

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

**на тему: «РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НЕТЕРОВИХ КРАЙОВИХ
ЗАДАЧ З КЕРУВАННЯМ У ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ
СИСТЕМІ У СКІНЧЕННОВИМІРНОМУ ПРОСТОРИ»**

Виконав: студент	2 курсу, групи 8.1118-з
спеціальності	111 математика
	(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми	математика
	Д.М. Калашніков
	(ініціали та прізвище)
	доцент кафедри фундаментальної математики, доцент, к.ф.-м.н.
Керівник	Панасенко Є.В.
	(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)
	доцент кафедри загальної математики,
Рецензент	доцент, к.ф.-м.н. Стеганцев Є.В.
	(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної математики,
д.т.н., доцент

Гребенюк С.М.
(підпис)

« 10 » вересня 2019 р.

З А В Д А Н Н Я
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ

Калашнікову Дмитру Миколайовичу

(прізвище, ім'я та по батькові)

1. Тема роботи Розв'язність нетерових крайових задач з керуванням у диференціальній системі у скінченновимірному просторі

керівник роботи Панасенко Євген Валерійович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
(прізвище, ім'я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 26 » вересня 2019 року № 1790-с

2. Строк подання студентом роботи 09.12.2019

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Постановка задачі.
2. Основні теоретичні відомості.
3. Побудова розв'язку нетерової крайової задачі.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) _____

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 03.10.2019

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	07.10.2019	виконано
2.	Збір вихідних даних.	15.10.2019	виконано
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	21.10.2019	виконано
4.	Розробка першого та другого розділу.	28.10.2019	виконано
5.	Розробка третього розділу.	15.11.2019	виконано
6.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	09.12.2019	виконано
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	09.01.2020	

Студент _____
(підпис)

Д.М. Калашніков _____
(ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____
(підпис)

Є.В. Панасенко _____
(ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____
(підпис)

І.Г. Ткаченко _____
(ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Розв'язність нетерових крайових задач з керуванням у диференціальній системі у скінченновимірному просторі»: 45 с., 26 джерел.

КЕРОВАНІСТЬ, КРАЙОВА ЗАДАЧА, ЛІНІЙНА СИСТЕМА ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ОПЕРАТОР, ОПЕРАТОР ГРІНА, ПРОЕКТОР, ПСЕВДООБЕРНЕНИЙ ОРТОПРОЕКТОР.

Об'єкт дослідження — нетерові крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь з керуванням в системі.

Мета роботи: дослідження на керованість лінійних нетерових крайових задач у скінченновимірному просторі.

Метод дослідження — аналітичний.

У кваліфікаційній роботі приведені основні означення, теореми, умови існування розв'язку крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, в яких кількість невідомих у системі не співпадає з кількістю крайових умов. Застосовуючи апарат псевдообернених матриць, було розв'язано нетерову крайову задачу та досліджено її на керованість в скінченновимірному просторі.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis «Solvability of Noether boundary-value problems with a control in a differential system in a finite-dimensional space»: 45 pages, 26 references.

CONTROLLABILITY, BOUNDARY-VALUE PROBLEM, LINEAR SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS, ORTOPROJECTOR, GREEN OPERATOR, PROJECTOR, PSEUDOINVERSE OPERATOR.

The object of the study is the noetherian boundary-value problems for ordinary system-controlled differential equations.

The aim of the study is studying on the controllability of linear boundary-value problems in finite-dimensional space.

The method of research is analytical.

In the qualification paper, we give the basic definitions, theorems, conditions for the existence of a solution of boundary-value problems for ordinary differential equations in which the number of unknowns in the system doesn't coincide with the number of boundary conditions. Applying the apparatus of pseudoinverse matrices, the Noether boundary-value problem was solved and investigated on controllability in finite-dimensional space.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	2
Реферат.....	4
Summary.....	5
Вступ.....	7
1 Розв'язність нетерових крайових задач.....	9
1.1 Задача Коші.....	9
1.2 Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.....	10
1.3 Лінійні оператори.....	11
1.4 Узагальнений оператор Гріна.....	14
1.5 Псевдообернені матриці.....	19
2 Нетерові крайові задачі з керуванням у диференціальній системі.....	23
2.1 Постановка задачі.....	23
2.2 Критерій розв'язності та структура розв'язків.....	24
2.3 Керованість лінійних нетерових крайових задач.....	28
3 Побудова розв'язку нетерової крайової задачі з керуванням у диференціальній системі у скінченновимірному просторі.....	32
Висновки.....	42
Перелік посилань.....	43

ВСТУП

Теорія крайових задач займає одне з центральних і важливих місць в теорії звичайних диференціальних рівнянь. Основи теорії крайових задач було закладено в роботах С.Н. Бернштейна, Г.Д. Біркгофа, Є.Л. Буницького, Е. Камке, Р.Є. Лангера, О.М. Ляпунова, І.Г. Малкіна, А. Пуанкаре, Г. Флоке. Різні аспекти теорії лінійних і слабо нелінійних нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, систем із запізненням аргументу, з імпульсною дією, інтегро-диференціальних систем, матричних диференціальних рівнянь за допомогою апарату узагальнено-обернених операторів досліджувались в роботах А.М. Самойленка, О.А. Бойчука, В.Ф. Журавльова, С.А. Кривошеї, С.М. Чуйка та інших авторів.

У прикладних галузях в останні роки з'являються математичні моделі процесів, які описуються взаємозв'язаними системами алгебраїчних і диференціальних рівнянь. Активне вивчення таких систем розпочалося з 80-х років минулого сторіччя групами математиків Ю.Є. Бояринцевим, В.М. Корсуковим та С.W. Gear, S.L. Campbell, L.R. Petzold. Окремі результати були отримані ще раніше. Перш за все, це робота М.М. Лузіна, і зауваження Ф.Р. Гантмахера про структуру загального розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь.

Метою кваліфікаційної роботи є:

- дослідження на керованість лінійних нетерових крайових задач в скінченновимірному просторі;
- поглиблення, закріплення та систематизація теоретичних і практичних знань щодо використання їх для вирішення конкретної нетерової крайової задачі на керованість;
- оволодіння методикою наукового дослідження та експерименту, розвиток навичок ведення дослідницької роботи;
- використання вмінь та навичок узагальнення та аналізу результатів.

Завданнями дослідження є пошук керування у диференціальній системі крайової задачі у конкретний момент часу.

Об'єктом дослідження є нетерові крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь з керуванням у диференціальній системі у скінченновимірному просторі.

Предмет дослідження є нетерова крайова задача, що досліджується на керованість. Метод дослідження: аналітичний, з застосуванням методик розв'язку матричної задачі Коші та пошуку узагальненого оператора Гріна щодо крайових задач.

Практичне значення одержаних результатів. Результати, одержані в роботі, носять теоретичний характер та можуть бути використані при подальших дослідженнях в теорії вироджених диференціальних рівнянь. У кваліфікаційній роботі приведені основні означення, теореми, умови існування розв'язку крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь в яких кількість невідомих в системі не співпадає з кількістю крайових умов. В даній роботі було розв'язано нетерову крайову задачу та досліджено її на керованість в скінченновимірному просторі із застосуванням апарату псевдообернених матриць.

1 РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НЕТЕРОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

1.1 Задача Коші

Задача Коші – одна з основних задач теорії диференціальних рівнянь - полягає в пошуку розв'язку (інтеграла) диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам (початковим даним) [2]. Задача Коші зазвичай виникає при аналізі процесів, обумовлених диференціальним законом та початковим станом, математичним виразом яких і є рівняння та початкова умова (звідси й термінологія та вибір позначень: початкові дані задаються при $t = 0$, а розв'язок шукають для $t > 0$).

Основні питання, що пов'язані з задачею Коші, наступні:

1. Чи існує (хоча б локально) розв'язок задачі Коші?
2. Якщо розв'язок існує, то яка область його існування?
3. Чи є розв'язок єдиним?
4. Якщо розв'язок єдиний, то чи буде він коректним, тобто неперервним (в якому-небудь сенсі) щодо початкових даних?

Задачі Коші мають різні варіанти постановки:

1. Звичайне диференціальне рівняння першого порядку, розв'язане відносно похідної:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

2. Система n звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язана відносно похідних (нормальна система n -го порядку):

$$\begin{cases} \begin{cases} y'_1 = f_1(x_1, y, \dots, y^n), \\ \dots, \\ y'_n = f_n(x_1, y, \dots, y^n), \end{cases} \\ \begin{cases} y_1(x_0) = y_{01}, \\ \dots, \\ y_n(x_0) = y_{0n} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

3. Звичайне диференціальне рівняння n -го порядку, розв'язане відносно старшої похідної.

