МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра фундаментальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ПЕРЕТВОРЕННЯ СИСТЕМИ ГААРА ПІД ДІЄЮ ОПЕРАТОРА МНОЖЕННЯ НА ФУНКЦІЮ У ПРОСТОРІ $L_2[0,1]$»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1118
Спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми математика
М.Л. Маляренко
(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Красікова І.В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Стєганцева П.Г.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет Математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти Магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма Математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної математики,
д.т.н., доцент
________________ Гребенюк С.М.
(підпис)

« 10 » вересня 2019 р.

ЗАВДАННЯ НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Маляренко Марині Леонідівні

(прізвище, ім’я та по батькові)

1. Тема роботи Перетворення системи Гаара під дією оператора множення на функцію у просторі $L_2[0,1]$.

керівник роботи Красікова Ірина Володимирівна

(прізвище, ім’я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 25 » травня 2019 року № 811-с

2. Строк подання студентом роботи 09.12.2019

3. Вихідні дані до роботи 1. Основна література.
2. Перелік питань до розробки.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Ознайомитися з властивостями системи Гаара.
2. Дослідити загальні властивості оператора щільного вкладення у гільбертовому просторі.
3.З’ясувати, які властивості базису зберігаються, якщо оператор діє на всьому базисі та на його під послідовностях.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов’язкових креслень)
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 10 вересня 2019 року

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	10.09.2019	виконано
2.	Збір вихідних даних.	20.09.2019	виконано
3.	Обробка методичних та теоретичних	25.09.2019	виконано
	джерел.		
4.	Розробка першого та другого розділу.	12.10.2019	виконано
5.	Розробка третього розділу.	15.11.2019	виконано
6.	Оформлення та нормоконтроль	09.12.2019	виконано
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	16.01.2020	

Студент ______________ М.Л. Маляренко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ______________ І.В. Красікова
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ______________ І.Г. Ткаченко
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Перетворення системи гаара під дією оператора множення на функцію у просторі $L_2[0,1]$»: 53 с., 16 джерел, 8 рис., 1 додаток.

БАЗИС, БАЗИСНА ПОСЛІДОВНІСТЬ, БАНАХІВ ПРОСТІР, ГІЛЬБЕРТІВ ПРОСТІР, МІНІМАЛЬНА СИСТЕМА, СИСТЕМА ГААРА, ОПЕРАТОР ЩІЛЬНОГО ВКЛАДЕННЯ, ОРТОНОРМОВАНИЙ БАЗИС, ПОВНА СИСТЕМА, БЕЗУМОВНИЙ БАЗИС, ТРИГОНОМЕТРИЧНИЙ БАЗИС.

Об'єкт дослідження – ортонормована система Гаара гільбертового простору $L_2[0,1]$.

Мета роботи: дослідити властивості оператора множення на деяку неперервну функцію та дію цього оператора на ортонормованій системі Гаара гільбертового простору $L_2[0,1]$.

Метод дослідження – аналітичний.

У кваліфікаційній роботі розглядається ортонормована система Гаара простору $L_2[0,1]$. Досліджуються властивості оператора щільного вкладення, в якості якого вибрано оператор множення на неперервну функцію. Аналізуються властивості перетвореного базису та його підпослідовностей. Побудовано приклад ортонормованого базису, який залишається безумовним базисом під дією оператора.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis «Transformation of Orthonormal Bases of a Hilbert Space under the Action of Dense Imbedding Operator»: 53 pages, 8 figures, 16 references, 1 supplement.

BASIS, BASIS SEQUENCE, BANACH SPACE, HILBERT SPACE, MINIMAL SYSTEM, HAAR SYSTEM, DENSE IMBEDDING OPERATOR, ORTHONORMALIZED BASIS, COMPLETE SYSTEM, UNCONDITIONAL BASIS, TRIGONOMETRIC BASIS.

The object of the study is the orthonormalised Haar system of the Hilbert space $L_2[0,1]$.

The aim of the study is to study the properties of the operator of multiplication by a continuous function and to investigate the action of this operator on the trigonometric basis of the Hilbert space $L_2[0,1]$.

The method of research is analytical.

In the qualifying paper the orthonormalised Haar system in the space $L_2[0,1]$ is considered. The properties of the operator of multiplication by a continuous function as a dense imbedding operator are investigated. The properties of transformed basis and its subsequence are analyzed. An example of an orthonormal basis which remains an unconditional basis under the action of an operator is constructed.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу студентці 2
Реферат 4
Summary 5
Вступ 7
1 Система функцій Гаара у просторі $L_2[0,1]$ 9
1.1 Означення та властивості простору $L_2[0,1]$ 9
1.2 Означення та властивості функцій системи гаара 12
2 Властивості оператора множення на функцію 27
2.1 Основні означення теорії лінійних неперервних операторів 27
2.2 Оператор множення на функцію як оператор щільного вкладення 28
3 Перетворення системи Гаара 34
3.1 Безумовні базиси 34
3.2 Повнота та мінімальність перетвореної системи 35
3.3 Про дефектну мінімальність послідовності $\left\{t^2 \cdot h_{2^n+k}(t)\right\}_{n=0,k=0}^{\infty,2^n-1}$ 38
3.4 Мінімальна підпослідовність 42
3.5 Приклад ортонормованого базиса $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такого, що $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ – безумовний базис $L_2[0,1]$ 44
Висновки 48
Перелік посилань 50
Додаток А Тезис наукової конференції 52

ВСТУП

У практичних задачах досить часто з'являється необхідність розв'язку рівнянь типу $y = Ax$, де $x \in X, y \in Y$, $A -$ лінійний обмежений оператор із незамкненою областю значень. У зв'язку з розв'язанням таких рівнянь, а також з тим, що лінійні оператори з незамкненою областю значень зустрічаються в різних областях аналізу, вивчення властивостей таких операторів дуже актуальне.

Дослідження властивостей таких операторів є досить складною задачею, отже, ми розглядаємо оператор у сепарабельному гільбертовому просторі $L_2[0,1]$. Можна вважати цей клас просторів дуже добре дослідженим тому що наявність скалярного добутку у нормованому просторі надає йому властивості, які певним ч

Ми розглядаємо в якості прикладу оператор щільного вкладення на просторі $L_2[0,1]$. Саме цей простір ми розглядаємо як реалізацію сепарабельного гільбертового простору, який, як відомо, єдиний з точністю до ізоморфізму. Під оператором щільного вкладення мається на увазі лінійний обмежений оператор з нульовим ядром та щільною незамкненою областю значень. В якості такого оператора розглядається оператор $(Ax)(t) = a(t)x(t)$, множення на деяку неперервну на $[0,1]$ функцію $a(t)$, для якої $\mu\{t \in [0,1] : a(t) = 0\} = 0$. Цей оператор є самоспряженим некомпактним оператором з неперервним спектром. В якості функції вибираємо $a(t) = t^2$.

При дослідженні дії оператора щільного вкладення на системі Гаара виявляється, що система, яка отримана з цієї системи, перестає бути базисом, і, навіть, мінімальною системою. Оператор щільного вкладення зберігає лише властивість повноти системи.

Але якщо з перетвореної системи Гаара вилучити зліченну кількість елементів, вона стає мінімальною.

Цікавим є питання про існування такого ортонормованого базису гільбертового простору $L_2[0,1]$, який все ж таки залишається базисом і після перетворення. На це питання отримана позитивна відповідь

У ході роботи з’являються різні питання, які стосуються властивостей розглянутих об’єктів, на які в результаті дослідження представлені відповіді.

1 СИСТЕМА ФУНКЦІЙ ГААРА У ПРОСТОРІ $L_2[0,1]$

1.1 Означення та властивості простору $L_2[0,1]$

Одним з основних об'єктів дослідження у функціональному аналізі є лінійні нормовані простори.

Нехай на відрізку $[a,b]$ задано σ-алгебру вимірних підмножин цього відрізка та μ – це міра Лебега.

Означення 1.1 Нехай X – дійсний лінійний простір. Функція $\|\cdot\| : X \to R^+$ називається *нормою,* якщо для неї виконуються наступні аксіоми:

К1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

К2) $\forall\, x, y \in X\ \forall\, \lambda \in R\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|;$

К3) $\forall\, x, y \in X\ \ \|x + y\| \le \|x\| + \|y\| -$ аксіома трикутника.

При цьому пара $(X, \|\cdot\|)$ називається *лінійним нормованим простором.*

Зрозуміло, що норма є функцією, яка приймає дійсні невід'ємні значення, і фактично є узагальненням поняття довжини вектора. Зауважимо, що метричні та нормовані простори тісно пов'язані між собою. Якщо у метричному просторі можна задати норму, з метрикою вона буде пов'язана співвідношенням $\|x\| = \rho(x,0)$. Тобто норма в просторі $L_p[a,b]$, $1 \le p < \infty$ задається таким чином:

$$\|x\| = \left(\int\limits_{[a,b]} |x(t)|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Означення 1.2 Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ називається *фундаментальною*, якщо $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad \forall p \in N \quad \left\| x_{n+p} - x_n \right\| < \varepsilon$.

Означення 1.3 Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ називається *збіжною* у лінійному нормованому просторі, якщо:

$$\exists x_0 \in X : \lim_{n} \left\| x_n - x_0 \right\| = 0.$$

Означення 1.4 Лінійний нормований простір X називається *повним*, якщо в ньому збігається будь-яка фундаментальна послідовність.

Повний лінійний нормований простір називається *банаховим* простором.

На лінійному просторі можна також задати операцію скалярного добутку.

Означення 1.5 Нехай X – дійсний лінійний простір. Функція $(\cdot,\cdot): X \times X \to R$ називається *скалярним добутком*, якщо для неї виконуються наступні аксіоми:

1) $(x, x) \geq 0; (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

2) $\forall\ x, y \in X \quad (x, y) = \overline{(y, x)}$ – аксіома симетрії;

3) $\forall\ x \in X\ \forall\ \lambda \in R \quad (\lambda x, y) = \lambda (x, y);$

4) $\forall\ x, y, z \in X \quad (x + y, z) = (x, z) + (y, z).$

Простір із заданим на ньому скалярним добутком називається *евклідовим простором*.

Повний нескінченновимірний евклідів простір називається *гільбертовим* простором.

У гільбертових просторах особливого значення набуває поняття ортогональності.

Означення 1.6 Два елементи $x, y \in H$ називаються ортогональними $(x \perp y)$, якщо $(x, y) = 0$.

