереотипи іноземного суспільства можуть зіграти фатальну роль при прийнятті рішень. Дж. Саймон оцінив цей підхід як "спорадичний, заснований на селективному, неконтрольованому сприйнятті або ідеологічних і особистісних пристрастях"[18].

Метод застосовується на етапах формулювання проблеми і оцінки різних способів її рішення. Метод Дельфі - один з інструментів вибору і оцінки рішення. Мета методу: отримання узгодженої інформації високого ступеня достовірності в процесі анонімного обміну думками між учасниками групи експертів для прийняття рішення. Метод Дельфі - інструмент, що дозволяє врахувати незалежну думку всіх учасників групи експертів з обговорюваного питання шляхом послідовного об'єднання ідей, висновків і пропозицій і дійти згоди. Метод заснований на багаторазових анонімних групових інтерв'ю. Організація експертизи проводиться в кілька етапів[19]:

– визначення цілей і завдань експертизи;

– визначення процедури проведення експертизи;

– відбір і формування групи експертів;

– організація самої процедури експертизи;

– обробка інформації;

– прийняття рішення за результатами експертизи.

Спочатку ставиться проблема - визначається передісторія, розглядаються аргументи на користь її рішення, відбувається обговорення з усіма зацікавленими особами. Головне тут - розпізнати уявні проблеми. Тому при постановці проблеми необхідна гласність і обговорення. Після того як проблема обґрунтована визначаються межі її існування, сукупність внутрішніх і зовнішніх факторів, що впливають на проблему. Для цього виділяється центральне питання і розщеплюється на підпитання. При цьому намагаються обмежити поле тільки тими питаннями, без яких не можна отримати відповідь на центральне питання. Далі формуються цілі та завдання реалізації обраної проблеми. Таким чином, вибираються головні події, фактори, центральні і другорядні питання. Необхідно мати на увазі - з збільшенням деталізації - збільшується точність експертизи, але знижується узгодженість думок експертів.

Організатори проведення експертизи вибирають процедуру здійснення експертизи. Відомі різні підходи до цього питання. Можна проводити індивідуальний або групове опитування, очне або заочне, відкрите або закрите.

Індивідуальне опитування полягає в інтерв'юванні експерта і дозволяє максимально використовувати здібності і знання кожного експерта. Групове опитування дозволяє експертам обмінюватися думками, можуть скоригувати свою оцінку. Недолік групового думки полягає в сильному впливі авторитетів на думки більшості учасників експертизи, у важкості публічної відмови від своєї думки, психологічної несумісності деяких учасників експертизи.

Методи Дельфі характеризуються такими рисами:

– анонімність думок експертів;

– регульована обробка, зв'язок, яка здійснюється аналітичною групою за ряд турів опитування, причому результати кожного туру повідомляються експертам;

– груповою відповіддю, яка виходить за допомогою статистичних методів і відображає узагальнену думку учасників експертизи.

Метод Дельфі є найбільш формальним з усіх експертних методів[11].

При використанні даного методу інформація отримана від експертів, піддається статистичній обробці за наступною схемою:

$$z = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i$$

а) визначається значення прогнозованої величини як середня величина оцінок експертів:

де z_i - оцінки експертів;

N - число експертів;

б) розраховується дисперсія оцінок, що визначає розкид думок експертів:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{N}(ź - z_i)^2}{N-1};$$

в) знаходиться середнє квадратичне відхилення прогнозу:

$$\sigma = \sqrt{D};$$

г) обчислюється так званий коефіцієнт варіації, що характеризує єдність експертів:

$$\xi = \frac{\sigma}{ź},$$

$$\chi_i = \frac{z_i - ź}{ź},$$

д) визначається коефіцієнт компетентності експертів з точки зору всієї групи експертів як єдиного цілого:

Отримані таким чином дані дозволяють оцінити діапазон прогнозованої величини, в який вона потрапляє із заданою вірогідністю ρ. У припущенні нормальності закону розподілу думок експертів, що в більшості випадків досить правдоподібно, діапазон визначається співвідношенням:

$$ź - \tau \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \leq z \leq ź + \tau \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

де τ - величина, що залежить від N і ρ, що має розподіл Стьюдента з (N - 1) ступенями свободи і визначається за таблицями в функції від (N-1) і (1 ρ) (наприклад для N = 1 і ρ = 0 , 95 величина τ = 2,23).

Однією з модифікацій методу Дельфі є використання думок експертів не у вигляді середнього значення оцінюваної величини z_i, а у вигляді діапазону, в який, на думку експерта. потрапляє ця величина (z_i min, z_i max).

В цьому випадку обробка результатів опитування має деякі особливості.

$$z_i = \frac{1}{2}(z_i^{min} + z_i^{max}).$$

У припущенні з рівномірної щільності розподілу в діапазоні (z_i^{min}, z_i^{max}) середнє значення оцінюваної величини для кожного i-го експерта можна знайти за вказаним співвідношенням.

Отримані середні значення z_i, якщо їх розглядати як точковий прогноз, можуть бути піддані статистичній обробці в відповідності з наведеними вище залежностями. Однак наявність інформації про діапазонах у кожного експерта дозволяє запропонувати і інший спосіб обробки інформації

$$D_i = \frac{1}{12}(z_i^{max} - z_i^{min})^2,$$

для кожного експерта визначається дисперсія значень оцінюваної величини, коефіцієнт варіації для групи експертів визначається по співвідношенню

$$\xi = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} D_i\right)^{\frac{1}{2}},$$

де $\acute{z} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i,$

за величиною дисперсії оцінки експерта може бути визначений коефіцієнт η_i, що характеризує надійність даних, представлених експертом, тобто ступінь довіри до його інформації

$$\eta_i = \frac{\frac{1}{D_i}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{D_i}};$$

$$\tilde{z} = \sum_{i=1}^{N} \eta_i z_i.$$

З урахуванням довіри до експерта оцінка прогнозованої величини групою експертів розраховується за співвідношенням:

$$\widetilde{D} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \eta_i (\tilde{z} - z_i)^2}{\sum_{i=1}^{N} \eta_i (1 - \eta_i)},$$

дисперсія прогнозованої величини визначається у вигляді. Як вже зазначалося вище, методи прогнозування можуть з успіхом застосовуватися для числових оцінок, що визначають деякі альтернативи. При цьому кожній альтернативі ставиться у відповідність одна оцінка. У ряді випадків для вирішення цієї задачі є зручною модифікацією методу Дельфі.

$$\sum_{i=1}^{m} e_i = z^{\max} - z^{\min} .$$

При організації опитування весь інтервал, в якому може перебувати оцінка альтернативи, розбивається на т інтервалів $e_1, ..., e_m$.

Кожен з експертів повідомляє ймовірність ρ_{ij} попадання оцінюваної величини в кожен з інтервалів (де i - номер експерта, j - номер інтервалу).

$$\pi_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} \rho_{ij} \eta_i}{\sum_{i=1}^{N} \eta_i} .$$

Сумарна думка експертів про попадання оцінюваної величини в кожен з інтервалів визначається з урахуванням коефіцієнта довіри до експерта величиною яка після нормування

$$\overline{\rho}_j = \frac{\pi_j}{\sum_{j=1}^{m} \pi_j},$$

дозволяє побудувати закон розподілу ймовірності попадання оцінюваної величини в інтервали оцінки.

$$\overline{\rho}(E \leq E_2) = 0{,}5.$$

Як результуюча оцінка розглядається медіана побудованого розподілу, яка визначається як величина оцінки яка ділить розподіл на дві рівні частини. Крім медіани E_2 обчислюється діапазон квантилів

$$\Delta E = E_3 - E_1, где\_ \overline{\rho}(E \leq E_3) = 0{,}75; \_ \overline{\rho}(E \leq E_1) = 0{,}25.$$

З досвіду використання цієї процедури рекомендується припиняти повторні опитування при зменшенні діапазону квантилів в 1,6 рази порівняно із значенням, отриманим після першого туру опитування.

