**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**Кафедра фундаментальної математики**

# КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«РОЗВ'ЯЗАННЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО СИНГУЛЯРНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ НА ЗАМКНЕНОМУ КОНТУРІ»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1118- з

за спеціальністю 111 математика

(шифр і назва напряму підготовки)

освітньої програми математика

Т.Ю. Бабак

(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної математики, доцент к.ф.-м.н. Д'яченко Н.М.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент старший викладач кафедри загальної математики, к.ф.-м.н. Гречнєва М.О.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2020

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач кафедри
фундаментальної математики,
д.т.н., доцент

________________ Гребенюк С.М.

(підпис)

« 31 » травня 2019 р.

# З А В Д А Н Н Я

## НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Бабак Тетяни Юріївни

(прізвище, ім’я та по батькові)

1. Тема роботи Розв’язання характеристичного сингулярного інтегрального рівняння на замкненому контурі

керівник роботи Д’яченко Наталія Миколаївна, к.ф.-м.н., доцент

(прізвище, ім’я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 29 » травня 2019 року № 812-с

2. Строк подання студентом роботи 09 грудня 2019 р.

3. Вихідні дані до роботи Теоретичні відомості щодо характеристичних сингулярних інтегральних рівнянь, перелік задач до розв’язання

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити) Вивчити теоретичні відомості щодо розв’язання характеристичних сингулярних інтегральних рівнянь методом зведення їх до крайових задач Рімана на замкненому контурі; розв’язати конкретні приклади

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов’язкових креслень) Презентація

6. Консультанти розділів роботи

| Розділ | Прізвище, ініціали та посада консультанта | Підпис, дата | |
|---|---|---|---|
| | | завдання видав | завдання прийняв |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

7. Дата видачі завдання 31 травня 2019

## К А Л Е Н Д А Р Н И Й   П Л А Н

| № з/п | Назва етапів дипломної роботи | Строк виконання етапів роботи | Примітка |
|---|---|---|---|
| 1. | Розробка плану роботи. | Вересень 2019 | Виконано |
| | Збір вихідних даних | | |
| | | | |
| 2. | Обробка методичних та теоретичних | Жовтень 2019 | Виконано |
| | джерел | | |
| | | | |
| 3. | Розробка першого і другого розділу. | Жовтень 2019 | Виконано |
| | | | |
| 4. | Розробка третього розділу. | Листопад 2019 | Виконано |
| | | | |
| 5. | Оформлення і нормоконтроль | Грудень 2019 | Виконано |
| | кваліфікаційної роботи. | | |
| | | | |
| 6. | Розробка презентації для захисту. | Грудень 2019 | Виконано |
| | | | |
| 7. | Попередній захист кваліфікаційної | 09 грудня 2019 | Виконано |
| | роботи. | | |
| | | | |
| 8. | Захист кваліфікаційної роботи. | 09 січеня 2020 | |

Студент ____________________ Т.Ю. Бабак
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ____________________ Н.М. Д'яченко
(підпис) (ініціали та прізвище)

**Нормоконтроль пройдено**

Нормоконтролер ____________________ І.Г. Ткаченко
(підпис) (ініціали та прізвище)

# РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Розв'язання характеристичного сингулярного інтегрального рівняння на замкненому контурі»: 59 с., 8 рис., 15джерел.

ІНТЕГРАЛ ТИПУ КОШІ, КРАЙОВА ЗАДАЧА РІМАНА ТЕОРІЇ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ, СИНГУЛЯРНИЙ ІНТЕГРАЛ, СИНГУЛЯРНЕ (ОСОБЛИВЕ) ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ, ХАРАКТЕРИСТИЧНЕ СИНГУЛЯРНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ.

Об'єкт дослідження – характеристичні сингулярні інтегральні рівняння і крайові задачі теорії аналітичних функцій, до яких вони зводяться.

Мета дослідження – вивчити теоретичні відомості щодо розв'язання характеристичних сингулярних інтегральних рівнянь методом зведення їх до крайових задач Рімана; розв'язати конкретні приклади для рівнянь на зімкненому контурі і на дійсній осі.

Метод дослідження – зведення характеристичних сингулярних інтегральних рівнянь до крайових задач Рімана, метод Гахова розв'язання крайових задач Рімана.

У роботі вивчено основні поняття, пов'язані з характеристичними сингулярними інтегральними рівняннями. Викладено метод Гахова Ф.Д. [7] розв'язання рівнянь такого типу зведенням їх до крайових задач Рімана. Наведено приклади розв'язання характеристичних сингулярних інтегральних рівнянь на замкненому контурі та на дійсній осі, деякі із запропонованих в підручнику Гахова Ф.Д. [7], а деякі – авторські.

**SUMMARY**

Master’s Qualifying Thesis «Solving of the Characteristic Singular Integral Equation on a Closed Contour»: 59 pages, 8 figures, 15 veferences.

AN INTEGRAL OF CAUCHY TYPE, RIEMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE THEORY OF ANALYTICAL FUNCTIONS, A SINGULAR INTEGRAL, A SINGULAR INTEGRAL EQUATION, A CHARACTERISTIC SINGULAR INTEGRAL EQUATION.

The object of the study is the characteristic singular integral equations and the boundary value problems of the theory of analytic functions to which they are reduced.

The aim of the study is to study theoretical information about solving characteristic singular integral equations by reducing them to Riemann boundary problems; to solve some examples of the equations for closed contour and real axis.

The method of research is the reduction of the characteristic singular integral equations to the Riemann boundary-value problems, the Gakhov method for solving of the Riemann boundary-value problems.

The basic concepts related to the characteristic singular integral equations are studied. The F. Gakhov method [7] for solving equations of this type by reducing them to Riemann boundary-value problems. The examples of solving characteristic singular integral equations on a closed circuit and on a real axis are presented, some of them are proposed in the F. Gakhov textbook [7], and some are author's.

# ЗМІСТ

# ВСТУП

Сингулярними інтегральними рівняннями моделюються деякі задачі математичної фізики, теорії пружності, аеродинаміці, та дифракції хвиль. Таке практичне застосування є однією із причин великого інтересу до інтегральних рівнянь такого типу. В роботі розглянуто характеристичні сингулярні інтегральні рівняння. Основним методом їх розв’язання є зведення цих рівнянь до крайових задач теорії аналітичних функцій. Такі вчені, як Гахов Ф.Д. [7], Волков І.К. [5], Александров В.М. [1], Конторович М.І. [8] займалися розв’язанням задач теорії аналітичних функцій і звідних до них.

Найбільш широкий огляд методів розв’язання крайових задач теорії аналітичних функцій наведено в монографії Гахова Ф.Д. [7]. Окремі випадки таких методів розглянуто Кулієвим В.Д. [9], Літвінчуком Г.С. [13], Лаврєнт’євим М.А., Шабатом Б.В. [11]. Безпосереднє розв’язання крайових задач ТАФ призводить до необхідності обчислення інтегралів типу Коші та сингулярних інтегралів з ядром Коші, методика обчислення яких містяться в роботах Ганделя Ю.В. [6].

У теперішній час теорія крайових задач продовжує розвиватися в роботах Бабаєва А.А., Салаєва В.В. [2], Kutlu K. [10], Левінский С.В. [12]. Плакси С.А., Васильєвої Ю.В. [3].

Дослідженням сингулярних інтегральних рівнянь присвячено роботи таких вчених як Плакса С.А., Васильєва Ю.В. (2006) [3], Кудявіна Ю.В. (2008) [15].

До особливих (сингулярних) інтегральних рівнянь відносять інтегральні рівняння, що виражаються сингулярним інтегралом з ядром Коші. Окремим випадком інтегральних рівнянь є характеристичні. Їх розв’язок можна знайти в замкнутому вигляді зводячи їх до крайових задач

Рімана теорії аналітичних функцій так, як це запропоновано Гаховим Ф.Д. [7].

Гаховим Ф.Д. [7] запропоновано для самостійного розв’язання ряд характеристичних сингулярних інтегральних рівнянь, які зводяться до крайових задач на однозв’язній області. Розв’язання деяких із цих задач буде розглянуто в роботі.

Теоретичні аспекти щодо розв’язання інтегральних рівнянь такого типу передбачають можливість дослідження інтегральних рівнянь, що зводяться до задач Рімана на замкненому контурі (дійсній осі). В роботі розв’язано приклади таких рівнянь, деякі з яких є авторськими.

# 1 ВІДОМІ ПОНЯТТЯ ТА ТВЕРДЖЕННЯ, ЩО ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ В РОБОТІ

## 1.1 Функції, які задовольняють умові Гельдера. Поняття та властивості індексу функції

Розглянемо $\gamma$ – гладкий контур і $\varphi(t)$ – функція, що задана в точках контура $\gamma$. Говорять, що функція $\varphi(t)$ задовольняє на контурі $\gamma$ умову Гельдера, [7], якщо можна знайти такі додатні сталі $A$ та $\lambda$, що для будь-яких двох точок $t_1$ і $t_2$ контуру $\gamma$ виконується нерівність

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)| \le A|t_1-t_2|^{\lambda}, \tag{1.1}$$

де $A$ називається сталою Гельдера, а $\lambda$ – показником Гельдера.

Відомими є властивості [7]:

1) при $\lambda > 1$ функція $\varphi(t)$ є сталою на контурі $\gamma$. Тому будемо вважати, що $0 \le \lambda \le 1$. Якщо $\lambda = 1$, то умова Гельдера збігається з умовою Ліпшиця;

2) функція $\varphi(t)$ на $\gamma$, що задовольняє умову Гельдера, неперервна на контурі $\gamma$;

3) якщо $\lambda < \lambda_1$ і $\varphi(t) \in H_{\lambda_1}(\gamma)$, то $\varphi(t) \in H_{\lambda}(\gamma)$, тобто $H_{\lambda_1}(\gamma) \subset H_{\lambda}(\gamma)$.

4) якщо функції $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ задовольняють умову Гельдера відповідно з показниками $\lambda_1, \lambda_2$, то їхня сума, різниця, добуток, а також частка за умови, що знаменник не перетворюється в нуль, задовольняють умову Гельдера з показником $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$.

