МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра фундаментальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ПОРІВНЯННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ВУЗЬКИХ ОПЕРАТОРІВ, ЗАДАНИХ НА ПРОСТОРАХ $L_2\ [0,1]$ та $L_\infty\ [0,1]$»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1118

спеціальності 111 математика

(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми математика

І.Ю. Олійник

(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної математики, доцент, к.ф.-м.н., Красікова І.В.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент завідувач кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н., Зіновєєв І.В.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри фундаментальної математики, д.т.н., доцент

____________ Гребенюк С.М.

(підпис)

« 30 » травня 2019 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Олійник Ірині Юріївні

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Порівняння властивостей вузьких операторів, заданих на просторах $\boldsymbol{L_2}\ [\mathbf{0,1}]$ та $\boldsymbol{L_\infty}\ [\mathbf{0,1}]$

керівник роботи (проекту) Красікова Ірина Володимирівна, к.ф.-м.н., доцент

(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 29 » травня 2019 року № 811-с

2. Строк подання студентом роботи 26 грудня 2019 р.

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Ознайомитися з основними поняттями метричних та нормованих просторів.
2. Визначити основні властивості просторів $L_2\ [0,1]$ та $L_\infty\ [0,1]$.
2. Ознакомитися з основними поняттями лінійних неперервних та компактних операторів.
3. Дослідити властивості вузьких операторів, заданих на просторах $L_2\ [0,1]$ та $L_\infty\ [0,1]$.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) ________
Презентація.

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання ______________________________

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	19.05.2019	виконано
2.	Збір вихідних даних.	09.06.2019	виконано
3.	Обробка методичних та теоретичних		
	джерел.	13.06.2019	виконано
4.	Розробка першого і другого розділу.	17.08.2019	виконано
5.	Розробка третього розділу.	20.10.2019	виконано
6.	Попередній захист кваліфікаційної роботи.	09.12.2019	виконано
7.	Оформлення та нормоконтроль		
	кваліфікаційної роботи.	20.12.2019	виконано
8.	Захист кваліфікаційної роботи.	16.01.2020	

Студент ____________ І.Ю. Олійник
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ____________ І.В. Красікова
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ____________ І.Г. Ткаченко
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота бакалавра «Порівняння властивостей вузьких операторів, заданих на просторах $L_2\,[0,1]$ та $L_\infty\,[0,1]$»: 53 с., 2 рис., 20 джерел.

АБСОЛЮТНО НЕПЕРЕРВНА НОРМА, БАНАХОВА ҐРАТКА, ВЕКТОРНА ҐРАТКА, ВУЗЬКИЙ ОПЕРАТОР, ІСТОТНО ОБМЕЖЕНА ФУНКЦІЯ, КОМПАКТНИЙ ОПЕРАТОР, НОРМОВАНИЙ ПРОСТІР, ФУНКЦІОНАЛ.

Об’єкт дослідження – вузькі оператори, задані на нормованих просторах.

Мета роботи: дослідити та порівняти властивості вузьких операторів на просторах $L_2\ [0,1]$ та $L_\infty\ [0,1]$.

Метод дослідження – аналітичний.

У кваліфікаційній роботі досліджуються властивості вузьких операторів, заданих на просторах $L_2\,[0,1]$ та $L_\infty\,[0,1]$. Наявність або відсутність абсолютно неперервної норми на просторі зумовлює відмінність у властивостях вузьких операторів, зокрема, зв’язок між вузькими та компактними операторами. Дана відповідь на питання про суму вузьких операторів у цих просторах.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis «Comparison on Narrow Operators Properties on Spaces L_2 [0,1] and L_∞ [0,1]»: 53 pages, 2 figures, 20 references.

ABSOLUTELY CONTINUOUS NORM, BANACH LATTICE, VECTOR LATTICE, NARROW OPERATOR, ESSENTIALLY BOUNDED FUNCTION, COMPACT OPERATOR, NORMED SPACE, FUNCTIONAL.

The object of the study is the narrow operators given on the normed spaces.

The aim of the study is exploring and comparing properties of narrow operators on Spaces L_2 [0,1] and L_∞ [0,1].

The method of research is analytical.

The qualification thesis investigates the properties of narrow operators given on spaces L_2 [0,1] and L_∞ [0,1]. The presence or absence of an absolutely continuous norm in space causes differences in the properties of narrow operators, in particular, the relationship between narrow and compact operators. The answer to the question about the sum of narrow operators in these spaces has given.

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія вузьких операторів, визначених на функціональних просторах, бере свій початок з 90-х років минулого століття від роботи українських математиків А.М. Плічка і М.М. Попова [18], де автори уводять і систематично вивчають поняття вузького оператора, як узагальнення поняття компактного оператора, визначеного на симетричному $F-$ просторі функцій з абсолютно неперервною нормою на безатомному просторі зі скінченною мірою та діючого у довільний $F-$ простір. Математичний світ проявив цікавість до цього поняття, тому вузькі оператори почали розглядатися на різноманітних просторах – зокрема, на векторних ґратках, на просторі істотно обмежених функцій тощо. Деякі результати, пов'язані з властивостями вузьких операторів, можна знайти в роботах [14,15]. Теорії вузьких операторів присвячена також монографія [17].

Дослідження властивостей вузьких операторів є досить цікавою задачею, особливо якщо розглядати їх на різних просторах, враховуючи властивості цих просторів. Дана робота присвячена дослідженню та порівнянню властивостей вузьких операторів, заданих на просторах $L_2\,[0,1]$ та $L_\infty[0,1]$. Нехай μ – це міра Лебеґа на $\sigma-$алгебрі Σ всіх борелівських множин відрізка $[0,1]$. Тоді символами $L_2\,[0,1]$ та $L_\infty[0,1]$ позначаються банахові простори (класів еквівалентності) вимірних відносно міри μ функцій, заданих на $[0,1]$ та інтегровних з квадратом або істотно обмежених.

Зауважимо, що простір $L_\infty\,[0,1]$ наділено нормою, яка не є абсолютно неперервною, а у випадку протору $L_2\,[0,1]$ норма є абсолютно неперервною. Абсолютна неперервність норми є однією з найважливіших властивостей лінійних нормованих просторів та безпосередньо зумовлює певні властивості просторів.

Зокрема, в просторі $L_2\,[0,1]$ кожний компактний оператор є вузьким, а у просторі L_∞ $[0,1]$ навіть скінченновимірний оператор не зобов'язаний бути вузьким. Відповідні приклади наведені у роботі. Зауважимо також, що доведення деяких фактів істотно використовує абсолютну неперервність норми у просторі L_2 $[0,1]$, тобто повторити ці доведення у просторі L_∞ $[0,1]$ неможливо.

Оскільки у просторі L_2 $[0,1]$ вузькі оператори узагальнюють компактні, цікавим було питання, які властивості компактних операторів мають місце для вузьких операторів. Відомо, наприклад, що сума компактних операторів є компактним оператором. Але виявляється, що ця властивість не притаманна вузьким операторам навіть у просторі з абсолютно неперервною нормою. Можна стверджувати лише, що сума вузького та компактного операторів є вузьким оператором. У просторі L_∞ $[0,1]$ сума двох вузьких операторів також на зобов'язана буди вузьким оператором.

Дана кваліфікаційна робота стала продовженням кваліфікаційної роботи бакалавра, в якій досліджувалися властивості вузьких операторів на векторній ґратці істотно обмежених функцій.

1 НОРМОВАНІ ПРОСТОРИ ТА ПРОСТОРИ РІССА

1.1 Метричні простори

Означення 1.1 [1] Нехай X – довільна множина. Функція $\rho: X \times X \to \mathbb{R}^{+}$називається метрикою, якщо для неї виконуються наступні аксіоми:

1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\forall x, y \in X\ \rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\forall x, y, z \in X\ \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

При цьому пара (X, ρ) називається метричним простором.

Означення 1.2 [2] Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ точок метричного простору X називається фундаментальною, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \colon \forall n, m \geq n_0\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Означення 1.3 [2] Якщо в метричному просторі збігається будь-яка фундаментальна послідовність, такий простір називається повним.

Означення 1.4 [7] Нехай M – деяка множина у метричному просторі X, ε – довільне додатне число. Множина $A \subset X$ називається ε-сіткою для M, якщо для довільної точки $x \in M$ існує хоча б одна точка $a \in A$, для якої $\rho(x, a) \leq \varepsilon$.

Інакше кажучи, слова існування ε-сітки для множини M означає можливість розмістити усі елементи M у кулях радіуса ε з центрами в точках з множини A.

Означення 1.5 [7] Множина M називається цілком обмеженою, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує скінченна ε-сітка цієї множини.

Цілком обмежену множину можна розмістити у скінченній кількості куль як завгодно малого радіуса з центрами в точках з множини A. Зрозуміло, що кожна цілком обмежена множина є обмеженою, оскільки ту скінченну кількість куль, які містять множину, можна оточити однією кулею.

Теорема 1.1 [6] (необхідна умова компактності) Якщо метричній простір компактний, він цілком обмежений.

Теорема 1.2 [2] (критерій компактності метричного простору) Метричний простір X компактний тоді та тільки тоді, коли він цілком обмежений та повний.

1.2 Нормовані простори

Означення 1.6 [7] Множина X називається лінійним простором над полем дійсних чисел, якщо для її елементів означені операції додавання та множення на дійсне число, які задовольняють умови:

1) $\forall x, y \in X\; x + y = y + x$;
2) $\forall x, y, z \in X\; x + (y + z) = (x + y) + z$;
3) $\exists!\, 0 \in X\colon\; \forall x \in X\; x + 0 = x$;
4) $\forall x \in X\; \exists!\, (-x) \in X\colon x + (-x) = 0$;
5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\; \forall x \in X\; \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
6) $\forall x \in X\; 1 \cdot x = x$;
7) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\; \forall x \in X\; (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;
8) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\; \forall x, y \in X\; \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$.

На лінійному просторі X можна також задати функцію, яка називається скалярним добутком. Якщо розглядати нормований простір над полем дійсних чисел, то скалярним добутком називається така дійсна функція $(\cdot,\cdot)$, яка задана на декартовому квадраті множини X та задовольняє аксіоми:

1. $\forall x \in X\; (x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2. $\forall x, y \in X \ (x, y) = (y, x)$;

3. $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R} \ (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

4. $\forall x, y, z \in X \ (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Лінійний простір, на якому задано скалярний добуток, називають евклідовим простором. Прикладами таки просторі будуть $l_2, R_2^m, C_2[a, b], L_2[a, b]$.

Відмітимо, що кожний евклідів простір буде нормованим, де норма задається формулою:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Якщо простір R_2^m буде нескінченновимірним та повним, він називатиметься гільбертовим. Оскільки простір R_2^m є скінченновимірним, а простір $C_2[a, b]$ – неповним, прикладами гільбертових просторів будуть $l_2, L_2[a, b]$.