2.2.3 Метод мінімальної відстані

Викладені вище методи обробки результатів опитування експертів зводяться до визначення середніх значень оцінок. Може бути запропонований і інший підхід для визначення сумарної оцінки. Розглянемо геометричне уявлення ранжируваних оцінок, які дають експертами. Припустимо, що для кожної з П альтернатив виділена числова вісь гіперпростору. Тоді ранжування альтернатив в цьому гіперпросторі може бути представлена деякою точкою. Координати цієї точки, яка зображує систему переваг експерта, визначаються рангами, відкладеними за відповідними числовим осях. Система переваг кожного експерта для даної сукупності альтернатив буде зображуватися точкою в такому гіперпросторі. Розумно припустити, що в якості сумарної оцінки може бути обрана така, що зображає точка якої знаходиться найближче до всіх точок гіперпростору, що зображує переваги всіх експертів. Таким чином, якщо ввести поняття відстані між експертними оцінками, то в якості сумарної оцінки можна визначити таку, сума відстаней до якої від оцінок всіх експертів буде мінімальною, тобто

$$A_0 \in Arg \min_{A \in \Omega} \{ \sum_{k=1}^{N} \Delta(A, A^k) \},$$

де A_0 - шукана оцінка - ранжування, виступають в якості аргумента, мінімізуючи суму відстаней Δ; Δ - відстанб між ранжуванням; A^k - ранжування k-го експерта; Ω - множина всіх можливих нестрогих ранжувань, задаються матрицями $A = (a_{ij})$ в яких $a_{ij} = 1$ тоді, і тільки тоді $\omega_i \succ \omega_j$, $a_{ij} =$ -1, коли $\omega_i \prec \omega_j$; $a_{ij} = 0$, коли $\omega_i \sim \omega_j$ і $I=[1,n]$.

Відстань між ранжування найбільш часто визначається наступним способом.

$$\Delta(A, B) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left| a_{ij} - b_{ij} \right|.$$

Якщо $A(a_{ij})$ и $B(b_{ij})$ два ранжування, тоді таке поняття відстані між ранжування задовольняє таким умовам:

– у випадку, якщо ранжування співпадають (A=B, т.е. $a_{ij}=b_{ij}$, то $\Delta(A, B) = = 0$);

– відстань між двома ранжуваннями завжди не від’ємна $\Delta(A, B) \geq 0$;

– відстань не залежить від напрямку вимірювання $\Delta(A, B) = \Delta(B, A)$;

– мінімальне позитивне відстань між двома ранжуванням дорівнює одиниці (для виконання цієї умови в поняття відстані введений нормуючий множник 1/2);

– відстань Δ не залежить від того, як пронумеровані альтернативи, тобто відстань Δ інваріантної щодо однакових перестановок альтернатив всередині ранжувань;

$$\Delta(\mathrm{A},\mathrm{B}) + \Delta(\mathrm{B},\mathrm{C}) \geq \Delta(\mathrm{A},\mathrm{C})$$

– для відстані реалізується "правило трикутника": причому рівність справедливо тільки тоді, коли ранжування з знаходиться між B і A, тобто коли $a_{ij} \leq c_{ij} \leq b_{ij}$ або $a_{ij} \geq c_{ij} \geq b_{ij}$ для всіх i та j .

Ранжування, сума відстаней до якої від всіх ранжувань експертів мінімальна, називається медіаною Кемені - Онеллі.

$$A^0 = Arg \min_{A \in \Omega} \left| \sum_{i=1}^{N} \Delta^2(A, A^k) \right|.$$

Іноді для визначення сумарного ранжування групи експертів використовують так зване середнє значення, яке визначається співвідношенням. Для більш наочного уявлення про метод мінімальної відстані розглянемо деякий гіпотетичний приклад.

$$A^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}; A^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}; A^3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Нехай три експерта (N = 3) проводять ранжирування чотирьох (n = 4) альтернатив (об'єктів) з деякою системі ознак. При реалізації попарного порівняння ними було дано оцінки, які в матричної формі подаються у вигляді що рівносильно наступній системі переваг експертів:

$$R^1 = <1,2,3,4>,\ R^2 = <1,3,2,4>,\ R^3 = <2,1 \sim 3,4>$$

$$\Delta(A^1, A^2) = \frac{1}{2}\{|0-0| + |1-1| + |1-1| + |1-1| +$$
$$+ |-1+1| + |0-0| + |1+1| + |1-1| +$$
$$+ |-1+1| + |-1-1| + |0-0| + |1-1| +$$
$$+ |-1+1| + |-1+1| + |-1+1| + |0-0|\} = 2$$

Обчислимо відстані між матрицями:

$$\Delta(A^2, A^3) = \frac{1}{2}\{|1+1| + |1-0| + |-1-1| + |-1-0| + |-1-0| + |1+1|\} = 5$$
$$\Delta(A^1, A^3) = \frac{1}{2}\{|1+1| + |1-0| + |-1-1| + |-1-0|\} = 3$$

(Легко бачити, що при обчисленні відстані досить включати тільки відрізняються елементи матриць).

Якщо в якості сумарної оцінки взяти A^1, то

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta(A^1, A^j) = 0 + 2 + 3 = 5,$$

при A^2 отримаємо

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta(A^2, A^j) = 2 + 0 + 5 = 7,$$

при A^3 отримаємо

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta(A^3, A^j) = 3 + 0 + 5 = 8.$$

В принципі потрібно розглянути всі можливі ранжування для знаходження дійсної медіани Кемені - Скеллі. Наприклад:

$$\mathrm{B} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

що відповідає системі переваг <1 ~ 2 ~ 3,4>. В цьому випадку

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta(B, A^j) = \Delta(B, A^1) + \Delta(B, A^2) + \Delta(B, A^3) = 8,$$

оскільки

$$\Delta(B, A^1) = 3; \Delta(B, A^2) = 3; \Delta(B, A^3) = 2,$$

$$R^{\Sigma} = <\omega_1 \succ \omega_2 \succ \omega_3 \succ \omega_4 >.$$

Не зупиняючись на повному переборі всіх можливих ранжувань, обмежимося констатацією факту мінімальної суми відстаней всіх ранжировок від ранжування A4, тобто визначимо її як медіану Кемені – Снелла [24,25].

2.2.3 Методи (принципи) голосування

В даному пункті зосередимось на розкритті сутності та виявленню особливостей використання математичного апарату та засобів здійснення процедури голосування[21,22].

Перш за все, зазначимо, що правила голосування ґрунтуються на принципі більшості, який стверджує, що якщо з двох альтернатив A і B більше половини агентів воліють альтернативу A, то вона повинна бути обрана за цим правилом. Будь-яке правило, яке задовольняє принципу більшості, є узагальненням цього принципу на число альтернатив, більше двох. Задача прийняття рішення для випадку голосування може розглядатися як окремий випадок задач багатокритеріального вибору на кінцевій множині альтернатив:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\},$$

а саме: задано N економічних агентів, кожен з яких володіє критерієм:

$$F_i(x): X \to \{1,2, \dots, m\},$$

де значення цільової функції i-го агента Fi (x) - це номер альтернативи x в порядку зменшення переваг цього агента.