1.2 Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

Виникнення різноманітних практичних задач приводять до створення математичних моделей, що описуються системами диференціальних рівнянь з різного роду виродженнями: наявністю при старших похідних виродженої матриці, малих параметрів або такої матриці, яка вироджується при певних значеннях незалежної змінної чи параметрів [2]. Деякі задачі оптимального керування, лінійного програмування, теорії електричних кіл, економіки, автоматичного регулювання, теорії пружності, гідродинаміки, хімічної та біологічної кінетики тощо моделюються системами диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідній вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t). \quad (1.3)$$

Однією з необхідних умов розв'язку крайових задач є попереднє знаходження фундаментальної матриці. Фундаментальна матриця системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь – це матриця, стовпці якої утворюють фундаментальну систему рішень цієї системи. Або визначимо

фундаментальну матрицю системи n однорідних звичайних диференціальних рівнянь виду:

$$\dot{x} = A(t)x(t) \quad (1.4)$$

як матричну функцію $\Psi(t)$, чиї стовпчики є лінійно незалежними розв'язками системи. Тоді загальний розв'язок системи можна записати як:

$$x = \Psi(t) \cdot c, \quad (1.5)$$

де c – вектор сталих.

Матрична функція $\Psi(t)$ є фундаментальною матрицею для (1.4) тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

$$1) \dot{\Psi}(t) = A(t)\Psi(t);$$

2) Ψ – не сингулярна функція для всіх t . Сингулярна функція – це неперервна функція (відмінна від константи), похідна якої майже скрізь дорівнює нулю, тому такі функції не розглядаються у рішенні даної крайової задачі.

Крайова задача – це задача теорії диференціальних рівнянь, в якій граничні умови задаються в різних точках. Наприклад, при коливаннях струни із закріпленими кінцями зміщення на кожному з кінців дорівнює нулю. Крайові задачі складніше розв'язувати, ніж задачі Коші, особливо чисельно. Крайові задачі виникають як в теорії звичайних диференціальних рівнянь, так і в теорії диференціальних рівнянь із частковими похідними, особливо рівнянь еліптичного типу.

1.3 Лінійні оператори

Означення 1.1 Загальне означення оператора. Нехай X та Y – множини довільного походження. Нехай, $D \subseteq X$, а саме, у X вилучено підмножину D . Якщо кожному елементу $x \in D$ ставиться у відповідність певний елемент $y \in Y$, то кажуть, що задано оператор $y = F(x)$. При цьому множину D називають областю визначення оператора F та позначається зазвичай $D(F)$. Множину:

$$R = R(F) = \{y \in Y, y = F(x), x \in D\} \quad (1.6)$$

називають областю значень оператора F .

Схематично дію оператора F можна зобразити таким чином:

$$X \supseteq D(F) \xrightarrow{F} R(F) \subseteq Y, \quad (1.7)$$

що має наступний скорочений вигляд:

$$F: X \rightarrow Y. \quad (1.8)$$

Формулою (1.8) не передбачається, що $D(F) = X$, або $R(F) = Y$.

Якщо $y = F(x), x \in D(F), y \in R(F)$, то визначено, що елемент y є образом елементу x , а елемент x – прообразом елементу y . Безліч всіх образів y , коли x пробігає $D = D(F)$, є $R(F)$. У такому разі $R(F) = F(D)$: область значень оператора є образом його області визначення.

Визначимо поняття рівності операторів, їх звуження та розширення.

Оператори $F: X \rightarrow Y$ та $\Phi: X \rightarrow Y$ є рівними, якщо збігаються їх області визначення $D(F) = F = D$, та $F(x) = \Phi(x)$ для всіх $x \in D$.

Оператор Φ є розширенням оператора F (відповідно, оператор F є звуженням оператора Φ), якщо $D(\Phi) \supset D(F)$, та $\Phi(x) = F(x)$ для $x \in D(F)$.

Таким чином визначаються однозначні оператори F , для яких кожному прообразу x відповідає єдиний образ y . У даній роботі розглядаються тільки однозначні оператори.

Означення 1.2 Означення лінійного оператора. Нехай X та Y – лінійні простори, обидва дійсні або обидва комплексні. Оператор $A: X \rightarrow Y$ з областю визначення $D(A)$ є лінійним, якщо:

- 1) $D(A)$ – лінійна многостатність;
- 2) $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2)$ для будь-яких $x_1, x_2 \in D$ та будь-яких скалярів λ_1, λ_2 .

Поняття лінійного оператора узагальнює поняття лінійної функції $y = ax$, де змінні $x, y \in \mathbb{R}$, a – фіксоване дійсне число. Трохи складніший приклад лінійного оператора дає функція комплексного змінного $w = az$, де змінні z, w та множник a – комплексне число.

Подібно запису лінійної функції, запис лінійного оператора має вигляд:

$$y = Ax. \quad (1.9)$$

При цьому A виступає як операційний коефіцієнт при x .

Теорема 1.1 Область значень будь-якого лінійного оператора є лінійною многостатністю.

Практично найбільш важливі два випадки задання лінійних операторів:

а) $D(A) = X$, тобто, A заданий всюди в X ;

б) нехай X – нормований простір, та нехай $\overline{D(A)} = X$ (замикання множини $D(A)$ збігається з усім простором X). Тоді визначається, що оператор A щільно заданий в просторі X , або область визначення A є щільною в X .

У лінійному просторі R^m m -мірних стовпців $x = (\xi_i)_1^m$, $y = (\eta_i)_1^m$, рівність $y = Ax$ (1.9), де $A = (a_{ij})(i, j = 1, \dots, m)$ – квадратна матриця порядку m , що розуміється як матрична рівність (матриця-стовпець y дорівнює добутку матриці A та матриці-стовпця x), задає певний оператор A .

1.4 Узагальнений оператор Гріна

Означення 1.3 Систему лінійних операторних рівнянь:

$$(Lz)(t) = \varphi(t), \quad (1.10)$$

$$lz = \alpha \quad (1.11)$$

назвемо лінійною неоднорідною крайовою задачею для рівняння $Lz = \varphi$; рівняння $l_i z = \alpha_i$, $i = 1, \dots, m$ – крайовими умовами цієї задачі.

Разом з неоднорідною крайовою задачею (1.10), (1.11) розглянемо однорідну крайову задачу:

$$(Lz)(t) = 0, \quad (1.12)$$

$$lz = 0. \quad (1.13)$$

Означення 1.4 Лінійний обмежений оператор $G: B_2 \rightarrow \ker l \subset B_1$:

$$(G\varphi)(t) = (L^-\varphi)(t) - X(t)Q^{-1}l(L^-\varphi)(\cdot) \quad (1.14)$$

називається узагальненим оператором Гріна крайової задачі (1.10), (1.11).

Таким чином, для крайової задачі (1.10), (1.11) є вірним наступне твердження.

Теорема 1.2 Якщо $\text{rank } Q \leq \min(m, s)$, то однорідна крайова задача (1.12), (1.13) має r і тільки $r = S - \text{rank } Q$ лінійно незалежних рішень. Неоднорідна крайова задана (1.10), (1.11) з нетеровим оператором $L: B_1 \rightarrow B_2$ розв'язна для тих і тільки тих $\varphi \in B_2$ та $\alpha \in R^m$, які задовольняють умовам:

$$(P_{L^*}\varphi)(t) = 0; P_{Q_d^*}\{\alpha - l(L - \varphi)(\cdot)\} = 0, d = m - \text{rank } Q, \quad (1.15)$$

та при цьому має r -параметричне сімейство розв'язків:

$$z_0(t, c_\tau) = X_\tau(t)c_\tau + (G\varphi)(t) + X(t)Q^{-1}\alpha. \quad (1.16)$$

Узагальнений оператор Гріна (1.14) має важливу роль при здійсненні аналізу лінійних та слабонелінійних крайових задач для операторних рівнянь. З його допомогою, за умови обов'язкового виконання умов можливості розв'язання (1.15), будується спільний розв'язок напіводнорідної крайової задачі:

$$Lz = \varphi; \quad (1.17)$$

$$lz = 0. \quad (1.18)$$

Відзначимо одне з найважливіших властивостей узагальненого оператора Гріна.