Означення 1.7 [8] Нормою називається дійсна невід'ємна функція $|| \cdot ||$, яка задана на лінійному просторі X та задовольняє аксіоми:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $\forall x \in X \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

3) $\forall x, y \in \mathbb{R} \ \|x + y\| \ \leq \|x\| + \|y\|$.

Якщо на лінійному просторі X задана норма, цей простір називається нормованим.

Означення 1.8 [8] Говорять, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до елемента x_0 у нормованому просторі X, якщо $\lim_{n \to \infty} \|x_n - x_0\| = 0$.

Визначена таким чином збіжність в лінійному нормованому просторі називається збіжністю за нормою. Збіжність за нормою називається ще сильною збіжністю.

Означення 1.9 [2] Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається фундаментальною в нормованому просторі X, якщо $\forall\varepsilon > 0\, \exists n_0$: $\forall n \geq n_0\, \forall k \|x_{n+k} - x_n\| < \varepsilon$.

Якщо в нормованому просторі збігається будь-яка фундаментальна послідовність, він називається повним. Повний нормований простір називається банаховим простором.

Оскільки слабка збіжність пов'язана з лінійним неперервними функціоналами, наведемо основні означення щодо функціоналів.

Означення 1.10 [2] Нехай X – лінійні нормовані простори. Функціоналом називається довільне відображення $f: X \to \mathbb{R}$.

Означення 1.11 [8] Функціонал $f: X \to \mathbb{R}$ називається лінійним, якщо $\forall x, y \in X$ та $\forall\, \alpha, \beta\, \in \mathbb{R}$ виконується умова

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Означення 1.12 [2] Функціонал f називається неперервним в точці $x_0 \in X$, якщо він є неперервним відображенням, тобто якщо

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X: x_n \to x_0 \Longrightarrow f(x_n) \to f(x_0).$$

Означення 1.13 [7] Лінійний функціонал f називається обмеженим, якщо $\exists c > 0\, \forall x \in X\, |f(x)| \leq c\|x\|$.

Теорема 1.3 [2] Лінійний функціонал є неперервним тоді та тільки тоді, коли він обмежений.

Означення 1.14 [2] Нормою лінійного неперервного функціонала f називається число

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

З цього означення випливає, що

$$\forall\, x \in X \ \ |f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\|.$$

Відносно означеної вище норми лінійного неперервного функціонала сукупність лінійних неперервних функціоналів, заданих на просторі X, утворює лінійний нормований простір, який завжди є повним (банаховим).

Означення 1.15 [2] Спряженим до простору X називається простір лінійних неперервних функціоналів, заданих на X. Позначається X^*.

Означення 1.16 [2] Нехай X – лінійний нормований простір. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ називається слабко збіжною до елемента $x_0 \in X$, якщо для будь-якого $f \in X^*$ $f(x_n) \to f(x_0)$.

Теорема 1.4 [6] (необхідна умова слабкої збіжності) Якщо $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – слабко збіжна послідовність у нормованому просторі, тоді існує таке число C, що для всіх n $\|x_n\| \le C$. Інакше кажучи, будь-яка слабко збіжна послідовність у нормованому простор обмежена.

Теорема 1.5 [6] (загальний критерій слабкої збіжності у нормованому просторі) Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ елементів нормованого простору X слабко збігається до $x \in X$, якщо:

1) $\|x_n\|$ обмежені в сукупності з деякою константою;

2) $f(x_n) \to f(x_0)$ для всякого $f \in \Delta$, де Δ – деяка множина, лінійна оболонка якої всюди щільна в X^*.

1.3 Нормовані простори $L_2\,[0,1]$ та $L_\infty\,[0,1]$

Розглянемо $[0,1]$ та $\sigma -$ алгебру Σ підмножин відрізка $[0,1]$, вимірних відносно міри Лебега μ.

Означення 1.17 [5] Нехай $1 \le p < \infty$. Множина класів еквівалентних вимірних функцій $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, у яких ступінь $| f |^p$ інтегровна відносно міри Лебега μ на $[0,1]$, називається лебеговим простором $L_p\ [0,1]$.

Нагадаємо, що дві функції f та g називаються еквівалентними, якщо $\mu\{f \neq g\} = 0$. Взагалі, деяка властивість виконується на множині A майже скрізь, коли множина тих елементів з A, де ця властивість не виконується, має нульову міру [9].

Означення 1.18 [8] Функція f називається функцією з інтегровним квадратом на $[0,1]$, якщо інтеграл

$$\int_{[0;1]} |f^2(x)\,| d\mu$$

існує (скінченний). Сукупність всіх таких функцій ми позначимо $L_2[0,1]$ або, скорочено, $L_2[0,1]$. Наприклад, функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ не належить простору $L_2\ [0.1]$, а функція $f(x) = x$ належить простору $L_2\ [0,1]$.

Встановимо основні властивості функцій з інтегрованим квадратом.

1. Добуток двох функцій з інтегровним квадратом є інтегрована функція.

Це безпосередньо випливає з нерівності

$$|f(x)g(x)| \le \frac{1}{2}[f^2(x) + g^2(x)]$$

та властивостей інтеграла Лебега.

Наслідок 1.1 Будь-яка функція f з інтегровним квадратом на просторі із скінченною мірою інтегровна.

2. Сума двох функцій з $L_2[0,1]$ також належить $L_2[0,1]$.

Дійсно,

$$(f(x)+g(x))^2 \leq f^2(x)+2|f(x)g(x)|+g^2(x);$$

в силу властивості 1 кожна з трьох функцій, що стоять праворуч, інтегрована.

3. Якщо $f \in L_2[0,1]$ та α – довільне число, тоді $\alpha f \in L_2[0,1]$.

Дійсно, якщо $f \in L_2[0,1]$, тоді

$$\int\limits_{[0,1]} [\alpha f(x)]^2 d\mu = \alpha^2 \int\limits_{[0,1]} f^2(x) d\mu < \infty.$$

Властивості 2 та 3 означають, що лінійні комбінації функцій з $L_2[0,1]$ знову належать $L_2[0,1]$. Отже, простір L_2 $[0,1]$ є лінійним. Відомо, що він також є нормованим простором, норма в якому визначається за формулою:

$$\|f\| = \left(\int\limits_{[0,1]} |\, f(x)\, |^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Зауважимо, що простір $L_2\,[0,1]$ є банаховими [5], та навіть гільбертовим.

Теорема 1.6 [8] (про слабку збіжність в $L_2[0,1]$.). Для того, щоб послідовність $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ функцій з $L_2[0,1]$ слабко збігалась до елемента $x_0(t) \in L_2[0,1]$, необхідно і достатньо, щоб:

а) послідовність $\{\|x_n(t)\|\}_{n=1}^{\infty}$ була обмеженою;

б) $\int_{[0,\tau]} x_n(t) d\mu(t) \to \int_{[0,\tau]} x_0(t) d\mu(t)$ для будь-якого $\tau \in [0,1]$

Означення 1.19 [8] Вимірну функцію $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ будемо називати істотно обмеженою, якщо вона обмежена на доповненні деякої множині міри нуль.

Множину класів еквівалентних істотно обмежених функцій $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ будемо позначати $L_\infty\,[0,1]$.

З властивостей вимірних функцій [4] випливає, що L_∞ [0,1] є лінійним простором. Норма в ньому за означенням дорівнює істотній верхній межі:

$$\|f\| = \operatorname*{vraisup}_{x\in[0,1]} |f(x)| = \inf_{A\in\sum,\mu(A)=0} \{ \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \}.$$

Теорема 1.7 [6] Простір істотно обмежених функцій L_∞ [0,1] є банаховим простором.

При цьому має місце включення $L_\infty[0,1] \subset L_p[0,1], 1 \le p < \infty$, яке випливає з того, що будь-яка істотно обмежена функція інтегровна за Лебегом [4].

Зворотне включення не є вірним. Наприклад, функція

$$f(x) = \frac{\chi_{R\setminus Q} \cdot tgx}{x \cdot \sqrt[4]{1-x}}$$

належить простору $L_2[0,1]$, але не належить простору $L_\infty[0,1]$. Дійсно, $f(x) = \frac{\chi_{R\setminus Q} \cdot tgx}{x\cdot\sqrt[4]{1-x}} \sim \frac{tgx}{x\cdot\sqrt[4]{1-x}}$, а інтеграл $\int_{[0;1]} \left|\frac{tgx}{x\cdot\sqrt[4]{1-x}}\right|^2 d\mu$ збігається. Але ж $\inf_{A\in\sum,\mu(A)=0}\{\sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{tgx}{x\cdot\sqrt[4]{1-x}}\right|\} = \infty$, тобто дана функція не є істотно обмеженою.

На просторах класів еквівалентних функцій, заданих на [0,1], розглянемо поняття абсолютно неперервної норми.

Означення 1.20 [7] Норма $||\cdot||$ на просторі X класів еквівалентних функцій, заданих на [0,1], називається абсолютно неперервною, якщо для будь-якого $x \in X$ та для будь якої спадної послідовності $(\Omega_n)_{n=1}^\infty$ вимірних підмножин відрізка [0,1] з порожним перетином $\|x \cdot \chi_{\Omega_n}\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 1.8 Норма на просторі $L_2[0,1]$ є абсолютно неперервною.

Доведення. Розглянемо довільну послідовність вкладених вимірних множин $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \Omega_3 \supset \cdots$, перетин яких буде порожньою множиною $\bigcap_n \Omega_n = \emptyset$. За формулою визначення норми в просторі $L_2[0,1]$ будемо мати:

$$\|x \cdot \chi_{\Omega_n}\| = \sqrt{\int\limits_{[0;1]} x^2(t)\chi_{\Omega_n}^2(t)d\mu(t)},$$

$\mu(\Omega_n) \to 0$ так як Ω_n – вкладені вимірні послідовності, $\Omega_n = \emptyset$, тоді $\mu(\Omega_n) \to \mu(\emptyset) = 0$. З цього випливає, що

$$\mu(\Omega_n) \to 0 \Rightarrow \int\limits_{\Omega_n} x^2(t)d\mu(t) \to 0,$$

тобто

$$\|x \cdot \chi_{\Omega_n}\| = \int\limits_{\Omega_n} x^2(t)d\mu(t) \to 0,$$

що означає, що норма на просторі $L_2[0,1]$ буде абсолютно неперервною.

Твердження 1.1 Норма на $L_\infty[0,1]$ не є абсолютно неперервною.

Доведення. Розглянемо довільну послідовність вкладених вимірних множин $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \Omega_3 \supset \cdots$, перетин яких буде порожньою множиною $\bigcap_n \Omega_n = \emptyset$, та функцію $x(t) \equiv 1 \in L_\infty[0,1]$. Зрозуміло, що при всіх n $\|x \cdot \chi_{\Omega_n}\| = \|\chi_{\Omega_n}\| = 1$. Тобто ми знайшли таку функцію $x \in L_\infty[0,1]$, що $\|x \cdot \chi_{\Omega_n}\| = 1 \nrightarrow 0$, що означає, що норма на просторі $L_\infty[0,1]$ не буде абсолютно неперервною.