Задача запропонувати правило прийняття рішення, яке будується на підставі цільових функцій агентів і може використовуватися на будь-якой підмножині множини X. Економічні агенти в правилах голосування називаються виборцями, а елементи множини вибору – кандидатами. Елемент множини X, який вибирається по заданому правилу вибору, називається переможцем за цим правилом. Для деяких агентів їх цільові функції можуть збігатися. Ці агенти об'єднуються в групи. Таким чином, умовою завдання прийняття рішень є набір груп виборців, для кожної з яких зазначено кількість вибірників в групі і вектор переваг для даної групи. Умова можна виписати у вигляді такої таблиці (див. табл. 2.2):

Таблиця 2.2 – Профіль переваг

N_1	N_2		N_k
i_{11}	i_{21}	…	i_{k1}
i_{12}	i_{22}	…	i_{k2}
…	…	…	…
i_{1m}	i_{2m}	…	i_{km}

У верхньому рядку таблиці вказані кількості виборців в групах, що мають однакові переваги, а в колонках перераховані кандидати в порядку убування переваг для цієї групи виборців, тобто:

$$t = F_s\ (i_{st}).$$

Така таблиця називається профілем переваг. Правило вибору повинно будуватися лише на інформації, яка міститься в профілі переваг. Будемо говорити, що кандидат b краще кандидата a, якщо сума величин N_i на тих колонках, в яких b зустрічається раніше a, більше, ніж сума цих величин в інших колонках профілю переваг. Наведемо найбільш відомі правила голосування. Причому правила вибору будемо розглядати як множинні, тобто допускається вибір більш ніж одного елемента з множини X. Правило абсолютної більшості: вибирається той кандидат, якого вважають за краще будь-якого іншого абсолютна більшість виборців

$$(\geq \tfrac{1}{2}N).$$

Це правило завжди можна застосувати для $N = 2$. Однак для $N > 2$ множина вибору може виявитися порожня. Правило відносної більшості вибирає ті елементи множини X, для яких потужність множини максимальна:

$$M_1(x) = \{i: F_i(x) = 1\}.$$

Визначимо бінарне відношення переваги p на множині X наступним чином:

– χ (x, y) потужність множини

$$\{i: F_i(x) \leq F_i(y)\};$$

– елемент *y* краще ніж елемент *x*

$$x, x \preceq y;$$

– тоді і тільки тоді, коли

$$\chi(x, y) \geq \frac{M}{2}.$$

Тобто не менше половини виборців вважають за кращого кандидата *y* ніж кандидат *x*. Ставлення ≤ є відношенням парного домінування на множині *X*. Легко показати, що при $N \geq 3$ відношення ≤, взагалі кажучи, не є відношенням порядку. Ряд правил голосування будується на основі відношення ≤.

Правило Кондорсе, вибирається той елемент (або елементи) $x \in X$, для якого $\forall y \in X$, $y \leq x$. Зауважимо, що правило Кондорсе часто призводить до порожнього множини вибору. Існує цілий клас правил вибору, які мають наступну властивість. Для тих задач, для яких існує єдиний кандидат, обраний за правилом Кондорсе, ці правила вибирають того ж самого кандидата.

Правило Копленда. Для кожного елемента $x \in X$ обчислюється оцінка Копленда

$$K(x) = \sum_{y \in X} \varepsilon(x, y),$$

де $\varepsilon(x, y) = \begin{cases} +1, & \text{якщо } \chi(y, x) > M/2 \\ -1, & \text{якщо } \chi(y, x) < M/2 \\ 0, & \text{якщо } \chi(y, x) = M/2 \end{cases}$

обирається елемент $x \in X$ з максимальною оцінкою Копленда.

Правило Сімпсона. Для кожного елемента x∈X обчислюється оцінка Сімпсона:

$$S(x) = \min_{y \in X} \chi(y, x).$$

Вибирається елемент з максимальною оцінкою Сімпсона. Правило порівнянь за бінарним деревом. Це правило можна застосовувати лише в тому разі, коли існує елементи x, y∈X, для яких x <y і y> x. Вибирається довільне бінарне дерево - зв'язний орієнтований граф без циклів з числом вершин ≥3, у якого кожна вершина, крім однієї - кореневої, має півступінь заходу (число дуг що входять) 1, а півступені результату (число вихідних дуг) або 2, або 0. Коренева вершина має півступені заходу 0. Вершини з півступені результату 0 називаються кінцевими. Кожній кінцевий вершині ставиться у відповідність елемент множини xєX. Правило вибору реалізується в кілька етапів. На кожному етапі вибираються дві кінцеві вершини, для яких дуги що входять мають загальний початок. Цьому початку ставиться у відповідність один з двох, приписаних кінцевим вершин, елементів x, y множині X, а саме: елемент x, якщо: y <x, в іншому випадку - y. Розглянуті вершини і дуги що входять до них видаляються з дерева. Процес повторюється до тих пір, поки не залишиться одна вершина. Вибирається елемент x, що відповідає цій вершині. Правило вибору за бінарним дереву називається повним, якщо для кожного елемента множини X знайдеться хоча б одна кінцева вершина, якої цей елемент приписаний. Відповідне бінарне дерево називається повним деревом порівнянь. Всі три перераховані правила Копленда, Сімпсона і повні правила порівнянь за бінарним дереву є випадками по Кондорсе. Всі ці правила побудовані на підставі відносини парнодомінованості. Інші велика група правил будується на основі згортки критеріїв F_i (x). А саме: визначається агрегований критерій за правилом:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} \Psi(F_i(x)). \qquad (*)$$

Рішення знаходиться з умови F (x) → max. Функцію F (x) називають числом очок кандидата x. Тут ψ - незростаюча функція, відмінна від константи:

$$\Psi: \{1,2,\dots,\mathrm{M}\} \to R^1.$$

Зокрема, критерій відносної більшості – це критерій саме такого виду за умови:

$$\Psi(\mathrm{t}) = \begin{cases} 1, \text{при } t = 1 \\ 0, \text{при } t \neq 1 \end{cases}.$$

Класичне правило Борда є правилом з підрахунком очок при:

$$\Psi(\mathrm{t}) = M - t$$

Критеріальні правила виду (*) називаються правилами з підрахунком очок. Ще одна група – двохетапних правил. На першому етапі по одному з правил з підрахунком очок визначаються перші два кандидата, з найбільшим числом очок. На другому етапі вибір здійснюється з цих двох кандидатів за правилом абсолютного більшості.

3 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ГОЛОСУВАННЯ ДЛЯ ОТРИМАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ

Процедури голосування мають багато форм, таких як голосування абсолютної більшості, мажоритарні виборчі системи, що схвалює голосування і багато інших[23-25]. Вони можуть застосовуватися не тільки на державному, але також і на муніципальному, і на регіональному рівнях. Широкий спектр застосування даних процедур робить їх дослідження і вдосконалення завданням незвичайною важливості. Кожна з них має свої переваги, які можуть бути по-різному використані в залежності від системи, в якій вони знаходять застосування. Тому важливо було розробити програмний продукт, який дозволив істотно скоротити час прийняття рішення

Розглянемо основні правила голосування в практичній площині. Нехай у нас проводиться голосування між трьома кандидатами. Назвемо їх a, b і c. У голосуванні беруть участь N чоловік, і нехай за умовою задачі N = 45. Кожен з учасників голосування має свої переваги, відповідно до яких він приймає рішення і віддає свій голос. Припустимо, що переваги деяких людей збігаються, і маємо наступні данні:

$$n_1=20 : a > b > c,$$
$$n_2=10 : b > c > a,$$
$$n_3=15 : c > b > a.$$

де n_i – число людей, що мають однакові вподобання. Вираз a > b означає, що даний виборець віддає перевагу кандидату a, і в ситуації вибору між a і b він схильний проголосувати за кандидата a.