Лема 1.1 Узагальнений оператор Гріна (1.14) відповідає наступній умові:

$$\Lambda G = \text{col}[I_n - P_{L^*}, P_{Q^*}(lL^{-})]. \quad (1.19)$$

Дійсно:

$$\begin{aligned}
\Lambda G^* &= \begin{bmatrix} L \\ l \end{bmatrix} [L^- - XQ^-lL^-] = \begin{bmatrix} L(L^- - XQ^-lL^-) \\ l(L^- - XQ^-lL^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LL^- - LXQ^-lL^- \\ lL^- - lXQ^-lL^- \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} LL^- \\ (I_m - QQ^-)lL^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I - P_{L^*}) \\ P_{Q^*}lL^- \end{bmatrix}, \tag{1.20}
\end{aligned}$$

тому що $LX = 0$; $I_m - QQ^- = P_{Q^*}$.

Зауваження 1.1 У разі повсюдної можливості розв'язання рівняння $Lz = \varphi$, властивість (1.19) приймає наступний вигляд:

$$\Lambda G = \text{col}[I_n - P_{L^*}, P_{Q^*}(lL_r^-)], \tag{1.21}$$

тому що $R(L) = B_2$ та $P_{L^*} \equiv 0$.

Як вказано вище, при виконанні умови (1.15) крайова задача

$$\Lambda z = \begin{bmatrix} L \\ l \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} \varphi \\ \alpha \end{bmatrix} z \tag{1.22}$$

має розв'язок вигляду (1.16).

Для обмеженого узагальнено-оберненого оператора $[L, l]^-: B_2 \times R^m \rightarrow B_1$, маємо вираз:

$$[L, l]^- \begin{bmatrix} \varphi \\ \alpha \end{bmatrix} = G\varphi + XQ^+\alpha, \tag{1.23}$$

де $G\varphi = [L, l]^- \begin{bmatrix} \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$ – розв'язок задачі: $Lz = \varphi; lz = 0$;

$XQ^+\alpha = [L, l]^- \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ – розв'язок задачі: $Lz = 0; lz = \alpha$.

Теорема 1.3. Оператор

$$\Lambda^- = [G, XQ^-] \tag{1.24}$$

є обмеженим узагальнено-оберненим до лінійного обмеженого оператора

$$\Lambda = \text{col}(L, l). \quad (1.25)$$

Зауваження 1.2 Якщо операторне рівняння (1.12) в крайовій задачі (1.12), (1.13) є всюди розв'язним, то проєктор P_{Λ^*} має вигляд:

$$P_{\Lambda^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -P_{Q^*} l L^{-1} & P_{Q^*} \end{bmatrix}, \quad (1.26)$$

оскільки в цьому випадку $P_{L^*} \equiv 0$ та $L^{-1} = L^{-1}$.

Зауваження 1.3 У разі інтегрального уявлення правого оберненого оператора $L_r^{-1}: L_p^n \rightarrow D_p^n$, узагальнений оператор Гріна має вигляд:

$$(G\varphi)(t) = \int_a^b K(t, s) \varphi(s) ds - X(t) Q^{-1} l \int_a^b K(\cdot, s) \varphi(s) ds. \quad (1.27)$$

Якщо, крім того, функціонал $l: D_p^n \rightarrow R^m$ задовольняє умові:

$$l \int_a^b K(\cdot, s) \varphi(s) ds = l \int_a^b K(\cdot, s) \varphi(s) ds, \quad (1.28)$$

то узагальнений оператор Гріна має вигляд:

$$(G\varphi)(t) = \int_a^b G(t, s) \varphi(s) ds, \quad (1.29)$$

ядро якого

$$G(t, s) = K(t, s) - X(t) Q^{-1} l K(\cdot, s) \quad (1.30)$$

називається узагальненою матрицею Гріна.

Розглянемо крайову задачу (1.12), (1.13) за умови, що простори B_1, B_2 – гільбертові, тобто $L: H_1 \rightarrow H_2, l: H_1 \rightarrow R^m$.

Нехай $P_\Lambda: H_1 \rightarrow N(\Lambda); P_{\Lambda^*}: H_2 \rightarrow N(\Lambda^*)$ – ортопроектори, які проектуєть простори H_1 та H_2 на нуль-простори операторів

$$\Lambda = \text{col}[L, l]; \Lambda^* = \text{col}[L^*, l^*].$$

В цьому випадку узагальнений оператор Гріна може будуватися за формулою:

$$G = L^+ - XQ^+lL^+, \quad (1.31)$$

де L^+ – єдиний псевдообернений оператор до оператора L , що мінімізує норму нев'язки рівняння $Lz = \varphi$. Однак, узагальнений обернений оператор Λ^- (1.18), в якому G визначається за формулою (1.25), не є єдиним псевдооберненим до оператора Λ і не має властивості мінімізації норми нев'язки рівняння $\Lambda z = f$. Такою властивістю володіє оператор:

$$\Lambda^+ = (I - P_\Lambda)\Lambda^-(I - P_{\Lambda^*}) = (I - P_\Lambda)[G, XQ^+](I - P_{\Lambda^*}). \quad (1.32)$$

Функцію Гріна можна представити як обернений оператор до лінійного оператора L . Спочатку функцію Гріна використовували для розв'язку неоднорідних крайових задач. У фізиці елементарних частинок функції Гріна використовуються як пропагатор в діаграмах Фейнмана. Функція Гріна широко застосовується в додатках теорії розсіювання до фізики твердого тіла (рентгенографія, розрахунки електронних спектрів металевих матеріалів та інші). В математиці функція Гріна використовується для розв'язку неоднорідних диференціальних рівнянь з межовими умовами.

1.5 Псевдообернені матриці

Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь не є складним, якщо кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь. Умови існування розв'язків в цьому випадку визначає теорема Кронекера-Капеллі. Розв'язок може бути знайдено за допомогою оберненої матриці або за допомогою методу Гауса. Якщо матриця даної системи є виродженою, або кількість рівнянь системи не збігається з кількістю невідомих, система може бути несумісна або ж сумісна, але розв'язна неоднозначно. Теорема Кронекера-Капеллі для таких систем може бути застосована, але в класичній теорії такі системи були віднесені до некоректно поставлених задач і методи їх розв'язку не розроблялися.

Для розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь може бути використано властивості псевдообернення матриць. Псевдообернена матриця – це узагальнення оберненої матриці в математиці, зокрема, в лінійній алгебрі. У 1903 році концепцію псевдообернених інтегруючих операторів представив Ерік Івар Фредгольм. Найвідомішим з таких операторів є псевдообернення за Муром-Пенроузом. Г.Мур у 1920 році узагальнив поняття звернення для довільних прямокутних і в тому числі квадратних, але вироджених матриць, позначивши поняття псевдооберненої матриці. Незалежно від досліджень Мура, до цієї ж матриці прийшов Р. Пенроуз в 1955 році. Оригінальні формули для псевдообернених матриць та ортопроекторів були отримані А.Ф.Турбіним і В.І.Кублановской. При цьому А.Ф.Турбін запропонував оригінальний підхід до побудови псевдообернених матриць, які будуються на основі попередньо обчислених проекторів [5].

Матриця, псевдообернена до матриці Q , позначається як Q^+ .

Означення 1.5 Матриця Q^+ розміром $m \times n$ називається псевдооберненою до $m \times n$ -матриці Q , якщо виконуються рівності:

$$QQ^+Q = Q; Q^+QQ^+ = Q^+; (QQ^+)^* = QQ^+; (Q^+Q)^* = Q^+Q. \quad (1.33)$$

Означення 1.6 Нехай ранг матриці Q дорівнює n_1 : $\text{rank}Q = n_1$. Скелетним розкладом матриці Q називається добуток:

$$Q = RS, \quad (1.34)$$

де R – $(m \times n_1)$ -матриця та S – $(n_1 \times n)$ -матриця – повного рангу:

$$\text{rank}Q = \text{rank}R = \text{rank}S = n_1. \quad (1.35)$$

Для знаходження псевдооберненої матриці застосовується наступна формула:

$$Q^+ = S^+R^+ = S^*(SS^*)^{-1}(R^*R)^{-1}R^*, \quad (1.36)$$

де $Q = RS$ – скелетний розклад матриці Q .

Псевдообернена матриця існує для будь-якої матриці, крім того вона єдина. Для того щоб отримати розкладання (1.16), достатньо як стовпці матриці R взяти будь-які n_1 лінійно-незалежні стовпці матриці Q , або будь-які n_1 лінійно-незалежні стовпці, через які лінійно виражаються стовпці матриці Q . Тоді довільний j -й стовпець матриці Q буде лінійною комбінацією стовпців матриці R .