1.4 Банахові ґратки $L_2\ [0,1]$ та $L_\infty\ [0,1]$

Означення 1.21 [7] Лінійний простір E над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ називається впорядкованим векторним простором, якщо E є частково впорядкованою множиною, тобто на E задано відношення часткового порядку (рефлексивне $x \le x$, антисиметричне $((x \le y) \wedge (y \le x)) \Rightarrow (x = y)$ і транзитивне $((x \le y) \wedge (y \le z)) \Rightarrow$ $\Rightarrow (x \le z))$ відношення), яке пов'язане з лінійною структурою на E у вигляді наступних двох аксіом:

1) для довільних $x, y \in E$, якщо $x \le y$, то $x + z \le y + z$ для кожного $z \in E$.

2) для довільних $x, y \in E$, якщо $x \le y$, то $\alpha x \le \alpha y$ для кожного $\alpha \ge 0$.

Означення 1.22 [7] Точною верхньою межею або супремумом непорожньої підмножини A частково впорядкованої множини E називається такий елемент $sup\, A \in E$, що

1) $x \le sup\, A$ для довільного $x \in A$,

2) для кожного $z \in E$, якщо $x \le z$ для всіх $x \in A$, то $sup\, A \le z$.

Означення 1.23 [7] Точною нижньою межею або інфімумом непорожньої підмножини A частково впорядкованої множини E називається такий елемент $inf\, A \in E$, що

1) $x \ge inf\, A$ для довільного $x \in A$,

2) для кожного $z \in E$, якщо $x \ge z$ для всіх $x \in A$, то $inf\, A \ge z$.

Означення 1.24 [7] Впорядкований векторний простір E називається векторною ґраткою або простором Рісса, якщо для довільної пари елементів $x, y \in E$ існують точна верхня і точна нижня межі $x \vee y = sup\{x, y\}$, $x \wedge y = inf\{x, y\}$ в E.

Означення 1.25 [7] Елемент x^+ називається додатною частиною, x^- – від'ємною частиною і $|x|$ – модулем елемента x.

Згідно з означеннями, додатна і від’ємна частини довільного елемента додатні. Додатність модуля випливатиме з наступного твердження [14].

Твердження 1.2 [11] Нехай E – векторна ґратка і $x \in E$. Тоді

1) $x = x^+ - x^-$;
2) $x^+ \wedge x^- = 0$;
3) якщо $x = y - z$ і $y \wedge z = 0$, то $y = x^+$ і $z = x^-$;
4) $|x| = x^+ + x^-$;
5) $(\alpha x)^+ = \alpha x^+$ для довільного скаляра $\alpha > 0$.

Твердження 1.3 [11] Для довільних елементів x, y векторної ґратки E нерівність $|x| \leq y$ рівносильна двом нерівностям $x \leq y$ і $-x \leq y$.

Твердження 1.4 [11] Для довільних елементів x, y векторної ґратки E мають місце нерівності:

1) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$;
2) $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$;
3) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$;
4) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$;
5) $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}(|x + y| - |x - y|)$.

Зауважимо, що з пп. 1) і 2) даного твердження випливає, що впорядкований векторний простір E є векторною ґраткою тоді і лише тоді, коли $|x| = x \vee (-x)$ існує для довільного $x \in E$.

Твердження 1.5 [11] Для довільних елементів x, y векторної ґратки E має місце нерівність трикутника:

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Якщо в твердженні 1.5 y замінити на $-y$, одержимо наступне твердження.

Наслідок 1.1 Для довільних елементів x, y векторної ґратки E має місце нерівність трикутника:

$$\left||x| - |y|\right| \leq |x - y|.$$

Означення 1.26 [3] Нормований (банахів) простір X називається нормованою (банаховою) ґраткою, якщо X є одночасно і векторною ґраткою, причому для довільних елементів $x, y \in X$ з нерівності $|x| \leq |y|$ випливає, що $\|x\| \leq \|y\|$.

Твердження 1.6 Простір $L_p[0,1]$, $1 \leq p \leq \infty$ є впорядкованим векторним простором відносно порядку: $f \leq g$ тоді та тільки тоді коли $f(t) \leq g(t)$ майже скрізь.

Доведення. Покажемо, що задане в умові відношення «майже скрізь» є відношенням часткового порядку:

1) рефлексивність: $f(t) \leq f(t)$ навіть для всіх $t \in [0,1]$;

2) антисиметричність: нехай $f(t) \leq g(t)$ майже скрізь та $g(t) \leq f(t)$ майже скрізь. Позначимо

$$A_1 = \{t \in [0,1]: f(t) > g(t)\},$$
$$A_2 = \{t \in [0,1]: f(t) < g(t)\}.$$

Зрозуміло, що $\mu(A_1) = 0, \mu(A_2) = 0$. Якщо $t \notin A_1 \cup A_2$, тоді $f(t) \leq g(t)$ та $g(t) \leq f(t)$, тобто $f(t) = g(t)$. Якщо ж $t \in A_1 \cup A_2$, тоді такий висновок зробити не можна, тобто $g(t) \neq f(t)$. Але, оскільки, $\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2) = 0 + 0 = 0$, тобто $\mu(A_1 \cup A_2) = 0$ та умова $f(t) = g(t)$ не виконується на множині нульової міри, тобто виконується майже скрізь.

3) транзитивність: нехай $f(t) \leq g(t)$ майже скрізь та $g(t) \leq \varphi(t)$ майже скрізь. Знову покладемо

$$A_1 = \{t \in [0,1]: f(t) > g(t)\},$$
$$A_2 = \{t \in [0,1]: g(t) < \varphi(t)\}.$$

Якщо $t \notin A_1 \cup A_2$, тоді $f(t) \le g(t)$ та $g(t) \le \varphi(t)$, тобто $f(t) \le \varphi(t)$. Якщо ж $t \in A_1 \cup A_2$, тоді такий висновок зробити не можна. Але оскільки $\mu(A_1 \cup A_2) \le \mu(A_1) + \mu(A_2) = 0 + 0 = 0$, тобто $\mu(A_1 \cup A_2) = 0$, то умова $f(t) \le \varphi(t)$ виконується майже скрізь.

Це означає, що задане відношення «майже скрізь» є відношенням часткового порядку. Покажемо, що для цього відношення виконуються аксіоми з означення впорядкованого векторного простору.

Нехай $f \le g$, тобто $f(t) \le g(t)$ майже скрізь на $[0,1]$. Тоді $\forall \varphi \in L_p[0,1]$ та для майже всіх $t \in [0,1]$ $f(t) + \varphi(t) \le g(t) + \varphi(t)$ або $f + \varphi \le g + \varphi$. Крім того, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ майже скрізь на $[0,1]$ $\alpha f(t) \le \alpha g(t)$, тобто $\alpha f \le \alpha g$, що означає, що простір $L_p[0,1], 1 \le p \le \infty$ є впорядкованим векторним простором.

Теорема 1.9 Простори $L_\infty[0,1]$, $L_2[0,1]$ – векторні ґратки відносно порядку майже скрізь: $f, g \in L_\infty[0,1]$ $(L_2[0,1])$, $f \le g$ тоді і тільки тоді, коли $f(t) \le g(t)$ для майже всіх $t \in [0;1]$.

Доведення. З твердження 1.6 випливає, що $L_\infty[0,1]$, $L_2[0,1]$ – це впорядковані векторні простори. Покладемо для довільних функцій $f, g \in L_\infty[0,1]$ або $L_2[0,1]$

$$h(t) = \max\{f(t), g(t)\} = \begin{cases} f(t), f(t) \ge g(t), \\ g(t), f(t) < g(t) \end{cases}$$

та доведемо, що $h(t) = f \vee g$.

Покажемо спочатку, що $f \le h$ та $g \le h$. Фактично це випливає з означення функції h: якщо $f(t) \ge g(t)$, то $h(t) = f(t)$ та $f(t) \le f(t)$, а якщо $f(t) < g(t)$, тоді $h(t) = g(t) > f(t)$. Отже, $f \le h$. Аналогічно доводимо, що

$g \leq h$: якщо $f(t) \leq g(t)$, тоді $h(t) = g(t)$ та $g(t) \leq g(t)$, якщо $f(t) > g(t)$, тоді $h(t) = g(t) > f(t)$. Отже, $g \leq h$.

Перевіримо тепер виконання другої умови з означення супремуму. Нехай для довільної функції $\varphi \in L_\infty[0,1]$ або $L_2[0,1]$ виконується умова: $f \leq \varphi$ та $g \leq \varphi$, тобто для майже всіх $t \in [0,1]$ $f(t) \leq \varphi(t)$ та $g(t) \leq \varphi(t)$. Очевидно, що $\max\{f(t), g(t)\} \leq \varphi$ для майже всіх $t \in [0,1]$, тобто $h(t) \leq \varphi(t)$ майже скрізь на $[0,1]$, що означає виконання другої умови з означення супремуму: $h \leq \varphi$.

Залишилося довести, що для будь-яких $f, g \in L_\infty[0,1]$ ($L_2[0,1]$) функція $h \in L_\infty[0,1]$ ($L_2[0,1]$). Оскільки $f \in L_\infty[0,1]$ ($L_2[0,1]$) і $g \in L_\infty[0,1]$ ($L_2[0,1]$), тоді існують такі додатні константи c_1, c_2, що $|f| \leq c_1$ на множині $[0,1] \backslash A_f$, де A_f – будь-яка множина нульової міри, та $|g| \leq c_2$ на множині $[0,1] \backslash A_g$, де A_g – будь-яка множина нульової міри.

Тоді $|h| \leq \max\{c_1, c_2\}$ на множині $[0,1] \backslash A_f \cup A_g$, де $\mu(A_1 \cup A_2) = 0$.

Отже, функція $h(t) = \max\{f(t), g(t)\}$ є істотно обмеженою, тобто простори $L_\infty[0,1]$ та $L_2[0,1]$ є векторними ґратками.

Твердження 1.7 Простори $L_\infty[0,1]$ та $L_2[0,1]$ є банаховими ґратками.

Означення 1.27 [13] Векторна ґратка E називається порядково повною, якщо кожна обмежена зверху множина $\emptyset \neq A \subseteq E$ має точну верхню межу $supA$.

Теорема 1.9 Простори $L_\infty[0,1]$, $L_2[0,1]$ є порядково повними векторними ґратками [13].

2 ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ТА КОМПАКТНІ ОПЕРАТОРИ

2.1 Лінійні неперервні оператори

Розглянемо основні поняття, пов'язані з лінійними операторами, заданими на нормованому просторі [2].