Означення 1.7 Простором $L_p[a,b]$ при $1 \le p < \infty$ називається сукупність класів еквівалентних функцій, для яких існує інтеграл $\int\limits_{[a,b]} |f(x)|^p \, d\mu$ (такі функції називаються сумовними з p-м степенем).

Означення 1.8 Дві функції, f та g, задані на одній і тій ж вимірній множині A, називаються *еквівалентними*, якщо $\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0$.

Зауважимо, що елементами цього простору є не окремі функції, а саме класи еквівалентних функцій. Це пояснюється тим, що інтеграли від функцій одного класу дорівнюють одному й тому ж числу [13].

Метрика в просторі $L_p[a,b]$ уводиться таким чином:

$$\rho(f,g) = \sqrt[p]{\int\limits_{[a,b]} |f(x) - g(x)|^p \, d\mu} .$$

Отже, простір сумовних функцій є метричним.

Означення 1.9 Точка x_0 називається *точкою дотикання* множини M у метричному просторі X, якщо будь-який її окіл містить хоча б одну точку множини M.

Означення 1.10 Сукупність усіх точок дотикання множини M називається її *замиканням* та позначається як $\overline{M}$.

Означення 1.11 Множина називається *замкненою*, якщо вона збігається зі своїм замиканням $M = \overline{M}$, тобто містить усі свої точки дотикання.

Якщо множина не замкнена, але її замикання збігається з усім простором, така множина називається *всюди щільною* в цьому просторі.

Нормований простір, в якому існує зліченна всюди щільна множина, називається *сепарабельним.* Зауважимо, що простір $L_2[0,1]$ є сепарабельним [8].

Відомо [10], що будь-які два нескінченновимірні сепарабельні гільбертові простори ізоморфні між собою. Тобто, с точністю до ізоморфізму, існує лише один нескінченновимірний сепарабельний гільбертів простір. В якості його реалізації ми будемо розглядати дійсний простір $L_2[0,1]$. Норма в цьому просторі визначається формулою $\|x\| = \left(\int\limits_{[0;1]} \left| x(t)^2 \, d\mu \right| \right)^{1/2}$, а скалярний добуток задається у вигляді інтеграла Лебега $(x, y) = \int\limits_{[0;1]} x(t) y(t) d\mu$.

1.2 Означення та властивості функцій системи Гаара

Нехай X – банахів простір над полем R, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність елементів X. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ називають збіжним, якщо збігається послідовність його часткових сум $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$: $s_1 = x_1$, $s_2 = x_1 + x_2$, $s_n = x_1 + \ldots + x_n + \ldots$. В даному випадку елемент $s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n$ називають *сумою ряду*.

Означення 1.12 Послідовність $\{e_1, e_2, \ldots\} \subset X$ називається *базисом Шаудера (базисом)* банахового простору X, якщо будь-який елемент $x \in X$ можна подати у вигляді суми ряду $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k \qquad (c_k \in R)$.

Очевидно, що якщо в просторі X існує базис Шаудера, тоді простір X є *сепарабельним* [9]. Дійсно, в цьому випадку всюди щільна в просторі X – це множина скінченних лінійних комбінацій елементів базису із раціональними коефіцієнтами.

Означення 1.13 Система $\{e_1, e_2, \ldots\} \subset X$ називається *повною*, якщо замикання сукупності усіх лінійних комбінацій елементів цієї системи – це весь простір, тобто

$$\forall \ x \in H \qquad x = \lim_{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, \quad \alpha_k - const.$$

У гільбертовому просторі поняття повноти системи набуває особливого змісту.

Теорема 1.1 [10] Система $\{e_1, e_2, ...\} \subset H$ є повною тоді та тільки тоді, коли не існує нульового елемента цього простору, ортогонального всім елементам e_n, тобто $\forall n \ \ (x, e_n) = 0 \ \ \Rightarrow \ \ x = 0$.

Означення 1.14 Система $\{e_1, e_2, ...\} \subset H$ називається *мінімальною*, якщо існує послідовність $\{y_n\}$ в X така, що $(e_n, y_k) = \delta_{nk}$, де δ_{nk} – символ Кронекера.

Відомо [15], що в гільбертовому просторі базис – це повна мінімальна система.

Означення 1.15 Система $\{e_1, e_2, ...\} \subset H$ називається *ортонормованою,* якщо $(e_n, e_m) = \delta_{nm}$.

Зрозуміло, що ортонормована система – це ортогональна система елементів, норма кожного з яких дорівнює одиниці. Ортонормований базис – це ортонормована система елементів евклідового простору, яка володіє властивістю повноти.

Будемо розглядати у просторі $L_2[0,1]$ систему функцій Гаара. Дана система складається із кусково-постійних функцій, заданих на інтервалі $[0,1)$. Для функцій Гаара з одинарною (порядковою) нумерацією широко використовують й подвійну нумерацію. Подвійна нумерація відповідає груповому принципу формування системи функцій Гаара.

Перша функція системи Гаара постійна:

$$h_0(t) \equiv 1, \ t \in [0,1).$$

Інші функції системи Гаара зручно будувати групами: група із номером n містить 2^n функцій $h_n^k(t)$, $n \in N$, $k = 0,1,\ldots,2^n - 1$.

В першу групу $(n = 0)$ входить одна функція:

$$h_1(t) = h_0^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, \; t \in \left[0, \frac{1}{2}\right); \\ -1, \; t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$$

Друга група ($n = 1,\; k = 0,1$) складається із двох функцій: $h_2(t) = h_1^{(0)}(t)$ та $h_3(t) = h_1^{(1)}(t)$; третя група ($n = 2,\; k = 0,1,2,3$) – із чотирьох функцій: $h_4(t) = h_2^{(0)}(t)$, $h_5(t) = h_2^{(1)}(t)$, $h_6(t) = h_2^{(2)}(t)$, $h_7(t) = h_2^{(3)}(t)$ і т.д.

Для формування функцій системи Гаара використовується наступна формула:

$$h_{2^n + k}(t) = h_n^{(k)}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n}, \; t \in \left[\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k + \frac{1}{2}}{2^n}\right); \\ -\sqrt{2^n}, \; t \in \left[\dfrac{k + \frac{1}{2}}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right); \\ 0, \; t \notin \left[\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right), \end{cases}$$

де $n \in N,\; k = 0,1,\ldots,2^n - 1$.

Перші вісім функцій системи Гаара зображено на рисунках 1.1 – 1.8 відповідно.