Означення 1.7 Ортопроектором P_Q для $m \times n$ -матриці Q називається $n \times n$ -матриця, яка задовольняє таким умовам:

$$QP_Q = 0; [P_Q]^* = P_Q; [P_Q]^2 = P_Q. \quad (1.37)$$

Аналогічно вводиться $m \times$ -матриця – ортопроектор P_{Q^*} :

$$Q^*P_{Q^*} = 0; [P_{Q^*}]^* = P_{Q^*}; [P_{Q^*}]^2 = P_{Q^*}. \quad (1.38)$$

Ортопроектори P_Q та P_{Q^*} можливо знайти, знаючи матрицю Q^+ , псевдообернену до Q :

$$P_Q = I_n - Q^+ Q; P_{Q^*} = I_m - Q Q^+. \quad (1.39)$$

Означення 1.8 Нуль-простором $N(Q)$ $m \times n$ -матриці Q називається множина векторів $c_n \in R^n$, які володіють властивістю $Qc_n = 0$:

$$N(Q) = \{c_n \in R^n: Qc_n = 0\}. \quad (1.40)$$

Аналогічно визначається нуль-простір $N(Q^*)$ матриці Q^* :

$$N(Q^*) = \{c_m \in R^m: Q^*c_m = 0\}. \quad (1.41)$$

Для знаходження векторів з нуль-просторів матриць Q та Q^* можна використовувати ортопроектори. Дійсно, для будь-якого вектора $c_n \in R^n$, вектор $P_Q c_n \in N(Q)$; таким чином, ортопроектор P_Q проектує евклідовий простір R^n в нуль-простір матриці Q :

$$P_Q: R^n \rightarrow N(Q). \quad (1.42)$$

Аналогічно будь-який вектор $c_m \in R^m$ ортопроектор P_{Q^*} проектує в нуль-простір матриці Q^* : $P_{Q^*} c_m \in N(Q^*)$, отже:

$$P_{Q^*}: R^m \rightarrow N(Q^*). \quad (1.43)$$

Основні властивості псевдообернених матриць:

- псевдообернена матриця завжди існує і вона єдина;
- псевдообернення нульової матриці дорівнює її транспонуванню;

- псевдообернення є оборотним до самого себе:

$$(Q^+)^+ = Q; \quad (1.44)$$

- псевдообернення комутує з транспонуванням, спряженням і ермітовим спряженням:

$$(Q^T)^+ = (Q^+)^T; \overline{(Q)^+} = \overline{Q}^+; (Q^*)^+ = (Q^+)^*; \quad (1.45)$$

- ранг матриці дорівнює рангу її псевдооберненої:

$$\text{rank } Q^+ = \text{rank } Q; \quad (1.46)$$

- псевдообернення добутку матриці Q на скаляр α дорівнює добутку матриці Q^+ на обернене число α^{-1} :

$$(\alpha Q)^+ = \alpha^{-1} Q^+, \forall \alpha \neq 0; \quad (1.47)$$

- якщо вже відома матриця $(Q^*Q)^+$ чи матриця $(QQ^*)^+$, то їх можна використати для обчислення Q^+ :

$$Q^+ = (Q^*Q)^+ Q^* ;$$

$$Q^+ = Q^* (QQ^*)^+ ;$$

- матриці Q^+Q , Q^+Q – є ортогонально-проекційними матрицями;

- якщо матриця Q_i утворена з матриці Q за допомогою вставки ще одного нульового рядка/стовпця в i -ту позицію, то Q_i^+ буде утворюватись з Q^+ додаванням нульового стовпця/рядка в i -ту позицію;

- якщо рядок/стовпець в попередній процедурі не є нульовим $\alpha_i \neq \vec{0}$, то існує формула Гревіля для вираження Q_i^+ через Q , Q^+ , α_i .

Псевдообернена матриця застосовується для знаходження найкращого наближення розв'язку систем лінійних арифметичних рівнянь методом найменших квадратів.

2 НЕТЕРОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З КЕРУВАННЯМ У ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ СИСТЕМІ

2.1 Постановка задачі

Розглянуто неоднорідну систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \quad (2.1)$$

де $A(t)$ – матриця розмірності $(n \times n)$, компоненти якої – функції, дійсні та неперервні на відрізку $[0; T]$: $A(t) \in [0; T]$; $f(t)$ – n -вимірний вектор-стовпець, елементи якого – дійсні функції, неперервні на відрізку $[0; T]$: $f(t) \in [0; T]$; $x(t)$ – невідомий n -вимірний вектор-стовпець, елементи якого є неперервно-диференційовані функції $x(t) = \text{col}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$; $x(t) \in C^1[0; T]$.

Диференціальне рівняння (2.1) розглядується разом з крайовою умовою

$$lx(\cdot) = Mx(0) - Nx(t) = \alpha, \quad (2.2)$$

де l – лінійний векторний функціонал, визначений в просторі неперервних на відрізку $[0; T]$ n -вимірних функцій: $l = \text{col}(l_1, l_2, \dots, l_m)$, $l: C[0; T] \rightarrow R^m$; α – m -вимірний вектор-стовпець констант із m -вимірного дійсного евклідового простору R^m : $\alpha = \text{col}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$; M, N – матриці розмірності $(m \times n)$.

У випадку, якщо $lx(\cdot) = \sum_{i=1}^k M_i x(t_i)$, розглядається багатоточкова крайова задача.

При значеннях $k = 2, M_1 = -M_2, \alpha = 0$ отримаємо широко розповсюдженні періодичні крайові задачі.

2.2 Критерій розв'язності та структура розв'язків

Для визначення критерію розв'язності та структури розв'язків лінійної крайової задачі, поряд з неоднорідною крайовою задачею (2.1), (2.2) розглянемо однорідну крайову задачу:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \quad (2.3)$$

$$lx(\cdot) = Mx(0) - Nx(T) = \alpha. \quad (2.4)$$

Повну систему, що складається з n -лінійно незалежних розв'язків системи (2.3) називають фундаментальною, а $(n \times n)$ -вимірну матрицю $X(t) = X(t, 0)$, яка є розв'язком матричної задачі Коші:

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t), X(0) = I_n, \quad (2.5)$$

називають нормальною фундаментальною матрицею.

Загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь складається з суми розв'язків однорідної системи та довільного частинного розв'язку неоднорідної системи (2.1):

$$x(t) = X(t)c_1 + \bar{x}(t), \quad (2.6)$$

де $\bar{x}(t)$ – довільний частинний розв'язок неоднорідної системи (2.1), який задається як:

$$\bar{x}(t) = \int_0^t X(t, \tau)f(\tau)d\tau, \quad (2.7)$$

де $X(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$. Тоді

$$x(t) = X(t)c_1 + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau. \quad (2.8)$$

Для того, щоб розв'язок (2.6) був розв'язком крайової задачі (2.1), (2.2), необхідно задовольнити крайову умову. Підставляючи розв'язок (2.8) в крайову умову (2.2), отримуємо алгебраїчну систему відносно $c \in R^n$ з матрицею Q :

$$\begin{aligned} M \cdot X(0)c_1 + M \int_0^0 X(0, \tau)f(\tau)d\tau - N \cdot X(T)c_1 - N \int_0^T X(t, \tau)f(\tau)d\tau &= \alpha, \\ (M - N \cdot X(T))c_1 &= \alpha + N \int_0^T X(T, \tau)f(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Позначимо $(m \times n)$ -вимірну матрицю, отриману підстановкою в крайову умову нормальної фундаментальної матриці $X(t) = X(t, 0)$, $X(0) = I_n$ однорідної системи (2.3) через Q :

$$Q = lX(\cdot) = M - N \cdot X[T]. \quad (2.10)$$

Враховуючи, що:

$$\begin{aligned} \alpha + N \int_0^T X(T, \tau)f(\tau)d\tau &= \alpha - \left(M \int_0^0 X(0, \tau)f(\tau)d\tau - N \int_0^T X(T, \tau)f(\tau)d\tau \right) = \\ &= \alpha - l \int_0^T X(\cdot, \tau)f(\tau)d\tau, \end{aligned} \quad (2.11)$$

умова розв'язності рівняння (2.9) запишеться у вигляді:

$$P_{N(Q^*)}[\alpha - l \int_0^T X(\cdot, \tau)f(\tau)d\tau] = 0. \quad (2.12)$$

При цьому загальний розв'язок системи (2.9) має вигляд:

$$c_1 = Q^+[\alpha - l \int_0^T X(\cdot, \tau)f(\tau)d\tau] + P_{N(Q^*)}, \quad (2.13)$$