Нехай $\gamma$ – гладкий замкнений контур і $G(t)$ – задана на ньому неперервна функція, яка не перетворюється в нуль. Згідно з [1] індексом $\kappa$

функції $G(t)$ відносно контуру $\gamma$ називається поділений на $2\pi$ приріст її аргументу при обході кривої $\gamma$ в додатному напрямі:

$$\kappa = IndG(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\arg G(t)\right]\Big|_{\gamma} . \tag{1.2}$$

Відомими є такі властивості індексу функції [7]:

1) якщо $G(t)$ є крайові значення функції, аналітичної всередині або зовні контура, то індекс її дорівнює числу нулів всередині контуру $\gamma$ або відповідно числу нулів зовні контура $\gamma$, взятому зі знаком «–»;

2) якщо функція $G(t)$ аналітична всередині контуру $\gamma$, за винятком скінченного числа точок, де вона може мати плюси, то число нулів потрібно замінити на різницю числа нулів і полюсів. При цьому нулі і полюси враховуються стільки разів, яка у них кратність.

## 1.2 Інтеграл типу Коші на контурі. Сингулярний криволінійний інтеграл

Нехай $\gamma$ – деякий гладкий замкнений контур на площині комплексної змінної $z$. Область, яка лежить всередині контуру $\gamma$, будемо називати внутрішньою і позначати $D^{+}$, а область, яка лежить зовні, будемо називати зовнішньою і позначати $D^{-}$.

Якщо функція [7] $f(z)$ – функція, аналітична в $D^{+}$ і неперервна в $D^{+} \cup \gamma$, то за формулою Коші

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(z), z \in D^{+}; \\ 0, z \in D^{-}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Якщо ж $f(z)$ аналітична в області $D^{-}$ і неперервна в $D^{-} \cup \gamma$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(\infty), z \in D^{+}; \\ -f(z) + f(\infty), z \in D^{-}. \end{cases} \tag{1.4}$$

За додатній напрямок обходу контуру $\gamma$ будемо приймати той, при якому область $D^{+}$ залишається зліва. Інтеграл, який стоїть зліва в формулах (1.3),(1.4), називається інтегралом Коші.

Нехай [7] тепер $\gamma$ – гладкий замкнений або незамкнений контур, цілком розташований в скінченній частині площини, а $\varphi(\tau)$ – неперервна функція точок контуру $\gamma$. Тоді інтеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau, \tag{1.5}$$

побудований так само, як і інтеграл Коші, називається інтегралом типу Коші. Функцію $\varphi(\tau)$ називають його щільністю, а $\dfrac{1}{\tau - z}$ – ядром.

Інтеграл типу Коші представляє собою функцію, аналітичну на всій комплексній площині, за винятком точок контуру $\gamma$ [7]. Відомо [7], що $\Phi^{-}(\infty) = 0.$

Тепер розглянемо сингулярний криволінійний інтеграл. Нехай $\gamma$ – гладкий контур, а $t, \tau$ – його точки. Розглянемо особливий криволінійний інтеграл

$$\int_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau\,. \tag{1.6}$$

Проведемо з точки $t$ контуру $\gamma$ як із центру коло радіуса $\rho$, і нехай $t_1, t_2$ – точки перетину цього кола з кривою $\gamma$. Будемо вважати, що радіус $\rho$ настільки малий, що побудоване коло не має інших точок перетину з кривою $\gamma$. Позначимо частину контуру $\gamma$, яка вирізається колом, через $l$ і візьмемо інтеграл вздовж дуги, що залишається. Тоді інтеграл $\int\limits_{\gamma \backslash l} \frac{\phi(\tau)}{\tau - z} d\tau$ є вже власним [7]. Границя інтеграла $\int\limits_{\gamma / l} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$ при $\rho \to 0$ називається головним значенням особливого інтеграла (1.6). Якщо ця границя існує, говорять, що особливий інтеграл (1.6) існує в розумінні головного значення за Коші, а сам інтеграл називають сингулярним інтегралом Коші.

Відомо, що [7, 13] сингулярний інтеграл (1.6) для функції $\varphi(\tau)$, яка задовольняє умову Гельдера, існує в розумінні головного значення за Коші.

Для обчислення сингулярних інтегралів, застосовують формули Сохоцького. Припускається що $\gamma$ гладкий замкнений контур, $\varphi(\tau)$ – функція, що задовольняє умову Гельдера на $\gamma$. Мають місце формули [7].

$$\Phi^{+}(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau; \tag{1.7}$$

$$\Phi^{-}(t) = -\frac{1}{2}\phi(t) + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau. \tag{1.8}$$

Формули (1.7), (1.8) отримані вперше в 1873 р. російським математиком Ю.В. Сохоцьким [7, 10, 13] називаються формулами Сохоцького. При цьому формулам (1.7), (1.8) можна надати іншого вигляду:

$$\Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t) = \varphi(t); \tag{1.9}$$

$$\Phi^{+}(t) + \Phi^{-}(t) = \frac{1}{\pi i} \cdot \oint\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau. \tag{1.10}$$

Формули Сохоцького справедливі і для розімкненого гладкого контуру, вони мають відповідно вигляд (1.7) – (1.10), але під $\Phi^{+}(t)$ і $\Phi^{-}(t)$ розуміємо крайове значення $\Phi(z)$, якщо $z \to t$ відповідно зліва або справа контуру $\gamma$. Окрім того, формули Сохоцького встановлені для гладких контурів, тобто в точках гладкості контура $\gamma$. Для кутових точок вони також будуть мати місце, але набувають дещо іншого вигляду.

### 1.3 Інтеграл типу Коші і сингулярний інтеграл вздовж дійсної осі

Нехай нам дана комплексна функція $\varphi(\tau)$ дійсної змінної $\tau$, яка задовольняє умову Гельдера при всіх скінченних $\tau$ і прямує до певної границі $\varphi(\infty)$ при $\tau \to \pm\infty$ [7, 13]. При великих значеннях $\tau$ виконується нерівність

$$\left|\varphi(\tau) - \varphi(\infty)\right| \le \frac{A}{\tau^{\mu}}, \qquad \mu > 0, A > 0. \tag{1.11}$$

Розглянемо інтеграл типу Коші

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \tag{1.12}$$

де $z$ не лежить на дійсній вісі.

Розглянемо функцію $\varphi(z)$, що є аналітичною в верхній півплощині $D^{+} = \{z \in C : \operatorname{Im} z > 0\}$ і є неперервною на її замиканні, а при $\tau \to \pm\infty$ задовольняє умову (1.11), то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} \varphi(z) - \dfrac{\varphi(\infty)}{2} \text{ при } z \in D^{+}, \\ -\dfrac{\varphi(\infty)}{2} \text{ при } z \in D^{-}. \end{cases} \tag{1.13}$$

Розглянемо функцію $\varphi(z)$, що є аналітичною в нижній півплощині $D^{-} = \{z \in C : \operatorname{Im} z < 0\}$ і є неперервною на її замиканні, а при $\tau \to \pm\infty$ задовольняє умову (1.11), то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} \dfrac{\varphi(\infty)}{2} \text{ при } z \in D^{+}, \\ \dfrac{\varphi(\infty)}{2} - \varphi(z) \text{ при } z \in D^{-}. \end{cases} \tag{1.14}$$

Нехай точка $z = t$ розміщена на дійсній осі. Тоді сингулярний інтеграл

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \tag{1.15}$$

можна записати таким чином

$$\Phi(t) = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-N}^{t-\varepsilon}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \int_{t+\varepsilon}^{N}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau\right\}.$$

Можна зробити висновок, що і в цьому випадку справедливі формули Сохоцького

$$\Phi^{+}(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau, \tag{1.16}$$

$$\Phi^{-}(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau. \qquad (1.17)$$

Умова (1.11) є достатньою для збіжності інтеграла (1.15).

## 1.4 Крайова задача Рімана на замкненому контурі

Спочатку розглянемо крайову задачу Рімана на замкненому контурі. Нехай $\gamma$ – простий гладкий замкнений контур, який розбиває комплексну площину на дві області: внутрішню $D^{+}$ і зовнішню $D^{-}$. Без обмеження загальності міркувань будемо вважати, що точка $z_0 \in D^{+}$. Нехай на $\gamma$ задані функції $G(t)$ і $g(t)$, які задовольняють умову Гельдера, причому $G(t) \neq 0$.

Задача Рімана [4]: знайти функції $\Phi^{+}(z)$ і $\Phi^{-}(z)$, аналітичні відповідно в областях $D^{+}$ і $D^{-}$, які задовольняють на контурі $\gamma$ крайову умову

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t), \;\; t \in \gamma, \qquad (1.18)$$

де $\Phi^{\pm}(t)$ – крайові значення функцій $\Phi^{\pm}(z)$ із областей $D^{\pm}$ відповідно. При цьому функція $G(t)$ називається коефіцієнтом задачі Рімана, а функція $g(t)$ – її вільним членом. Якщо $g(t) \equiv 0$, задача Рімана називається однорідною.

Якщо $G(t) \equiv 1$ , то крайову задачу називають задачею «про стрибок». Задача (1.18) набуває вигляду

$$\Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t) = g(t), t \in \gamma, \qquad (1.19)$$

Враховуючи властивості інтеграла типу Коші [4] і формули Сохоцького, розв’язку задачі (1.19) можна надати вигляду

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{g(\tau)}{\tau-z}d\tau. \qquad (1.20)$$

За умови $\Phi^{-}(\infty)=0$ задача (1.19) має єдиний розв’язок (1.20). Якщо відкинути додаткову умову $\Phi^{-}(\infty)=0$, то розв’язок задачі (1.19), буде визначатися формулою

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{g(\tau)}{\tau-z}d\tau+const. \qquad (1.21)$$

Тепер розглядається однорідна задача, тобто $g(t)\equiv 0$, тоді крайова умова перепишеться у вигляді

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t), t\in\gamma. \qquad (1.22)$$

Нехай $\kappa=IndG(t)$. Будемо вважати спочатку, що $\kappa=0$. Позначимо [4]:

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\ln G(\tau)}{\tau-z}d\tau. \qquad (1.23)$$

Тоді розв’язками задачі (1.22) за умови $\Phi^{-}(\infty)=1$, будуть функції [7]

$$\Phi^{+}(z)=e^{\Gamma^{+}(z)}, \Phi^{-}(z)=e^{\Gamma^{-}(z)}. \qquad (1.24)$$

Якщо умова $\Phi^{-}(\infty)=1$ відсутня, то розв'язок задачі (1.22) буде мати вигляд [7]

$$\Phi^{+}(z)=Ae^{\Gamma^{+}(z)},\ \Phi^{-}(z)=Ae^{\Gamma^{-}(z)}, \tag{1.25}$$

де $A$ – довільна стала.