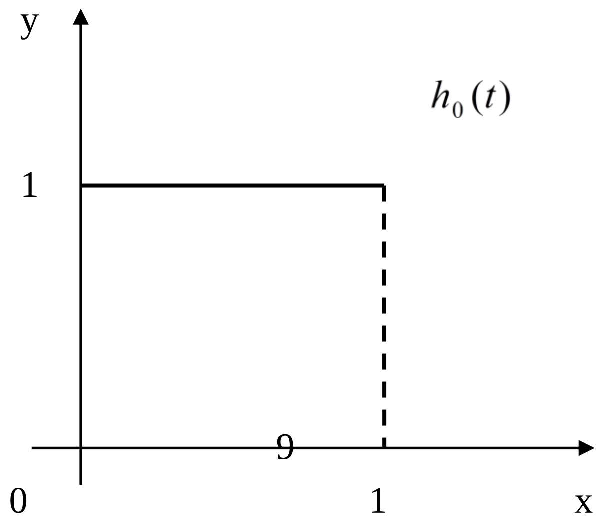

Рисунок 1.1

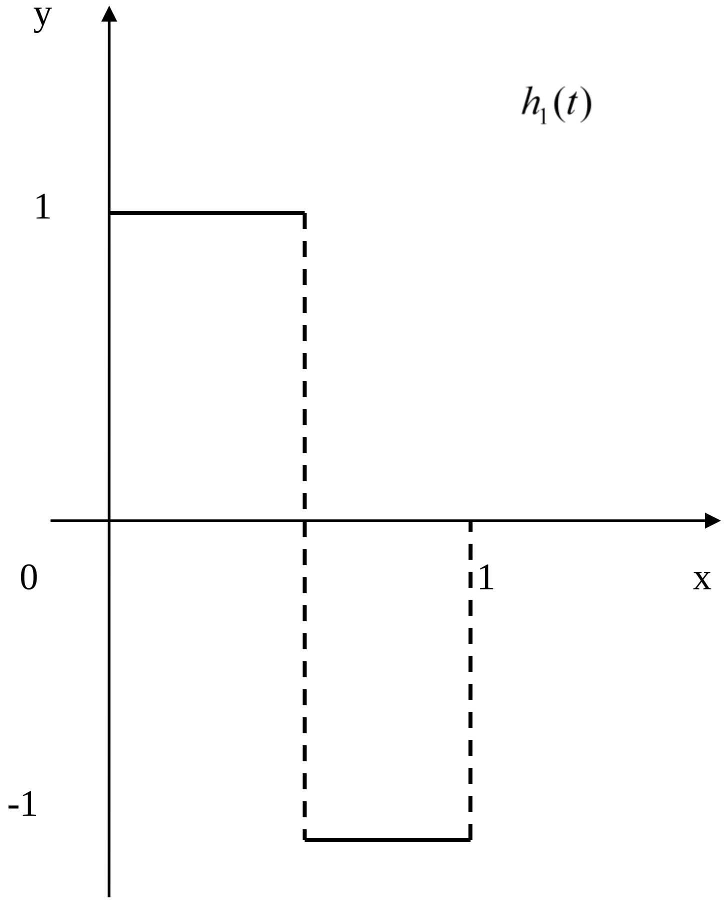

Рисунок 1.2

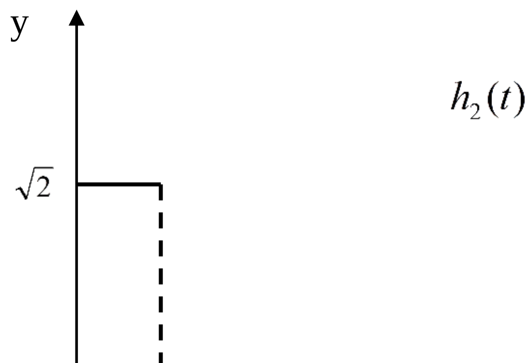

Рисунок 1.3

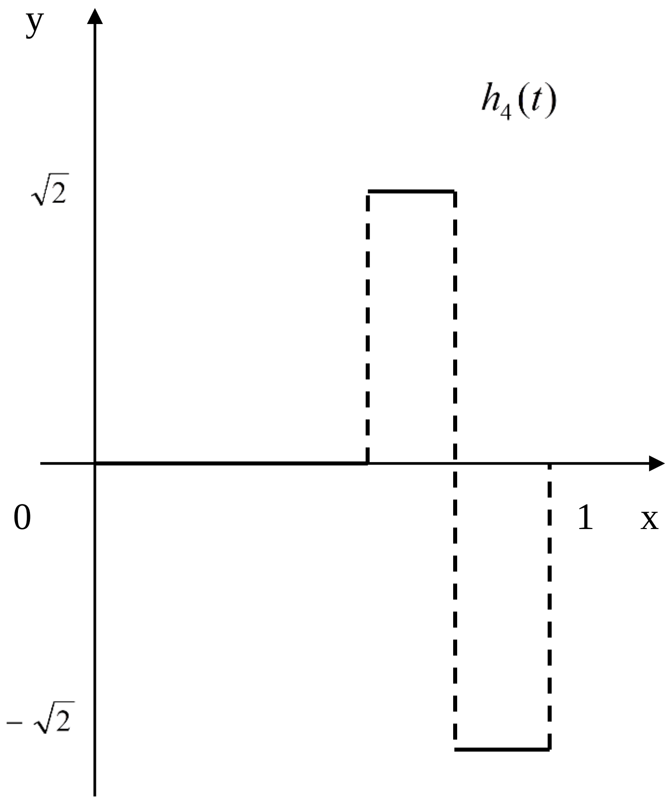

Рисунок 1.4

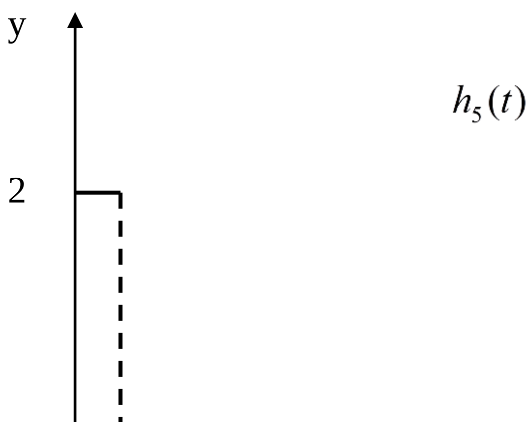

Рисунок 1.5

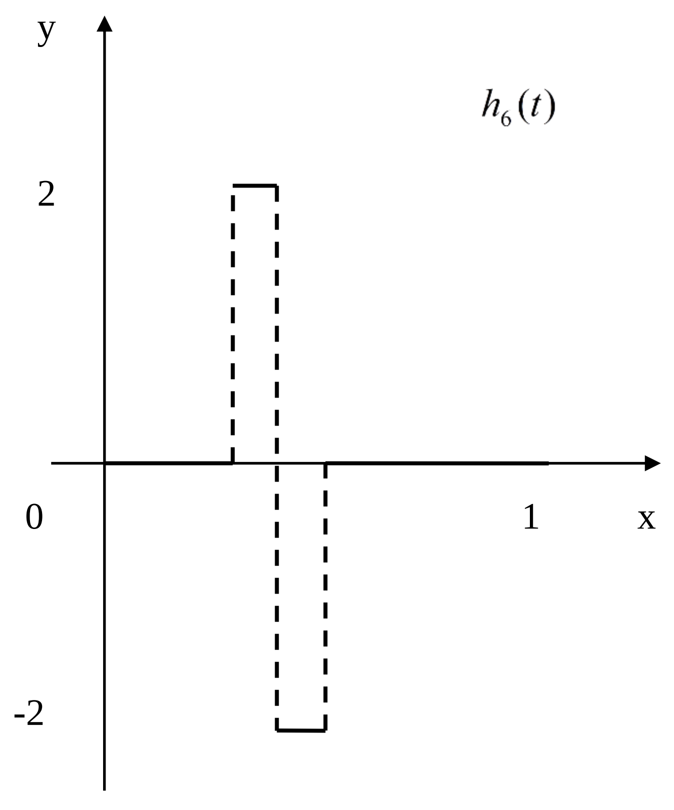

Рисунок 1.6

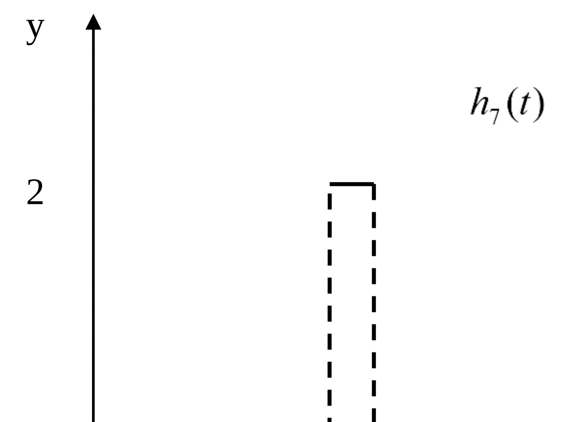

Рисунок 1.7

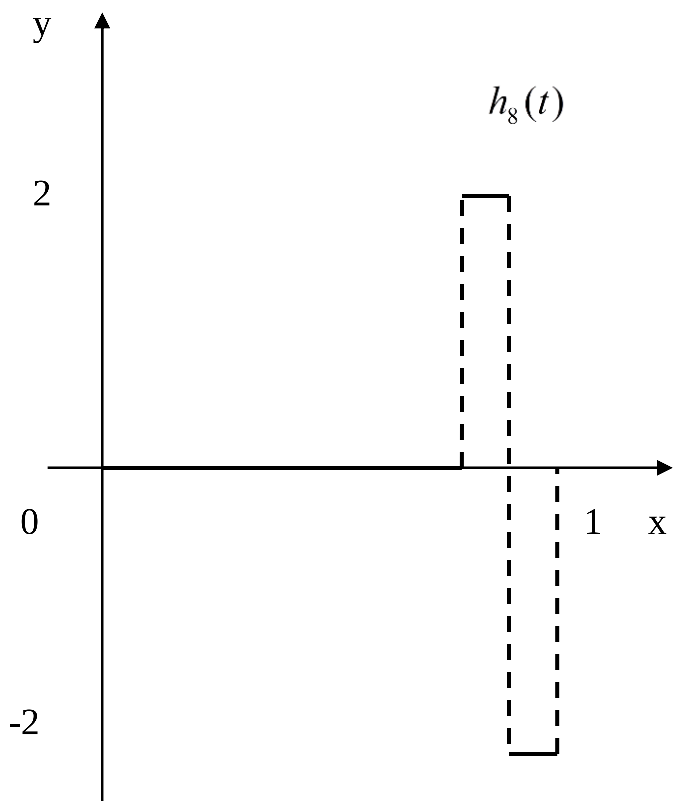

Рисунок 1.8

Функції системи Гаара задаються рівнянням $\left|h_{2^n+k}(t)\right| = \sqrt{2^n}$ при $t \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$, де функція $h_{2^n+k}(t)$ приймає додатні значення на лівій половині інтервалу, тобто на $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}\right)$ і від'ємні значення на правій половині інтервалу, тобто на $\left[\frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$. В інших точках функція дорівнює нулю. Інтервал $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ називається носієм функції $h_{2^n+k}(t)$.

Твердження 1.1 Система функцій Гаара $\left\{h_{2^n+k}(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ є повною в просторі $L_2[0,1]$.

Доведення [10]. Розіб'ємо відрізок $[0,1]$ на 2^{n+1} рівних інтервалів і розглянемо множину M_{n+1} всіх функцій, які зберігають постійне значення на кожному із розглянутих інтервалів. Очевидно, що множина M_{n+1} – це лінійний підпростір вимірності 2^{n+1}. Крім того, всі функції системи Гаара до функцій n-й групи належать множині M_{n+1}. Оскільки функції системи лінійно незалежні та їхня кількість рівна, маємо

$$1 + \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1},$$

а значить функція φ_0 та функції φ_{ki} групи $k = 0,1,\ldots,n$ утворюють в M_{n+1} повну систему лінійно незалежних векторів.

Звідси маємо, що будь-яка неперервна функція може бути скільки завгодно точно подана функцією із множини M_{n+1} (при достатньо великих n), що дає право стверджувати про повноту системи Гаара.

Отже, система Гаара є повною.

Твердження 1.2 Система функцій Гаара $\left\{h_{2^n+k}(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ є ортонормованою в просторі $L_2[0,1]$.

Доведення. Перевіримо спочатку ортогональність системи. Маємо $\left(h_0(t), h_n(t)\right) = \int_0^1 h_n(t)dt = 0$ прибудь-яких $n \neq 0$..

Якщо функції h_n та h_m з однієї групи та є різними, то їх носії не перетинаються. Отже, з властивостей інтеграла Лебега випливає, що $\left(h_n(t), h_m(t)\right) = 0$.