де ортопроектори $P_{N(Q)}$ і $P_{N(Q^*)}$ можна знайти, знаючи псевдообернену матрицю:

$$P_{N(Q^*)} = I_m - QQ^+, \quad (2.14)$$

$$P_{N(Q)} = I_n - Q^+Q. \quad (2.15)$$

Підставимо (2.13) в (2.8), отримаємо:

$$\begin{aligned} x(t, c) &= X(t)(Q^+[\alpha - l \int_0^t X(\cdot, \tau)f(\tau)d\tau] + P_{N(Q)}c) + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau = \\ &= X(t)(Q^+[\alpha + N \int_0^T X(T, \tau)f(\tau)d\tau] + P_{N(Q)}c) + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau = \\ &= X(t)Q^+\alpha + X(t)Q^+N \int_0^T X(T, \tau)f(\tau)d\tau + X(t)P_{N(Q)}c + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau = \\ &= X(t)P_{N(Q)}c + X(t)Q^+\alpha + (G[f])(t), \end{aligned} \quad (2.16)$$

де через $(G[f])(t)$ позначено узагальнений оператор Гріна крайової задачі (2.1), (2.2), який діє на вектор-функцію $f(t)$ із $C[0; T]$ наступним чином:

$$(G[f])(t) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + X(t)Q^+N \int_0^T X(T, \tau)f(\tau)d\tau \quad (2.17)$$

або у загальному випадку

$$(G[f])(t) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau - X(t)Q^+l \int_0^t X(\cdot, \tau)f(\tau)d\tau, \quad (2.18)$$

Теорема 2.1. Якщо $\text{rank } Q = n_1$, то однорідна крайова задача (2.3), (2.4) має $r = n - n_1$ і тільки r лінійно незалежних розв'язків. Неоднорідна крайова задача (2.1), (2.2) розв'язна тоді і тільки тоді, коли $f(t) \in [0; T]$ і $\alpha \in R^m$ задовольняють умову розв'язності (2.12) і при цьому крайова задача (2.1), (2.2) має r -параметричну родину розв'язків $x(t, c_r)$ вигляду (2.16).

2.3 Керованість лінійних нетерових крайових задач

Дослідимо нетерову крайову задачу на керованість наступного вигляду:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t) + Du(t), \quad (2.19)$$

$$lx(\cdot) = Mx(0) - Nx(T) = \alpha, \quad (2.20)$$

де $A(t)$ і $D(t)$ – матриці розмірності $(n \times n)$, компоненти яких – дійсні непереривні на відріжку $[0; T]$ функції; $f(t)$ – n -вимірний вектор-стовпець, елементи якого непереривні на відріжку $[0; T]$ дійсні функції: $f(t) \in C[0; T]$; $u(t)$ – керування: $u(t) = \text{col}(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$ – n -вимірний вектор-стовпець; $x(t)$ – невідомий n -вимірний вектор-стовпець, елементи якого є неперервно-диференційовані функції $x(t) = \text{col}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$; $x(t) \in C^1[0; T]$.

Потрібно знайти таке керування, щоб розв'язок крайової задачі (2.19), (2.20) у даний момент часу t_1 дорівнював X_1 .

Відомо, що загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь складається з суми розв'язків однорідної системи та довільного частинного розв'язку неоднорідної системи (2.19):

$$x(t) = X(t)c_1 + \bar{x}(t), \quad (2.21)$$

де $\bar{x}(t)$ – довільний частинний розв'язок неоднорідної системи (2.19), який задається як:

$$\bar{x}(t) = \int_0^t X(t, \tau)(f(\tau) + Du(\tau))d\tau = \int_0^t X(t, \tau)f(\tau)d\tau + \int_0^t X(t, \tau)Du(\tau)d\tau, \quad (2.22)$$

де $X(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$. Тоді

$$\begin{aligned}
x(t) &= X(t)c_1 + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau) + Du(\tau))d\tau = \\
&= X(t)c_1 + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + X(t) \int_0^t Du(\tau)d\tau.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Для того, щоб розв'язок (2.21) був розв'язком крайової задачі (2.19), (2.20), необхідно задовольнити крайову умову. Підставляючи розв'язок (2.23) в крайову умову (2.20), отримуємо алгебраїчну відносно $c \in R^n$ систему з матрицею Q :

$$\begin{aligned}
&M \cdot X(0)c_1 + M \int_0^0 X(0, \tau)f(\tau)d\tau + M \int_0^0 X(0, \tau)D(\tau)d\tau - \\
&- N \cdot X(T)c_1 - N \int_0^T X(T, \tau)f(\tau)d\tau - N \int_0^T X(T, \tau)Du(\tau)d\tau = \alpha, \\
&(M-N \cdot X(t))c_1 = \alpha + N \int_0^T X(T, \tau)f(\tau)d\tau + N \int_0^T X(T, \tau)Du(\tau)d\tau.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Позначимо через $Q = lX(\cdot) = M - N \cdot X(T)$ — $(m \times n)$ -вимірну матрицю, отриману підстановкою в крайову умову нормальної фундаментальної матриці $X(t) = X(t, 0), X(0) = I_n$ однорідної системи (2.3). Враховуючи, що:

$$\begin{aligned}
&\alpha + N \int_0^T X(T, \tau)f(\tau)d\tau + N \int_0^T X(T, \tau)Du(\tau)d\tau = \alpha - \left(M \int_0^0 X(0, \tau)f(\tau)d\tau + \right. \\
&\quad \left. + M \int_0^0 X(0, \tau)Du(\tau)d\tau - N \int_0^T X(T, \tau)f(\tau)d\tau - N \int_0^T X(T, \tau)Du(\tau)d\tau \right) = \\
&= \alpha - l \int_0^\cdot X(\cdot, \tau)f(\tau)d\tau - l \int_0^\cdot X(\cdot, \tau)Du(\tau)d\tau,
\end{aligned}$$

умова розв'язності рівняння (2.24) запишеться у вигляді:

$$P_{N(Q^*)}[\alpha - l \int_0^\cdot X(\cdot, \tau)f(\tau)d\tau - l \int_0^\cdot X(\cdot, \tau)Du(\tau)d\tau] = 0. \tag{2.25}$$

При цьому загальний розв'язок системи (2.24) має вигляд:

$$c_1 = Q^+ \left[\alpha - l \int_0^T X(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau - l \int_0^T X(\cdot, \tau) Du(\tau) d\tau \right] + P_{N(Q)} c, \quad (2.26)$$

де ортопроектори $P_{N(Q)}$ і $P_{N(Q^*)}$ можна знайти, знаючи псевдообернену матрицю:

$$P_{N(Q^*)} = I_m - QQ^+, \quad (2.27)$$

$$P_{N(Q)} = I_n - Q^+Q. \quad (2.28)$$

Підставимо (2.26) в (2.23), отримаємо:

$$\begin{aligned} x(t, c) &= X(t) \left(Q^+ \left[\alpha - l \int_0^T X(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau - l \int_0^T X(\cdot, \tau) Du(\tau) d\tau \right] + P_{N(Q)} c \right) + \\ &\quad + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) Du(\tau) d\tau = \\ &= X(t) \left(Q^+ \left[\alpha + N \int_0^T X(T, \tau) f(\tau) d\tau + N \int_0^T X(T, \tau) Du(\tau) d\tau \right] + P_{N(Q)} c \right) + \\ &\quad + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) Du(\tau) d\tau = \\ &= X(t) Q^+ \alpha + X(t) Q^+ N \int_0^T X(T, \tau) f(\tau) d\tau + X(t) Q^+ N \int_0^T X(T, \tau) Du(\tau) d\tau + \\ &\quad + X(t) P_{N(Q)} c + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) Du(\tau) d\tau = \\ &= X(t) P_{N(Q)} c + X(t) Q^+ \alpha + (G[f])(t), \end{aligned} \quad (2.29)$$

де через $(G[f])(t)$ позначено узагальнений оператор Гріна крайової задачі (2.19), (2.20), який діє на вектор-функцію $f(t)$ із $C[0; T]$ наступним чином:

$$\begin{aligned} (G[f])(t) &= X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) Du(\tau) d\tau + \\ &\quad + X(t) Q^+ N \int_0^T X(T, \tau) f(\tau) d\tau + X(t) Q^+ N \int_0^T X(T, \tau) Du(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.30)$$

або у загальному випадку:

$$(G[f])(t) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) Du(\tau) d\tau -$$

$$-X(t)Q^{+l} \int_0^{\cdot} X(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau - X(t)Q^{+l} \int_0^{\cdot} X(\cdot, \tau) Du(\tau) d\tau. \quad (2.31)$$

Теорема 2.2 Якщо $\text{rank } Q = n_1$, то однорідна крайова задача (2.3), (2.4) має $r = n - n_1$ і тільки r лінійно незалежних розв'язків. Неоднорідна крайова задача (2.19), (2.20) розв'язна тоді і тільки тоді, коли $f(t), u(t) \in C[0; T]$ і $\alpha \in R^m$ задовольняють умову розв'язності (2.25) і при цьому крайова задача (2.19), (2.20) має r -параметричну родину розв'язків $x(t, c_r)$ вигляду (2.29).

З ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ НЕТЕРОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З КЕРУВАННЯМ У ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ СИСТЕМІ У СКІНЧЕННОВИМІРНОМУ ПРОСТОРИ

Дослідимо нетерову крайову задачу наступного вигляду на керованість:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t) + Du(t), \quad (3.1)$$

$$lx(\cdot) = Mx(0) - Nx(0) = \alpha \quad (3.2)$$

де $A(t) = \text{diag}\{-5, -6, -7, -8\}$; $D(t) = \text{diag}\{1, 1, 1, 1\}$; $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$;
 $N = \begin{pmatrix} 8 & 16 & 35 & 64 \end{pmatrix}$; $f(t) = \text{col}(e^{-5t}, 2e^{-5t}, 3e^{-5t}, 4e^{-5t})$; $\alpha = 16$;
 $T = \ln(2)$; $u(t) = \text{col}(u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ – вектор керування.

Шукається таке керування, щоб розв'язок крайової задачі (3.1), (3.2) у даний момент часу t_1 дорівнював X_1 :

$$X_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{pmatrix},$$

$$\text{де } b_{11} = \frac{132859674870412592}{7217464395756966975} - \frac{1136}{9477} \ln(2) + \frac{32}{243} \ln(3);$$

$$b_{21} = -\frac{2024880577904650031}{49563357276660850350} - \frac{1760}{9477} \ln(2) + \frac{128}{729} \ln(3);$$

$$b_{31} = \frac{3231849939425945489}{14565671929171183275} - \frac{14272}{85293} \ln(2) + \frac{128}{729} \ln(3);$$

$$b_{41} = \frac{2784118584955142219}{95777369544860476200} - \frac{36992}{255879} \ln(2) + \frac{1024}{6561} \ln(3);$$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}; f(t) = \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ 2e^{-6t} \\ 3e^{-7t} \\ 4e^{-8t} \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix};$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}; N = \begin{pmatrix} 8 & 16 & 35 & 64 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь складається з суми розв'язків однорідної системи та довільного частинного розв'язку неоднорідної системи (2.19) та знаходиться за формулою (2.21):

$$x(t) = X(t)c_1 + \bar{x}(t).$$

Щоб знайти фундаментальну матрицю $X(t)$, треба розв'язати матричну задачу Коші:

$$X(t) = \begin{pmatrix} \frac{x_1(t)}{dt} \\ \frac{x_2(t)}{dt} \\ \frac{x_3(t)}{dt} \\ \frac{x_4(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}.$$

Знаходимо окремо розв'язок кожного диференціального рівняння та підставляємо знайдені значення до матриці $X(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{x_1(t)}{dt} &= -5x_1(t); & \frac{x_2(t)}{dt} &= -6x_2(t); & \frac{x_3(t)}{dt} &= -7x_3(t); & \frac{x_4(t)}{dt} &= -8x_4(t); \\ \int \frac{x_1(t)}{dt} &= \int -5x_1(t); & \int \frac{x_2(t)}{dt} &= \int -6x_2(t); & \int \frac{x_3(t)}{dt} &= \int -7x_3(t); & \int \frac{x_4(t)}{dt} &= \int -8x_4(t); \\ \ln|x_1| &= -5t; & \ln|x_2| &= -6t; & \ln|x_3| &= -7t; & \ln|x_4| &= -8t; \\ x_1 &= e^{-5t}; & x_2 &= e^{-6t}; & x_3 &= e^{-7t}; & x_4 &= e^{-8t}; \end{aligned}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-5t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-6t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-7t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-8t} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену до $X(t)$ матрицю $X^{-1}(t)$:

$$X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{6t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{8t} \end{pmatrix}.$$

Перевірка: $X(t) \cdot X^{-1}(t)$ повинно бути єдиною матрицею I_4 :

$$\begin{aligned} X(t) \cdot X^{-1}(t) &= \begin{pmatrix} e^{-5t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-6t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-7t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-8t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{6t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{8t} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4 - \text{вірно.} \end{aligned}$$

Шукаємо необхідні для розв'язку матриці та виконуємо необхідні алгебраїчні дії:

$$\begin{aligned} X(\tau) &= \begin{pmatrix} e^{-5\tau} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-6\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-7\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-8\tau} \end{pmatrix}; X^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} e^{5\tau} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{6\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{7\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{8\tau} \end{pmatrix}; \\ f(t) &= \begin{pmatrix} e^{-5t} + u_1 \\ 2e^{-6t} + u_2 \\ 3e^{-7t} + u_3 \\ 4e^{-8t} + u_4 \end{pmatrix}; f(\tau) = \begin{pmatrix} e^{-5\tau} + u_1 \\ 2e^{-6\tau} + u_2 \\ 3e^{-7\tau} + u_3 \\ 4e^{-8\tau} + u_4 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

За формулою (2.10) $Q = lX(\cdot) = M - N \cdot X(T)$, тоді

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{11}{4} & \frac{23}{4} \end{pmatrix};$$

$$Q^+ = \begin{pmatrix} \frac{7}{195} \\ \frac{3}{65} \\ \frac{11}{195} \\ \frac{23}{195} \end{pmatrix}.$$

Ортопроектори $P_{N(Q)}$ та $P_{N(Q^*)}$ знаходимо за формулами (2.14), (2.15):

$$P_{N(Q^*)} = I_m - QQ^+ = (0);$$

$$P_{N(Q)} = I_n - Q^+Q = \begin{pmatrix} \frac{731}{780} & \frac{21}{260} & -\frac{77}{780} & -\frac{161}{780} \\ \frac{21}{260} & \frac{233}{260} & \frac{33}{659} & \frac{69}{253} \\ -\frac{77}{780} & \frac{33}{260} & \frac{659}{780} & -\frac{253}{780} \\ -\frac{161}{780} & \frac{69}{260} & -\frac{253}{780} & \frac{251}{780} \end{pmatrix}.$$

При $t = 0$:

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

при $t = \ln(2)$:

$$X(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{64} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{128} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{256} \end{pmatrix};$$

$$X(t)X^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} e^{-5t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-6t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-7t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-8t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{5\tau} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{6\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{7\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{8\tau} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e^{-5t}}{e^{-5\tau}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{-6t}}{e^{-6\tau}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{-7t}}{e^{-7\tau}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-8t}}{e^{-8\tau}} \end{pmatrix},$$

при $t = \ln(2)$:

$$X(t)X^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{1}{32}e^{5\tau} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{64}e^{6\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{128}e^{7\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{256}e^{8\tau} \end{pmatrix}.$$

Знаходимо узагальнений оператор Гріна $(G[f])(t)$ крайової задачі (2.1), (2.2), який діє на вектор-функцію $f(t)$ із $C[0; T]$ за формулою (2.17).