Означення 2.1 [2] Нехай X, Y – нормовані простори. Відображення $A: X \to Y$ називається оператором. Областю визначення оператора A називається множина

$$D(A) = \{ x \in X : \exists y \in Y : Ax = y\}.$$

Областю значень оператора A називається множина

$$R(A) = \{y \in Y : \exists x \in X : Ax = y\}.$$

Нагадаємо, що оператор A називається лінійним, якщо $\forall x, y \in X$ та $\forall \alpha, \beta \in P$

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Означення 2.2 [2] Оператор називається неперервним в точці x_0, якщо

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X : x_n \to x_0 \ \Rightarrow Ax_n \to Ax_0.$$

Якщо лінійний оператор неперервний в одній точці, він буде неперервним на всьому просторі X.

Означення 2.3 [2] Оператор називається обмеженим, якщо обмежену множину він переводить в обмежену.

Для лінійних операторів це означення можна записати так:

$$\exists\, c > 0 \colon \forall x \in X \ \|Ax\| \le c \cdot \|x\|.$$

Нормою лінійного обмеженого оператора називається число

$$\|A\| = inf\{c > 0 \colon \forall x \in X \ \|Ax\| \le c \cdot \|x\|\}$$

або

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

2.2 Компактні оператори

Означення 2.4 [8] Оператор A, що відображає банахів простір X в себе (або в інший банахів простір Y), називається компактним, якщо він кожну обмежену множину переводить в передкомпактну.

Нагадаємо, що множина M, що лежить в деякому нормованому просторі X, називається передкомпактною, якщо її замикання в X компактне.

Означення 2.5 [8] Лінійний обмежений оператор $A \colon X \to Y$ називається скінченновимірним, якщо множина значень цього оператора є скінченновимірним підпростором у просторі Y.

Відомо [2], що кожний скінченновимірний оператор є компактним. З цього випливає, наприклад, що кожний лінійний неперервний функціонал є компактним оператором.

Твердження 2.1 [8] Оператор A є компактним в гільбертовому просторі $L_2[0,1]$ тоді та тільки тоді, коли він будь-яку слабко збіжну послідовність переводить в сильно збіжну.

Доведення. Припустимо виконання останньої умови та оберемо множину M, обмежену в X. В кожній нескінченній підмножині множини M міститься слабко збіжна підпослідовність, яка переводиться оператором у сильно збіжну послідовність. Отже, множина AM буде предкомпактною, а оператор A – компактним.

Нехай тепер оператор A є компактним, послідовність $\{x_n\}$ є слабко збіжною, а x – її слабка границя. Тоді $\{Ax_n\}$ має підпослідовність, яка є сильно збіжною. З іншого боку $\{Ax_n\}$ збігається слабко до Ax за рахунок неперервності оператора. Тобто $\{Ax_n\}$ має не більше однієї граничної точки. Отже, послідовність $\{Ax_n\}$ є збіжною.

Наведемо основні властивості компактних операторів.

Теорема 2.1 [6] Якщо $\{A_n\}$ – послідовність компактних операторів в банаховому просторі E, що збігається за нормою до деякого оператора A, тоді оператор A також компактний.

Теорема 2.2 [6] Якщо A – компактний оператор, а B – обмежений, тоді оператори AB та BA компактні.

В якості прикладу компактного оператора можна обрати будь-який інтегральний оператор з виродженим ядром, наприклад, $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$

$$(Ax)(t) = \int_{[0;1]} tx(\tau)d\mu(\tau),$$

оскільки він є скінченновимірним оператором.

В якості прикладу покажемо, що одиничний оператор $Ix = x$ не буде компактним в $L_2[0,1]$. Доведемо, що він не будь-яку слабко збіжну послідовність переводить в сильно збіжну.

Оберемо послідовність $f_n(x) = \cos nx$. Спочатку доведемо, що вона слабко збігається до нуля. Для цього перевіримо умови з теореми (критерій слабкої збіжності). Покажемо обмеженість даної послідовності:

$$\|f_n(x)\| = \sqrt{\int_0^1 (cosnx)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{1 + cos2nx}{2}\right) dx} =$$

$$= \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{cos2nx}{2}\right) dx} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x + \frac{sin2nx}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)\Big|_0^1} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{sin2n}{4n} - 0} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{sin2n}{4n}} \leq \sqrt{\frac{1}{2} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

тобто, послідовність є обмеженою.

Тепер перевіримо другу умову критерію:

$$\int\limits_{[0,s]} cosnxd\mu = \int_0^s cosnxdx = \frac{1}{n} sinnx \Big|_0^s = \frac{1}{n}\sin(ns) - \frac{1}{n}\sin(n \cdot 0) =$$

$$= \frac{1}{n}\sin(ns) \to 0,$$

отже, послідовність прямує до нуля, виконується друга умова критерію, тобто дана послідовність є слабко збіжною.

Але сильно збіжною ця послідовність не буде. Зауважимо, що сильна збіжність – це збіжність за нормою. Отже, порахуємо, чому буде дорівнювати норма обраної послідовності в просторі $L_2[0,1]$. Отримаємо:

$$\|f_n(x)\| = \left(\int\limits_{[0;1]} |f_n(x)\,|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\int_0^1 (cosnx)^2 dx} =$$

$$= \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{cos2nx}{2}\right) dx} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x + \frac{sin2nx}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)\Big|_0^1} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{sin2n}{4n}} \to \sqrt{\frac{1}{2}} \neq 0$$

Отримали, що послідовність $f_n(x) = \cos nx$ не збігається за нормою, тобто не є сильно збіжною, а звідси випливає, що одиничний оператор в $L_2[0,1]$ не є компактним.

Наведемо ще один приклад компактного оператора в просторі $L_2[0,1]$. Маємо оператор A: $L_2[0,1] \to L_2[0,1]$,

$$(Ax)(t) = \int_{[0,1]} [s \cdot \sin(t) + 2\cos(t)]\, x(s) d\mu(s).$$

Спочатку перевіримо його на лінійність та обмеженість: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall\, x, y \in L_2[0,1]$

$$\big(A(\alpha x + \beta y)\big)(t) = \int_{[0,1]} [s \cdot \sin(t) + 2\cos(t)] \cdot \big(\alpha x(s) + \beta y(s)\big) d\mu(s) =$$

$$= \alpha \int_{[0,1]} [s \cdot \sin(t) + 2\cos(t)] \cdot x(s) d\mu(s) +$$

$$+\beta \int_{[0,1]} [s \cdot \sin(t) + 2\cos(t)] \cdot y(s) d\mu(s) = \alpha(Ax)(t) + \beta(Ay)(t).$$

З цієї рівності випливає, що оператор лінійний. Зрозуміло, що цей оператор подається у вигляді суми двох операторів

$$A_1x = sint \int\limits_{[0,1]} s \cdot x(s)d\mu(s)$$

та

$$A_2x = 2cost \int\limits_{[0,1]} x(s)d\mu(s).$$

Тоді, якщо кожний з цих операторів є обмеженим, буде обмеженим оператором їхня сума:

$$\|Ax\| = \|A_1x + A_2x\| \le \|A_1x\| + \|A_2x\| \le C_1\|x\| + C_2\|x\| =$$
$$= (C_1 + C_2)\|x\|,$$

$$\|A_1x\| = \sqrt{\int\limits_{[0,1]} sin^2t \left| \int\limits_{[0,1]} s \cdot x(s)d\mu(s) \right|^2 d\mu(t)} = \left| \int\limits_{[0,1]} s \cdot x(s)d\mu(s) \right| \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\int\limits_0^1 sin^2tdt} = \left| \int\limits_{[0,1]} s \cdot x(s)d\mu(s) \right| \cdot \sqrt{\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{cos2t}{2}\right)dt} = \left| \int\limits_{[0,1]} s \cdot x(s)d\mu(s) \right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}t - \frac{sin2t}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)\Big|_0^1} = \left| \int\limits_{[0,1]} s \cdot x(s)d\mu(s) \right| \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{sin2}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2 - sin2} \cdot \left| \int\limits_{[0,1]} s \cdot x(s)d\mu(s) \right| \le \frac{1}{2}\sqrt{2 - sin2} \cdot \sqrt{\int\limits_0^1 s^2 ds} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\int\limits_{[0,1]} x^2(s)d\mu(s)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{2 - sin2} \cdot \|x\| = C_1\|x\|,\ C_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{2 - sin2}.$$

$$\|A_2x\| = \sqrt{\int\limits_{[0,1]} cos^2 2t \left|\int\limits_{[0,1]} x(s)d\mu(s)\right|^2 d\mu(t)} = \left|\int\limits_{[0,1]} x(s)d\mu(s)\right| \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\int\limits_0^1 cos^2 2tdt} = \left|\int\limits_{[0,1]} x(s)d\mu(s)\right| \cdot \sqrt{\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{cos4t}{2}\right) dt} =$$

$$= \left|\int\limits_{[0,1]} x(s)d\mu(s)\right| \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}t + \frac{sin4t}{2} \cdot \frac{1}{4}\right)\Big|_0^1} = \left|\int\limits_{[0,1]} x(s)d\mu(s)\right| \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{sin4}{8}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4 + sin4} \cdot \left|\int\limits_{[0,1]} x(s)d\mu(s)\right| \le \frac{1}{2}\sqrt{4 + sin4} \cdot \sqrt{\int\limits_0^1 1^2 ds} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\int\limits_{[0,1]} x^2(s)d\mu(s)} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + sin4} \cdot \|x\| = C_2\|x\|, C_2 = \frac{1}{2}\sqrt{4 + sin4}.$$

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{2 - sin2} + \frac{1}{2}\sqrt{4 + sin4}.$$

Отже, заданий оператор є обмеженим та подається у вигляді суми двох скінченновимірних (а, значить, і компактних) операторів. З цього випливає, що він і сам є компактним.

2.3 Вузькі оператори

Серед лінійних операторів окремий клас утворюють так звані вузькі оператори. Ми будемо розглядати ці оператори, задані лише на двох просторах – $L_\infty[0,1]$ та $L_2[0,1]$. Відповідно, дамо два означення.

Означення 2.6 [14] Нехай X – довільний банахів простір. Оператор $T \in \mathcal{L}(L_\infty[0,1], X)$ називається вузьким, якщо для будь-яких $A \in \sum$ та $\varepsilon > 0$ існує такий $x \in L_\infty[0,1]$, що $x^2 = \chi_A$, $\int_{[0,1]} x d\mu = 0$ та $\|Tx\| < \varepsilon$.

Означення 2.7 [18] Нехай X – довільний банахів простір. Оператор $T \in \mathcal{L}(L_2[0,1], X)$ називається вузьким, якщо для будь-яких $A \in \sum$ та $\varepsilon > 0$ існує такий $x \in L_2[0,1]$, що $x^2 = \chi_A$, $\int_{[0,1]} x d\mu = 0$ та $\|Tx\| < \varepsilon$.