Якщо функції h_n та h_m з різних груп, то можливі два випадки:

а) якщо носії не перетинаються, аналогічно з властивостей інтеграла Лебега отримуємо, що $\left(h_n(t), h_m(t)\right) = 0$;

б) якщо носії перетинаються, то носій, де $t \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ функції $h_{2^n+k}(t)$ із старшої групи $(n > m)$ лежить на інтервалі сталості $\left(\left[\frac{i}{2^m}, \frac{i+1}{2^m}\right) \subset \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)$ іншої функції $h_{2^m+i}(t)$:

$$h_{2^n+k}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n}, & t \in \left[\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+\frac{1}{2}}{2^n}\right]; \\ -\sqrt{2^n}, & t \in \left[\dfrac{k+\frac{1}{2}}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right) \end{cases} \text{ та } h_{2^m+i}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & t \in \left[\dfrac{i}{2^m}, \dfrac{i+\frac{1}{2}}{2^m}\right]; \\ -\sqrt{2^m}, & t \in \left[\dfrac{i+\frac{1}{2}}{2^m}, \dfrac{i+1}{2^m}\right). \end{cases}.$$

Для того щоб знайти $\left(h_{2^n+k}(t), h_{2^m+i}(t)\right)$, розглянемо два випадки:

1) коли $\left[\frac{i}{2^m},\frac{i+1}{2^m}\right)\subset\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}\right)$, маємо

$$\left(h_{2^n+k}(t),h_{2^m+i}(t)\right)=\int\limits_{\left[\frac{i}{2^m},\frac{i+1}{2^m}\right)}\left(h_{2^n+k}(t)\cdot h_{2^m+i}(t)\right)d\mu=$$

$$=\int\limits_{\left[\frac{i}{2^m},\frac{i+\frac{1}{2}}{2^m}\right)}\sqrt{2^n}\cdot\sqrt{2^m}\,d\mu+\int\limits_{\left[\frac{i+\frac{1}{2}}{2^m},\frac{i+1}{2^m}\right)}\sqrt{2^n}\cdot\left(-\sqrt{2^m}\right)d\mu=$$

$$=\int\limits_{\left[\frac{i}{2^m},\frac{i+\frac{1}{2}}{2^m}\right)}\sqrt{2^n}\cdot\sqrt{2^m}\,d\mu-\int\limits_{\left[\frac{i+\frac{1}{2}}{2^m},\frac{i+1}{2^m}\right)}\sqrt{2^n}\cdot\sqrt{2^m}\,d\mu=0;$$

2) коли $\left[\frac{i}{2^m},\frac{i+1}{2^m}\right)\subset\left[\frac{k+\frac{1}{2}}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)$, маємо

$$\left(h_{2^n+k}(t),h_{2^m+i}(t)\right)=\int\limits_{\left[\frac{i}{2^m},\frac{i+1}{2^m}\right)}\left(h_{2^n+k}(t)\cdot h_{2^m+i}(t)\right)d\mu=$$

$$=\int\limits_{\left[\frac{i}{2^m},\frac{i+\frac{1}{2}}{2^m}\right)}\left(-\sqrt{2^n}\right)\cdot\sqrt{2^m}\,d\mu+\int\limits_{\left[\frac{i+\frac{1}{2}}{2^m},\frac{i+1}{2^m}\right)}\left(-\sqrt{2^n}\right)\cdot\left(-\sqrt{2^m}\right)d\mu=$$

$$= -\int\limits_{\left[\frac{i}{2^m},\frac{i+\frac{1}{2}}{2^m}\right)} \sqrt{2^n}\cdot\sqrt{2^m}\,d\mu + \int\limits_{\left[\frac{i+\frac{1}{2}}{2^m},\frac{i+1}{2^m}\right)} \sqrt{2^n}\cdot\sqrt{2^m}\,d\mu = 0 \,.$$

Отже, система функцій Гаара є ортогональною. Перевіримо тепер, що функції системи Гаара нормовані:

$$\left(h_0(t), h_0(t)\right) = \int\limits_{[0,1]} \left(h_0(t)\right)^2 d\mu = \int\limits_0^1 1dt = 1,$$

$$\left(h_{2^n+k}(t), h_{2^n+k}(t)\right) = \int\limits_{[0,1]} \left(h_{2^n+k}(t)\right)^2 d\mu = \int\limits_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} 2^n\,dt =$$

$$= 2^n \cdot t\Big|_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} = 2^n \cdot \left(\frac{k+1-k}{2^n}\right) = 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1.$$

Звідси можна зробити загальний висновок, що система функцій Гаара є ортонормованою в просторі $L_2[0,1]$, отже є ортонормованим базисом в просторі $L_2[0,1]$.

Означення 1.16 Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ називається *слабко збіжною* до елемента x в нормованому просторі X, якщо

$$\forall f \in X^* \qquad f(x_n) \to f(x).$$

Будь-яка слабко збіжна послідовність є обмеженою за нормою. На відміну від слабкої збіжності, збіжність за нормою простору називається сильною. Із сильної збіжності послідовності випливає її слабка збіжність.

Наведемо теорему, яка є критерієм слабкої збіжності послідовності у просторі $L_2[0,1]$.

Теорема 1.2 [5] Послідовність $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \in L_2[0,1]$ є слабко збіжною до елемента $f_0(t) \in L_2[0,1]$ тоді і тільки тоді, коли:

а) послідовність $\|f_n(t)\|$ обмежена;

б) $\int\limits_{[0,\tau]} f_n(t)d\mu \to \int\limits_{[0,\tau]} f_0(t)d\mu$ для будь-якого $\tau \in [0,1]$.

Твердження 1.3 Система функцій Гаара $\{h_{2^n+k}(t)\}_{n=1}^{\infty}$ є слабко збіжною до нуля в просторі $L_2[0,1]$.

Доведення. Вище було показано, що система функцій Гаара – це ортонормований базис, вона обмежена за нормою, тобто $\|h_{2^n+k}(t)\| = 1$.

Залишається перевірити другу умову критерію, тобто показати, що $\int\limits_0^{\tau} h_{2^n+k}(t)dt \to 0$ для будь-якого $\tau \in [0,1]$.

Для доведення даної умови розглянемо 4 випадки:

1) якщо $\tau \in \left[0, \frac{k}{2^n}\right)$, тоді маємо $\int\limits_0^{\tau} h_{2^n+k}(t)dt = \int\limits_0^{\tau} 0dt = 0$;

2) якщо $\tau \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}\right)$, тоді маємо

$$\int\limits_0^{\tau} h_{2^n+k}(t)dt = \int\limits_{\frac{k}{2^n}}^{\tau} \sqrt{2^n}\,dt = \sqrt{2^n} \cdot t\Big|_{\frac{k}{2^n}}^{\tau} = \sqrt{2^n} \cdot \left(\tau - \frac{k}{2^n}\right).$$

Оцінимо вираз $\sqrt{2^n} \cdot \left(\tau - \frac{k}{2^n}\right)$ та отримаємо, що:

$$\frac{k}{2^n} \le \tau < \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n} \Rightarrow 0 \le \tau - \frac{k}{2^n} < \frac{2k+1}{2^{n+1}} - \frac{k}{2^n} \Rightarrow 0 \le \tau - \frac{k}{2^n} < \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow$$

$$0 \le \sqrt{2^n}\left(\tau - \frac{k}{2^n}\right) < \frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}} \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Отже, маємо, що $\int\limits_0^{\tau} h_{2^n+k}(t)dt = \sqrt{2^n}\cdot\left(\tau - \frac{k}{2^n}\right) \to 0$, при $n \to \infty$;

3) якщо $\tau \in \left[\frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$, тоді маємо

$$\int\limits_0^{\tau} h_{2^n+k}(t)dt = \int\limits_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}} \sqrt{2^n}\,dt + \int\limits_{\frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}}^{\tau} \left(-\sqrt{2^n}\right)dt = \sqrt{2^n}\cdot t\Big|_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}} - \sqrt{2^n}\cdot t\Big|_{\frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}}^{\tau} =$$

$$= \sqrt{2^n}\cdot\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{2^n} - \frac{k}{2^n}\right) - \sqrt{2^n}\cdot\left(\tau - \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}\right) = \sqrt{2^n}\cdot\left(\frac{k+\frac{1}{2}-k}{2^n}\right) - \sqrt{2^n}\cdot\left(\tau - \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}\right) =$$

$$= \sqrt{2^n}\cdot\frac{1}{2^{n+1}} - \sqrt{2^n}\cdot\left(\tau - \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2^n}}{2^{n+1}} - \sqrt{2^n}\cdot\left(\tau - \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}\right).$$

Аналогічно оцінимо вираз $\frac{\sqrt{2^n}}{2^{n+1}} - \sqrt{2^n}\cdot\left(\tau - \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}\right)$ та отримаємо:

$$\frac{k+\frac{1}{2}}{2^n} \le \tau < \frac{k+1}{2^n} \Rightarrow 0 \le \tau - \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n} < \frac{k+1}{2^n} - \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n} \Rightarrow 0 \le \tau - \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n} < \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow$$

$$0 \le -\sqrt{2^n} \cdot \left(\tau - \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n} \right) < \left(-\sqrt{2^n} \right) \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2^n}}{2^{n+1}} \le \frac{\sqrt{2^n}}{2^{n+1}} - \sqrt{2^n} \cdot \left(\tau - \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n} \right) < \frac{\sqrt{2^n}}{2^{n+1}} - \frac{\sqrt{2^n}}{2^{n+1}} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2^n}}{2^{n+1}} \le \frac{\sqrt{2^n}}{2^{n+1}} - \sqrt{2^n} \cdot \left(\tau - \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n} \right) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 > \frac{\sqrt{2^n}}{2^{n+1}} - \sqrt{2^n} \cdot \left(\tau - \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n} \right) \ge \frac{\sqrt{2^n}}{2^{n+1}} \to 0, \text{ при } n \to \infty .$$

Отже, маємо, що $\int\limits_0^\tau h_{2^n+k}(t)dt = \frac{\sqrt{2^n}}{2^{n+1}} - \sqrt{2^n} \cdot \left(\tau - \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n} \right) \to 0$, при $n \to \infty$;

4) якщо $\tau \in \left[\frac{k+1}{2^n}, 1 \right]$, тоді маємо

$$\int\limits_0^\tau h_{2^n+k}(t)dt = \int\limits_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}} \sqrt{2^n} dt - \int\limits_{\frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} \sqrt{2^n} dt = \sqrt{2^n} \cdot t \Big|_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}} - \sqrt{2^n} \cdot t \Big|_{\frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} =$$

$$= \sqrt{2^n} \cdot \left(\frac{k+\frac{1}{2}}{2^n} - \frac{k}{2^n} \right) - \sqrt{2^n} \cdot \left(\frac{k+1}{2^n} - \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n} \right) =$$

$$=\sqrt{2^n}\cdot\left(\frac{k+\frac{1}{2}-k}{2^n}\right)-\sqrt{2^n}\cdot\left(\frac{k+1-k-\frac{1}{2}}{2^n}\right)=$$

$$=\sqrt{2^n}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}-\sqrt{2^n}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=0.$$

Отже, система функцій Гаара є слабко збіжною до нуля у просторі $L_2[0,1]$.

2 ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРА МНОЖЕННЯ НА ФУНКЦІЮ

2.1 Основні означення теорії лінійних неперервних операторів

Одним із найважливіших класів відображень нормованих просторів є клас лінійних неперервних операторів [2].

Означення 2.1 Нехай X, Y – нормовані простори. Відображення $A: X \to Y$ називається *оператором*.

Означення 2.2 *Областю визначення* оператора A називається множина $D(A) = \{x \in X : \exists y \in Y : Ax = y\}$.

Означення 2.3 *Областю значень (образом)* оператора A називається множина $R(A) = \{y \in Y : \exists x \in X : Ax = y\}$.