Нехай тепер $\kappa\neq 0$. Якщо $k>0$, то розв'язок задачі (1.22) має вигляд [7]

$$\Phi^{+}(z)=\mathrm{X}^{+}(z)P_{\kappa}(z),\ \Phi^{-}(z)=(z-z_0)^{-\kappa}\mathrm{X}^{-}(z)P_{\kappa}(z), \tag{1.26}$$

де

$$\mathrm{X}^{+}(z)=e^{\Gamma^{+}(z)},\ \mathrm{X}^{-}(z)=e^{\Gamma^{-}(z)}, \tag{1.27}$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\ln[(\tau-z_0)^{-\kappa}G(\tau)]}{\tau-z}d\tau. \tag{1.28}$$

якщо $k<0$, то

$$\Phi^{+}(z)=\Phi^{-}(z)\equiv 0\ -$$

задача (1.22) має лише тривіальний розв'язок.

Розглянемо неоднорідну задачу (1.18). У випадку, коли $k\geq 0$, розв'язок неоднорідної задачі Рімана подається формулами [7]

$$\Phi^{+}(z)=\mathrm{X}^{+}(z)\left[\Psi^{+}(z)+P_{\kappa}(z)\right], \tag{1.29}$$

$$\Phi^{-}(z)=(z-z_0)^{-\kappa}\mathrm{X}^{-}(z)\left[\Psi^{-}(z)+P_{\kappa}(z)\right], \tag{1.30}$$

де $\mathrm{X}^{\pm}(z)$ визначаються за формулами (1.27), (1.28), а

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{g(\tau)}{\mathrm{X}^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}. \tag{1.31}$$

Якщо $k<0$, то задачу (1.18) можна розв’язати за допомогою формул [7]

$$\Phi^{+}(z)=X^{+}(z)\Psi^{+}(z), \tag{1.32}$$

$$\Phi^{-}(z)=(z-z_0)^{-\kappa}X^{-}(z)\Psi^{-}(z). \tag{1.33}$$

При $k=-1$ задача (1.18) має єдиний розв'язок, що визначається співвідношеннями (1.32), (1.33). Якщо ж $k<-1$, то неоднорідна задача у загальному випадку не має розв’язку, однак, при виконанні умов [4]:

$$\oint_{\gamma}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\tau^{k-1}d\tau=0, k=1,2,...,-k-1. \tag{1.34}$$

**1.5 Задача Рімана на дійсній осі**

Нехай нам дана $\gamma=\mathbb{R}$ – дійсна вісь. На $\gamma$ задана функція $G(t)$, $g(t)$, які задовольняють умову Гельдера, причому $G(t)\neq 0$.

Задача Рімана [7] в цьому випадку полягає в тому, щоб знайти функції $\Phi^{+}(z)$ і $\Phi^{-}(z)$, аналітичні відповідно у верхній та нижній півплощинах, граничні значення $\Phi^{+}(t)$ і $\Phi^{-}(t)$ яких на $\gamma$ задовольняють крайову умову

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t)+g(t), -\infty<t<\infty. \tag{1.35}$$

Розв’язання задачі Рімана проводиться за тією ж схемою, що і у випадку зімкненого контура. Тільки тут роль функції $(t-z_0)^n$ грає функція $\left(\frac{at-bi}{ct+di}\right)^n$, оскільки $Ind\left(\frac{at-bi}{ct+di}\right)^n=n,$ де $a,b$ і $c,d$ - пари дійсних чисел одного знаку.

Розглянемо випадок, коли $G(t) \equiv 1$, тобто задачу «про стрибок»:

$$\Phi^{+}(t) = \Phi^{-}(t) + g(t), -\infty < t < \infty.$$

Її розв'язок визначається за формулами Сохоцького (1.14), (1.15) і у випадку, коли $\Phi^{+}(\infty) = 0$ має вигляд

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{\tau - t} d\tau ,$$

а у випадку, коли умова $\Phi^{+}(\infty) = 0$ відсутня, – вигляд

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{\tau - t} d\tau + C .$$

Розглянемо однорідну задачу Рімана, тобто покладемо $g(t) \equiv 0$:

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t), -\infty < t < \infty. \tag{1.36}$$

Користуючись формулою

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau, \tag{1.37}$$

розв'язок однорідної задачі Рімана у випадку нульового індексу запишемо у вигляді [7]:

$$\Phi(z) = e^{\Gamma(z)} \tag{1.38}$$

у випадку коли $\Phi(\infty)=1$. Якщо умова $\Phi(\infty)=1$ відсутня, тоді розв'язок набуває вигляду

$$\Phi(z) = Ae^{\Gamma(z)}.$$

Нехай $\kappa = IndG(t) \neq 0$. Випишемо допоміжні функції [7]:

$$\mathrm{X}^{+}(z) = e^{\Gamma^{+}(z)},\ \mathrm{X}^{-}(z) = e^{\Gamma^{-}(z)}, \tag{1.39}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\left[\left(\frac{a\tau - bi}{c\tau + di}\right)^{-\kappa} G(t)\right]\frac{d\tau}{\tau - z}. \tag{1.40}$$

Тоді за умови $\Phi(\infty)=0,$ розв'язок набуде вигляду [7]:

$$\Phi^{+}(z) = \mathrm{X}^{+}(z)\frac{P_{\kappa-1}(z)}{(cz+di)^{\kappa}}, \tag{1.41}$$

$$\Phi^{-}(z) = \mathrm{X}^{-}(z)\frac{P_{\kappa-1}(z)}{(az-bi)^{\kappa}}. \tag{1.42}$$

Тут $P_{\kappa-1}(z)$ – многочлен степеня $\kappa-1$. Якщо $\kappa=0$, то $P_{\kappa-1}(z)\equiv 0$.

Розглянемо неоднорідну задачу Рімана (1.35), тоді її крайову умову можна подати у вигляді

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{\mathrm{X}^{+}(t)} = \left(\frac{at-bi}{ct+di}\right)^{\kappa}\frac{\Phi^{-}(t)}{\mathrm{X}^{-}(t)} + \frac{g(t)}{\mathrm{X}^{+}(t)}, \qquad -\infty < t < \infty. \tag{1.43}$$

Враховуючи, що функція $\dfrac{g(t)}{\mathrm{X}^{+}(t)}$ задовольняє на $\gamma$ умову Гельдера,

отримуємо:

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)(\tau-z)}d\tau. \tag{1.44}$$

Якщо $\kappa \geq 0$, тоді

$$\Phi^{+}(z)=X^{+}(z)\left[\Psi^{+}(z)+\frac{P_{\kappa-1}(z)}{(cz+di)^{\kappa}}\right], \tag{1.45}$$

$$\Phi^{-}(z)=\left(\frac{cz+di}{az-bi}\right)^{\kappa}X^{-}(z)\left[\Psi^{-}(z)+\frac{P_{\kappa-1}(z)}{(cz+di)^{\kappa}}\right]. \tag{1.46}$$

І якщо розглянути випадок $\kappa < 0$, тоді

$$\Phi^{+}(z)=X^{+}(z)\left[\Psi^{+}(z)+C\right], \tag{1.47}$$

$$\Phi^{-}(z)=\left(\frac{cz+di}{az-bi}\right)^{\kappa}X^{-}(z)\left[\Psi^{-}(z)+C\right]. \tag{1.48}$$

Якщо $\kappa=-1$, то неоднорідна задача Рімана має єдиний розв'язок вигляду (1.47 і 1.48). Якщо $\kappa<-1$, то взагалі кажучи, вона нерозв’язна. Умови, за яких неоднорідна задача Рімана буде розв’язною мають вигляд Гахов Ф.Д. [7]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)(c\tau+di)^{k+1}}d\tau=0,\ k=1,2,...,-\kappa-1; \tag{1.49}$$

$$C=-\Psi^{-}\left(-\frac{d}{c}i\right).$$

Ми розглянули випадок обмежених на нескінченності розв’язків задачі Рімана. Якщо вимагати, щоб $\Phi^{+}(\infty)=\Phi^{-}(\infty)=0$, це позначатиме виконання умови $g(\infty)=0$. Побудова розв’язків задачі Рімана буде проводитись за викладеною схемою. Однак замість многочлена $P_{\kappa}(z)$ необхідно взяти многочлен $P_{\kappa-1}(z)$.

# 2 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ЩОДО ОСОБЛИВИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

## 2.1 Особливе інтегральне рівняння

У цьому розділі наведемо відомі поняття та факти в термінології Гахова Ф.Д. [7]. Якщо в лінійному інтегральному рівнянні

$$\varphi(t) + \int_L \mathrm{K}(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t)$$

ядро має вигляд

$$\mathrm{K}(t,\tau) = \frac{\mathrm{M}(t,\tau)}{(\tau - t)^{\alpha}} \qquad (0 \le \alpha < 1),$$

де $\mathrm{M}(t,\tau)$ – неперервна функція , тоді, як відомо, за допомогою ітерації його можна привести до інтегрального рівняння з неперервним ядром. Таке рівняння має всі властивості рівняння Фретгольма і називається квазіфредгольмовим або фредгольмовим.

Якщо $\alpha = 1$, тоді інтеграл стає особливим (сингулярним) й наведений спосіб приведення рівняння до фредгольмового втрачає силу. Будемо розглядати рівняння з ядром Коші [7] типу

$$\mathrm{K}_{\varphi} \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mathrm{M}(t,\tau)}{\tau - t}\varphi(\tau)d\tau = f(t). \qquad (2.1)$$

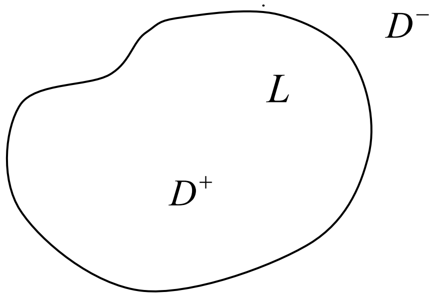


Рисунок 1.1

Інтеграл по контуру $L$, у загальному випадку, що складається з $m+1$ зімкнутих гладких кривих $L = L_0 + L_1 + ... + L_m$ зображено на рисунку 1.1

Будемо вважати, що задані на $L$ функції $a(t), f(t), \mathrm{M}(t,\tau)$ задовольняють на цьому контурі умову Гельдера [7].