Іншими словами, умова $x^2 = \chi_A$ (χ_A – характеристична функція множини A) означає, що функція x приймає значення ± 1 на множині A та значення 0 за межами множини A, тобто існує таке розбиття $A = A_1 \coprod A_2$, що множини A_1, A_2 не перетинаються, та

$$x = \begin{cases} 1, & t \in A_1, \\ -1, & t \in A_2, \\ 0, t \notin A_1 \cup A_2. \end{cases}$$

А умова $\int_{[0,1]} x d\mu = 0$, в свою чергу, означає, що

$$0 = \int\limits_{[0;1]} x d\mu = \int\limits_{A} x d\mu = \int\limits_{A_1} d\mu - \int\limits_{A_2} d\mu = \mu A_1 - \mu A_2,$$

тобто, що $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

Отже, функцію x з означення вузького оператора можна подати у вигляді: $x = \chi_{A_1} - \chi_{A_2}$.

Наприклад, тотожний оператор $I: x \to x$ не є вузьким. Знайдемо норму елемента $\|Ix\|$ у просторах $L_2[0,1]$ та $L_\infty[0,1]$. Для $L_2[0,1]$ отримаємо

$$\|Ix\| = \sqrt{\int_{[0,1]} x^2(t) d\mu} = \sqrt{\int_A 1 \cdot d\mu} = \mu(A) \nless \varepsilon,$$

$\mu(A)$ не буде менше як завгодно малого додатного наперед заданого числа ε.

Для простору $L_\infty[0,1]$ будемо мати аналогічний результат:

$$\|Ix\| = vraisup|x| = 1 \nless \varepsilon.$$

2.4 Система Радемахера

Розглянемо систему Радемахера, побудовану на відрізку [0,1] [19]. Вона пов'язує між собою вузькі та компактні оператори наступним чином: $r_n(x) = sign(\sin(2^n \pi x)),\ \ x \in [0,1],\ \ n = 0,1,2,3\ldots$. Враховуючи, що функції, які майже скрізь збігаються, належать спільному класу еквівалентності, можна вважати, що функції системи Радемахера приймають лише значення ± 1. Для визначеності будемо вважати, що $r_0(x) \equiv 1$, а при $n \geq 1$

$$r_n(x) = \begin{cases} 1,\ \ x \in \left[\dfrac{2k-2}{2^n};\ \dfrac{2k-1}{2^n}\right), k = \overline{1, 2^{n-1}}; \\ -1,\ \ x \in \left[\dfrac{2k-1}{2^n};\ \dfrac{2k}{2^n}\right), k = \overline{1, 2^{n-1}}. \end{cases}$$

Для наочності проілюструємо графік функції системи Радемахера коли $n = 2$, тоді

$$r_2(x) = \begin{cases} 1,\ \ x \in \left[\dfrac{2k-2}{2^2};\ \dfrac{2k-1}{2^2}\right), k = 1,2; \\ -1,\ \ x \in \left[\dfrac{2k-1}{2^2};\ \dfrac{2k}{2^2}\right), k = 1,2. \end{cases}$$

Отже, на інтервалах $\left[0;\frac{1}{4}\right), [\frac{1}{2};\frac{3}{4})$ функція буде приймати значення 1, а на інтервалах $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right), [\frac{3}{4};1)$ значення -1 .

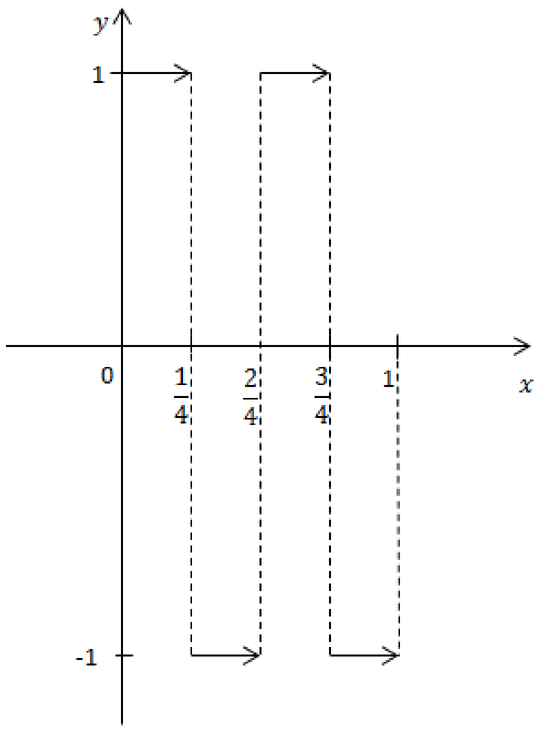

Рисунок 2.1 – Графік функції $r_2(x)$

Для випадку коли $n = 3$ отримаємо

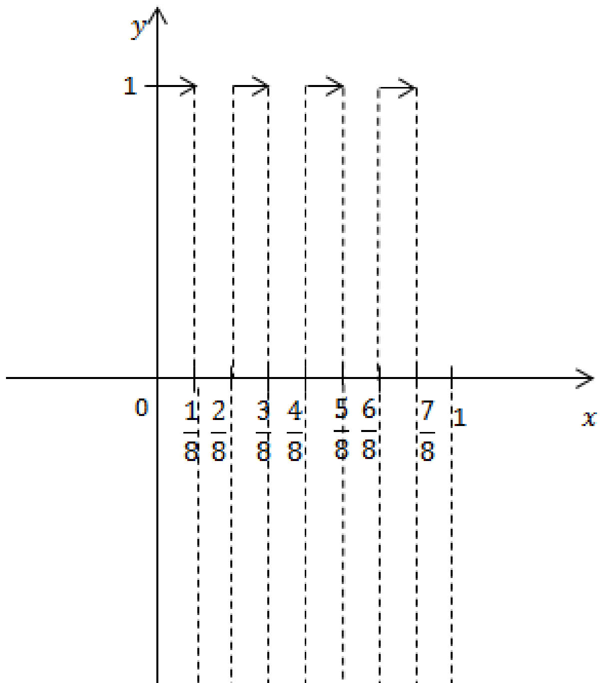

Рисунок 2.2 – Графік функції $r_3(x)$

Покажемо, що система Радемахера слабко збігається до 0 на $L_2[0,1]$, тобто $\int_0^\tau r_n(t)\,dt \to 0$ для довільного $\tau \in [0;1]$. Розглянемо випадки коли $\tau = \frac{2k-2}{2^n}$, $\tau = \frac{2k-1}{2^n}$, $\tau \in \left[\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}\right)$, $\tau \in \left[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right)$.

1) $\tau = \frac{2k-2}{2^n}, k = \overline{1, 2^{n-1}}$. В цьому випадку отримаємо

$$\int_0^\tau r_n(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2^n}} 1dt - \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{2}{2^n}} 1dt + \int_{\frac{2}{2^n}}^{\frac{3}{2^n}} 1dt - \int_{\frac{3}{2^n}}^{\frac{4}{2^n}} 1dt + \cdots - \int_{\frac{2k-3}{2^n}}^{\frac{2k-2}{2^n}} 1dt =$$

$$= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} = 0,$$

при $n \to \infty$.

2) $\tau = \frac{2k-1}{2^n}, k = \overline{1, 2^{n-1}}$. Будемо мати:

$$\int_0^\tau r_n(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2^n}} 1dt - \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{2}{2^n}} 1dt + \int_{\frac{2}{2^n}}^{\frac{3}{2^n}} 1dt - \int_{\frac{3}{2^n}}^{\frac{4}{2^n}} 1dt + \cdots + \int_{\frac{2k-2}{2^n}}^{\frac{2k-1}{2^n}} 1dt =$$

$$= \frac{2k-1}{2^n} - \frac{2k-2}{2^n} = \frac{2k-1-2k+2}{2^n} = \frac{1}{2^n} \to 0,$$

при $n \to \infty$.

3) $\tau \in \left[\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}\right), k = \overline{1, 2^{n-1}}$. В цьому випадку отримаємо

$$\int_0^\tau r_n(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2^n}} 1dt - \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{2}{2^n}} 1dt + \int_{\frac{2}{2^n}}^{\frac{3}{2^n}} 1dt - \int_{\frac{3}{2^n}}^{\frac{4}{2^n}} 1dt + \cdots + \int_{\frac{2k-2}{2^n}}^{\tau} 1dt =$$

$$= \tau - \frac{2k-2}{2^n} = \left[\tau < \frac{2k-1}{2^n}\right] < \frac{2k-1}{2^n} - \frac{2k-2}{2^n} = \frac{1}{2^n} \to 0,$$

при $n \to \infty$.

4) $\tau \in \left[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right), k = \overline{1, 2^{n-1}}$. Будемо мати:

$$\int_0^{\tau} r_n(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2^n}} 1dt - \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{2}{2^n}} 1dt + \int_{\frac{2}{2^n}}^{\frac{3}{2^n}} 1dt - \int_{\frac{3}{2^n}}^{\frac{4}{2^n}} 1dt + \cdots + \int_{\frac{2k-2}{2^n}}^{\frac{2k-1}{2^n}} 1dt -$$

$$- \int_{\frac{2k-1}{2^n}}^{\tau} 1dt = \frac{2k-1}{2^n} - \frac{2k-2}{2^n} - \left(\frac{2k-1}{2^n} - \tau\right) = \frac{1}{2^n} - \frac{2k-1}{2^n} + \tau =$$

$$= \frac{2-2k}{2^n} + \tau = \left[\tau < \frac{2k}{2^n}\right] < \frac{2-2k}{2^n} + \frac{2k}{2^n} = \frac{2}{2^n} = \frac{2}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} \to 0,$$

при $n \to \infty$.

Отже, $r_n(t) \overset{\omega}{\to} 0$ в $L_2[0,1]$. У всіх розглянутих випадках, для будь-якого $\tau \in [0,1]$ $0 \le \int_0^{\tau} r_n(t)dt \le \frac{1}{2^n}$, тобто $\int_0^{\tau} r_n(t)dt \to 0$ при $n \to \infty$. Отже, умови критерію слабкої збіжності виконано, тобто система Радемахера слабко збігається до нуля у просторі $L_2[0,1]$.

Аналогічно можна побудувати узагальнену систему Радемахера, якщо замість відрізка $[0,1]$ розглядати довільну вимірну множину A. Ця множина розбивається на 2^m підмножин однакової міри, на яких функція почергово приймає значення ± 1.

Означення 2.8 [19] Система функцій $\left(r_n^2(A)\right)_{n=1}^{\infty}$ у просторі $L_\infty(A)$ називається узагальненою системою Радемахера на множині A, якщо виконуються такі умови для всіх натуральних $n \neq m$:

1) $r_n^2(A) = \chi_A$ (тобто r_n набуває значень ± 1 на A та 0 поза A);

2) $\int_{\Omega} r_n(A)d\mu = 0$(тобто r_n набуває значень1 та -1 на множині однакової міри);

3) $\int_{\Omega} r_n(A) \cdot r_m(A)d\mu = 0$.

Існування та деякі властивості узагальненої системи Радемахера доведено в [19]. Зазначимо, що при $n \neq m$ функція $r_n(A) - r_m(A)$ приймає значення ± 2 на множинах міри $\mu(A)/4$ та дорівнює 0 поза цими множинами.