Розглянемо наступні процедури голосування. Голосування відносної більшості. Найпростіший вид голосування. У своїй послідовності переваг виборець має лідера, якому він і віддає свій голос. Кожна людина голосує тільки за одного кандидата. Після проведення цієї процедури проводиться підрахунок голосів і людина, яка набрала найбільшу їх кількість, перемагає у виборах. Голосування буде безрезультатним лише в тому випадку, якщо кандидати наберуть рівну кількість голосів виборців. Застосуємо дану процедуру до нашого завдання. В ході голосування кандидат a отримає 20 голосів, кандидату b дістанеться 10 голосів, а кандидат c отримає 15 голосів. Очевидно, що переможе перший кандидат. Однак після такого голосування кількість людей, які залишаться незадоволені результатами дорівнюватиме 25, що більше половини від усієї кількості голосуючих. Даний факт говорить нам про те, що подібні вибори не можна назвати повною мірою справедливими, оскільки кандидат який переміг при попарному порівнянні з іншими програє кожному з них. Тому даний метод потребує модифікації.

Голосування абсолютної більшості. Дана процедура відрізняється від першої тим, що для перемоги кандидату необхідно набрати строго більше половини голосів виборців. Якщо в результаті голосування ця умова не виконується, то зазвичай організовується другий тур. Найчастіше в нього проходять двоє кандидатів, які набрали найбільшу кількість голосів у першому турі. Голосування абсолютної більшості застосовується при виборах президента країни в більшості країн світу, таких як, Франція, Португалія, Колумбія, Хорватія і т. і. Україна також входить до їх кількості. Застосуємо цю методику до задачі, описаної вище. При проведенні першого туру голоси розподіляться аналогічним чином. Однак кількість підтримують переміг в першому турі кандидата a менше 50% всіх голосуючих, тому виникає необхідність другого туру. Кандидат a набрав 20 голосів, кандидат c набрав 15 голосів, і саме вони вдвох проходять до другого туру. При голосуванні в другому турі ті ж 20 чоловік знову підтримають першого кандидата, 15 представників третьої групи переваг проголосують за кандидата c, тому вирішальними стануть голоси людей, які в першому турі підтримували другого кандидата. Для них краще перемога кандидата c, тому вони дадуть свої голоси за нього. Таким чином, третій кандидат отримає 15 + 10 = 25 голосів і отримає перемогу. З подібним результатом будуть згодні 56% виборців, умова абсолютної більшості виконується, і результати другого туру можуть бути визнані результатом виборів в цілому. Переваги даного виду голосування, а саме більш точне відображення волі більшості виборців, особливо важливі при великій роздробленості політичних поглядів в суспільстві і великій кількості різних переваг серед виборців. Факт відсіювання кандидатів в ході процедури виборів дозволяє в підсумку отримати найбільш помірний результат, що забезпечує максимально стабільний розвиток суспільства.

Голосування з послідовним винятком. Інакше цю методику називають "олімпійської системою". Процедура даного голосування також досить невибаглива. Будемо рахувати, що у виборах бере участь n кандидатів. Кожен кандидат послідовно, починаючи з першого, порівнюється з наступним і той що переміг в парному протистоянні виходить в наступний тур. Отже, всього проводиться n-1 турів. Переможець останнього туру стає переможцем всього голосування. Застосуємо цей метод до нашого завдання. У першому турі проводиться голосування між першим і другим кандидатами, тобто a і b відповідно. Перший кандидат отримує 20 голосів, другий - 25. Отже, подальшу боротьбу продовжує кандидат b, кандидат a вибуває. У другому турі його суперником стає кандидат c. Голоси розподіляються наступним чином: b - 30, c - 15. У цьому протистоянні також перемагає кандидат b. Таким чином, він здобуває перемогу і у виборах в цілому. Подібна процедура відбору знаходить широке застосування не тільки в питаннях голосування, але і при відборі в багатьох спортивних заходах.

Парадокс Кондорсе. Одним з перших, хто зацікавився системами голосування, був французький вчений – маркіз де Кондорсе за часів, коли Франція переходила від абсолютної монархії до нової системи управління, що дає змогу кожному виборцю голосувати вільно і таємно. Згідно Кондорсе, справедливе визначення переможця можливе шляхом попарного порівняння кандидатів за кількістю голосів, поданих за них. Принцип Кондорсе, який визначає переможця в демократичних виборах, полягає в наступному: кандидат, який перемагає при порівнянні один на один з будь-яким з інших кандидатів, є переможцем на виборах. Розглянемо приклад голосування в зборах представників з 60 чол. Нехай на голосування поставлено три кандидата: А, В і С, і голоси розподілилися так (див. табл. 3.1) Побудуємо таблицю:

Таблиця 3.1 – Результати голосування

Кількість голосуючих	Вподобання
23	A>C>B
19	B>C>A
16	C>B>A
2	C>A>B

Порівняємо переваги відносно кандидатів. Беремо А і С. А кращий в порівнянні з С на думку 23 осіб, в той час як С віддають перевагу перед А: 19+16+2=37. Тобто С > А. Порівнюючи А і В, В і С одержимо В > А (19+16 проти 23+2) і С > В (23+16+2 проти 19). В результаті отримаємо С >В > А і перемагає кандидат С. Зауважимо, що рішення, прийняте відповідно до принципу Кондорсе, відрізняється від того, що було б прийняте простою більшістю, коли переміг би кандидат А. Однак незабаром Кондорсе зіткнувся з парадоксом, який отримав згодом його ім’я. Парадокс полягав у тому, що переваги виборців, виявлені в ході голосування, суперечать один одному.

Таблиця 3.2 – Результати голосування

Кількість голосуючих	Вподобання
23	A>B>C
17	B>C>A
2	B>A>C
8	C>B>A
10	C>A>B

Порівняємо переваги відносно кандидатів. Більшість виборців висловилися, що C > A (17+10+8 проти 23+2), B > C (23+17+2 проти 10+8) і 195 A > B (23 +10 проти 17+2+8). Отже, ми прийшли до протиріччя, до нетранзитивного відношенню: A > B > C > A. Зіткнувшись з цим парадоксом, Кондорсе запропонував вибирати «найменше зло», а саме – ту думку, яку підтримують більшість голосів (обраним слід вважати A).

Розглянемо варіант процедур и голосування, запропонований Борда. Згідно з ним, кожен, хто голосує ранжує кандидатів або предмети вибору в порядку переваги. Результати голосування виражаються у вигляді кількості балів, набраних кожним з кандидатів. Нехай кількість кандидатів рівне N. Тоді за перше місце присуджується N балів, за друге – N–1,..., нарешті, за останнє – один бал. Голоси за кожного кандидата підсумовуються, і той, хто отримав найбільшу кількість голосів, оголошується переможцем. Застосуємо метод Борда до прикладу з таблиці. Підрахуємо кількість балів для кожного з кандидатів: A: 23*3+2*2+19*1+16*1=108; B: 19*3+16*2+23*1+2*1=114; C: 16*3+2*3+23*2+19*2=138. Відповідно до методу Борда ми повинні оголосити переможцем кандидата C. Однак і з методом Борда, як і з принципом Кондорсе, виникають проблеми. Припустимо, що результати голосування у виборчому органі представлені нижче (див. табл. 3.3).

Таблиця 3.3 – Результати голосування

Кількість голосуючих	Вподобання
31	A>C>B
10	B>C>A
17	C>B>A
2	C>A>B

Підрахувавши бали відповідно за методом Борда. отримаємо: A (31*3+10+17+2*2)=124, B (31+10*3+17*2+2)=97, C (31*2+12*2+17*3+2*3)=143. Відповідно до методу Борда переможцем треба оголосити кандидата С. Однак в даному випадку явним переможцем є кандидат А, який набрав абсолютну більшість голосів: 31 з 60. Тобто, метод Борда також потребує уточнень в ситуаціях, коли один з кандидатів набрав абсолютну більшість голосів. Метод Борда часто використовують при обранні кандидатів на посаду і рідко на іншого роду виборах. Цікаво, що метод Борда не завжди дає можливість визначити переможця по Кондорсе. Спробуємо розібратися з виявленими парадоксом. Для цього розглянемо вибір між трьома альтернативами, який здійснюють три людини (див. табл. 3.4).