Зробивши над ядром перетворення

$$\frac{\mathrm{M}(t,\tau)}{\tau - t} = \frac{\mathrm{M}(t,\tau) - \mathrm{M}(t,t)}{\tau - t} + \frac{\mathrm{M}(t,t)}{\tau - t}$$

і позначивши

$$\mathrm{M}(t,t) = b(t), \qquad \frac{1}{\pi i}\frac{\mathrm{M}(t,\tau) - \mathrm{M}(t,t)}{\tau - t} = k(t,\tau), \tag{2.2}$$

запишемо рівняння (1.1) у вигляді

$$\mathrm{K}_{\varphi} \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int\limits_L k(t,\tau)\varphi(\tau) d\tau = f(t). \tag{2.3}$$

З формул (2.2) випливає [7], що функція $b(t)$ задовольняє умову Гельдера на всьому контурі $L$, а $k(t,\tau)$ усюди, крім точок $\tau = t$, де для неї справедлива оцінка

$$\left| k(t,\tau) \right| < \frac{A}{\left| \tau - t \right|^{1-\lambda}} \qquad (0 < \lambda \le 1).$$

Рівняння (1.3) будемо називати повним особливим інтегральним рівнянням [7]. Якщо $f(t) \neq 0$, будемо мати неоднорідне, в противному випадку – однорідне рівняння.

Вираз

$$\mathrm{K}^{\circ}{}_{\varphi} \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \tag{2.4}$$

називається характеристичною, а член $\int_{L} k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau$ – регулярною частиною. Рівняння

$$\mathrm{K}^{\circ}{}_{\varphi} \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = f(t) \tag{2.5}$$

будемо називати характеристичним рівнянням, а оператор $\mathrm{K}^{\circ}{}_{\varphi}$ – характеристичним оператором [7].

Введемо позначення для регулярної частини рівняння

$$k\varphi = \int_{L} k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau, \tag{2.6}$$

тоді запишемо повне рівняння у вигляді

$$K_{\varphi} \equiv K_{\varphi}^{\circ} + k\varphi = f(t).$$

Рівняння

$$K''_{\psi} \equiv \alpha(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{b(t)\,\psi(t)}{\tau - t}\,d\tau + \int_{L} k(\tau,t)\,\psi(t)\,d\tau = 0, \tag{2.3'}$$

отримане з однорідного рівняння $\mathrm{K}_{\varphi} = 0$ перестановкою змінних в ядрі, називається союзним або транспонованим. Оператор $\mathrm{K}'$ називається союзним оператору $\mathrm{K}$ [7].

Зокрема, рівняння

$$K_{\psi}^{o\,\prime} \equiv \alpha(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(t)\,\psi(t)}{\tau - t}\,d\tau = 0, \tag{2.5'}$$

буде рівнянням, союзним характеристичному рівнянню (2.5). Зауважимо, що оператор $\mathrm{K}^{\circ\prime}$, союзний характеристичному оператору $\mathrm{K}^{\circ}$, не збігається з оператором $\mathrm{K}'^{\circ}$, характеристичним для союзного [7]. Останній визначається формулою

$$K_{\psi}'^{o} \equiv \alpha(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(t)\,\psi(t)}{\tau - t}\,d\tau\,. \tag{2.7}$$

Далі будемо шукати розв'язок особливих рівнянь, що задовольняють умову Гельдера.

## 2.2 Зведення характеристичного інтегрального рівняння до крайової задачі Рімана

Розглянемо один із видів особливого (сингулярного) інтегрального рівняння, тобто характеристичне рівняння (2.5) [7]:

$$\mathrm{K}^{\circ}\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = f(t). \tag{2.8}$$

У цьому випадку рівняння можна привести до крайової задачі Рімана та розв'язати рівняння в замкнутій формі.

Введемо аналітичну функцію, задану інтегралом типу Коші, щільністю якого служить шуканий розв'язок характеристичного рівняння [7]

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau. \tag{2.9}$$

Згідно з формулами Сохоцького (1.9), (1.10)

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t),$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} dt = \Phi^+(t) + \Phi^-(t). \tag{2.10}$$

Підставляючи значення $\varphi(t)$, $\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} dt$ в рівняння (1.7) й розв'язуючи його відносно $\Phi^+(t)$, отримаємо, що аналітична функція $\Phi(z)$ є розв'язком крайової задачі Рімана

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \tag{2.11}$$

де

$$G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}, \qquad g(t) = \frac{f(t)}{a(t) + b(t)}. \tag{2.12}$$

У силу того, що шукана функція $\Phi(z)$ [7] подана інтегралом типу Коші, вона повинна задовольняти додаткову умову

$$\Phi^-(\infty) = 0. \tag{2.13}$$

# 3 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НА ЗАМКНЕНОМУ КОНТУРІ

**Приклад 3.1** Розв'язати характеристичне інтегральне рівняння

$$t(t-2)\varphi(t)+\frac{t^2-6t+8}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\frac{1}{t}$$

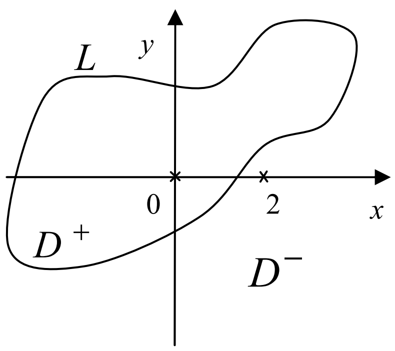


Рисунок 3.1

за таких припущень: $2\in D^-$, $0\in D^+$.

**Розв'язання.** Схематичне зображення даного контура наведено на рисунку 3.1. Знаходимо $G(t)$ та $g(t)$ за формулою (2.12). Для цього, виходячи із загального вигляду характеристичного рівняння (2.5), спочатку визначимо функції

$$a(t)=t(t-2),\quad b(t)=t^2-6t+8,$$

тоді для функції $G(t)$ маємо:

$$G(t)=\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)},$$

$$G(t)=\frac{t(t-2)-(t^2-6t+8)}{t(t-2)+(t^2-6t+8)}=\frac{t^2-2t-t^2+6t-8)}{t^2-2t+t^2-6t+8}=$$

$$=\frac{4t-8}{2t^2-8t+8}=\frac{4(t-2)}{2(t^2-4t+4)}=\frac{2(t-2)}{2(t-2)^2}=\frac{2}{t-2},$$

а для функції $g(t)$ –

,

$$g(t) = \frac{f(t)}{a(t)+b(t)},$$

$$g(t) = \frac{\frac{1}{t}}{t(t-2)+(t^2-6t+8)} = \frac{\frac{1}{t}}{t^2-2t+t^2-6t+8} == \frac{\frac{1}{t}}{2t^2-8t+8} = \frac{1}{2t(t-2)^2}.$$

Отже,

$$G(t) = \frac{2}{t-2}; \quad g(t) = \frac{1}{2t(t-2)^2}.$$

Таким чином, крайова умова набуває вигляду

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t),$$

$$\Phi^+(t) = \frac{2}{t-2}\Phi^-(t) + \frac{1}{2t(t-2)^2}, \; t \in \gamma.$$

Функція $G(z) = \frac{2}{z-2}$ не має нулів, тобто $N^+ = 0$. Знайдемо її полюси

$$z-2=0 \Rightarrow z=2 \in D^- \Rightarrow P^+ = 0.$$

Обчислимо індекс функції $G(t)$:

$$\kappa = N^+ - P^+ = 0,$$

$$\kappa = ind G(t) = 0.$$

Знайдемо функцію $\Gamma(z)$ за допомогою (1.28), поклавши $z_0 = 0$:

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln\left[\tau^{-\kappa}\cdot G(\tau)\right]}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln\left[\tau^{-0}\cdot\dfrac{2}{\tau-2}\right]}{\tau-z}d\tau.$$

Розглянемо функцію $f(z)=\ln\left(\dfrac{2}{z-2}\right)$. Її особлива точка $z=2\in D^{-}$, тому $f(z)$ аналітична в $D^{+}$, то згідно з формулою (1.4),

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau=\begin{cases} f(\infty), z\in D^{+};\\ -f(z)+f(\infty), z\in D^{-}.\end{cases}$$

Звідки

$$\Gamma(z)=\begin{cases}\ln\dfrac{2}{z-2}, z\in D^{+};\\ 0,\ z\in D^{-}.\end{cases}$$

Знайдемо функції $X^{\pm}(z)$, застосовуючи (1.27)

$$X^{+}(z)=e^{\Gamma^{+}(z)},\ X^{-}(z)=e^{\Gamma^{-}(z)},$$

$$X^{+}(z)=e^{\Gamma^{+}(z)}=\frac{2}{z-2};\ X^{-}(z)=e^{\Gamma^{-}(z)}=e^{0}=1.$$

Використовуючи формулу (1.31)

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_L\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z},$$

отримаємо:

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_L\frac{1}{2\tau(\tau-2)^2}\cdot\frac{\tau-2}{2}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Оскільки функція щільності останнього інтеграла типу Коші є сумою функції $f_1(z)=\frac{1}{8(z-2)}$, аналітичної в області $D^+$, і функції $f_2(z)=\frac{-1}{8z}$, аналітичної в $D^-$, то застосовуючи формули (1.3) і (1.4), обчисливо:

$$\Psi(z)=\begin{cases}\frac{1}{8(z-2)}, z\in D^+;\\ \frac{1}{8z}, z\in D^-.\end{cases}$$

Звідси одержимо функції $\Psi^+(z)$ та $\Psi^-(z)$:

$$\Psi^+(z)=\frac{1}{8(z-2)},\quad \Psi^-(z)=\frac{1}{8z}.$$

Тепер знайдемо $\Phi^{\pm}(z)$ за формулами (1.29), (1.30):

$$\Phi^+(z)=\mathrm{X}^+(z)\left[\Psi^+(z)+P_\kappa(z)\right],$$

$$\Phi^-(z)=(z-z_0)^{-\kappa}\mathrm{X}^-(z)\left[\Psi^-(z)+P_\kappa(z)\right],$$

з яких виведемо загальний розв’язок крайової задачі Рімана:

$$\Phi^+(z)=\frac{2}{z-2}\left[A+\frac{1}{8(z-2)}\right];$$

$$\Phi^-(z)=A+\frac{1}{8z}.$$

Оскільки $\Phi^{-}(\infty)=0$, то

$$\Phi^{-}(\infty)=A=0.$$

Оскільки функцій $\Phi^{+}(z)$ і $\Phi^{-}(z)$ є неперервними в точках $t\in\gamma$, то можна здійснити граничні переходи:

$$\Phi^{+}(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^{+}}}\Phi^{+}(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^{+}}}\left(\frac{2}{z-2}\left[0+\frac{1}{8(z-2)}\right];\right)=\frac{1}{4(t-1)^{2}},$$

$$\Phi^{-}(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^{+}}}\Phi^{-}(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^{+}}}\left(0+\frac{1}{8z}\right)=\frac{1}{8t}.$$

Згідно за формулами Сохоцького (2.10)

$$\varphi(t)=\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t),$$

тоді розв'язок особливого інтегрального рівняння набуде вигляду

$$\varphi(t)=\frac{1}{4(t-2)^{2}}-\frac{1}{8t}=\frac{2t-\left(t^{2}-4t+4\right)}{8t(t-2)^{2}}=\frac{2t-t^{2}+4t-4}{8t(t-2)^{2}}=\frac{-t^{2}+6t-4}{8t(t-2)^{2}}.$$

**Відповідь:** $\varphi(t)=\dfrac{-t^{2}+6t-4}{8t(t-2)^{2}}$.

**Приклад 3.2** Розв'язати інтегральне рівняння

$$\mathrm{K}^{\circ}{}_{\phi}\equiv(t^{2}+t-1)\phi(t)+\frac{t^{2}-t-1}{\pi i}\int_{L}\frac{\phi(\tau)}{\tau-t}d\tau=$$
$$=2\left(t^{3}-t+1+\frac{1}{t}\right),$$

за таких припущень: $\pm 1 \in D^{-}$, $0 \in D^{+}$ [7].