Означення 2.4 Оператор A називається *лінійним*, якщо $\forall\ x, y \in X$ та $\forall\ \alpha, \beta \in R$ виконується умова $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$.

Означення 2.5 Оператор A називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X : x_n \to x_0 \Rightarrow Ax_n \to Ax_0$.

Якщо оператор неперервний в одній точці, тоді він буде неперервним у всьому просторі X [4].

Означення 2.6 Оператор A називається *обмеженим*, якщо $\exists c > 0: \quad \forall x \in X \quad \|Ax\| \le c \cdot \|x\|$.

Для лінійних операторів поняття обмеженості та неперервності рівносильні [10].

Означення 2.7 *Нормою* лінійного обмеженого оператора називається число $\|A\| = \inf \{c > 0 : \forall x \in X \quad \|Ax\| \le c \cdot \|x\|\}$.

Означення 2.8 Оператор A називається *самоспряженим* в гільбертовому просторі, якщо $\forall x, y \in X$ виконується наступна умова $(Ax, y) = (x, Ay)$.

Ядром оператора називається множина $KerA = \{x \in X : Ax = 0\}$.

Означення 2.9 Лінійний неперервний оператор A називається оператором щільного вкладення, якщо $KerA = \{0\}$ та $\overline{R(A)} = L_2[0,1]$.

Означення 2.10 Спектром лінійного неперервного оператора A називається множина комплексних чисел λ, при яких оператор $A - \lambda I$ не є неперервно оборотним.

Неперервна оборотність оператора означає, що оператор має оборотний, який до того ж буде неперервним. Оскільки у гільбертовому просторі має місце теорема Банаха про обернений оператор, неперервна оборотність оператора рівносильна його бієктивності, тобто виконанню двох умов $Ker(A - \lambda I) = \{0\}$ та $R(A - \lambda I) = X$.

Якщо $Ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$, тобто рівняння $Ax = \lambda x$ має ненульовий розв'язок, оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ при цьому λ не існує, а сукупність таких λ називається точковим спектром оператора A. Якщо ж оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ існує, але заданий не на всьому просторі X , тобто $R(A - \lambda I) \neq X$, тоді можливі 2 ситуації: якщо $\overline{(A - \lambda I)} = X$, говорять, що λ належить неперервній частині спектра, а якщо $\overline{(A - \lambda I)} \neq X$, λ належить залишковій частині спектра.

2.2 Оператор множення на функцію як оператор щільного вкладення

Розглянемо оператор множення на функцію $(Ax)(t) = a(t) \cdot x(t)$, який задано на просторі $L_2[0,1]$. Будемо вважати, що $a(t) \in C[0,1]$ та множина нулів функції $a(t)$ непорожня, але скінченна. Позначимо $\mathrm{A}_0 = \{t \in [0,1] : a(t) = 0\}$. Зрозуміло, що $\mu\{t \in [0,1] : a(t) = 0\} = 0$.

Покажемо, що оператор A діє у просторі $L_2[0,1]$, тобто що його область значень належить просторові $L_2[0,1]$:

$$x(t) \in L_2[0,1] \Rightarrow y(t) = a(t) \cdot x(t) \in L_2[0,1].$$

Враховуючи, що $x(t) \in L_2[0,1]$, доведемо, що функція $y(t) = a(t) \cdot x(t)$ також належить $L_2[0,1]$:

$$\int\limits_{[0,1]} \left((Ax)(t)\right)^2 d\mu = \int\limits_{[0,1]} \left((a(t))x(t)\right)^2 d\mu = \int\limits_{[0,1]} (a(t))^2 (x(t))^2 d\mu \le C^2 \int\limits_{[0,1]} (x(t))^2 d\mu < \infty,$$

де $C = \max\limits_{t \in [0,1]} |a(t)|$. Зауважимо, що максимум на проміжку $[0,1]$ існує за другою теоремою Вейєрштрасса про неперервну функцію [7]. Отже, $y(t) = a(t) \cdot x(t) \in L_2[0,1]$, тобто оператор A дійсно діє у просторі $L_2[0,1]$.

Перевіримо лінійність цього оператора за означенням. Нехай $x, y \in L_2[0,1]$ та $\alpha, \beta \in R$, тоді:

$$A(\alpha x + \beta y) = a(t)(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \alpha(a(t)x(t)) + \beta(a(t)x(t)) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Отже, оператор A – лінійний, значить, замість неперервності оператора можна перевіряти його обмеженість. Нехай $x, y \in L_2[0,1]$, тоді:

$$\|Ax(t)\|^2 = \int\limits_{[0,1]} \left((Ax) \cdot (t)\right)^2 d\mu = \int\limits_{[0,1]} \left(a(t) \cdot x(t)\right)^2 d\mu =$$

$$= \int\limits_{[0,1]} (a(t))^2 \cdot (x(t))^2 d\mu \le C^2 \cdot \int\limits_{[0,1]} (x(t))^2 d\mu = C^2 \cdot \|x(t)\|^2,$$

тобто оператор A є обмеженим (неперервним) та $\|A\| \le C$.

Твердження 2.1 Оператор A є самоспряженим оператором.

Доведення. Нехай $x, y \in L_2[0,1]$, тоді

$$(Ax, y) = (a(t) \cdot x(t), y(t)) = \int\limits_{[0,1]} (a(t) \cdot x(t)) \cdot y(t) d\mu =$$

$$= \int\limits_{[0,1]} x(t) \cdot (a(t) \cdot y(t)) d\mu = (x(t), a(t) \cdot y(t)) = (x, Ay),$$

тобто $(Ax, y) = (x, Ay)$, що означає самоспряженість оператора.

Твердження 2.2 Оператор A є оператором щільного вкладення, тобто $KerA = \{0\}$ та $\overline{R(A)} = L_2[0,1]$. Дане твердження було доведено в нашій кваліфікаційній роботі бакалавра.

У роботі для спрощення обчислень ми будемо використовувати оператор щільного вкладення, в якому функція $a(t)$ буде мати лише один нуль: $(Ax)(t) = t^2 \cdot x(t)$. Додатково доведемо ще одну властивість цього оператора.

Означення 2.10 Оператор A називається компактним в гільбертовому просторі, якщо він будь-яку слабко збіжну послідовність переводить в сильно збіжну, тобто в послідовність, збіжну за нормою.

Твердження 2.11 Оператор $(Ax)(t) = t^2 \cdot x(t)$ не є компактним.

Доведення. В якості слабко збіжної послідовності розглянемо систему функцій Гаара простору $L_2[0,1]$. В твердженні 1.2 доведено, що система функцій слабко збігається до нуля. Покажемо, що оператор A переводить цю систему в послідовність, яка не збігається до нуля за нормою:

$$\left\| Ah_{2^n+k}(t) \right\|^2 = \int\limits_{[0,1]} \left(t^2 \cdot h_{2^n+k}(t) \right)^2 dt = \int\limits_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} t^4 \cdot \left(\sqrt{2^n} \right)^2 dt = 2^n \int\limits_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} t^4 dt =$$

$$= 2^n \cdot \frac{t^5}{5} \Bigg|_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} = 2^n \left[\frac{(k+1)^5}{5 \cdot 2^{5n}} - \frac{k^5}{5 \cdot 2^{5n}} \right] = 2^n \left[\frac{k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k^5}{5 \cdot 2^{5n}} \right] =$$

$$= 2^n \left[\frac{5\left(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + \frac{1}{5} \right)}{5 \cdot 2^{5n}} \right] = \frac{k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + \frac{1}{5}}{2^{4n}}, k = 0,1,\ldots,2^n - 1.$$

Вилучимо в цій послідовності підпослідовність, яка відповідає значенню $k = 2^n - 1$, тоді

$$\left\| Ah_{2^{n+1}-1}(t) \right\|^2 = \frac{\left(2^n - 1\right)^4 + 2\left(2^n - 1\right)^3 + 2\left(2^n - 1\right)^2 + \left(2^n - 1\right) + \frac{1}{5}}{2^{4n}} \to 1$$

при $n \to \infty$. Оскільки знайдено підпослідовність, яка збігається до одиниці, уся послідовність не може бути збіжною до нуля. Отже, оператор $(Ax)(t) = t^2 \cdot x(t)$ не є компактним.

Твердження 2.11 Спектр оператора $(Ax)(t) = t^2 \cdot x(t)$ у просторі $L_2[0,1]$ збігається з відрізком [0,1] та є неперервним.

Доведення. Розглянемо рівняння $(A - \lambda I)x(t) = 0$ або $\left(t^2 - \lambda\right)x(t) = 0, \quad \forall t \in [0,1]$.

Зрозуміло, що розв'язком цього рівняння буде функція $x(t) = 0$ для всіх $t \in [0,1]$, відмінних від λ, та яка приймає довільне значення при $t = \lambda$. Оскільки дві функції простору $L_2[0,1]$, що дорівнюють одна одній майже скрізь, належать одному класу еквівалентності, $x(t)$ є нульовим елементом простору $L_2[0,1]$.

Таким чином, при всіх $\lambda \in C$ $Ker(A - \lambda \mathrm{I}) = \{0\}$, а це означає, що точковий спектр оператора A – порожній.

З'ясуємо тепер, коли обернений оператор задано на всьому просторі, тобто для довільного $y \in L_2[0,1]$ розв'яжемо рівняння $(A - \lambda I)x = y$, яке в нашому випадку має вигляд $(t^2 - \lambda)x(t) = y(t)$.

Зрозуміло, що обернений до $A - \lambda I$ оператор задається формулою

$$(A - \lambda I)^{-1} y(t) = \frac{y(t)}{t^2 - \lambda}.$$

Якщо $\lambda \in C$ не належить відрізку $[0,1]$, тоді знайдеться додатне число δ таке, що $\forall t \in [0,1]$ виконується нерівність $\left|t^2 - \lambda\right| \geq \delta > 0$. Тому

$$\left\|(A - \lambda I)^{-1} y(t)\right\| = \left\|\frac{y(t)}{t^2 - \lambda}\right\| = \sqrt{\int\limits_{[0,1]} \left|\frac{y(t)}{t^2 - \lambda}\right|^2 d\mu(t)} \leq \frac{1}{\delta}\sqrt{\int\limits_{[0,1]} |y(t)|^2 d\mu(t)} = \frac{1}{\delta}\|y\|$$

у просторі $L_2[0,1]$, тобто оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ – обмежений та неперервний.