Таблиця 3.4 – Ранжування альтернатив

	Альтернатива А	Альтернатива В	Альтернатива С
Іваненко	2	1	3
Петренко	1	3	2
Сидоренко	3	2	1

Альтернативи ранжуються за їх перевагами для учасників голосування (3 вважаємо найвищим рангом, 1 – нижчим). Оскільки просте голосування не може виявити переважну альтернативу, доводиться вдаватися до їх попарного порівняння. При виборі між альтернативами А і В, перемагає А, за неї голосують Іванов і Сидоров. При виборі між B і C перемагає B, за неї голосують Петров і Сидоров. Тобто, A > B і B > C. Здавалося б, при виборі між A і C повинна перемогти A. Але ні... Порівняння переваг показує, що перемагає C. Це відбувається через те, що переваги деяких виборців (в даному випадку Іванова) не є величиною з єдиним максимумом. Щоб зрозуміти, що це означає, уявімо собі вісь на якій розташовані альтернативи A, B, і C. Переваги Петрова мають один максимум (B). Те ж можна сказати і про Сидорова, тому що віддаляючись від своєї кращої альтернативи – A – він все більше втрачає потенційну користь. Однак переваги Іванова виглядають інакше: його кращий варіант – C, тому просування до B не приносить йому користі, але подальше просування до A – приносить. Взагалі кажучи, раціональна поведінка індивідів жодним чином не означає наявності у них переваг з одним максимумом. Наприклад, в роки війни у В’єтнамі часто стверджувалося, що деякі американці виступають або за негайне виведення військ, або за радикальне збільшення контингенту для досягнення повної перемоги. Отже, навіть якщо індивідуальний вибір щодо будь-яких альтернатив голосування (три альтернативи і більше) раціональний, колективний вибір може не володіти властивістю транзитивності, тобто з виконання умов A > B і B > C не буде випливати, що A > C. У цьому випадку результат голосування буде визначатися використанням тієї чи іншої процедури голосування. Тоді, організовуючи певним чином цю процедуру, можна управляти вибором переможця.

Другий тур. Наведені приклади показують, що парадокси при голосуванні виникають не тільки у випадку, коли переможець визначається за принципом абсолютної більшості голосів. Однак такий випадок нетиповий для більшості виборів в демократичних країнах. Зазвичай кількість кандидатів більша, ніж два, і випадки, коли хтось із них відразу ж отримує підтримку абсолютної більшості виборців, досить рідкісні. Розглянемо практику, що широко застосовується голосуванні у два етапи, коли до другого туру виборів виходять два кандидати, за яких проголосувало найбільша кількість виборців (див. табл. 3.5).

Таблиця 3.5 – Результати голосування

Кількість голосуючих	Вподобання		Кількість голосуючих	Вподобання
23	A>B>C		23	A>B>C
17	B>C>A		17	B>C>A
2	B>A>C		2	A>B>C
10	C>A>B		10	C>A>B
8	C>B>A		8	C>B>A

Відповідно до власних уподобань, у другий тур виходять А (23 голоси) і В (17+2=19 голосів), після чого перемагає А. Припустимо тепер, що початкові перші позиції А трохи посилилися (табл. праворуч), і віддавши перевага двох виборців (в 3-му рядку) виглядають тепер як А -> В-> С. Тоді до другого туру виходять А (25 голосів) і С (18 голосів), після чого перемагає С! Таким чином, використання голосування в два тури також не знімає всіх питань. У подібних ситуаціях велике значення набуває той, хто складає порядок денний – той, хто вирішує, які альтернативи повинні ставитися на голосування і може під підібрати варіанти так, щоб отримати результат, відповідний його власним уподобанням. Так в США сенаторів спочатку вибирали не прямим всенародним голосуванням, а законодавчими органами відповідного штату. У тому, щоб ввести пряме голосування на пост сенатора, полягала 17-а поправка до Конституції США, яка була прийнята в 1913. Проблема полягала в тому, що південні сенатори побоювалися, що коли федерація візьме вибори сенаторів під свій контроль, то північні республіканці зроблять що-небудь жахливе, наприклад, допустять до участі в виборах чорношкірих. Був досягнутий компроміс: законопроект, який вводив прямі вибори сенаторів, але містив поправки, що обмежують контроль федерального уряду над виборами в південних штатах. Його підтримувала більшість (це була можливість А), і при прямому голосуванні між цим проектом і тим, щоб взагалі не проводити прямі вибори (можливість B), проект A набрав би більшість голосів. Однак сенатор Сазерленд, лідер меншості, яка було проти виборів сенаторів взагалі, вніс поправку: пропозиція про прямі вибори сенаторів без будь-яких особливих умов для Південних штатів (можливість C). Сазерленд спочатку запустив голосування між A і C. Меншість Сазерленда проголосувала за C, північні республіканці теж проголосували за C, і C перемогло A. Потім постав вибір між C і B, і Сазерленд «раптово» змінив точку зору і проголосував за B, тобто проти прямих виборів взагалі. Поправка C виконала свою функцію: спочатку вибила підтримуваний більшістю проект A, а потім не пройшла на наступних виборах. Такий прийом отримав назву «Поправка-вбивця». До подібних прийомів відноситься і практика використання «технічного кандидата». Теорема Ерроу. Систематичне дослідження всіх можливих систем голосування провів у1951 році Кеннет Ерроу з Стенфордского університету. Він поставив питання в найбільш загальному вигляді: чи можна створити таку систему голосування, щоб вона була одночасно раціональною (без протиріч), демократичною (одна людина – один голос) і вирішальною (давала можливість здійснити вибір)? Замість спроб винаходу такої системи Ерроу запропонував набір вимог, аксіом, яким ця система повинна задовольняти. Ці аксіоми повинні бути прийнятними з точки зору здорового глузду і допускати математичні вирази у вигляді деяких умов. На основі цих аксіом Ерроу спробував у загальному вигляді довести існування системи голосування, що задовольняє одночасно трьом перерахованим вище принципам. Розглянемо ці аксіоми:

– аксіома універсальності, для будь-якого даного ранжування існує такий набір індивідуальних ранжувань, що їх підсумкове ранжування збігається з даним;

– аксіома монотонності, якщо один з голосуючих змінив свою думку на користь кандидата A, а думки інших не змінилися, то в підсумковому ранжуванні положення A не може погіршитися, з цих аксіом, зокрема, випливає, що якщо всі індивідуальні ранжування збігаються, то і підсумкова збігається з ними, тобто колективний вибір точно повторює одностайну думку всіх голосуючих;

─ аксіома незалежності, результат порівняння між двома об’єктами А і В має залежати тільки від результатів порівняння їх в індивідуальних ранжуваннях, але не від порівнянні їх з іншими об’єктами.

Нехай виборець вважає, що з пари кандидатів А і В кращим є А. Ця перевага не повинна залежати від ставлення виборця до інших кандидатів. Третя аксіома досить приваблива, проте не настільки очевидна з точки зору повсякденної людської поведінки. Так, третя аксіома Ерроу порушується суддями у фігурному катанні. Даючи порівняльні оцінки двом сильним фігуристам в одиночному катанні, вони намагаються врахувати можливість гарного виступу третього сильного кандидата, залишаючи йому шанси стати переможцем. Проте сама можливість пред'явлення вимоги незалежності до системи голосування в якості обов’язкового не викликає сумніву. Визначивши аксіом – бажані властивості системи голосування – необхідно знайти саму цю систему (правила голосування), або хоча б довести можливість її існування.