В [13] доводиться, що така узагальнена система також слабко збігається до нуля у просторі $L_2(A)$.

3 ПОРІВНЯННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ВУЗЬКИХ ОПЕРАТОРІВ

В першому розділі було показано, що кожний з просторів $L_2[0,1]$ та $L_\infty[0,1]$ є банаховою ґраткою. Обидва ці простори є банаховими просторами, причому $L_2[0,1]$ – навіть гільбертів простір. Ці характеристики є спільними для розглянутих просторів. Але їхня принципова відмінність полягає у абсолютній неперервності норми у просторі $L_2[0,1]$ та відсутності цієї властивості у норми простору $L_\infty[0,1]$. Цей розділ буде присвячено порівнянню деяких властивостей вузьких операторів у зазначених просторах.

3.1 Умови в означенні вузького оператора

Повернемося до означень вузького оператора. Вище було зазначено що з означень 2.6 та 2.7 випливає, що довільну вимірну множину A можна розбити на дві вимірні підмножини однакової міри $A = A_1 \coprod A_2$, що існує функція $x = \chi_{A_1} - \chi_{A_2}$, для якої $\|Tx\| < \varepsilon$.

Виявляється, що умова $\int_{[0,1]} x d\mu = 0$ (а це, фактично, умова $\mu(A_1) = \mu(A_2)$) в цьому означенні є зайвою. Використовуючи загальну ідею доведення цього факту, запозичену в [18], доведемо це для простору $L_2[0,1]$.

Твердження 3.1 Оператор $T \in \mathcal{L}(L_2[0,1], X)$, де X – довільний банахів простір, є вузьким тоді та тільки тоді, коли для довільної вимірної множини A та для довільного $\varepsilon > 0$ існують вимірна підмножина B множини A та елемент $x \in L_2[0,1]$ такі, що $x^2 = \chi_B$, $\|Tx\| < \varepsilon$ та $\mu(B) \geq \frac{1}{2}\mu(A)$.

Доведення. Необхідність умови є очевидною, якщо в якості множини B обрати множину A.

Доведемо достатність. Нехай A вимірна множина та $\varepsilon > 0$. Оберемо $x_1 \in L_2[0,1]$ та вимірну множину $B_1 \subset A$ так, щоб $x_1^2 = \chi_{B_1}$, $\|Tx_1\| < \frac{\varepsilon}{2}$ та $\mu(B_1) \geq \frac{1}{2}\mu(A)$. Покладемо $A_1 = A \setminus B_1$ та виберемо $x_2 \in L_2[0,1]$ та вимірну множину $B_2 \subset A_1$ так, щоб $x_2^2 = \chi_{B_2}$, $\|Tx_2\| < \frac{\varepsilon}{4}$ та $\mu(B_2) \geq \frac{1}{2}\mu(A_1)$.

Далі продовжимо цю процедуру за індукцією. Нехай вже обрані елементи $x_1, x_2, \dots, x_n$ та вимірні множини $B_1, B_2, \dots, B_n$. Покладемо $A_n = A \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_n)$. Оберемо $x_{n+1} \in L_2[0,1]$ та $B_{n+1} \subset A_n$ так, щоб $x_{n+1}^2 = \chi_{B_{n+1}}$, $\|Tx_{n+1}\| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ та $\mu(B_{n+1}) \geq \frac{1}{2}\mu(A_n)$.

Потім покладемо $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Покажемо, що цей ряд збігається. Для цього достатньо показати збіжність числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$. Оскільки

$$\|x_n\| = \sqrt{\int_{[0;1]} x_n^2\, d\mu} = \sqrt{\int_{[0;1]} \chi_{B_n} d\mu} = \sqrt{\int_{B_n} 1 d\mu} = \mu(B_n),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n) = \mu(A).$$

Фактично, цей ряд збігається в силу абсолютної неперервності норми простору $L_2[0,1]$. Оскільки носії побудованих функцій x_n не перетинаються та $\mu(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = 0$, тоді $x^2 = \chi_A$, а також

$$\|Tx\| = \left\|T\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} Tx_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\|Tx_n\| < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Отже, доведено, що для будь-якої вимірної множини A та $\varepsilon > 0$ існує функція $x \in L_2[0,1]$ така, що $x^2 = \chi_A$ та $\|Tx\| < \varepsilon$.

Нехай тепер A – вимірна множина та $\varepsilon > 0$. З абсолютної неперервності норми в $L_2[0,1]$ випливає існування такого $\delta > 0$, що якщо $\mu(B) < \frac{\delta}{2}$, тоді $\|2\chi_B\| < \frac{\varepsilon}{2\|T\|}$.

Нехай $n \geq 1$ таке, що $\frac{\mu(A)}{n} < \delta$. Розіб'ємо A на n рівних за мірою вимірних частин $A_1, A_2, \dots, A_n$, міра кожної з яких буде дорівнювати $\frac{\mu(A)}{n}$. Для кожного $k = 1, \dots, n$ виберемо такі функції $x_k \in L_2[0,1]$, що $x_k^2 = \chi_{A_k}$ та $\|Tx_k\| < \frac{\varepsilon}{2n}$.

Покладемо $a_k = \int_{[0,1]} x_k d\mu$. Оскільки $|a_k| \leq \frac{\mu(A)}{n}$ для кожного $k \leq n$, тоді можна обрати знаки $\Theta_k = \pm 1$ так, щоб $\left|\sum_{k=1}^{n} \Theta_k\, a_k\right| \leq \frac{\mu(A)}{n}$.

Тоді для $\tilde{x} = \sum_{k=1}^{n} \Theta_k\, x_k$ маємо, що $\tilde{x}^2 = \chi_A$,

$$\|T\tilde{x}\| = \left\|T \sum_{k=1}^{n} \Theta_k\, x_k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} \Theta_k T\, x_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|Tx_k\| < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\int_{[0,1]} \tilde{x} d\mu\right| = \left|\int_{[0,1]} \sum_{k=1}^{n} \Theta_k\, x_k d\mu\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \int_{[0,1]} \Theta_k x_k d\mu\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} \Theta_k \int_{[0,1]} x_k d\mu\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \Theta_k \int_{[0,1]} x_k d\mu\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \Theta_k\, a_k\right| \leq \frac{\mu(A)}{n}.$$

Покладемо $A_+ = \{w \in [0,1] : \tilde{x}(w) = 1\}$ та $A_- = A \backslash A_+$. Таким чином, $\tilde{x} = \chi_{A_+} - \chi_{A_-}$ та $|\mu(A_+) - \mu(A_-)| \leq \frac{\mu(A)}{n}$.

Нехай, для визначеності, $\mu(A_+) \geq \mu(A_-)$. Оберемо множину $A_0 \subset A_+$ так, щоб $\mu(A_0) = \frac{1}{2}(\mu(A_+) - \mu(A_-))$. Покладемо

$$x(w) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad w \in A_0, \\ \tilde{x}(w) & \text{при} \quad w \in [0,1] \backslash A_0. \end{cases}$$

В силу побудови, $x^2 = \chi_A$,

$$\int\limits_{[0,1]} x(w)d\mu = \int\limits_{A_0} -1d\mu + \int\limits_{[0,1]\backslash A_0} \tilde{x}(w)d\mu = -\mu(A_0) + \int\limits_{[0,1]\backslash A_0} \left(\chi_{A_+} - \chi_{A_-}\right)d\mu =$$

$$= -\mu(A_0) + \int\limits_{A_+\backslash A_0} (1-0)d\mu + \int\limits_{A_-} (0-1)d\mu = -\mu(A_0) + \mu(A_+\backslash A_0) - \mu(A_-) =$$

$$= -\mu(A_0) + \mu(A_+) - \mu(A_0) - \mu(A_-) = \mu(A_+) - 2\mu(A_0) - \mu(A_-) = 0.$$

Оскільки

$$x(w) - \tilde{x}(w) = \begin{cases} -1 - \tilde{x}(w) & \text{при} \quad w \in A_0, \\ 0 & \text{при} \quad w \in [0;1]\backslash A_0. \end{cases} = \left(-1 - \tilde{x}(w)\right)\chi_{A_0} =$$

$$= \left(-1 - \chi_{A_+} + \chi_{A_-}\right)\chi_{A_0} = (-1 - 1 + 0)\chi_{A_0} = -2\chi_{A_0},$$

отримаємо оцінку

$$\|Tx\| \le \|T(x - \tilde{x})\| + \|T\tilde{x}\| \le \|T\| \cdot \|x - \tilde{x}\| + \frac{\varepsilon}{2} \le \|T\| \cdot \left\|2\chi_{A_0}\right\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Отже, оператор T є вузьким, що й потрібно було довести.

З доведеного твердження випливає, зокрема, що у просторі $L_2[0,1]$ умова $\int_{[0,1]} xd\mu$ є зайвою. Зауважимо, що при доведенні цього факту суттєво використовувалася абсолютна неперервність норми на просторі $L_2[0,1]$. Отже, повторити це доведення у просторі $L_\infty[0,1]$ не є можливим.

3.2 Вузькі та компактні оператори

Поняття вузького оператора спочатку замислювалося як узагальнення поняття компактного оператора. Це легко пояснюється наступним твердженням.

Теорема 3.1 Будь-який компактний оператор $T \in \mathcal{L}(L_2[0,1])$ є вузьким.

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$ та A – довільна вимірна множина. Побудуємо на цій множині узагальнену систему Радемахера $\{r_m(A)\}_{m=1}^{\infty} \subset L_2[0,1]$, яка, за побудовою, задовольняє умовам з означення вузького оператора $r_m^2(A) = \chi_A$ та $\int_{[0,1]} r_m d\mu = 0$. Як зазначено вище, узагальнена система Радемахера слабко збігається до нуля, а компактний оператор T, що діє у гільбертовому просторі, слабко збіжну послідовність переводить у сильно збіжну, тобто збіжну за нормою.

Це означає, що$\|Tr_m\| \to 0$, тобто існує така функція r_m, для якої $\|Tr_m\| < \varepsilon$, що означає вузькість оператора T .

З цієї теореми випливає, що прикладами вузьких операторів у просторі $L_2[0,1]$ будуть компактні оператори, зокрема, усі лінійні неперервні функціонали.

Виявляється, що у просторі $L_\infty[0,1]$ аналогічний результат місця не має. Компактний оператор, заданий на цьому просторі, не зобов'язаний бути вузьким. Ми наведемо приклад існування невузького функціонала, заданого на просторі $L_\infty[0,1]$.

Спочатку нагадаємо основні означення, що стосуються банахових алгебр.

Означення 3.1 [8] Лінійний простір X називається алгеброю, якщо крім лінійних операцій в ньому задана операція множення, яка задовольняє аксіоми:

1) $\forall x, y, z \in X \quad (xy)z = x(yz)$;

2) $\forall x, y, z \in X \quad x(y+z) = xy + xz, (y+z)x = yx + zx$;

3) $\forall x, y \in X \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \ \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

Якщо існує елемент $e \in X$ такий, що $ex = xe = x$ для всіх $x \in X$, то e називається одиницею алгебри X, а сама алгебра називається алгеброю з одиницею.