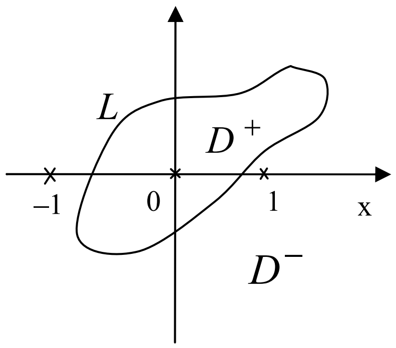


Рисунок 2.2

**Розв'язання.** Контур, що задовольняє задані припущення, наведено на рисунку 2.2. У даному прикладі, відповідно до (2.5),

$$a(t) = t^2 + t - 1,\ b(t) = t^2 - t - 1,$$
$$f(t) = 2\left(t^3 - t + 1 + \frac{1}{t}\right).$$

Знаходимо $G(t)$ та $g(t)$ за формулою (2.12).

$$G(t) = \frac{a(t) - 6(t)}{a(t) + 6(t)} = \frac{t^2 + t - 1 - \left(t^2 - t - 1\right)}{t^2 + t - 1 + t^2 - t - 1} = \frac{t^2 + t - 1 - t^2 + t + 1}{2t^2 - 2} = \frac{2t}{2t^2 - 2} = \frac{t}{t^2 - 1};$$

$$g(t)\frac{f(t)}{a(t) + b(t)} = \frac{2\left(t^3 - t + 1 + \frac{1}{t}\right)}{t^2 + t - 1 + t^2 - t - 1} = \frac{2\left(t^3 - t + 1 + \frac{1}{t}\right)}{2\left(t^2 - 1\right)} = \frac{t^3 - t + 1 + \frac{1}{t}}{t^2 - 1} =$$

$$= \frac{\frac{\left(t^4 - t^2\right) + (t + 1)}{t}}{t^2 - 1} = \frac{t^2\left(t^2 - 1\right) + (t + 1)}{t\left(t^2 - 1\right)} = \frac{(t + 1)\left(t^2(t - 1) + 1\right)}{t(t - 1)(t + 1)} = \frac{t^3 - t^2 + 1}{t^2 - t},$$

отже,

$$G(t) = \frac{t}{t^2 - 1}; \quad g(t) = \frac{t^3 - t^2 + 1}{t^2 - t}.$$

З цього випливає, що крайова умова (2.11) має вигляд

$$\Phi^{+}(t) = \frac{t}{t^2 - 1}\Phi^{-}(t) + \frac{t^3 - t^2 + 1}{t^2 - t}.$$

Обчислимо нулі функції $G(z)=\frac{z}{z^2-1}$. Оскільки $z=0\in D^+$, то $N^+=1$. Тепер знайдемо полюси:

$$z^2-1=0,$$
$$z_1=1\in D^-,\ z_2=-1\in D^-,$$

звідси $P^+=0$. Визначимо індекс функції $G(t)=\frac{t}{t^2-1}$:

$$\kappa=indG(t)=N^+-P^+=1.$$

Для знаходження функції $\Gamma(z)$ застосуємо формулу (1.28), обираючи $z_0=0$:

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln\left[\tau^{-\kappa}\cdot G(\tau)\right]}{\tau-z}d\tau.$$

Маємо

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln\left(\frac{1}{\tau^2-1}\right)}{\tau-z}d\tau.$$

Розглянемо функцію $f(z)=\ln\left(\frac{1}{z^2-1}\right)$. Її особливі точки $\pm1\in D^-$, тому $f(z)$ анвлітична в $D^+$, то для даного інтеграла типу Коші, згідно з формулою (1.3),

$$\Gamma(z)=\begin{cases}\ln\left(\frac{1}{z^2-1}\right), z\in D^+;\\ 0, z\in D^-.\end{cases}$$

Відповідно до формул (1.27) знайдемо функції $X^{\pm}(z)$:

$$\mathrm{X}^{+}(z) = e^{\Gamma^{+}(z)} = \frac{1}{z^2 - 1},$$
$$\mathrm{X}^{-}(z) = e^{\Gamma^{-}(z)} = e^{0} = 1.$$

Застосовуючи формулу (1.31), отримаємо:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_L \frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{(\tau^3 - \tau^2 + 1)(\tau^2 - 1)}{\tau^2 - \tau} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Функція щільності останнього інтеграла типу Коші є сумою функції $f_1(z) = (z^3 - z^2 + 1)(z + 1)$, аналітичної в області $D^{+}$, і функції $f_2(z) = -\frac{1}{z}$, аналітичної в $D^{-}$, тому згідно з (1.3) і (1.4) одержимо:

$$\Psi(z) = \begin{cases} z^3 - z + 1, z \in D^{+}; \\ \frac{1}{z}, z \in D^{-}. \end{cases}$$

Звідси

$$\Psi^{+}(z) = z^3 - z + 1, \quad \Psi^{-}(z) = \frac{1}{z}.$$

Шуканий розв’язок знаходимо, застосовуючи формулу (1.29), (1.30)

$$\Phi^{+}(z) = \mathrm{X}^{+}(z) \cdot \left[\mathrm{P}_{\kappa}(z) + \Psi^{+}(z)\right] = \frac{1}{z^2 - 1} \cdot \left[A \cdot z + B + z^3 - z + 1\right],$$
$$\Phi^{-}(z) = z^{-\kappa} \cdot \mathrm{X}^{-}(z) \cdot \left[\mathrm{P}_{\kappa}(z) + \Psi^{-}(z)\right] = \frac{1}{z} \cdot \left[A \cdot z + B - \frac{1}{z}\right],$$

де $C = B + 1$.

Розв'язок цієї крайової задачі задовольняє умову $\Phi^{-}(\infty) = 0$. З цього випливає, що $\grave{A} = 0$. Отже, розв'язок крайової задачі Рімана має вигляд [13]:

$$\Phi^{+}(z) = \frac{1}{z^2 - 1} \cdot \left[B + z^3 - z + 1\right] = \frac{C}{z^2 - 1} + z,$$
$$\Phi^{-}(z) = \frac{1}{z} \cdot \left[B - \frac{1}{z}\right] = \frac{C}{z} - \frac{z+1}{z^2}.$$

Внаслідок неперервності функцій $\Phi^{+}(z)$ і $\Phi^{-}(z)$ в точках $t \in \gamma$ матимемо:

$$\Phi^{+}(t) = \lim_{\substack{z \to t \\ z \in D^{+}}} \Phi^{+}(t) = \lim_{\substack{z \to t \\ z \in D^{+}}} \left(\frac{C}{z^2 - 1} + z\right) = \frac{C}{t^2 - 1} + t,$$

$$\Phi^{-}(t) = \lim_{\substack{z \to t \\ z \in D^{+}}} \Phi^{-}(t) = \lim_{\substack{z \to t \\ z \in D^{+}}} \left(\frac{C}{z} - \frac{z+1}{z^2}\right) = \frac{C}{t} - \frac{t+1}{t^2}.$$

Отже, згідно з формулою Сохоцького (2.10), розв'язком даного інтегрального рівняння буде функція

$$\varphi(t) = \Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t) = \frac{t^3 + t + 1}{t^2} + C \cdot \frac{1 + t - t^2}{t^3 - t}.$$

**Відповідь.** $\varphi(t) = \dfrac{t^3 + t + 1}{t^2} + C \cdot \dfrac{1 + t - t^2}{t^3 - t}.$

**Приклад 3.3** Розв'язати інтегральне рівняння

$$\mathrm{K}^{\circ}{}_{\varphi} \equiv (t^2 + t - 1)\varphi(t) + \frac{t^2 - t - 1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = 2\left(t^3 - t + 1 + \frac{1}{t}\right).$$

за таких припущень: $-1 \in D^{-}$, $0$ ³ $1 \in D^{+}$.