Перш за все, відзначимо, що такі правила існують. Наприклад, можна виділити одного з голосуючих і завжди вибирати його ранжування в якості підсумкового[1]. Такі правила природно називати диктаторськими. Ерроу сформулював свої результати у вигляді теореми: будь-які системи голосування, що задовольняють аксіомам універсальності, монотонності та незалежності, засновані на диктаторському правилі. Додавання вимоги виключення диктатора до системи аксіом призводить до неможливості створення системи голосування, що задовольняє всім аксіомам Ерроу. Тому результат Ерроу називають «теоремою неможливості». Результати, виявлені Ерроу, отримали широку популярність. Вони розвіяли надії знайти досконалу систему голосування. Проте, результат Ерроу, ще не означає остаточного вирішення цієї проблеми. Близько 60 років математики та економісти роблять спроби змінити вимоги Ерроу, «пом’якшити» аксіоми, щоб уникнути виводу, настільки неприємного для демократичної системи голосування. Однак системи аксіом, що виходять виявляються навіть більш спірними, ніж початкові аксіомиЕрроу. Звернемо увагу на ще одну грань результатуЕрроу. Проблема створення ідеальної системи голосування – це, по суті, проблема ранжування. Переможець голосування повинен бути найкращою з можливих альтернатив. Таким чином, результат Ерроу показує нерозв'язність проблеми вибору колективом найкращого рішення.

Історично першою виборчою системою стала мажоритарна система. Мажоритарна система (від французького слова majorite – більшість) – загальна назва виборчих систем, в основу яких, при визначенні результатів голосування, закладено принцип більшості. За цією системою обраним вважається той, за кого було подано більшість голосів. Залежно від вимог до величини необхідного для обрання більшості голосів розрізняють мажоритарні системи відносної, абсолютної і кваліфікованої більшості. При мажоритарній системі відносної більшості потрібно зібрати просту більшість голосів, тобто кількість голосів більша, ніж у опонентів. Така система застосовується, наприклад, на парламентських виборах у Великобританії і США. Дана виборча система має низку переваг:

– вона результативна, тобто кожне депутатське місце заміщається відразу, в результаті тільки одного голосування;

– вона економна, оскільки немає необхідності проводити повторне голосування в округах;

– зрозуміла виборцям (на відміну від змішаних і нетрадиційних систем);

– вона забезпечує пряме представництво для жителів конкретного виборчого округу, виборці можуть краще знати свого депутата, який представляє їх інтереси в представницьких органах;

– вона дає можливість великим партіям отримати «тверду» більшість і сформувати стійкий уряд.

Однак мажоритарна система відносної більшості має ряд істотних, з точки зору представництва, недоліків. Дана виборча система на рівні виборчого округу призводить до втрати голосів виборців, іноді досить значної. Припустимо, по одному округу балотуються 4 кандидати, і голоси виборців розподілилися між ними в такий спосіб: А – 11%; Б – 23%; В – 34%; Г – 32%. 200 Переможцем на виборах буде визнаний кандидат В, який набрав 34% голосів виборців. Голоси, подані за інших кандидатів, в цілому складають 66%. Таким чином, голоси 2/3 виборців залишаються неврахованими і не представленими, а депутат у виборному органі представляє лише 1/3 виборців свого округу. Якщо в окрузі боротьбу ведуть троє або більше претендентів, кандидат, який отримав менше половини від загальної кількості голосів, може отримати мандат завдяки тому, що інші голоси «розпорошуються» між його суперниками. Наприклад, в Великобританії на виборах в 1992 році в окрузі Інвернесс в важкому протистоянні з трьома іншими партіями гору взяли ліберальні демократи, які набрали всього 26% голосів. Застосування мажоритарної системи відносної більшості на національному рівні може призвести до суттєвого спотворення результатів виборів. Англійські вчені Е. Лейкман і Дж. Д. Ламберт, досліджуючи механізм дії виборчої системи відносної більшості в Англії, писали: «Часто кожні вибори виявляють приголомшливу невідповідність між нацією, якою її відображає голосування, і палатою громад, що утворюється в результаті цього голосування». Таке «відображення» зазвичай нагадує криве дзеркало: кожна риса нібито відповідає певною мірою оригіналу, але одна з них несподівано набуває величезних розмірів, тоді як інша, можливо не менш важлива, стає ледь помітною». Наприклад, в 1997 році на парламентських виборах у Великій Британії партія лейбористів отримала 64% мандатів – такої більшості ще ніхто не отримував в історії сучасного парламентаризму, і при цьому за неї проголосувало лише 44% виборців. Консерватори отримали відповідно 31% голосів і 25% мандатів, а ліберальні демократи, яких підтримало 17% виборців, – всього 7% місць. (Кандидати від інших партій набрали 7% голосів і 4% місць). У деяких випадках, при використанні мажоритарної виборчої системи, може статися і так, що політична партія, за яку голосує більшість виборців, отримає в парламенті меншість місць. Таким чином, розкидані по країні меншини не можуть домогтися більшості в кожному окремо взятому окрузі. Щоб «проштовхнути» свого депутата в парламент, потрібно компактне проживання. Крім того, можливі махінації з «нарізкою» виборчих округів (джеримендерінг). Мажоритарна система відносної більшості не виконує також умову рівного представництва від округів. Нерівність в представництві може проявлятися, по-перше, в тому, що від різних округів можуть обиратися депутати, за яких проголосувала різна кількість виборців. Одні депутати можуть набрати менше половини, інші 90% всіх поданих голосів. По-друге, одні виборчі округи можуть перевершувати інші за чисельністю виборців і голоси виборців з різних округів можуть мати нерівну «вагу». Наприклад, якщо в одному з округів – дві тисячі виборців, а в іншому – п’ятсот, то в більше населеному окрузі норма представництва дорівнює 0,5 на тисячу виборців, а в менш населеному – 2 на тисячу виборців. Розглянемо тепер механізм дії пропорційної системи. Відповідно до цієї системи кожна партія, що бере участь у виборах, отримує кількість депутатських місць, пропорційну кількості поданих за неї голосів виборців. Пропорційна виборча система діє тільки в багатомандатних виборчих округах, і голосування ведеться за партійними списками. Сьогодні багато країн використовують певну форму пропорційної системи. У їх числі Німеччина, Італія, Іспанія, Швеція і Швейцарія. В нашій країні за пропорційною системою обирається половина депутатів Верховної Ради (225) – по загальнонаціональному багатомандатному виборчому округу. Існують різні способи пропорційного розподілу мандатів. Один з них – метод, заснований на методі виборчої квоти. Виборча квота обчислюється шляхом ділення загальної кількості голосів виборців, поданих в окрузі, на кількість мандатів, що підлягають розподілу. Іншими словами, визначається мінімальна кількість голосів виборців, яку необхідно набрати партії, щоб отримати один мандат. Цей спосіб визначення квоти відомий як метод Томаса Гера (англійського адвоката, який запропонував його в 1855 році). Припустимо, що в багатомандатному окрузі за вісім депутатських мандатів ведуть боротьбу п’ять партійних списків кандидатів, за які в цілому подано 400 тис. голосів виборців (див. табл. 3.6)[23]. Список партії А отримав 127 тис. голосів, список партії Б – 93 тис., список партії В – 87 тис., список партії Г – 66 тис., і список партії Д – 27 тис. голосів.

Квота Гера в цьому випадку складе 400 000: 8 = 50 000. Відповідно до отриманої квоти розподіляємо мандати між партіями. Для цього кількість голосів виборців, поданих за кожен партійний список кандидатів, ділимо на виборчу квоту:

Таблиця 3.6 – Результати голосування

Партія	Кількість голосів поділена на квоту	Кількість мандатів	Залишок голосів
А	127 000 : 50 000	2	27 000
Б	93 000 : 50 000	1	43 000
В	87 000 : 50 000	1	37 000
Г	66 000 : 50 000	1	16 000
Д	27 000 : 50 000	0	27 000

З восьми мандатів відразу розподілити вдалося лише п’ять. Виникає проблема розподілу решти мандатів. Крім того, зберігається великий залишок «незатребуваних» голосів, який в сумі складає 150 тис. (37,5%). Для подальшого розподілу мандатів може використовуватися, наприклад, правило найбільшого залишку. Правило найбільшого залишку вимагає передати нерозподілені мандати тим партійними списками кандидатів, у яких є найбільші залишки голосів виборців. У нашому випадку по одному мандату отримають партійні списки Б, В і Д. Остаточні результати будуть такі: А – 2; Б – 2; В 2; Г – 1; Д 1. Партійний список Д, який зібрав 27 тис. голосів виборців, отримав один мандат. Партійний список Г також отримав один мандат, хоча за нього проголосувало 66 тис. виборців, тобто в 2,4 рази більше. Партійний список А, який зібрав 127 тис. голосів виборців, отримав тільки два мандати.