Якщо ж $\lambda \in [0,1]$, тоді оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ не визначений, наприклад, на функції $y \equiv 1$. Дійсно, в цьому випадку $x(t) = \dfrac{1}{t^2 - \lambda}$ не належить простору $L_2[0,1]$, оскільки інтеграл не існує:

$$\int\limits_{[0,1]} |x(t)|^2 d\mu(t) = \int\limits_0^1 \frac{dt}{(t^2 - \lambda)^2} = \infty.$$

Отже, при $\lambda \in [0,1]$ оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ визначений не на всьому просторі $L_2[0,1]$. Таким чином, спектр оператора A – це відрізок $[0,1]$. Причому оскільки $\overline{(A-\lambda I)} = L_2[0,1]$, цей спектр є неперервним.

3 ПЕРЕТВОРЕННЯ СИСТЕМИ ГААРА

3.1 Безумовні базиси

Дослідимо результат дії оператора щільного вкладення A на систему Гаара простору $L_2[0,1]$. В якості такого оператора оберемо саме оператор множення на квадрат незалежної змінної, властивості якого ми досліджували вище. Постає головне питання – чи залишиться система $\left\{t^2 \cdot h_{2^n+k}(t)\right\}$ базисом у цьому просторі.

Означення 3.1 Базис називається безумовним, якщо він залишається базисом після будь-якої перестановки його членів.

Відомо, що система Гаара є безумовним базисом у просторі $L_2[0,1]$. Що стосується перетвореної системи, вона втрачає властивість нормованості і навіть квазінормованості.

Означення 3.2 Система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається квазінормованою, якщо

$$\exists\, C_1 > 0,\ C_2 > 0:\ \forall n \quad C_1 \le \|x_n\| \le C_2 .$$

Твердження 3.1 Послідовність $\left\{t^2 \cdot h_{2^n+k}(t)\right\}$ не є квазінормованою.

Доведення. При доведенні твердження 2.11 було отримано такий результат:

$$\left\|t^2 \cdot h_{2^n+k}(t)\right\|^2 = \frac{k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + \frac{1}{5}}{2^{4n}}, k = 0,1,\ldots,2^n - 1 .$$

Якщо тепер в якості k вибрати нуль, отримаємо, що $\left\| t^2 \cdot h_{2^n+0}(t) \right\|^2 = \frac{1}{5 \cdot 2^{4n}}$ та $\inf\limits_n \left\| t^2 \cdot h_{2^n+0}(t) \right\| = 0$, тобто знайти додатну константу C_1, яка б обмежувала послідовність знизу, неможливо.

Отже, послідовність $\left\{ t^2 \cdot h_{2^n+k}(t) \right\}$ не є квазінормованою.

3.2 Повнота та мінімальність перетвореної системи

Розглянемо дію оператора щільного вкладення на системі Гаара у гільбертовому просторі. Насправді, має місце наступний важливий загальний факт, вірний для операторів щільного вкладення, який був доведений нами у кваліфікаційній роботі бакалавра.

Твердження 3.2 Якщо A – оператор щільного вкладення, а система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – повна, тоді система $\{Ae_n\}_{n=1}^{\infty}$ також повна.

Доведення. Покажемо, що будь-який елемент $y \in L_2[0,1]$ можна подати у вигляді $y = \lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^{n} c_k A e_k$. З того, що $\overline{R(A)} = L_2[0,1]$, випливає, що y – точка дотикання для $R(A)$, тобто $\forall \varepsilon > 0$ існує така функція $z \in R(A)$, для якої $\|y - z\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Оскільки $z \in R(A)$, існує така функція $x \in L_2[0,1]$, для якої $z = Ax$. Враховуючи повноту системи $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в просторі $L_2[0,1]$, зрозуміло, що $x = \lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$.

З іншого боку, з неперервності оператора A випливає, що $z = Ax = A\left(\lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k\right) = \lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^{n} c_k Ae_k$, тобто $\left\| z - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k Ae_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Остаточно отримуємо оцінку:

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} c_k Ae_k \right\| = \left\| y - z + z - \sum_{k=1}^{n} c_k Ae_k \right\| < \|z - y\| + \left\| z - \sum_{k=1}^{n} c_k Ae_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Отже, система $\{Ae_n\}_{n=1}^{\infty}$ є повною.

З’ясуємо, чи зберігає оператор щільного вкладення $(Ax)(t) = t^2 \cdot x(t)$ мінімальність системи Гаара.

Твердження 3.3 Система $\left\{t^2 \cdot h_{2^n+k}(t)\right\}$ не є мінімальною.

Доведення. Оскільки функції системи Гаара мають подвійну індексацію $\left\{h_{2^n+k}(t)\right\}$, означення мінімальності 1.12 набуде такого вигляду: система $\left\{h_n^k(t)\right\}$ називається мінімальною, якщо існує послідовність $\left\{z_i^j(t)\right\} \in H$:

$$\left(h_n^k, z_i^j\right) = \delta_{ni}^{kj} = \begin{cases} 1, \ n = i \ \wedge \ k = j, \\ 0, \ n \neq i \ \vee \ k \neq j. \end{cases}$$

З цього означення випливає, що потрібно знайти таку систему $\left\{z_i^j(t)\right\}_{n=1}^{\infty} \subset L_2[0,1]$ для якої:

$$\left(t^2 h_n^k(t), z_i^j(t)\right) = \int_0^1 \left(t^2 \cdot h_n^k(t)\right) \cdot z_i^j(t) dt = \int_0^1 h_n^k(t) \cdot \left(t^2 \cdot z_i^j(t)\right) dt = \left(h_n^k(t), t^2 z_i^j(t)\right) = \delta_{ni}^{kj}.$$

З цієї рівності на основі ортонормованості системи $\left\{h_n^k(t)\right\}$ робимо висновок, що

$$\left(h_n^k(t), h_i^j(t)\right) - \left(h_n^k(t), t^2 z_i^j(t)\right) = 0,$$

а звідси

$$\left(h_n^k(t), h_i^j(t) - t^2 z_i^j(t)\right) = 0.$$

Отже, елемент $h_i^j(t) - t^2 z_i^j(t)$ є ортогональним до всіх елементів $h_n^k(t)$, але оскільки система $\left\{h_n^k(t)\right\}$ є повною, це можливо лише коли

$$h_i^j(t) - t^2 z_i^j(t) \overset{м.с.}{=} 0 \Rightarrow h_i^j(t) \overset{м.с.}{=} t^2 z_i^j(t) \Rightarrow z_i^j(t) \overset{м.с.}{=} \frac{h_i^j(t)}{t^2}.$$

Отримуємо єдину загальну систему:

$$z_i^j(t) = \frac{h_i^j(t)}{t^2} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2^n}}{t^2}, \ t \in \left[\dfrac{j}{2^n}, \dfrac{j+\frac{1}{2}}{2^n}\right); \\ -\dfrac{\sqrt{2^n}}{t^2}, \ t \in \left[\dfrac{j+\frac{1}{2}}{2^n}, \dfrac{j+1}{2^n}\right); \\ 0, \ t \notin \left[\dfrac{j}{2^n}, \dfrac{j+1}{2^n}\right), \end{cases}$$

яка задовольняє умову означення 1.12, але отримана нами система не належить простору $L_2[0,1]$:

$$\int_0^1 \left(z_i^j(t)\right)^2 dt = \int_{\frac{j}{2^n}}^{\frac{j+1}{2^n}} \frac{2^n}{t^4} dt = 2^n \int_{\frac{j}{2^n}}^{\frac{j+1}{2^n}} \frac{1}{t^4} dt .$$

При $j = 0$ будемо мати наступне:

$$\int_0^{\frac{1}{2^n}} \frac{1}{t^4} dt = \infty .$$

Такий інтеграл є розбіжним, отже, функція не належить простору.

Досліджувана система $\left\{t^2 \cdot h_{2^n+k}(t)\right\}$ не є мінімальною.

Оскільки система $\left\{t^2 \cdot h_{2^n+k}(t)\right\}$ залишається повною, але втрачає мінімальність, отримуємо наступний важливий результат.

Наслідок 3.1 Система Гаара під дією оператора множення на незалежну змінну перестає бути базисом у просторі $L_2[0,1]$, оскільки вона втрачає свою мінімальність.

3.3 Про дефектну мінімальність послідовності $\left\{t^2 \cdot h_{2^n+k}(t)\right\}_{n=0, k=0}^{\infty, 2^n-1}$

Оскільки система $\left\{Ah_{2^n+k}(t)\right\}_{n=0,k=0}^{\infty,2^n-1}=\left\{t^2\cdot h_{2^n+k}(t)\right\}_{n=0,k=0}^{\infty,2^n-1}$ втрачає властивість мінімальності, з'ясуємо, чи буде ця система дефектно-мінімальною, якщо видалити з неї деяку кількість елементів.

Означення 3.5 Система $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається дефектно-мінімальною, якщо вона стає мінімальною після видалення з неї скінченного числа елементів.

Лема 3.1 Якщо $\{x_m\}=\{e_n\}_{n\neq n_1,n_2,\dots,n_p}$, де $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормований базис, то $(g_m,x_k)=\delta_{mk}$ тоді і тільки тоді, коли g_m подається у вигляді суми

$$g_m=z_m+x_m,\ \text{де}\ z_m\in\left\langle e_{n_1},e_{n_2},\dots,e_{n_p}\right\rangle.$$

Символом $\left\langle e_{n_1},e_{n_2},\dots,e_{n_p}\right\rangle$ тут позначається лінійна оболонка елементів $e_{n_1},e_{n_2},\dots,e_{n_p}$.

Доведення. Достатність. Нехай $g_m=z_m+x_m$, тоді

$$(g_m,x_k)=(z_m+x_m,x_k)=(z_m,x_k)+(x_m,x_k),$$

де $(z_m,x_k)=0$, оскільки $z_m\in\left\langle e_{n_1},e_{n_2},\dots,e_{n_p}\right\rangle$, а x_k – елемент системи, отриманий викиданням елементів $e_{n_1},e_{n_2},\dots,e_{n_p}$ з $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Отже, $(g_m,x_k)=\delta_{mk}$, оскільки x_m,x_k – елементи ортонормованого базису. Достатність доведено.