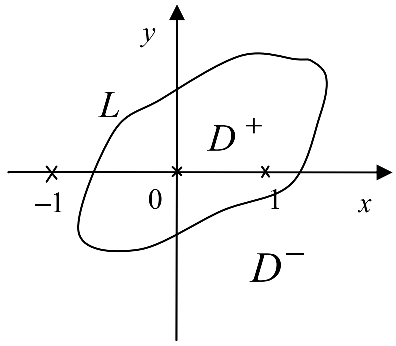


Рисунок 2.3

**Розв’язання.** На рисунку 2.3 наведено схематичне зображення контура, що задовольняє умову. Як було отримано в прикладі 3.2,

$$G(t) = \frac{t}{t^2 - 1}; \quad g(t) = \frac{t^3 - t^2 + 1}{t^2 - t}.$$

При цьому крайова умова (2.11) має вигляд

$$\Phi^{+}(t) = \frac{t}{t^2 - 1}\Phi^{-}(t) + \frac{t^3 - t^2 + 1}{t^2 - t}.$$

Знайдемо індекс функції $G(t) = \dfrac{t}{t^2 - 1}$. За даних припущень в області $D^{+}$ функція $G(z) = \dfrac{z}{z^2 - 1}$ має один нуль і має один полюсі, тому

$$\kappa = indG(t) = 0\,.$$

Для знаходження функції $\Gamma(z)$ застосуємо формулу (1.3), де $z_0 = 0$:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_L \frac{\ln\left[\tau^{-\kappa} \cdot G(\tau)\right]}{\tau - z} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_L \frac{\ln\left[\tau^{0} \cdot \dfrac{\tau}{\tau^2 - 1}\right]}{\tau - z} d\tau\,.$$

Оскільки

$$f(z)=\ln\left(\frac{z}{z^2-1}\right)=\ln\left(\frac{z}{z-1}\right)+\ln\left(\frac{1}{z+1}\right),$$

а функція $f_1(z)=\ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$ є аналітичною в області $D^-$, функції $f_2(z)=\ln\left(\frac{1}{z+1}\right)$ – аналітичною в $D^+$, то згідно з (1.3) і (1.4) одержимо

$$\Gamma(z)=\begin{cases}\ln\left(\frac{1}{z+1}\right), z\in D^+;\\ -\ln\left(\frac{z}{z-1}\right), z\in D^-.\end{cases}$$

Знаючи формули (1.27) для обчислення $X^{\pm}(z)$, знайдемо їх:

$$\mathrm{X}^+(z)=e^{\Gamma^+(z)}=\frac{1}{z+1},$$
$$\mathrm{X}^-(z)=e^{\Gamma^-(z)}=\frac{z-1}{z}.$$

Застосовуючи формулу (1.31), отримаємо:

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_L\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{(\tau^3-\tau^2+1)(\tau+1)}{\tau^2-\tau}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Оскільки

$$\phi(z)=\frac{(z^3-z^2+1)(z+1)}{z^2-z}=\left(\frac{z^3-z^2}{z^2-z}+\frac{1}{z^2-z}\right)(z+1)=\left(z+\frac{1}{z^2-z}\right)(z+1)=$$
$$=z(z+1)+\frac{z+1}{z^2-z},$$

а функція $\phi_1(z) = z(z+1) -$ аналітична в області $D^+$, функції $\phi_2(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)} -$,

аналітичн в $D^-$, то враховуючи (1.3) і (1.4) одержимо:

$$\Psi(z) = \begin{cases} z(z+1),\ z \in D^+; \\ -\dfrac{z+1}{z(z-1)}, z \in D^-. \end{cases}$$

Звідси

$$\Psi^+(z) = z(z+1), \quad \Psi^-(z) = -\frac{z+1}{z(z-1)}.$$

Шуканий розв'язок знаходимо, застосовуючи формули (1.29), (1.30)

$$\Phi^+(z) = \mathrm{X}^+(z) \cdot \left[ \mathrm{P}_\kappa(z) + \Psi^+(z) \right] = \frac{1}{z+1} \cdot \left[ A + z(z+1) \right],$$
$$\Phi^-(z) = z^{-\kappa} \cdot \mathrm{X}^-(z) \cdot \left[ \mathrm{P}_\kappa(z) + \Psi^-(z) \right] = \frac{z-1}{z} \cdot \left[ A - \frac{z+1}{z(z-1)} \right].$$

Розв'язок крайової задачі повинен задовольняти умову $\Phi^-(\infty) = 0$, тому $A = 0$, а її розв'язком є функція

$$\Phi^+(z) = z,$$
$$\Phi^-(z) = -\frac{z+1}{z^2}.$$

Внаслідок означень граничних значень функцій $\Phi^+(z)$ і $\Phi^-(z)$ в точках контура $\gamma$, маємо:

$$\Phi^{+}(t) = \lim_{\substack{z \to t \\ z \in D^{+}}} \Phi^{+}(z) = \lim_{\substack{z \to t \\ z \in D^{+}}} (z) = t,$$

$$\Phi^{+}(t) = \lim_{\substack{z \to t \\ z \in D^{+}}} \Phi^{+}(z) = \lim_{\substack{z \to t \\ z \in D^{+}}} \left(-\frac{z+1}{z^2}\right) = -\frac{t+1}{t^2}.$$

Отже, розв'язком даного інтегрального рівняння буде функція

$$\varphi(t) = \Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t) = t + \frac{t+1}{t^2}.$$

**Відповідь.** $\varphi(t) = \dfrac{t^3 + t + 1}{t^2}$.

**Приклад 3.4** Розв'язати інтегральне рівняння

$$\mathrm{K}^{\circ}\varphi \equiv (t^2 + t - 1)\varphi(t) + \frac{t^2 - t - 1}{\pi i}\int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = 2\left(t^3 - t + 1 + \frac{1}{t}\right)$$

за таких припущень: $0 \in D^{-}$, $\pm 1 \in D^{+}$.

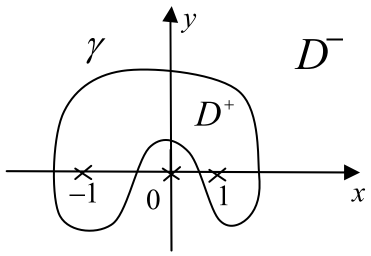

Рисунок 2.4

**Розв'язання.** Зображення областей, що задовольняють умову, наведено на рисунку 2.4. Так само, як у попередніх двох прикладах, маємо:

$$G(t) = \frac{t}{t^2 - 1}; \quad g(t) = \frac{t^3 - t^2 + 1}{t^2 - t}.$$

А також крайову задачу:

$$\Phi^{+}(t) = \frac{t}{t^2 - 1}\Phi^{-}(t) + \frac{t^3 - t^2 + 1}{t^2 - t}.$$

Оскільки у даному прикладі в області $D^+$ функція $G(z)=\dfrac{z}{z^2-1}$ не має нулів і має два полюси, то

$$\kappa = indG(t) = ind\frac{t}{t^2-1} = -2\,.$$

Оберемо за точку $z_0$, що лежить в середині контура, точку $z_0=1$, тоді функцію $\Gamma(z)$ будемо обчислювати за формулою

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{\gamma}\frac{\ln\left[(\tau-z_0)^{-\kappa}\cdot G(\tau)\right]}{\tau-z}d\tau,$$

звідси

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{\gamma}\frac{\ln\left[(\tau-1)^2\cdot\dfrac{\tau}{\tau^2-1}\right]}{\tau-z}d\tau\,.$$

Оскільки функція щільності є сумою аналітичної в області $D^-$ функції $f_1(z)=\ln\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)$,і аналітичної в $D^+$ функції $f_2(z)=\ln z$, то звикористовуючи формули (1.3) і (1.4), одержимо

$$\Gamma(z)=\begin{cases}\ln z, z\in D^+;\\ -\ln\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right), z\in D^-.\end{cases}$$

Відповідно до формул (Б.13) знайдемо функції $X^{\pm}(z)$:

$$X^{+}(z) = e^{\Gamma^{+}(z)} = z,$$
$$X^{-}(z) = e^{\Gamma^{-}(z)} = \frac{z+1}{z-1}.$$

Перевіримо умову існування розв’язку поставленої крайової задачі з індексом $\kappa = -2$, меншим за $-1$:

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\gamma} \frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\tau^3 - \tau^2 + 1}{\tau(\tau^2 - \tau)} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{d\tau}{\tau^2(\tau - 1)} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \left[ \oint_{\gamma} d\tau + \oint_{\gamma} \frac{1}{\tau - 1} d\tau - \oint_{\gamma} \frac{1}{\tau} d\tau - \oint_{\gamma} \frac{1}{\tau^2} d\tau \right].$$

Розглянемо інтеграли $\oint_{\gamma} d\tau, \oint_{\gamma} \frac{1}{\tau - 1} d\tau, \oint_{\gamma} \frac{1}{\tau} d\tau, \oint_{\gamma} \frac{1}{\tau^2} d\tau$. Функції, що стоять під знаками цих інтегралів, є аналітичними в середині контура. Тому значення цих інтегралів дорівнюють нулю. За теоремою Коші, інтеграл $\oint_{\gamma} \frac{1}{\tau - 1} d\tau$ дорівнює $2\pi i$. Отже,

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\gamma} \frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)} d\tau = 1 \neq 0.$$

Це означає, що умова існування розв’язку крайової задачі Рімана не виконується. Тому дане інтегральне рівняння не має розв’язку.

**Відповідь.** Задача не має розв’язку.

**Приклад 3.5** Розв’язати інтегральне рівняння

$$K^{\circ}_{\phi} \equiv (t^2 - 2)\phi(t) + \frac{3t}{\pi i} \int_{L} \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

за таких припущень: $-i, -2i \in D^{-}$, $i, 2i \in D^{+}$.

**Розв’язання.** Зображення контура і областей на комплексній площині, що задовольняють умову, наведено на рисунку 2.5. За формулою (2.12) знайдемо

$$G(t) = \frac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)}; \quad g(t) = \frac{2t}{(t+i)^2 (t+2i)(t-i)}.$$

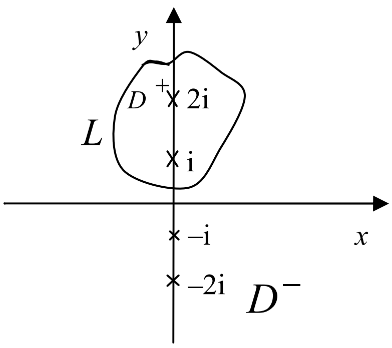


Рисунок 2.5

Отже, інтегральне рівняння зведено до задачі Рімана:

$$\Phi^{+}(t) = \frac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)} \Phi^{-}(t) + \frac{2t}{(t+i)^2 (t+2i)(t-i)}.$$

В області $D^{+}$ функція $G(z) = \dfrac{(z-i)(z-2i)}{(z+i)(z+2i)}$ має два нулі і не має полюсів, тому

$$\kappa = ind G(t) = ind \frac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)} = 2.$$

Для знаходження функції $\Gamma(z)$ застосуємо формулу (1.3). Оберемо $z_0 = i$, тоді

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln\left( (\tau - i)^{-2} \cdot \dfrac{(\tau-i)(\tau-2i)}{(\tau+i)(\tau+2i)} \right)}{\tau - z} d\tau .$$

Функція щільності є сумою функції $f_1(z)=\ln\frac{z-2i}{z-i}$, аналітичної в області $D^-$, і функції $f_2(z)=\ln\frac{1}{(z+i)(z+2i)}$, аналітичної в $D^+$, тому згідно з (1.3) і (1.4), одержимо

$$\Gamma(z)=\begin{cases}\ln\frac{1}{(z+i)(z+2i)}, & z\in D^+;\\ -\ln\frac{z-2i}{z-i}, & z\in D^-.\end{cases}$$