Означення 3.2 [8] Алгебру X називають комутативною алгеброю, якщо операція множення комутативна, тобто якщо виконується аксіома $xy = yx$.

Означення 3.3 [8] Нормований простір X називається нормованою алгеброю, якщо він є алгеброю з одиницею e та виконані ще дві аксіоми:

1) $\|e\| = 1$;

2) $\forall x, y \in X \ \ \|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.

Якщо нормована алгебра є банаховим простором, вона називається банаховою алгеброю.

Зрозуміло, що банаховою алгеброю буде, наприклад, простір неперервних функцій $C[0,1]$ з природною операцією множення двох функцій. Також прикладом банахової алгебри є досліджуваний нами простір.

Твердження 3.2 Простір $L_\infty[0,1]$ утворює комутативну банахову алгебру з одиницею.

Доведення. В лінійному просторі $L_\infty[0,1]$ операцію множення задамо природним чином: добутком двох класів еквівалентних функцій буде називатися той клас еквівалентності, якому належить добуток будь-яких функцій з класів-множників. Зрозуміло, що при цьому аксіоми з означення алгебри виконуються.

Оскільки для будь-яких представників класів еквівалентних функцій $xy = yx$, алгебра буде комутативною. Одиницею цієї алгебри буде той клас еквівалентності, який містить одиничну функцію $e(t) = 1$.

Покажемо тепер, що нормований простір $L_\infty[0,1]$ є нормованою алгеброю. Дійсно, $\|e\| = \mathrm{vraisup}_{t\in[0,1]} |e(t)| = 1$ та для будь-яких $x(t), y(t) \in L_\infty[0,1]$ виконується нерівність

$$\|x(t)\cdot y(t)\| = \underset{t\in[0,1]}{\mathrm{vraisup}}\,|x(t)\cdot y(t)| \le \underset{t\in[0,1]}{\mathrm{vraisup}}|x(t)|\cdot \underset{t\in[0,1]}{\mathrm{vraisup}}|y(t)| = \|x\|\|y\|.$$

Оскільки нормована алгебра $L_\infty[0,1]$ є банаховим простором, вона є також і банаховою алгеброю.

Означення 3.4 [8] Ідеалом I комутативної алгебри X називається підпростір X, який задовольняє властивості, що для кожного $y \in I$ та будь-якого $x \in X$ добуток $x \cdot y$ належить I.

Ідеал, утворений тільки нулем, а також ідеал, який збігається з X, будемо називати тривіальним. Максимальним називається нетривіальний ідеал, який не міститься в жодному іншому нетривіальному ідеалі.

Означення 3.5 [8] Лінійний неперервний функціонал f на банаховій алгебрі X називається мультиплікативним, якщо для будь-яких $x, y \in X$ виконується рівність

$$f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y).$$

Прикладом мультиплікативного функціонала, заданого на $L_\infty[0,1]$, може бути функціонал $f(x) = x(0)$. Зрозуміло, що

$$f(x\cdot y) = (x\cdot y)(0) = x(0)\cdot y(0) = f(x)\cdot f(y).$$

Твердження 3.3 [8] По будь-якому максимальному ідеалу M можна побудувати такий лінійний неперервний мультиплікативний функціонал, для якого цей ідеал буде ядром.

Якщо розглядати простір $L_\infty[0,1]$ як банахову алгебру, цей факт дозволяє нам навести наступний приклад не вузького функціонала.

Твердження 3.4 Будь-який мультиплікативний функціонал $f \in L_\infty^*[0,1]$ існування якого стверджується в твердженні 3.4, є невузьким.

Дійсно, нехай M – деякий максимальний ідеал у $L_\infty[0,1]$, та $f \in L_\infty^*[0;1]$ – такий мультиплікативний функціонал, для якого $M = Kerf$. Оскільки $M \neq L_\infty[0,1]$, тоді існує така характеристична функція деякої множини A, яка не належить підпростору $M = Kerf$. Це означає, що $f(\chi_A) = \delta > 0$.

Припустимо, що функціонал f є вузьким. Тоді з означення вузького оператора випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує така функція $y \in L_\infty[0;1]$, для якої $y^2 = \chi_A$ та $|f(y)| < \varepsilon$. Але за рахунок мультиплікативності функціонала маємо, що

$$\delta = f(\chi_A) = f(y^2) = f(y) \cdot f(y) = (f(y))^2,$$

тобто $|f(y)| = \sqrt{\delta}$. Зрозуміло, що ця умова заперечує умову вузькості $|f(y)| < \varepsilon$, тобто наше припущення не є вірним та побудований функціонал не є вузьким.

3.3 Сума вузьких операторів

Дослідимо, які властивості компактних операторів зберігаються для вузьких операторів. Відомо, що сума двох компактних операторів є компактних оператором. Цікавим буде питання, чи буде сума двох вузьких операторів вузьким оператором. Виявляється, що в просторі $L_2[0,1]$ можна довести лише, що сума вузького та компактного оператора є вузьким оператором. При доведенні ми застосовуємо ідею, запропоновану у [18].

Твердження 3.5] Сума вузького та компактного операторів, заданих на просторі $L_2[0,1]$, є вузьким оператором.

Доведення. Нехай T вузький оператор на $L_2[0,1]$, а K – компактний оператор. За означенням, якщо T – вузький, тоді для довільного $\varepsilon > 0$ та довільної вимірної множини $A \subset [0,1]$ побудуємо послідовність функцій $r_n(t)$, для якої при будь-якому натуральному n

$$r_n^2(t) = \chi_A(t),\ \int\limits_{[0,1]} r_n(t)d\mu = 0,\ \ \|Tr_n\| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

З цього випливає, що $\lim_{n\to\infty}\|Tr_n\| = 0$. Побудована система функцій $r_n(t)$ є системою типу Радемахера, яка, як зазначалось вище, слабко збігається до нуля у просторі $L_2[0,1]$. Якщо подіяти на неї компактним оператором K, отримана послідовність $Kr_n(t)$ буде сильно збігатись до нуля, тобто $\lim_{n\to\infty}\|Kr_n\| = 0$.

Отже, для суми компактного та вузького операторів вірна наступна оцінка:

$$\|(T+K)r_n\| = \|Tr_n + Kr_n\| \leq \|Tr_n\| + \|Kr_n\|,$$

тобто

$$\lim_{n\to\infty}\|(T+K)r_n\| \leq \lim_{n\to\infty}\|Tr_n\| + \lim_{n\to\infty}\|Kr_n\| = 0.$$

Це означає, що для довільного $\varepsilon > 0$ та довільної вимірної множини $A \subset [0,1]$ існує функція $r_n(t) \in L_2[0,1]$, для якої

$$r_n^2(t) = \chi_A(t),\ \int\limits_{[0,1]} r_n(t)d\mu = 0,\ \ \|(T+K)r_n\| < \varepsilon,$$

тобто оператор $T + K$ є вузьким.

Нагадаємо, що простір класів істотно обмежених функцій $L_\infty[0,1]$ є підпростором простору $L_2[0,1]$ класів функцій, інтегровних з квадратом. Тобто існує тотожне вкладення $J: L_\infty[0,1] \to L_2[0,1]$, яке кожну істотно обмежену функцію дозволяє розглядати як функцію, інтегровну з квадратом.

Твердження 3.6 Тотожне вкладення $J: L_\infty[0,1] \to L_2[0,1]$ є сумою двох вузьких операторів $T, S: L_\infty[0,1] \to L_2[0,1]$.

Доведення. У [18] показано, що тотожне відображення $I: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ подається сумою двох вузьких операторів $P, Q \in \mathcal{L}(L_2[0,1])$.

Нехай $T = P \circ J$ та $S = Q \circ J$. Доведемо, що T та S будуть вузькими операторами. Дійсно, оскільки P – вузький оператор, тоді для довільної вимірної множини $A \subset [0,1]$ та для довільного $\varepsilon > 0$ виберемо таку функцію $x \in L_2[0,1]$, що $x^2 = \chi_A, \int_{[0,1]} x d\mu = 0$ та $\|Px\| < \varepsilon$. Оскільки функція x належить також простору $L_\infty[0,1]$, маємо, що

$$\|Tx\| = \|(P \circ J)x\| = \|P(Jx)\| = \|Px\| < \varepsilon,$$

тобто T є вузьким. Аналогічно, оператор S є вузьким. Крім того,

$$T + S = P \circ J + Q \circ J = (P + Q) \circ J = I \circ J = J,$$

що означає, що тотожне відображення J подане у вигляді суми двох вузьких операторів.

Зауважимо, що з того, що тотожне відображення $I: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ подається сумою двох вузьких операторів $P, Q \in \mathcal{L}(L_2[0,1])$, випливає, що у просторі $L_2[0,1]$ сума двох вузьких операторів не мусить бути вузьким оператором, оскільки тотожний оператор у $L_2[0,1]$ не є вузьким. Аналогічний результат має місце і у просторі $L_\infty[0,1]$, але, оскільки у цьому просторі норма не є абсолютно неперервною, доведення цього факту не може спиратися на результат [18].

Натомість нам знадобиться теорема Мазура з [1].

Теорема 3.1 [1] Кожний сепарабельний банахів простір буде ізометричним до деякого підпростору простора $C[0,1]$.

Означення 3.6 [2] Лінійні нормовані простори X та Y називаються ізоморфними, якщо вони алгебраїчно ізоморфні і цей ізоморфізм U є гомеоморфізмом, тобто обидва відображення $U: X \to Y$ та $U^{-1}: Y \to X$ неперервні. Ізоморфізм називають ізометричним ізоморфізмом, якщо $(\forall x \in X): \|x\|_X = \|Ux\|_Y$.

Теорема 3.2 Сума двох вузьких операторів в $L_\infty[0,1]$ не зобов'язана бути вузьким оператором.

Доведення. Застосуємо теорему Мазура до простору $L_2[0,1]$, тобто простір $L_2[0,1]$ буде ізометричним до деякого підпростору простора $C[0,1]$. У свою чергу, простір $C[0,1]$ ізометрично вкладається в $L_\infty[0,1]$. В якості такого вкладення можна взяти тотожний оператор. Таким чином, існує ізоморфізм між простором $L_2[0,1]$ та деяким підпростором простору $L_\infty[0,1]$, або ізоморфне вкладення простору $L_2[0,1]$ в $L_\infty[0,1]$.

Нехай $U: L_2[0,1] \to L_\infty[0,1]$ таке довільне ізоморфне вкладення та $T, S \in \mathrm{L}(L_\infty[0,1], L_2[0,1])$ – такі вузькі оператори, що $T + S = J$, де $J: L_\infty[0,1] \to L_2[0,1]$ – це тотожне вкладення.