Необхідність. Нехай $(g_m,x_k)=\delta_{mk}$. Простір $L_2[0,1]$ можна подати у вигляді прямої суми підпростору та його ортогонального доповнення [1]:

$$L_2[0,1] = M \oplus M^{\perp}, \text{ де } M = \overline{\left\langle e_{n_1}, e_{n_2}, ..., e_{n_p} \right\rangle}.$$

Оскільки $g_m \in L_2[0,1]$, його можна подати у вигляді суми двох елементів g_m^1 та g_m^2, де $g_m^1 \in M$, а $g_m^2 \in M^{\perp}$:

$$g_m = g_m^1 + g_m^2,\ \left(g_m^1, g_m^2\right) = 0,$$

$$(g_m, x_k) = \left(g_m^1 + g_m^2, x_k\right) = \left(g_m^1, x_k\right) + \left(g_m^2, x_k\right) = \delta_{mk},$$

$\left(g_m^1, x_k\right) = 0$, оскільки $g_m^1 \in M$, а $x_k \in M^{\perp}$, отже,

$$\left(g_m^2, x_k\right) = \delta_{mk}, \text{ де } g_m^2, x_k \in M^{\perp}.$$

Окремо зауважимо, що $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ є базисом в $M^{\perp}$, тобто $(x_m, x_k) = \delta_{mk}$. Запишемо різницю скалярних добутків та застосуємо повноту системи $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\left(g_m^2 - x_m, x_k\right) = 0,\quad g_m^2 - x_m = 0,\quad g_m^2 = x_m.$$

Перепозначимо $g_m^1 = z_m$. Отже, g_m можна подати у вигляді

$$g_m = z_m + x_m, \text{ де } z_m \in \left\langle e_{n_1}, e_{n_2}, ..., e_{n_p} \right\rangle.$$

Необхідність доведено.

Як наслідок з леми отримуємо наступний факт.

Твердження 3.4 Система $\left\{t^2 \cdot h_{2^n + k}(t)\right\}_{n=0,k=0}^{\infty,2^n - 1}$ не є дефектно-мінімальною.

Доведення. Припустимо, що система $\left\{t^2 \cdot h_{2^n+k}(t)\right\}_{n=0,k=0}^{\infty,2^n-1}$ – дефектно-мінімальна, тобто стає мінімальною після видалення з неї деякої скінченної множини елементів. Уведемо допоміжну множину N_0 подвійних індексів «викинутих» функцій. Тобто мінімальною буде система $\left\{t^2 \cdot h_n^k\right\}_{n,k \notin N_0}$. Це означає, що існує послідовність $\left\{z_i^j\right\}_{i=1}^{\infty} \subset L_2[0,1]$, така, що $\left(t^2 h_n^k, z_i^j\right) = \delta_{ni}^{kj}$, де $n,k \notin N_0$. Але оскільки оператор A є самоспряженим, то маємо:

$$\delta_{ni}^{kj} = \left(t^2 h_n^k, z_i^j\right) = \left(h_n^k, t^2 z_i^j\right).$$

З умови $\delta_{ni}^{kj} = \left(h_n^k, t^2 z_i^j\right)$ та з леми 3.1 випливає, що $t^2 z_i^j = h_i^j + y_i^j$, де $y_i^j \in \left\langle \overline{h_n^k} \right\rangle, n,k \in N_0$. Тоді

$$t^2 z_i^j = h_i^j + \sum_{n,k \in N_0} \alpha_n^k h_n^k, \text{ де } \alpha_p^l = const.$$

Отже, функцію z_i^j можна подати у вигляді :

$$z_i^j = \frac{h_i^j}{t^2} + \sum_{n,k \in N_0} \alpha_n^k \frac{h_n^k}{t^2}.$$

Зауважимо, що серед функцій $\frac{h_i^j}{t^2}$ обов'язково є такі, у яких $j=0$, тобто такі, носієм яких буде відрізок $\left[0,\frac{1}{2^i}\right]$. Це дійсно так, оскільки з вихідної системи було видалену лише скінчену кількість функцій. Але жодна з функцій вигляду $\frac{h_i^0}{t^2}$ не належить простору $L_2[0,1]$ (цей факт було показано при доведені твердження 3.3), тоді і $z_i^0 \notin L_2[0,1]$.

Отже, наше припущення було хибним, з чого випливає, що система $\left\{t^2 \cdot h_{2^n+k}(t)\right\}_{n=0,k=0}^{\infty,2^n-1}$ не є дефектно-мінімальною.

3.4 Мінімальна підпослідовність

Оскільки система Гаара під дією оператора втрачає властивість мінімальності і навіть дефектної мінімальності, виникає питання, чи може перетворена система Гаара бути мінімальною, якщо вилучити з неї більше ніж скінченну множину елементів. Ми отримали позитивну відповідь на це питання.

Такою послідовністю виявляється послідовність, яка утворюється після вилучення перших функцій у кожній групі системи Гаара: $\left\{t^2 \cdot h_n^k(t)\right\}_{n=1,\ k=1}^{\infty\quad 2^n-1}$.

Твердження 3.5 Послідовність $\left\{t^2 \cdot h_n^k(t)\right\}_{n=1,\ k=1}^{\infty\quad 2^n-1}$ буде мінімальною в просторі $L_2[0,1]$.

Доведення. Спряженою до $\left\{t^2 \cdot h_n^k(t)\right\}_{n=1,\ k=1}^{\infty\quad 2^n-1}$ буде система:

$$z_n^k(t)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2^n}}{t^2}, & t\in\left[\dfrac{2k}{2^{n+1}},\dfrac{2k+1}{2^{n+1}}\right);\\ -\dfrac{\sqrt{2^n}}{t^2}, & t\in\left[\dfrac{2k+1}{2^{n+1}},\dfrac{2k+2}{2^{n+1}}\right);\\ 0, & t\notin\left[\dfrac{2k}{2^{n+1}},\dfrac{2k+2}{2^{n+1}}\right).\end{cases}$$

Дійсно, якщо функції мають однакові номери, тоді

$$\left(z_n^k,t^2h_n^k\right)=\int\limits_{\frac{2k}{2^{n+1}}}^{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}2^n\,dt+\int\limits_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}^{\frac{2k+2}{2^{n+1}}}2^n\,dt=2^n\int\limits_{\frac{2k}{2^{n+1}}}^{\frac{2k+2}{2^{n+1}}}dt=2^n\cdot\frac{2k+2-2k}{2^{n+1}}=1.$$

Нехай тепер функції різні. Якщо функції z_l^p та $t^2h_n^k$ належать до однієї групи, тобто якщо $n=l$, $k\neq p$, тоді $\left(z_n^p,t^2h_n^k\right)=0$, оскільки носії функцій не перетинаються.

Якщо ж функції z_l^p та $t^2h_n^k$ належать різним групам, тобто якщо $n\neq l$, то можливі два випадки: носії функції не перетинаються і тоді $\left(z_l^p,t^2h_n^k\right)=0$; носій однієї функції повністю міститься в носії іншої функції.

Не обмежуючи загальності, припустимо, що $n>l$, тобто довжина носія функції h_n^k менша за довжину носія функції z_l^p. Тоді

$$\left(z_l^p,t^2h_n^k\right)=\int\limits_{\frac{2k}{2^{n+1}}}^{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}\sqrt{2^l}\cdot\sqrt{2^n}\,dt-\int\limits_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}^{\frac{2k+2}{2^{n+1}}}\sqrt{2^l}\cdot\sqrt{2^n}\,dt=$$

$$=\sqrt{2^{n+l}}\left(\frac{2k+1-2k}{2^{n+1}}\right)-\sqrt{2^{n+l}}\left(\frac{2k+2-2k-1}{2^{n+1}}\right)=$$

$$=\sqrt{2^{n+l}}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}-\sqrt{2^{n+l}}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=0$$

або

$$\left(z_l^p, t^2 h_n^k\right)=-\int_{\frac{2k}{2^{n+1}}}^{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}\sqrt{2^l}\cdot\sqrt{2^n}\,dt+\int_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}^{\frac{2k+2}{2^{n+1}}}\sqrt{2^l}\cdot\sqrt{2^n}\,dt=$$

$$=-\sqrt{2^{n+l}}\left(\frac{2k+1-2k}{2^{n+1}}\right)+\sqrt{2^{n+l}}\left(\frac{2k+2-2k-1}{2^{n+1}}\right)=$$

$$=-\sqrt{2^{n+l}}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}+\sqrt{2^{n+l}}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=0.$$

Таким чином, $\left(z_n^k, t^2 h_n^k\right)=\delta_n^k$, тобто система $\left\{t^2\cdot h_n^k(t)\right\}_{n=1,\ k=1}^{\infty\quad 2^n-1}$ – мінімальна в просторі $L_2[0,1]$. Твердження доведено.

3.5 Приклад ортонормованого базиса $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такого, що $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ – безумовний базис $L_2[0,1]$

У попередніх главах ми розглядали дію оператора множення на незалежну змінну на системі Гаара. При цьому отримана перетворена система переставала бути базисом. Більш того, вона втрачала властивість мінімальності і, навіть не була дефектно-мінімальною. Минулорічна робота бакалавра була присвячена дослідженню аналогічних питань для стандартного тригонометричного базису. Відповідь також була негативною – перетворена система переставала бути навіть дефектно-мінімальною.

Виникає питання: чи існує взагалі ортонормований базис $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ простору $L_2[0,1]$ такий, що система $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ є безумовним базисом простору $L_2[0,1]$. Нами побудований приклад такого базису.

Теорема 3.2 Існує такий ортонормований базис $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ простору $L_2[0,1]$, що $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}=\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$, де $(Ax)(t)=t^2\cdot x(t)$ буде безумовним базисом простору $L_2[0,1]$.