Відповідно до формул (1.27) знайдемо функції $X^{\pm}(z)$:

$$\mathrm{X}^+(z)=e^{\Gamma^+(z)}=\frac{1}{(z+i)(z+2i)},\qquad \mathrm{X}^-(z)=e^{\Gamma^-(z)}=\frac{z-i}{z-2i}.$$

Застосовуючи формулу (1.31), отримаємо:

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_L\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{2\tau}{(\tau+i)(\tau-i)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Оскільки $\phi(z)=\frac{2z}{(z+i)(z-i)}=\phi_1(z)+\phi_2(z)$, де $\phi_1(z)=\frac{1}{z+i}-$ аналітична в $D^+$, а функції $\phi_2(z)=\frac{1}{z-i}-$ аналітична в $D^-$, то

$$\Psi(z)=\begin{cases}\frac{1}{z+i}, z\in D^+;\\ -\frac{1}{z-i}, z\in D^-.\end{cases}$$

Звідси

$$\Psi^+(z)=\frac{1}{z+i},\quad \Psi^-(z)=-\frac{1}{z-i}.$$

Розв'язок крайової задачі Рімана знаходимо, застосовуючи формули (1.29) і (1.30):

$$\Phi^+(z)=\mathrm{X}^+(z)\cdot\left[\mathrm{P}_k(z)+\Psi^+(z)\right]=\frac{1}{(z+i)(z+2i)}\cdot\left[A\cdot z^2+B\cdot z+C+\frac{1}{z+i}\right],$$

$$\Phi^-(z)=\left(z-z_0\right)^{-k}\cdot\mathrm{X}^-(z)\cdot\left[\mathrm{P}_k(z)+\Psi^-(z)\right]=\frac{1}{(z-i)(z-2i)}\cdot\left[A\cdot z^2+B\cdot z+C-\frac{1}{z-i}\right].$$

Розв'язок крайової задачі повинен задовольняти умову $\Phi^-(\infty)=0$. З цього випливає, що $A=0$.

Отже, розв'язок крайової задачі Рімана має вигляд:

$$\Phi^+(z)=\frac{1}{(z+i)(z+2i)}\cdot\left[B\cdot z+C+\frac{1}{z+i}\right],$$

$$\Phi^-(z)=\frac{1}{(z-i)(z-2i)}\cdot\left[B\cdot z+C-\frac{1}{z-i}\right].$$

Таким чином, розв'язком даного інтегрального рівняння буде функція

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\frac{1}{(t+i)(t+2i)}\cdot\left[Bt+C+\frac{1}{t+i}\right]-\frac{1}{(t-i)(t-2i)}\cdot\left[Bt+C-\frac{1}{t-i}\right].$$

.

**Відповідь.** $\varphi(t)=\dfrac{2t(t^2-5)}{\left(t^2+1\right)^2\left(t^2+4\right)}+\dfrac{t\left(B+Ct\right)}{\left(t^2+1\right)\left(t^2+4\right)}.$

**Приклад 3.6** Розв'язати інтегральне рівняння

$$K^{\circ}_{\phi}\equiv(t^2-2)\phi(t)+\frac{3t}{\pi i}\int_L\frac{\phi(\tau)}{\tau-t}d\tau=2t(t-2i)(1+at)$$

за таких припущень: $i,-2i,-2i\in D^-$, $-i\in D^+$.

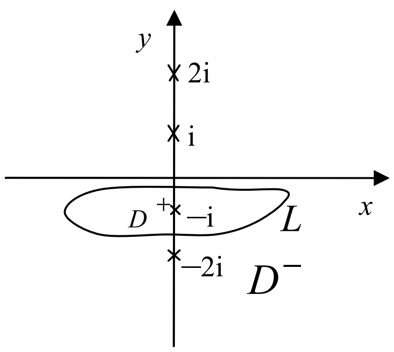


Рисунок 2.6

**Розв'язання.** Схематичне зображення контура і областей наведено на рисунку 2.6. Функції $G(t)$ та $g(t)$ було знайдено у попередньому прикладі:

$$G(t)=\frac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)},\quad g(t)=\frac{2t\left(t-2i\right)\left(1+at\right)}{\left(t+i\right)\left(t+2i\right)},$$

де в тому ж прикладі отримано задачу Рімана:

$$\Phi^+(t)=\frac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)}\Phi^-(t)+\frac{2t(t-2i)(1+at)}{(t+i)(t+2i)}.$$

Знайдемо індекс функції $G(t)=\dfrac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)}$. В області $D^+$ функція $G(z)=\dfrac{(z-i)(z-2i)}{(z+i)(z+2i)}$ не має нулі і має один полюс, тому

$$\kappa=indG(t)=-1.$$

Оберемо $z_0=-i$ і застосуємо (128):

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\ln\left(\frac{(\tau-i)(\tau-2i)}{(\tau+2i)}\right)}{\tau-z}d\tau .$$

Оскільки функція щільності останнього інтеграла типу Коші $f(z)=\ln\frac{(z-i)(z-2i)}{z+2i}$ є аналітичною в області $D^{+}$, то

$$\Gamma(z)=\begin{cases}\ln\frac{(z-i)(z-2i)}{z+2i}, & z\in D^{+},\\ 0, \quad z\in D^{-}.\end{cases}$$

Відповідно до (1.27) знайдемо функції $X^{\pm}(z)$:

$$X^{+}(z)=e^{\Gamma^{+}(z)}=\frac{(z-i)(z-2i)}{z+2i},$$

$$X^{-}(z)=e^{\Gamma^{-}(z)}=1.$$

Застосовуючи формулу (1.31), отримаємо:

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{L}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L}\frac{2\tau(\tau a+1)}{(\tau+i)(\tau-i)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Оскільки функція щільності останнього інтеграла типу Коші є сумою функції $f_1(z)=\frac{1+za}{z-i}$, аналітичної в області $D^{+}$, і функції $f_2(z)=\frac{1+za}{z+i}$, аналітичної в $D^{-}$, то згідно з (1.3) і (1.4) одержимо:

$$\Psi(z)=\begin{cases}\dfrac{1+za}{z-i}+a, z\in D^{+};\\ a-\dfrac{1+za}{z+i}, z\in D^{-}.\end{cases}$$

Звідси

$$\Psi^{+}(z)=\frac{1+za}{z-i}+a\,,\quad \Psi^{-}(z)=a-\frac{1+za}{z+i}\,.$$

Шуканий розв'язок знаходимо, застосовуючи формулами (1.32), (1.33).

$$\Phi^{+}(z)=\mathrm{X}^{+}(z)\cdot\left[\mathrm{P}_{k}(z)+\Psi^{+}(z)\right]=-\frac{2iz(z-2i)}{z+2i},$$
$$\Phi^{-}(z)=\left(z-z_{0}\right)^{-k}\cdot\mathrm{X}^{-}(z)\cdot\left[\mathrm{P}_{k}(z)+\Psi^{-}(z)\right]=0.$$

Отже, розв'язком даного інтегрального рівняння буде функція

$$\varphi(t)=\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t)=-\frac{2it(t-2i)}{t+2i}+0\,.$$

**Відповідь.** $\phi(t)=-\dfrac{2it(t-2i)}{t+2i}.$

# 4 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НА ДІЙСНІЙ ОСІ

**Приклад 4.1** Знайти значення параметра $k$, при якому існує розв'язок інтегрального рівняння і знайти цей розв'язок ($t \in R$)

$$\mathrm{K}^{\circ}{}_{\varphi} \equiv \frac{5}{2} \cdot \frac{i-t}{kt+h}\varphi(t) + \frac{t^2 i + \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}i}{kt+h} \cdot \frac{1}{\pi i} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = ti + 1.$$

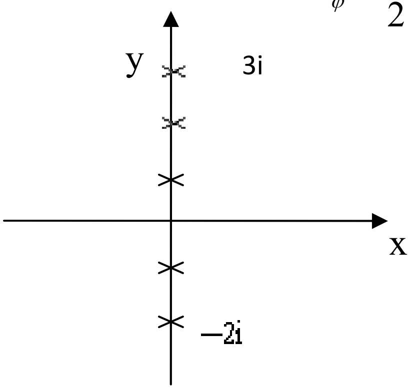


Рисунок 4.1

**Розв'язання**. Знайдемо $G(t)$ та $g(t)$ за відомою формулою (2.12). Звідки

$$G(t) = \frac{-t+3i}{t+2i}; \; g(t) = \frac{kt+h}{t+2i}.$$

Звідси випливає, що крайову умову (2.11) можна записати у вигляді

$$\Phi^+(t) = \frac{-t+3i}{t+2i} \cdot \Phi^-(t) + \frac{kt+h}{t+2i}.$$

Знайдемо нулі функції $G(z) = \dfrac{-z+3i}{z+2i}$

$$-z + 3i = 0,$$
$$z = 3i \in D^+ \Rightarrow N^+ = 1$$

і полюси

$$z + 2i = 0,$$
$$z = -2i \in D^- \Rightarrow P^+ = 0.$$

Отже, індекс даної функції $G(t)$ буде дорівнювати

$$\kappa = indG(t) = N^+ - P^+ = 1.$$

Використовуючи формулу (1.40) при

$$a = -1, b = -3, c = 1, d = 2,$$

знайдемо $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left[\left(\frac{a\tau - bi}{c\tau + di}\right)^{-\kappa} \cdot G(\tau)\right] \cdot \frac{d\tau}{\tau - z} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left[\left(\frac{-\tau + 3i}{\tau + 2i}\right)^{-1} \cdot \frac{-\tau + 3i}{\tau + 2i}\right]\frac{d\tau}{\tau - z} = 0;$$

Застосовуючи формули (1.39) знаходимо функції $X^{\pm}(z)$

$$X^{\pm}(z) = e^{\Gamma^{\pm}(z)} = e^0 = 1.$$

Згідно з формулою (1.44)

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z},$$

Звідки маємо:

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k\tau+h}{\tau+2i}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Функцією щільності інтеграла типу Коші є функція $\varphi(z)=\frac{kz+h}{z+2i}$. Знаходячи її особливі точки $z=-2i\in D^{-}$, доходимо висновку, що $\varphi(z)$ – аналітична в області $D^{+}$, а $\varphi(\infty)=\kappa$. Отже, застосовуючи (1.13), обчислимо:

$$\Psi(z)=\begin{cases}\frac{kz+h}{z+2i}-\frac{k}{2}, z\in D^{+};\\ -\frac{k}{2}, z\in D^{-}.\end{cases}$$