Таким чином, відбулося відхилення від пропорційності. Крім того, при застосуванні пропорційної системи необхідно враховувати механізм розподілу мандатів всередині партійних списків. Існує два основні варіанти розподілу мандатів всередині партійного списку: система «жорстких» і система «гнучких» списків. При застосуванні системи «жорстких» списків, виборець голосує виключно за партійний список. Такий варіант потенційно збільшує вплив центрального керівництва партій, оскільки саме лідери визначають порядок розташування кандидатів. При «жорстких» списках можливе використання «технології паровоза», коли на чільне виборчого списку ставляться популярні особи, які потім відмовляються від своїх мандатів, в результаті чого в парламент потрапляють нікому не відомі особистості з кінця списку («вагони»). Якщо партійні списки «жорсткі» і виборці голосують за весь список, то слабшає зв’язок між виборцями і їх виборними представниками. Ця проблема не виникає в разі «гнучких» партійних списків. Система «гнучких» списків дає виборцям можливість змінити порядок розташування кандидатів у списках. Простим варіантом цієї системи є «список з порядковими номерами з правом вибору одного кандидата», який використовується, наприклад, в Бельгії та Данії. Кожна партія представляє список кандидатів під номерами. Виборці можуть відзначити в бюлетені або весь список, або окремого кандидата зі списку. Голосування за окремих кандидатів приєднується до голосів, відданих за партію, для пропорційного розподілу місць, а також просуває кандидата вгору за списком. В системі, що використовує «список з порядковими номерами з правом вибору кількох кандидатів» виборці можуть голосувати за трьох або чотирьох кандидатів із партійного списку.

ВИСНОВКИ

Дана робота присвячена моделювання та алгоритмізації процесу прийняття рішень методами групової роботи та їх застосуванню до вирішення задач прийняття рішень, що виникають при розгляді різноманітних виборчих процесів. Розглянуті в кваліфікаційній роботі схеми можуть знайти гідне застосування і при виборі президента фірми або кампанії, виборі глави ради директорів, виборі директора школи та інших подібних ситуаціях.. За результатами проведеного дослідження можна зробити висновок, що в сучасних умовах використання теорії групового вибору для вирішення проблем з різних сфер суспільної та управлінської діяльності є досить актуальним. Це зумовлено наступним. В умовах вибору при наявності невизначеності та ризику відносно майбутніх результатів прийняття рішень дуже часто нелегко прийняти рішення і обрати те чи інше рішення. Використання системного підходу дає змогу за допомогою використання відповідних математичних методів прийняти обґрунтоване рішення про доцільність використання того чи іншого правила голосування. За допомогою ж теорії групового вибору, зокрема теорії голосування, можна розв'язувати вказані задачі кількома методами і з них обирати найбільш ефективні та обґрунтовані рішення.

В ході проведення дослідження було надано визначення теорії прийняття рішень та висвітлено основне її завдання та значення в сфері пошуку оптимальних рішень. Так, у першому розділі розглянуті основні поняття теорії прийняття рішень, надані основні означення та гіпотези, визначено поняття мети та альтернативи в теорії прийняття рішень, наведено класифікацію задач а методів прийняття рішень а також викладено основи теорії відношень на основі яких побудовано принципи та підходи до отримання оптимальних рішень методами групової роботи.

У другому розділі розглянуті експертні та групові методи, проведено аналіз та умови їх застосування, а також переваги та недоліки.

У третьому розділі наведена методика отримання оптимальних рішень груповими методами прийняття рішень. Крім того, в даній роботі було проілюстровано практичне застосування основних методів (правил) теорії голосування. Так, третій розділ кваліфікаційної роботи присвячено ознайомленню з практичним застосуванням методів теорії голосування до вирішення проблем практики. На основі розглянутих правил прийняття рішень у цьому розділі також представлено розроблений програмний продукт, за допомогою якого було проведено декілька обчислювальних експериментів з визначення оптимальних рішень та зроблено відповідні висновки за отриманими результатами по кожній з розглядуваних задач. Незважаючи на те, що програма має деякі обмеження стосовно розмірності задачі вибору, розроблений програмний продукт дозволяє неупереджено, ефективно та швидко прийняти оптимальне рішення, яке виключає будь-який ризик. Тому цей продукт може буди корисним при прийнятті управлінських та інших рішень у сферах, де ризик при прийнятті рішення потрібно мінімізувати, а також може бути застосований у навчальному процесі при вивченні курсів, пов’язаних з теорією прийняття рішень.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Задача Эрроу в теории группового выбора (анализ проблемы). Автоматика и телемеханика. 1983. № 9. С. 127-151.

2. Алескеров Ф.Т., Субочев А.Н. Об устойчивых решениях в ординальной задаче выбора. Доклады Академии Наук. 2009. Т. 426. №3. С. 318-320.

3. Субочев А.Н. Доминирующие, слабоустойчивые и непокрытые множества: свойства и обобщения. Автоматика и Телемеханика. 2010. №1. С. 130-143.

4. Мюллер Д. Общественный выбор. Москва: Изд. дом ГУ-ВШЭ, 2007. 994 с.

5. Катренко А. В., Пасічник В. В., Пасько В. П. Теорія прийняття рішень: підручник. Киев: BHV, 2009. 447 с.

6. Дмитриенко В. Д., Кравец В. А., Леонов С. Ю. Введение в теорию и методы принятия решений: учеб. Пособие. Харьков: ХПИ, 2008. 141 с.

7. Приймак В. М. Прийняття управлінських рішень: навч. посібник. Київ: Атіка, 2008. 240 с.

8. Aleskerov F., Kurbanov E. A Degree of Manipulability of Known Social Choice Procedures. Current Trends in Economics: Theory and Applications / Eds. Alkan A., Aliprantis Ch., Yannelis N. New York: Springer-Verlag, 1999. P. 13-27.

9. Данелян Т.А. Формальные методы экспертных оценок. Статистика и экономика. 2015. № 1. С. 183–185.

10. Кемени Дж., Снелл Дж. Кибернетическое моделирование. Москва: Сов. Радио, 1972. 192 с.

11. Литвак Б.Г. Экспертная информация: методы получения и анализа. Москва: Радио и связь, 1982. 184 с.

12. Панфилова А. П. Мозговые штурмы в коллективном принятии решений. Москва: Академия 2005. 192 с.

13. Лесков С.Л. Мозговой штурм. Москва: Изд-во МГУ, 2012. – 636 с.

14. Урманцева А.Ю. Мозговой штурм. Избранные дискуссии. Москва: Вектор, 2013. 336 с.

15. Цезарани Дж. От мозгового штурма к большим идеям. Москва: Фаир-Пресс, 2005. 224 с.

16. Туник Е.Е. Лучшие тесты на креативность. Диагностика творческого мышления. Санкт-Петербург, 2013. 320 с.

17. Смирнова Ю.А. Метод Дельфи, как инструмент эффективного стратегического планирования и управления. Электронный вестник Ростовского социально-экономического института. 2015. Вып. 3-4. С.954– 960.

18. Бакланова Ю. О. Назарова Н.Л. Применение современных методов прогнозирования инновационной деятельности в российской практике. Современные технологии управления. 2011. № 12 (12). С. 1-5.