Покажемо, що оператори $U \circ T$ та $U \circ S$ є вузькими операторами, що діють у просторі $L_\infty[0;1]$. Дійсно, $U: L_2[0,1] \to L_\infty[0,1]$ – це ізоморфізм, тобто лінійний неперервний (обмежений) оператор, а оскільки $T \in \mathcal{L}(L_\infty[0,1], L_2[0,1])$ – вузький оператор, для будь-яких $A \in \sum$ та $\varepsilon > 0$ існує такий $x \in L_\infty[0,1]$, що $x^2 = \chi_A$, $\int_{[0,1]} x d\mu = 0$ та $\|Tx\| < \frac{\varepsilon}{\|U\|}$. Зрозуміло, що

$$\|(U \circ T\,)x\| \leq \|U(Tx)\| \leq \|U\|\|Tx\| < \|U\|\frac{\varepsilon}{\|U\|} = \varepsilon.$$

Аналогічно, вузьким буде оператор $U \circ S$. Але сума $V = U \circ T + U \circ S$ вузьким оператором не буде. Дійсно

$$V = U \circ T + U \circ S = U \circ J.$$

З цього випливає, що $J = U^{-1} \circ V$, тобто $\|Jx\| = \|(U^{-1} \circ V)x\| \leq \|U^{-1}\|\|Vx\|$ або $\|Vx\| \geq \|U^{-1}\|^{-1}\|Jx\|$. Але для кожного $x \in L_\infty[0,1]$, для якого $x^2 = \chi_{[0;1]}$, одержуємо, що

$$\|Vx\| \geq \|U^{-1}\|^{-1}\|Jx\| = \|U^{-1}\|^{-1} \int\limits_{[0;1]} x^2 d\mu = \|U^{-1}\|^{-1},$$

що означає, що оператор V не є вузьким оператором.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі розглянуто клас вузьких операторів, які задані на просторах $L_2[0,1]$ та $L_\infty\,[0,1]$.

Перший розділ присвячено основним поняттям матричних та нормованих просторів. Наведені приклади функцій, що належать простору $L_2[0,1]$, але не належать $L_\infty\,[0,1]$ та навпаки. Доведена теорема, яка стверджує, що норма у просторі $L_2[0,1]$ є абсолютно неперервною, та, що у $L_\infty\,[0,1]$ норма не є абсолютно неперервною. Крім того, розглянуто просторі $L_2[0,1]$ та $L_\infty\,[0,1]$ як банахові ґратки та наведено основні властивості цих просторів. Зауважимо, що простори $L_2[0,1]$ та $L_\infty\,[0,1]$ є порядково повними ґратками.

Другий розділ присвячено лінійним неперервним операторам. Наведено основні поняття, пов'язані з лінійними операторами, заданими на нормованому просторі. Також розглянуто компактні оператори. Показано, що одиничний оператор не буде компактним в просторі $L_2[0,1]$, Наведено основні поняття та властивості вузьких операторів.

У третьому розділі порівнюються властивості вузьких операторів. Показано, що у просторі $L_2[0,1]$ означення вузького оператора можна замінити більш простим еквівалентним означенням. При доведенні цього факту суттєво використовувалася абсолютна неперервність норми на просторі $L_2[0,1]$. Отже, повторити це доведення у просторі $L_\infty[0,1]$ не є можливим.

Доведено теорему про те, що будь-який компактний $T \in \mathbf{L}(L_2[0,1])$ є вузьким, тоді як у просторі $L_\infty[0,1]$ існують невузькі компактні оператори. Також доведено, що сума вузького та компактного операторів, заданих на просторі $L_2[0,1]$, є вузьким оператором, та кожний лінійний неперервний оператор у цьому просторі подається у вигляді суми двох вузьких операторів.

Але сума двох вузьких операторів не зобов'язана бути вузьким оператором а ні в $L_\infty[0,1]$, а ні в $L_2[0,1]$.

У 21 столітті теорія векторних ґраток і операторів на них є важливою складовою функціонального аналізу. Природно виникає велика кількість задач, пов'язаних з дослідженням властивостей тих чи інших класів. Результати роботи доповідалися на Десятій Всеукраїнській, сімнадцятій регіональній науковій конференції молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» [10]. Вони можуть бути застосовані при викладанні спецкурсів з функціонального аналізу, зокрема, з теорії лінійних операторів.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Банах С. Курс функціонального аналізу. Київ : Радянська школа, 1948. 217 с.

2. Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функциональный анализ. Курс лекций: учеб. пособие для вузов. Киев : Высшая школа, 1990. 600 с.

3. Биркгоф Г. Теория решеток. Москва : Наука, 1984. 568 с.

4. Дороговцев А. Я. Математический анализ. Краткий курс в современном изложении. Киев : Факт, 2004. 560 с.

5. Иосида К. Функциональный анализ. Москва : Мир, 1967. 624 с.

6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. Москва : Наука, 1984. 752 с.

7. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в частично упорядоченных пространствах. Москва – Ленинград : Гос. изд-во тех.-теор. лит-ры, 1950. 550 с.

8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва : Наука, 1976. 543 с.

9. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. Москва : Наука, 1974. 480 с.

10. Олійник І. Ю., Красікова І. В. *Дослідження властивостей вузьких операторів, заданих на просторах $L_2[0,1]$ та $L_\infty[0,1]$*. Актуальні проблеми математики та інформатики: Збірка тез доповідей Десятої Всеукраїнської, сімнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників. (Запоріжжя, 26-27 квіт. 2019). Запоріжжя : ЗНУ, 2019. с. 83–84.

11. Попов М. М. Векторні ґратки і додатні оператори. Чернівці : Рута, 2008. 45 с.

12. Abramovich Y. A., Aliprantis C. D. Problems in operator theory // Graduate Studies in Math. – Providence, RI: AMS, 2002. №51. XII, 386 p.

13. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive operators. Orlando : Academic Press, Inc, 1985. 367 p.

14. Krasikova I. V. A note on narrow operators in L_∞ // *Математичні студії. Праці Львівського мат. товариства*. Львів: ВНТЛ-Класика, 2009. – № 31. P. 102 – 106.

15. Krasikova I. V., Martín M., Merí J., Mykhaylyuk V. V., Popov M. M. On order structure and operators in $L_\infty(\mu)$ // *Central European J. Math*, 2009. №. 4. P. 683 – 693.

16. Maslyuchenko O. V., Mykhaylyuk V. V., Popov M. M. A lattice approach to narrow operators // *Positivity*. 2009. № 13. P. 459 – 495.

17. Popov M., Randrianantoanina B. Narrow Operators on Function Spaces and Vector Lattices // *Berlin-Boston: De Gruyter Studies in Mathematics*, 2013. №. 45. 319 p.

18. Plichko A. M., Popov M. M. Symmetric function spaces on atomless probability spases // *Diss. Math. (Rozpr.mat.)*, 1990. № 306. P. 1 – 85.

19. Rodin V. A., Semenov E. M. Rademacher series in symmetric spaces // *Anal. Math*, 1975. № 1. P. 207 – 222.

20. Schaefer H. H. Banach Lattices and Positive Operators. Springer : Berlin etc., 1974. 376 p.

ДОДАТОК А

Тезис наукової конференції

УДК 517.982

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ВУЗЬКИХ ОПЕРАТОРІВ, ЗАДАНИХ НА ПРОСТОРАХ $L_2[0,1]$ ТА $L_\infty[0,1]$

Олійник І. Ю., студентка; Красікова І. В., к.ф.-м.н., доцент
Запорізький національний університет

Поняття вузького оператора вперше було уведено в роботі українських математиків А. Плічка та М. Попова у 90-роках минулого століття [2]. Дослідження властивостей таких операторів є досить цікавою задачею, особливо якщо розглядати їх на різних просторах, враховуючи властивості цих просторів. Ми розглядаємо вузькі оператори на просторах Лебега $L_\infty[0,1]$ та $L_2[0,1]$.

Нагадаємо, що $L_\infty[0,1]$ – це простір класів еквівалентності істотно обмежених функцій, заданих на [0,1]. Норма у цьому просторі задається формулою

$$\|f\| = \underset{x\in[0,1]}{\mathrm{vraisup}}|f(x)| = \inf_{A\in\sum,\mu(A)=0}\{\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|\}.$$

Відносно цієї норми простір $L_\infty[0,1]$ є банаховим. Простір $L_2[0,1]$ – це простір класів еквівалентності функцій, інтегровних з квадратом на [0,1]. Норма на просторі задається $\|f\| = \left(\int_{[0,1]} | f(x) |^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$. Простір $L_2[0,1]$ є не лише банаховим, а й гільбертовим.

Зауважимо, що суттєва відміність між двома просторами полягає у тому, що на просторі $L_2[0,1]$ норма є абсолютно неперервною, а на просторі $L_\infty[0,1]$ вона такою не є. Норма $||\cdot||$ на просторі E класів еквівалентних функцій, заданих на $[0;1]$, називається абсолютно неперервною, якщо для будь-якого $x \in E$ та для будь якої спадної послідовності $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ вимірних підмножин відрізка $[0;1]$ з порожнім перетином $\|x \cdot \chi_{\Omega_n}\| \to 0$ при $n \to \infty$. Відсутність абсолютної неперервності норми зумовлює певні властивості операторів, заданих на таких просторах, і досить суттєво ускладнює дослідження властивостей лінійних операторів саме на $L_\infty[0,1]$.

Означення: Оператор $T \in \mathcal{L}(E, X)$ називається вузьким, якщо для будь-якої вимірної множини A та довільного $\varepsilon > 0$ існує такий $x \in L_\infty[0,1]$, що $x^2 = \chi_A$, $\int_{[0,1]} x d\mu = 0$ та $\|Tx\| < \varepsilon$.

Це поняття узагальнює поняття компактного оператора, оскільки на банахових просторах з абсолютно неперервною нормою (тобто на просторі $L_2[0,1]$) кожний компактний оператор є вузьким. Ми показуємо, що на просторі $L_\infty[0,1]$ ця властивість не виконується. Навіть скінченновимірний оператор на цьому просторі не є вузьким. Зокрема, ми наводимо приклад невузьких лінійних неперервних функціоналів, заданих на $L_\infty[0,1]$. Такими функціоналами будуть мультиплікативні функціонали.

Оскільки компактні оператори на просторі $L_2[0,1]$ є вузькими, ми досліджуємо питання про суму двох вузьких операторів у просторі $L_\infty[0,1]$. Виявляється, що сума двох вузьких операторів не обов'язково є вузьким оператором, хоча у просторі $L_2[0,1]$ сума вузького і компактного операторів є вузьким оператором.

ЛІТЕРАТУРА

1. Popov M., Randrianantoanina B. Narrow Operatorson Function Spacesand Vector Lattices. Berlin-Boston: De Gruyter Studies in Mathematics 45, 2013. 319 p.
2. Plichko A. M., Popov M. M. Symmetric function spacesonatom less probabilitys paces. Diss. Math. (Rozpr. mat.). 1990. 306. P.1–85.