Звідси випливає, що

$$\Psi^{+}(z)=\frac{kz+h}{z+2i}-\frac{k}{2},\ \ \Psi^{-}(z)=-\frac{k}{2}.$$

Враховуючи, що $\varPhi^{\pm}(\infty)=0$, за формулами (1.45) і (1.46)

$$\Phi^{+}(z)=\mathrm{X}^{+}(z)\left[\Psi^{+}(z)+P_{\kappa-1}(z)\right],$$
$$\Phi^{-}(z)=(z-z_0)^{-\kappa}\mathrm{X}^{-}(z)\left[\Psi^{-}(z)+P_{\kappa-1}(z)\right]$$

знаходимо $\varPhi^{\pm}(z)$:

$$\Phi^{+}(z)=1\cdot\left[\frac{kz+h}{z+2i}-\frac{k}{2}+\frac{B}{\left(z+2i\right)^{1}}\right];$$

$$\Phi^{-}(z)=\left(\frac{-z+3i}{z+2i}\right)^{-1}\cdot 1\cdot\left[-\frac{k}{2}+\frac{B}{z+2i}\right]=-\frac{k}{2}\cdot\frac{z+2i}{-z+3i}+\frac{B}{-z+3i}.$$

Оскільки $\Phi^{\pm}(\infty)=0$, то

$$\Phi^{+}(\infty)=k-\frac{k}{2}+0=\frac{k}{2}=0,$$

$$\Phi^{-}(\infty)=\frac{k}{2}-0=\frac{k}{2}=0.$$

Отже, умовою розв’язності крайової задачі, а і разом з нею і інтегрального рівняння, є $k=0$.

Застосовуючи формулами Сохоцького (2.10) $\varphi(t)=\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t),$ отримаємо розв’язок характеристичного сингулярного рівняння

$$\varphi(t)=\frac{0\cdot t+h}{t+2i}-\frac{0}{2}+\frac{B}{t+2i}+\frac{0}{2}\cdot\frac{t+2i}{-t+3i}-\frac{B}{-t+3i}.$$

**Відповідь.** Розв’язок існує, якщо $k=0$. Причому цей розв’язок має вигляд

$$\varphi(t)=\frac{h+B}{t+2i}-\frac{B}{-t+3i},\ t\in R.$$

**Приклад 4.2** Розв’язати сингулярне рівняння на дійсній осі [7]

$$\mathrm{K}^{\circ}{}_{\varphi}\equiv(3t+3i)\varphi(t)+\frac{t+i}{\pi i}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\frac{2\cdot(t+bi)}{t-i},\ t\in R.$$

**Розв’язання.** Будемо знаходити $G(t)$ та $g(t)$ за формулами (2.12), де

$$\overline{a}\left(t\right)=3t+3i,\ \overline{b}\left(t\right)=t+i,$$

$$f\left(t\right)=\frac{2\cdot\left(t+bi\right)}{t-i}.$$

Звідки

$$G\left(t\right)=\frac{1}{2};\qquad g\left(t\right)=\frac{i}{2}\cdot\frac{b-ti}{\left(t-i\right)\cdot\left(t+i\right)}.$$

Тоді крайова умова (2.11) має вигляд

$$\Phi^{+}(t)=\frac{1}{2}\cdot\Phi^{-}(t)+\frac{i}{2}\cdot\frac{b-ti}{\left(t-i\right)\left(t+i\right)}.$$

Оскільки $G\left(t\right)=\frac{1}{2};$ то функція не має нулів і не має полюсів, отже, індекс функції дорівнює

$$\kappa=indG(t)=0.$$

Для знаходження функції $\Gamma\left(z\right)$ застосовуємо формулу (1.40) у вигляді

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ln\left[\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)^{-\kappa}G\left(\tau\right)\right]\frac{d\tau}{\tau-z},$$

звідки

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ln\frac{1}{2}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Розглянемо функцію $f(z) = \ln\frac{1}{2}$. Вона не має особливих точок, тому будемо вважати, що $f(z)$ аналітична в області $D^+$, тому для поставленої задачі згідно з формулою (1.13),

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}, z \in D^+; \\ -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}, z \in D^-. \end{cases}$$

А отже

$$\Gamma^+(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \ln\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\Gamma^-(z) = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{2}.$$

Відповідно до формул (1.39) знайдемо функції $X^\pm(z)$:

$$X^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad X^-(z) = \sqrt{2}.$$

Застосовуючи формулу (1.44), маємо:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2} \cdot \frac{(b - \tau i)\sqrt{2}}{(\tau - i)\cdot(\tau + i)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Функцію щільності останнього інтеграла типу Коші можна записати у вигляді

$$\varphi(z)=\frac{i}{2}\cdot\frac{(b-zi)\sqrt{2}}{(z-i)(z+i)}=\frac{i}{2}\sqrt{2}\left(\frac{\frac{b+1}{2i}}{z-i}+\frac{\frac{b-1}{-2i}}{z+i}\right)=$$

$$=\frac{\frac{i}{2}\sqrt{2}\frac{b+1}{2i}}{z-i}+\frac{\frac{i}{2}\sqrt{2}\frac{b-1}{-2i}}{z+i}=\frac{\sqrt{2}(b+1)}{4(z-i)}+\frac{\sqrt{2}(1-b)}{4(z+i)}.$$

Особлива точка $z=i\in D^{+}$ функції $\frac{\sqrt{2}(b+1)}{4(z-i)}$, тому вона аналітична в $D^{-}$, а особлива точка $z=-i\in D^{-}$ функції $\frac{\sqrt{2}(1-b)}{4(z+i)}$, томи вона аналітична в області $D^{+}$. То згідно з (1.13) і (1.14) одержимо

$$\Psi(z)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}(1-b)}{4(z+i)}-\frac{0}{2}+\frac{0}{2}, z\in D^{+};\\ \frac{0}{2}+\frac{0}{2}-\frac{\sqrt{2}(b+1)}{4(z-i)}, z\in D^{-}.\end{cases}$$

Розв'язок крайової задачі задовольняє умову $\Phi^{+}(\infty)=\Phi^{-}(\infty)=0.$ Тому, відповідно до (1.45) і (1.46), розв'язок задачі Рімана набуває вигляду:

$$\Phi^{+}(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}(1-b)}{4(z+i)}+\frac{0}{(z+i)^{0}}\right]=\frac{1-b}{4(z+i)},$$

$$\Phi^{-}(z)=\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{0}\cdot\sqrt{2}\left[-\frac{\sqrt{2}(b+1)}{4(z-i)}+\frac{0}{(z+i)^{0}}\right]=\frac{(b+1)}{2(z-i)}.$$

Отже, розв'язком даного інтегрального рівняння буде функція

$$\varphi(t) = \Phi^{+}\left(t\right) - \Phi^{-}\left(t\right) = \frac{1-b}{4\left(t+i\right)} + \frac{b+1}{2\left(t-i\right)}.$$

**Відповідь.** $\varphi(t) = \dfrac{1-b}{4\left(t+i\right)} + \dfrac{b+1}{2\left(t-i\right)}.$

# ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто характеристичні сингулярні рівняння, розв’язання яких зводяться до крайових задач теорії аналітичних функцій. Цей метод розв’язання інтегральних рівнянь такого типу запропоновано Гаховим Ф.Д. в роботі [7].

Сингулярні інтегральні рівняння застосовуються в теорії пружності, зокрема в теорії плоских контактних задач. В цих теоріях фізичні задачі моделюються сингулярними інтегральними рівняннями[1].

Розглянуто один із видів особливого (сингулярного) інтегрального рівняння – характеристичне рівняння:

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = f(t).$$

У цьому випадку рівняння можна привести до крайової задачі Рімана та розв’язати рівняння в замкнутій формі. За допомогою заміни

$$G(t) = \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}, \qquad g(t) = \frac{f(t)}{a(t)+b(t)}$$

сингулярне інтегральне рівняння перетворюється у крайову задачу теорії аналітичних функцій: $\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t),\ t \in \gamma$.

У роботі були розв’язаний ряд характеристичних сингулярних інтегральних рівнянь, які були запропоновані до розв’язку Гаховим Ф.Д. [7], а деякі із прикладів – авторські (приклад 3.4 і приклад 4.1)

# ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Александров В.М., Чебаков М.И. Введение в механику контактных взаимодействий. Ростов-на-Дону : Изд-во ООО «ЦВВР», 2007. 114 с.

2. Бабаев А.А., Салаев В.В. Краевые задачи и сингулярные уравнения на спрямляемом контуре // *Мат. заметки*. 1982. 31. № 4. 580 с.

3. Васильева Ю.В., Плакса С.А. Кусочно-непрерывная краевая задача Римана на спрямляемой кривой // *Укр. мат. журн.* 2006. 58. № 5. С. 616 − 628.

4. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. Москва : Наука, 1970. 379 с.

5. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 228 с.

6. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Харьков : Изд-во Харьковского нац. ун-та им. В.Н. Каразина, 2001. 92 с.

7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. Москва : Наука, 1977. 640 с.

8. Конторович М.И. Операционное исчисление и нестандартные явления в электрических цепях. Москва : Машиностроение, 1987. 298 с.

9. Кулиев В.Д. Сингулярные краевые задачи. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. 750 с.

10. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Москва : Наука, 1973. 736 с.

11. Левиский С.В. Краевые задачи для функцый, полианалитических в области. *Дис. канд. физ.- мат.наук: 01.01.02.* Одесса, 1991 142 с.

12. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. Москва : Наука, 1977. 448 с.

13. Крайові задачі теорії аналітичних функцій: навчальний посібник для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «спеціаліст» і освітнього ступеня «магістр» спеціальності «Математика» (за напрямами) / С.І. Гоменюк, С.М. Гребенюк, Н.М. Д’яченко, О.О. Тітова. Запоріжжя : ЗНУ, 2015. 91 с.

14. Куд'явіна Ю.В. Крайова задача Рімана і сингулярні інтегральні рівняння з кусково-неперервними коефіцієнтами на спрямлюваних кривих. Рукопис. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 математичний аналіз. Київ : Інститут математики НАН України, 2008.

15. Kutlu K. On Riemann boundary value problem // *An. Univ. Timisoara: Ser. mat. – inform.* 2000. 38, № 1. P. 1 – 17.