Визначимо $G_{01} = X(t)X^{-1}(\tau) f(\tau)$:

$$\begin{aligned} G_{01} = X(t)X^{-1}(\tau) f(\tau) &= \begin{pmatrix} \frac{e^{-5t}}{e^{-5\tau}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{-6t}}{e^{-6\tau}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{-7t}}{e^{-7\tau}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-8t}}{e^{-8\tau}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-5\tau} + u_1 \\ 2e^{-6\tau} + u_2 \\ 3e^{-7\tau} + u_3 \\ e4^{-8\tau} + u_4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (e^{-5\tau} + u_1)e^{-5t+5\tau} \\ (2e^{-6\tau} + u_2)e^{-6t+6\tau} \\ (3e^{-7\tau} + u_3)e^{-7t+7\tau} \\ (e4^{-8\tau} + u_4)e^{-8t+8\tau} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

тоді $G_1 = \int_0^t G_{01} d\tau$:

$$\begin{aligned}
G_1 &= \int_0^t G_{01} d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} (e^{-5\tau} + u_1)e^{-5t+5\tau} \\ (2e^{-6\tau} + u_2)e^{-6t+6\tau} \\ (3e^{-7\tau} + u_3)e^{-7t+7\tau} \\ (e4^{-8\tau} + u_4)e^{-8t+8\tau} \end{pmatrix} d\tau = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(u_1e^{5t} - \ln(e^{-5t}) - u_1)e^{-5t} \\ \frac{1}{6}(u_2e^{6t} - 2\ln(e^{-6t}) - u_2)e^{-6t} \\ \frac{1}{7}(u_3e^{7t} - 3\ln(e^{-7t}) - u_3)e^{-7t} \\ \frac{1}{8}(u_4e^{8t} - 4\ln(e^{-8t}) - u_4)e^{-8t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Визначимо $G_{02} = X(T, \tau)f(\tau)$. Тоді:

$$G_{02} = \begin{pmatrix} \frac{1}{32}e^{5\tau} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{64}e^{6\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{128}e^{7\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{256}e^{8\tau} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-5\tau} + u_1 \\ 2e^{-6\tau} + u_2 \\ 3e^{-7\tau} + u_3 \\ e4^{-8\tau} + u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{32} + \frac{1}{32}u_1e^{5\tau} \\ \frac{1}{32} + \frac{1}{64}u_2e^{6\tau} \\ \frac{1}{32} + \frac{1}{128}u_3e^{7\tau} \\ \frac{1}{64} + \frac{1}{256}u_4e^{8\tau} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо G_2 з виразу $G_2 = \int_0^T G_{02} d\tau$:

$$G_2 = \int_0^T \begin{pmatrix} \frac{1}{32} + \frac{1}{32}u_1e^{5\tau} \\ \frac{1}{32} + \frac{1}{64}u_2e^{6\tau} \\ \frac{1}{32} + \frac{1}{128}u_3e^{7\tau} \\ \frac{1}{64} + \frac{1}{256}u_4e^{8\tau} \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \frac{31}{160}u_1 + \frac{1}{32}\ln(2) \\ \frac{21}{128}u_2 + \frac{1}{32}\ln(2) \\ \frac{127}{896}u_3 + \frac{1}{128}\ln(2) \\ \frac{255}{2048}u_4 + \frac{1}{64}\ln(2) \end{pmatrix}.$$

Позначимо $G_3 = X(t)Q^+NG_2$ та знайдемо його:

$$\begin{aligned}
G_3 &= \begin{pmatrix} e^{-5t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-6t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-7t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-8t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{195} \\ -\frac{3}{65} \\ \frac{11}{195} \\ \frac{23}{195} \end{pmatrix} (8 \ 16 \ 35 \ 64) \begin{pmatrix} \frac{31}{160}u_1 + \frac{1}{32}\ln(2) \\ \frac{21}{128}u_2 + \frac{1}{32}\ln(2) \\ \frac{127}{896}u_3 + \frac{1}{128}\ln(2) \\ \frac{255}{2048}u_4 + \frac{1}{64}\ln(2) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{31200}e^{-5t}(1736u_1 + 2800\ln(2) + 2940u_2 + 5080u_3 + 8925u_4) \\ -\frac{3}{72800}e^{-6t}(1736u_1 + 2800\ln(2) + 2940u_2 + 5080u_3 + 8925u_4) \\ \frac{11}{218400}e^{-7t}(1736u_1 + 2800\ln(2) + 2940u_2 + 5080u_3 + 8925u_4) \\ \frac{23}{218400}e^{-8t}(1736u_1 + 2800\ln(2) + 2940u_2 + 5080u_3 + 8925u_4) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Таким чином, узагальнений оператор Гріна $(G[f])(t)=G_1 + G_3$:

$$\begin{aligned}
(G[f])(t) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(u_1e^{5t} - \ln(e^{-5t}) - u_1)e^{-5t} \\ \frac{1}{6}(u_2e^{6t} - 2\ln(e^{-6t}) - u_2)e^{-6t} \\ \frac{1}{7}(u_3e^{7t} - 3\ln(e^{-7t}) - u_3)e^{-7t} \\ \frac{1}{8}(u_4e^{8t} - 4\ln(e^{-8t}) - u_4)e^{-8t} \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} \frac{1}{31200}e^{-5t}(1736u_1 + 2800\ln(2) + 2940u_2 + 5080u_3 + 8925u_4) \\ -\frac{3}{72800}e^{-6t}(1736u_1 + 2800\ln(2) + 2940u_2 + 5080u_3 + 8925u_4) \\ \frac{11}{218400}e^{-7t}(1736u_1 + 2800\ln(2) + 2940u_2 + 5080u_3 + 8925u_4) \\ \frac{23}{218400}e^{-8t}(1736u_1 + 2800\ln(2) + 2940u_2 + 5080u_3 + 8925u_4) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}e^{-5t}\ln(e^{-5t}) + \frac{1}{31200}(-4504u_1 + 2940u_2 + 5080u_3 + 8925u_4 + 2800\ln(2))e^{-5t} + \frac{1}{5}u_1 \\ -\frac{1}{3}e^{-6t}\ln(e^{-6t}) + \frac{1}{218400}(-15624u_1 - 62860u_2 - 45720u_3 - 80325u_4 - 25200\ln(2))e^{-6t} + \frac{1}{6}u_2 \\ -\frac{3}{7}e^{-7t}\ln(e^{-7t}) + \frac{1}{218400}(19096u_1 + 32340u_2 + 24680u_3 + 98175u_4 + 30800\ln(2))e^{-7t} + \frac{1}{7}u_3 \\ -\frac{1}{2}e^{-8t}\ln(e^{-8t}) + \frac{1}{218400}(39928u_1 + 67620u_2 + 116840u_3 + 177975u_4 + 64400\ln(2))e^{-8t} + \frac{1}{8}u_4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Визначимо:

$$X_1 = X(t)P_{N(Q)}c;$$

$$X_2 = X(t)Q^+\alpha,$$

та знайдемо їх:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \begin{pmatrix} e^{-5t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-6t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-7t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-8t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{731}{780} & \frac{21}{260} & -\frac{77}{780} & -\frac{161}{780} \\ \frac{21}{260} & \frac{233}{260} & \frac{33}{260} & \frac{69}{260} \\ -\frac{77}{780} & \frac{33}{260} & \frac{659}{780} & -\frac{253}{780} \\ -\frac{161}{780} & \frac{69}{260} & -\frac{253}{780} & \frac{251}{780} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{780} e^{-5t} (731c_1 + 63c_2 - 77c_3 - 161c_4) \\ \frac{1}{260} e^{-6t} (21c_1 + 233c_2 + 33c_3 + 69c_4) \\ -\frac{1}{780} e^{-7t} (77c_1 - 99c_2 - 659c_3 + 253c_4) \\ -\frac{1}{780} e^{-8t} (161c_1 - 207c_2 + 253c_3 - 251c_4) \end{pmatrix}; \\
 X_2 &= \begin{pmatrix} e^{-5t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-6t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-7t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-8t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{195} \\ -\frac{3}{65} \\ \frac{11}{195} \\ \frac{23}{195} \end{pmatrix} (16) = \begin{pmatrix} \frac{112}{195} e^{-5t} \\ -\frac{48}{65} e^{-6t} \\ \frac{176}{195} e^{-7t} \\ \frac{368}{195} e^{-8t} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Знайдені значення підставляємо у формулу (2.16)

$$x(t, c) = X(t)P_{N(Q)}c + X(t)Q^+\alpha + (G[f])(t)$$

та знаходимо розв'язок нетерової крайової задачі $x(t, c) = X_1 + X_2 + (G[f])(t)$:

$$x(t, c) = \begin{pmatrix} \frac{1}{780} e^{-5t} (731c_1 + 63c_2 - 77c_3 - 161c_4) \\ \frac{1}{260} e^{-6t} (21c_1 + 233c_2 + 33c_3 + 69c_4) \\ -\frac{1}{780} e^{-7t} (77c_1 - 99c_2 - 659c_3 + 253c_4) \\ -\frac{1}{780} e^{-8t} (161c_1 - 207c_2 + 253c_3 - 251c_4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{112}{195} e^{-5t} \\ -\frac{48}{65} e^{-6t} \\ \frac{176}{195} e^{-7t} \\ \frac{368}{195} e^{-8t} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\begin{aligned} & -\frac{1}{5}e^{-5t} \ln(e^{-5t}) + \frac{1}{31200}(-4504u_1 + 2940u_2 + 5080u_3 + 8925u_4 + 2800 \ln(2))e^{-5t} + \frac{1}{5}u_1 \\ & -\frac{1}{3}e^{-6t} \ln(e^{-6t}) + \frac{1}{218400}(-15624u_1 - 62860u_2 - 45720u_3 - 80325u_4 - 25200 \ln(2))e^{-6t} + \frac{1}{6}u_2 \\ & -\frac{3}{7}e^{-7t} \ln(e^{-7t}) + \frac{1}{218400}(19096u_1 + 32340u_2 + 24680u_3 + 98175u_4 + 30800 \ln(2))e^{-7t} + \frac{1}{7}u_3 \\ & -\frac{1}{2}e^{-8t} \ln(e^{-8t}) + \frac{1}{218400}(39928u_1 + 67620u_2 + 116840u_3 + 177975u_4 + 64400 \ln(2))e^{-8t} + \frac{1}{8}u_4 \end{aligned} \right) = \\
& = \left(\begin{aligned} & -\frac{1}{5}e^{-5t} \ln(e^{-5t}) + \frac{1}{31200}(2800 \ln(2) - 4504u_1 + 2940u_2 + 5080u_3 + 8925u_4 + 29240c_1 + 2520c_2 - 3080c_3 - 6440c_4 + 17920)e^{-5t} + \frac{1}{5}u_1 \\ & -\frac{1}{3}e^{-6t} \ln(e^{-6t}) + \frac{1}{218400}(-25200 \ln(2) - 15624u_1 - 62860u_2 - 45720u_3 - 80325u_4 + 17640c_1 + 195720c_2 + 27720c_3 + 57960c_4 - 161280)e^{-6t} + \frac{1}{6}u_2 \\ & -\frac{3}{7}e^{-7t} \ln(e^{-7t}) + \frac{1}{218400}(30800 \ln(2) + 19096u_1 + 32340u_2 + 24680u_3 + 98175u_4 - 21560c_1 + 27720c_2 + 184520c_3 - 70840c_4 + 197120)e^{-7t} + \frac{1}{7}u_3 \\ & -\frac{1}{2}e^{-8t} \ln(e^{-8t}) + \frac{1}{218400}(64400 \ln(2) + 39928u_1 + 67620u_2 + 116840u_3 + 177975u_4 - 45080c_1 + 57960c_2 - 70840c_3 + 70280c_4 + 412160)e^{-8t} + \frac{1}{8}u_4 \end{aligned} \right).
\end{aligned}$$

Нехай $t = \ln \frac{3}{2}$; $c_1 = -1$; $c_2 = 1$; $c_3 = 2$; $c_4 = -3$, тоді підставимо їх у формулу для знаходження $x(t, c)$. Отримаємо наступне:

$$x(t, c) = \left(\begin{aligned} & \frac{872}{47385} + \frac{42881}{236925}u_1 - \frac{1136}{9477} \ln(2) + \frac{32}{243} \ln(3) + \frac{196}{15795}u_2 + \frac{1016}{47385}u_3 + \frac{119}{3159}u_4 \\ & -\frac{1936}{47385} + \frac{40201}{284310}u_2 - \frac{1760}{9477} \ln(2) + \frac{128}{729} \ln(3) - \frac{496}{78975}u_1 - \frac{2032}{110565}u_3 - \frac{34}{1053}u_4 \\ & \frac{94624}{426465} + \frac{446209}{2985255}u_3 - \frac{14272}{85293} \ln(2) + \frac{128}{729} \ln(3) + \frac{10912}{2132325}u_1 + \frac{1232}{142155}u_2 + \frac{748}{28431}u_4 \\ & \frac{37184}{1279395} + \frac{35663}{227448}u_4 - \frac{36992}{255879} \ln(2) + \frac{1024}{6561} \ln(3) + \frac{45632}{6396975}u_1 + \frac{5152}{426465}u_2 + \frac{186944}{8955765}u_3 \end{aligned} \right).$$

Знайдемо таке керування, щоб розв'язок крайової задачі (3.1), (3.2) у момент часу $t_1 = \ln \frac{3}{2}$, дорівнював X_1 (за умовами задачі):

$$X_1 = \left(\begin{aligned} & \frac{132859674870412592}{7217464395756966975} - \frac{1136}{9477} \ln(2) + \frac{32}{243} \ln(3) \\ & -\frac{2024880577904650031}{49563357276660850350} - \frac{1760}{9477} \ln(2) + \frac{128}{729} \ln(3) \\ & \frac{3231849939425945489}{14565671929171183275} - \frac{14272}{85293} \ln(2) + \frac{128}{729} \ln(3) \\ & \frac{2784118584955142219}{95777369544860476200} - \frac{36992}{255879} \ln(2) + \frac{1024}{6561} \ln(3) \end{aligned} \right).$$

Отримаємо систему алгебраїчних рівнянь з невідомими u_1, u_2, u_3, u_4 , звідки знайдемо керування:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = u = \begin{pmatrix} \frac{1}{42881} \\ \frac{1}{40201} \\ \frac{1}{446209} \\ \frac{1}{35663} \end{pmatrix}.$$

Відповідь. $\left\{ u_1 = \frac{1}{42881}, u_2 = \frac{1}{40201}, u_3 = \frac{1}{446209}, u_4 = \frac{1}{35663} \right\}.$

ВИСНОВКИ

Кваліфікаційна робота присвячена актуальним питанням розв'язності нетерових крайових задач з керуванням у диференціальній системі у скінченновимірному просторі. В роботі:

- поставлена і розв'язана задача пошуку такого керування, щоб розв'язок крайової задачі у даний момент часу дорівнював відповідному значенню.
- наведено алгоритм дослідження нетерової крайової задачі;
- наведено необхідні і достатні умови розв'язності нетерових крайових задач з керуванням у диференціальній системі у скінченновимірному просторі;
- розглянуто критерій розв'язності та структуру розв'язків крайової задачі;
- досліджено нетерову крайову задачу на керованість;
- знайдено керування, при якому розв'язок крайової задачі у даний момент часу t дорівнював X .

Результати кваліфікаційної роботи мають теоретичний характер.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях. Москва : Наука, 1987. 160 с.
2. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва : Наука, 1966. 275 с.
3. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. Москва : Наука, 1987. 598 с.
4. Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М. Обобщенно-обратные операторы и нетеровые краевые задачи. Інститут математики Національної Академії наук. Київ, 1995. Т. 13. 320 с.
5. Бойчук А. А., Чуйко С. М. Лекции по теории линейных краевых задач: учебное пособие. Славянск, 2005. 52 с.
6. Івасишен С. Д., Лавренчук В. П., Настасієв П. П., Дрінь І. І. Диференціальні рівняння: методи та застосування: навчальний посібник. Чернівці, 2004. 288 с.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва : Наука, 1971. 584 с.
8. Кривошея С. А., Шовкопляс Т. В. Необхідна умова розв'язності нетерової імпульсної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь другого порядку // *Вісник Київського нац. ун-ту. Серія Фіз.-мат. науки*. 2003. № 1. С. 86–95.
9. Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики. Москва : АСТ Астрель, 2001. 656 с.
10. Ляшко І. І., Боярчук О. К., Гай Я. Г., Калайда О. Ф. Диференціальні рівняння. Київ : Вища Школа, 1981. 504 с.
11. Маринець В. В., Рего В. Л., Маринець К. В. Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь: навчальний посібник. Ужгород: УжНУ, Говерла, 2013. 196 с.

12. Маринець К. В. Про дослідження крайових задач з нелінійними граничними умовами // *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика*. 2011. №1. С. 79-92.
13. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. Москва : Наука, 1969. 526 с.
14. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва : Наука, 1970. 296 с.
15. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Санкт-Петербург : Мифрил. Гл. ред. физ. мат. лит., 1996. Т. 1. 416 с.
16. Пономарёв К. К. Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач. Москва : Учпедгиз, 1962. 184 с.
17. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва : Наука, 1974. 331 с.
18. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння: підручник. Київ : Либідь, 2003. 600 с.
19. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. Київ : Вища школа, 1994. 454 с.
20. Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. Київ : Вища школа, 2000. 78 с.
21. Самойленко А. М., Ронто Н. И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Киев : Наукова думка, 1992. 280 с.
22. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Москва : Наука, 1974. Т. 2. 656 с., 1981. Т. 4. 552 с.
23. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. Москва : Наука, 1985. 232 с.
24. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. Москва : Издательство иностранной литературы, 1962. 352 с.
25. Треногин В. А. Функциональный анализ: підручник. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 488 с.

26. Шовкопляс Т. В. Необхідні та достатні умови існування розв'язку крайової задачі // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. Сборник научных трудов. Киев : Институт математики НАН Украины, 1999. С. 280-282.