19. Дроздов Н.Д. Системный анализ [Электронный ресурс]. URL: https://gtmarket.ru/concepts/7111 (дата зверненя : 01.09.2019)

20. Михайлова В. М. Применение метода «дельфи» Как инструмента прогнозирования развития рынка. Международный научно-исследовательский журнал. 2019. № 3 (81). С. 106—110.

21. Гевко І. Б. Методи прийняття управлінських рішень: Підручник. Київ: Кондор, 2009. 187 с.

22. Эддоус Р., Стенсфилд М. Методы принятия решений. Москва: Инфра, 2000. 590 с.

23. Деордица Ю. С. Модели и методы принятия решений. Луганск: ВНУ, 2005. 64 с.

24. Бродецкий Г. Л. Системный анализ в логистике, выбор в условиях неопределённости. Москва: Academia, 2010. 336 с.

25. Система пропорционального представительства политических партий Jurisprudence.Club©.URL:https://jurisprudence.club/konstitutsionnoe-uchebnik/sistema-proportsionalnogo-predstavitelstva-56225.html (дата звернення: 10.12.2019).

ДОДАТОК А

Код програми «Голосування»

```
mat = Array.new(30)
puts "Введіть матрицю"
#for i in 0..5 do
#   mat[i] = gets.to_i
#end
#
#for i in 6..29 do
#   mat[i] = gets.chop
#end

mat = [4,3,4,9,3,2,
       "a", "b", "b", "c", "d", "a",
        "b", "c", "a", "d", "b", "d",
        "c", "d", "d", "a", "c", "c",
         "d", "a", "c", "b", "a", "b" ]

puts "Введена матриця:"
puts "Група I II III IV V VI"
print "кількість "
for i in 0..5 do
   print mat[i]
   print "  "
end
puts
print "1 місце "
for i in 6..11 do
   print mat[i]
   print "  "
end
puts
print "2 місце "
for i in 12..17 do
   print mat[i]
   print "  "
end
puts
print "3 місце "
```

```
for i in 18..23 do
   print mat[i]
   print "  "
end
puts
print "4 місце "
for i in 24..30 do
   print mat[i]
   print "  "
end

puts
puts "Правило відносної більшості"

a = 0
b = 0
c = 0
d = 0
for i in 0..5 do
          if(mat[i + 6] == "a")
             a = a + mat[i]
          elsif(mat[i + 6] == "b")
             b = b + mat[i]
          elsif(mat[i + 6] == "c")
             c = c + mat[i]
          else
             d = d + mat[i]
          end
end

if(a>b and a>c and a>d)
  puts "Переміг a"
elsif(b>a and b>c and b>d)
  puts " Переміг b"
elsif(c>a and c>b and c>d)
  puts " Переміг c"
elsif(d>a and d>b and d>c)
  puts " Переміг d"
else
  puts "немає жодного переможця"
end
```

```
puts
puts "Правило голосування з послідовним виключенням"
puts "Порядок a->b->c->d"
a, b, c, d = 0, 0, 0, 0


def iskl(a,b, mat, name1, name2)
j = 0
while(j < 6)
        i = 6 + j
        j = j + 1
        while(i < 30)
          if(mat[i] == "a")
                ai = i
          elsif(mat[i] == "b")
                bi = i
          end
        i += 6
        end

        if(ai < bi)
          a += mat[j - 1]
#puts "a= #{a}"
        else
          b += mat[j - 1]
#puts "b= #{b}"
        end

end

if(a > b)
  puts " Переміг #{name1}  #{a} > #{b} "
  return "a"
else
  puts " Переміг #{name2}  #{a} < #{b}"
  return "b"
end
end



#1 тур

if(iskl(a,b, mat, "a", "b") == "a")
  if(iskl(a, c,mat, "a", "c") == "a")
```

```
    if(iskl(a, d, mat, "a", "d") == "a")
      puts "Заключний переможець a !"
    else
      puts " Заключний переможець d !"
    end
  else
    if(iskl(c,d,mat, "c", "d") == "c")
      puts " Заключний переможець c !"
    else
      puts " Заключний переможець d !"
    end
  end
else
  if(iskl(b, c,mat, "b", "c") == "b")
    if(iskl(b, d,mat, "b", "d") == "b")
      puts " Заключний переможець b !"
    else
      puts " Заключний переможець d !"
    end
  else
   if(iskl(c,d,mat, "c", "d") == "c")
     puts " Заключний переможець c !"
   else
     puts " Заключний переможець d !"
  end
  end
end




##################################
#Правило Борда
##################################
puts "Правило Борда"
puts
a,b,c,d = 0,0,0,0

def bord(var, name, mat)
          for i in 6..11
            if (mat[i] == name)
              var += mat[i - 6] * 3
            end
          end
```

```
      for i in 12..17
          if (mat[i] == name)
            var += mat[i - 12] * 2
          end
        end
      for i in 18..23
          if (mat[i] == name)
            var += mat[i - 18]
          end
        end
  return var
end



a = bord(a, "a", mat)
b = bord(b, "b", mat)
c = bord(c, "c", mat)
d = bord(d, "d", mat)


if(a > b and a > c and a > d)
   puts "Переможець a с #{[a,b,c,d].max} голосами"
elsif(b > a and b > c and b > d)
   puts " Переможець b с #{[a,b,c,d].max} голосами"
elsif(c > a and c > b and c > d)
   puts " Переможець c с #{[a,b,c,d].max} голосами"
elsif(d > a and d > c and d > b)
   puts " Переможець d с #{[a,b,c,d].max} голосами"
else
   puts "Декілька кандидатів набрали рівну кількість голосів"
end




#######################
##Процедура Кондорсе
#######################



puts "Процедура Кондорсе"
puts
a,b,c,d = 0,0,0,0
```

```
if(((puts " Порівнюємо a і b") or iskl(a,b, mat, "a", "b") == "a") and ((puts "
Порівнюємо a і c") or iskl(a,b, mat, "a", "c") == "a") and
(puts " Порівнюємо a і d" or iskl(a,b, mat, "a", "d") == "a"))
  puts "Переміг a"
elsif((puts " Порівнюємо b і a" or iskl(a,b, mat, "b", "a") == "b") and (puts "
Порівнюємо b і c" or iskl(c,b, mat, "c", "b") == "b") and
(puts " Порівнюємо b і d" or iskl(d,b, mat, "d", "b") == "b"))
  puts "Переміг b"
elsif((puts " Порівнюємо c і a" or iskl(c,a, mat, "a", "c") == "c") and (puts "
Порівнюємо c і b" or iskl(c,b, mat, "c", "b") == "c") and
 (puts " Порівнюємо c і d" or iskl(c,d, mat, "c", "d") == "c"))
  puts "Переміг c"
elsif((puts " Порівнюємо d і a" or iskl(d,a, mat, "d", "a") == "d") and (puts "
Порівнюємо d і b" or iskl(d,b, mat, "d", "b") == "d") and
(puts " Порівнюємо d і c" or iskl(d,c, mat, "d", "c") == "d"))
  puts "Переміг d"
else
  puts "Парадокс Кондорсе"
end
```

Результат:

Введіть матрицю
Введена матриця:
Група I II III IV V VI
кількість 4 3 4 9 3 2
1 місце a b b c d a
2 місце b c a d b d
3 місце c d d a c c
4 місце d a c b a b
Правило відносної більшості
Переміг c

Правило голосування з послідовним виключенням
Порядок a->b->c->d
Переміг a 15 > 10
Переміг a 15 > 10
Переміг a 15 > 10
Заключний переможець a !
Правило Борда

Переміг c с 42 голосами
Процедура Кондорсе

Порівнюємо a и b
Переміг a 15 > 10
Порівнюємо a и c
Переміг a 15 > 10
Порівнюємо a и d
Переміг a 15 > 10
Переміг a