Доведення. Оскільки A – самоспряжений оператор з неперервним спектром, що співпадає з $[0,1]$, то A подається у наступному вигляді:

$$A=\int\limits_{[0,1]}\lambda dP_\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}}\lambda dP_\lambda ,$$

де P_λ – сім'я проекторів,

$$(P_\lambda f)(t)=\begin{cases} f(t),\ 0\le t\le\lambda; \\ 0,\ \lambda<t\le 1. \end{cases}$$

Покладемо $A_n=\int\limits_{2^{-n}}^{2^{-n+1}}\lambda dP_\lambda$ та $\Delta_n P=P_{2^{-n+1}}-P_{2^{-n}}$, тобто

$$\left(\Delta_n Pf\right)(t)=\begin{cases} f(t),\ t\in\left(\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right]; \\ 0,\ t\notin\left(\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right]. \end{cases}$$

Позначимо через B_n образ оператора $\Delta_n P$ на просторі $L_2[0,1]$. Очевидно, що

$$B_n=\Delta_n P\left(L_2[0,1]\right)=L_2\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right].$$

Оскільки при $n\neq i$, $B_i\bigcap B_n=\{0\}$, тоді простір $L_2[0,1]$ подається у вигляді прямої суми:

$$L_2[0,1]=\sum_{n=1}^{\infty}\oplus B_n\ .$$

У якості ортонормованого базиса простору $L_2[0,1]$ виберемо довільний ортонормований базис $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ цього простору (стандартний тригонометричний, систему Гаара). Оскільки оператор A_n оборотний на B_n, тоді послідовність $\left\{z_i^n\right\}_{i=1}^{\infty}=\left\{Ae_i^n\right\}_{i=1}^{\infty}$ є безумовним базисом (він є подібним ортогональному і квазінормованим), якщо $\left\{e_i^n\right\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормований базис простору B_n.

Покладемо

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{e_i^n\right\}_{i=1}^{\infty},\ \ \{y_n\}_{n=1}^{\infty}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{t^2e_i^n\right\}_{i=1}^{\infty}.$$

Покажемо, що $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – той базис, існування якого стверджується в теоремі, тобто що $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – безумовний базис простору $L_2[0,1]$.

На ортонормованому базисі $\left\{e_i^n\right\}_{i=1}^{\infty}$ простору B_n означимо оператор $S_n e_i^n = 2^n A_n e_i^n$. Тоді $1 \le \left\| S_n e_i^n \right\| \le 2$, тобто S_n перетворює ортонормований базис $\left\{e_i^n\right\}_{i=1}^{\infty}$ в квазінормований безумовний базис, тобто може бути продовженим до ізоморфізму у B_n. При цьому $\left\| S_n^{-1} \right\| \le 1 \le \left\| S_n \right\| \le 2$.

У просторі $L_2[0,1]$ розглянемо оператор $Sx = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus S_n x_n$, де $x = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus x_n, x \notin L_2[0,1], \quad x_n \notin L_2\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$. Зауважимо, що $\|S\| \le 1 \le \|S\| \le 2$, тобто S – це ізоморфізм у просторі $L_2[0,1]$.

Тоді послідовність

$$\{y_n\}_{k=1}^{\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{t^2 z_i^n\right\}_{i=1}^{\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ S\left(\frac{1}{2^n} e_i^n\right)\right\}_{i=1}^{\infty}$$

є безумовним базисом у просторі $L_2[0,1]$ як результат застосування оператора S до ортонормованого базису $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{2^n} e_i^n\right\}_{i=1}^{\infty}$.

ВИСНОВКИ

Існування базису у нормованому просторі значно спрощує дослідження його властивостей, оскільки дає можливість подати кожний елемент простору у вигляді збіжного ряду за елементами базису. Робота була присвячена перетворенню ортонормованого базису простору $L_2[0,1]$ під дією оператора множення на функцію.

Цей оператор має незамкнену область значень та є оператором щільного вкладення. Минулорічна кваліфікаційна робота бакалавра була присвячена дослідженню дії такого оператора на іншому базисі – стандартному тригонометричному.

У першому розділі ми нагадуємо основні поняття та факти з теорії нормованих і, зокрема, гільбертових просторів. В якості гільбертового простору в роботі розглядається дійсний простір $L_2[0,1]$. А в якості ортонормованого базису цього простору вибрано систему Гаара, яка є безумовним базисом цього простору.

Другий розділ був присвячений властивостям операторів щільного вкладення. Докладно це питання було розглянуто в кваліфікаційній роботі бакалавра, тому ми навели основні результати. Цей оператор має нульове ядро та незамкнену область значень, щільну в $L_2[0,1]$. В якості такого оператора ми розглядаємо оператор множення на неперервну функцію $(Ax)(t) = t^2 \cdot x(t)$. Показано, що такий оператор є самоспряженим та некомпактним, знайдено його спектр.

У третьому розділі ми аналізуємо властивості системи, яка утворюється з системи Гаара під дією оператора A. Доведено, що перетворена система Гаара не є базисом у $L_2[0,1]$, оскільки вона перестає бути мінімальною та навіть дефектно-мінімальною системою, тобто такою, яка стає мінімальною після видалення з неї скінченного числа елементів.

Але ми показали, що перетворена система стає мінімальною, якщо вилучити з неї нескінченну кількість елементів. Оскільки схожі результати були отримані у минулорічній роботі для іншого ортонормованого базису, виникло природне запитання: а чи існує взагалі ортонормований базис $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ простору $L_2[0,1]$ такий, що система $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ є безумовним базисом простору $L_2[0,1]$. Нами побудований приклад такого базису із застосуванням спектрального розвинення оператора.

Зауважимо, що цікавість до теорії операторів з незамкненою областю значень пояснюється наявністю великої кількістю застосувань цих операторів, зокрема, у теорії некоректних задач. Результати роботи доповідалися на Десятій Всеукраїнській, сімнадцятій регіональній науковій конференції молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» [12]. Вони можуть бути використані при викладанні курсу функціонального аналізу та спецкурсів, пов’язаних з теорією лінійних операторів.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Антоневич А. Б., Радыно Я. В. Функциональний анализ и интегральные уравнения. Москва : Изд-во «Университетское», 1984. 351 с.
2. Ахиезер Н. И., Глазман Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Москва : Наука, 1966. 519 с
3. Банах С. С. Курс функціонального аналізу. Київ : Рад. шк., 1948. 216 с.
4. Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функціональний аналіз. Київ : Вища школа, 1990. 600 с.
5. Городецкий В. В., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П. Методы решения задач по функциональному анализу. Киев : Вища школа, 1990. 479 с.
6. Дистель Д. Геометрия банаховых пространств. Київ : Вища школа, 1980. 215 с.
7. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Начальный курс. Москва : Изд-во МГУ, 1985. 662 с.
8. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Продолжение курса. Москва : Изд-во МГУ, 1987. 358 с.
9. Кадец В. М. Курс функционального анализа. Харьков : ХНУ, 2006. 607 с.
10. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва : Наука, 1976. 542 с.
11. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. Москва : Наука, 1965. 519 с.
12. Маляренко М. Л., Красікова І. В. *Перетворення системи Гаара під дією оператора множення на функцію у просторі* $L_2[0,1]$. Актуальні проблеми математики та інформатики: Збірка тез доповідей Десятої

Всеукраїнської, сімнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників. (Запоріжжя, 25-26 квіт. 2019). Запоріжжя : ЗНУ, 20189. с. 80–81.

13. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. Москва : Наука, 1974. 480 с.

14. Попов М. М. Доповнювальні підпростори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха // *Математика сьогодні*, 2007. с. 78–166.

15. Рудин У. Функциональній анализ. Москва : Изд-во «Мир», 1975. 443 с.

16. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Москва : Изд-во «Мир», 1969. 1071 с.

ДОДАТОК А

Тезис наукової конференції

УДК 517.982

ПЕРЕТВОРЕННЯ СИСТЕМИ ГААРА ПІД ДІЄЮ ОПЕРАТОРА МНОЖЕННЯ НА ФУНКЦІЮ У ПРОСТОРІ $L_2[0,1]$.

Маляренко М. Л., студентка; Красікова І. В., к.ф.-м.н., доцент
Запорізький національний університет

В практичних задачах з'являється необхідність розв'язку рівнянь типу $y = Ax$, де $x \in X, y \in Y$, A – лінійний обмежений оператор із незамкненою областю значень. У зв'язку з розв'язанням таких рівнянь, а також з тим, що лінійні оператори з незамкненою областю значень зустрічаються в різних областях аналізу, вивчення властивостей таких операторів дуже актуальне.

Ми розглядаємо в якості прикладу оператор щільного вкладення на просторі $L_2[0,1]$. Саме цей простір ми розглядаємо як сепарабельний гільбертів простір. Лінійний обмежений оператор $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ називається оператором щільного вкладення, якщо $Ker(A) = \{0\}, R(A) \neq L_2[0,1]$ та $\overline{R(A)} = L_2[0,1]$. В якості такого оператора розглядається оператор $(Ax)(t) = a(t) \cdot x(t)$, множення на деяку неперервну на $[0,1]$ функцію $a(t)$, для якої $\mu\{t \in [0,1]: a(t) = 0\} = 0$. Цей оператор є самоспряженим некомпактним оператором. В якості функції вибираємо $a(t) = t^2$.

Ми досліджуємо дію цього оператора на системі Гаара, яка є ортонормованим базисом простору $L_2[0,1]$:

$$h_{mk}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & t \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1/2}{2^m}\right); \\ -\sqrt{2^m}, & t \in \left[\frac{k+1/2}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right); \\ 0, & t \notin \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1/2}{2^m}\right); \end{cases} \quad \text{де} \; \begin{matrix} m = 1,2,\dots, \\ k = 0,1,\dots,2^m - 1. \end{matrix}$$

Ми показуємо, що оператор щільного вкладення зберігає властивість повноти системи. Але виявляється, що система, яка отримана з системи Гаара множенням на $a(t) = t^2$, перестає бути мінімальною системою. Крім того, вона не є навіть дефектно-мінімальною.

Система $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається мінімальною, якщо існує така послідовність $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, для якої виконується умова $(y_n, z_k) = \delta_{nk}$, де δ_{nk} – символ Кронекер. Система називається дефектно-мінімальною, якщо вона стає мінімальною пі видалення з неї скінченної кількості елементів.

Оскільки базис – це повна мінімальна система, послідовність $\{t^2 \cdot h_{mk}(t)\}$ не є базисом у просторі $L_2[0,1]$. Але ми показуємо, що перетворена система Гаара має підпослідовність, яка є базисом в замиканні своєї лінійної оболонки, тобто базисною послідовністю в $L_2[0,1]$.

Враховуючи, що аналогічні результати раніше було одержано для тригонометричного базису цього простору, цікавим було питання, чи існують такі базиси у $L_2[0,1]$, які залишаються базисами після перетворення. Нами отримана позитивна відповідь на це питання – доведено існування такого ортонормованого базису простору $L_2[0,1]$, який залишається базисом під дією оператора щільного вкладення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функціонального анализа. Москва : Наука, 1976. 542 с.
2. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, т.1. Харьков: Высшая школа, 1977. 325с.