

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної математики**

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

**на тему: «МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ГОМОГЕНІЗАЦІЇ
КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ НА ОСНОВІ
ЕНЕРГЕТИЧНИХ УМОВ УЗГОДЖЕННЯ»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1118-з
спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми математика

Д.С. Герасимова

(ініціали та прізвище)

доцент кафедри фундаментальної
математики, доцент, к.ф.-м.н.

Керівник Клименко М. І.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри прикладної математики
та механіки, к.ф.-м.н. Левчук С. А.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної математики,
д.т.н., доцент

Гребенюк С.М.
(підпис)

« 30 » травня 2019 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Герасимовій Дар'ї Сергіївні

(прізвище, ім'я та по батькові)

1. Тема роботи Математична модель гомогенізації композиційного матеріалу на основі енергетичних умов узгодження

керівник роботи Клименко Михайло Іванович, к.ф.-м.н., доцент
кафедри фундаментальної математики

(прізвище, ім'я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затвержені наказом ЗНУ від « 29 » травня 2019 року № 812-С

2. Строк подання студентом роботи 09.12.2019

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Постановка задачі.
2. Основні теоретичні відомості.
3. Виконання розрахунків та побудова графіків

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 30.05.2019

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	03.06.2019	
2.	Збір вихідних даних.	10.06.2019	
3.	Обробка літератури за темою дослідження	02.07.2019	
4.	Розробка першого та другого розділу.	05.08.2019	
5.	Розробка третього розділу.	01.10.2019	
6.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	06.12.2019	
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	09.01.2020	

Студент _____
(підпис)

Д. С. Герасимова
(ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____
(підпис)

М. І. Клименко
(ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____
(підпис)

І.Г. Ткаченко
(ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Математична модель гомогенізації композиційного матеріалу на основі енергетичних умов узгодження»: 86 с., 2 рис., 2 табл., 12 джерел, 2 додатки.

В'ЯЗКОПРУЖНІСТЬ, ДЕФОРМАЦІЯ ПЕРЕМІЩЕННЯ, ІНТЕГРАЛЬНИЙ ОПЕРАТОР, КОМПОЗИТ, МИТТЄВИЙ МОДУЛЬ ПРУЖНОСТІ, НАПРУЖЕННЯ, ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНЕ ВОЛОКНО, ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНА МАТРИЦЯ, ЯДРО РЕЛАКСАЦІЇ.

Об'єкт дослідження – методика визначення ефективного поздовжнього модуля пружності в'язкопружного композиту.

Мета роботи: визначення ефективних характеристик інтегрального оператора поздовжнього модуля пружності для в'язкопружного трансверсально-ізотропного композитного матеріалу, що складається з в'язкопружної трансверсально-ізотропної матриці та пружного трансверсально-ізотропного волокна.

Метод дослідження – операційний.

У даній роботі пропонується ознайомитися з основними принципами математичного моделювання властивостей в'язкопружних трансверсально-ізотропних композитів. Для цього було розглянуто особливості застосування інтегрального перетворення Лапласа до дослідження лінійної моделі спадковості для в'язкопружного середовища. Застосовано методику визначення ефективного поздовжнього модуля пружності для в'язкопружного композита, що ґрунтується на використанні кінематичних умов узгодження, для знаходження характеристик відповідного інтегрального оператора. Було визначено ефективний поздовжній модуль пружності трансверсально-

ізотропного композиту з використанням енергетичного критерію узгодження деформування матриці, волокна та однорідного композиту.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis « Mathematical Model of Homogenization of Composite Material on the Basis of Energy Conditions of Coordination »: 86 pages, 2 figures, 2 tables, 12 references, 2 supplements.

VISCOELASTICITY, DEFORMATION OF DISPLACEMENTS, INTEGRAL OPERATOR, COMPOSITE, INSTANTANEOUS MODULE OF ELASTICITY, TENSION, TRANSVERSE ISOTROPIC FIBER, TRANSVERSELY ISOTROPIC MATRIX, CORE OF RELAXATION.

The object of the study is methodology for identifying the effective spring module of elasticity in a viscoelastic composite.

The aim of the study is identifying the effective characteristics of the integral operator of the spring module of elasticity for a viscoelastic transverse isotropic composite material, which can be stored in a viscoelastic transverse isotropic matrix and a spring transversal isotropic fiber.

The method of research is operating.

In this study we propose to get acquainted with the basic principles of mathematical modeling of the properties of viscoelastic transversal isotropic composites. For this purpose, the peculiarities of applying the Laplace integral transform to the study of a linear model of heredity for a viscoelastic medium were considered. We applied the technique for determining the effective spring modulus of elasticity for a viscoelastic composite based on the kinematic matching conditions for finding the characteristics of the corresponding integral operator. An effective spring modulus of elasticity of the transversely isotropic composite was determined using the energy criterion for the deformation of the matrix.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	2
Реферат	4
Summary	6
Зміст.....	7
Вступ.....	9
1 Основні принципи математичного моделювання механічних властивостей композиційних матеріалів	11
1.1 Класифікація та основні механічні властивості композиційних матеріалів.....	11
1.2 Математичні моделі лінійної в'язкопружності композитів	16
2 Перетворення Лапласа та його застосування до розв'язання інтегральних рівнянь	38
2.1 Поняття та властивості перетворення Лапласа	38
2.2 Знаходження оберненого перетворення Лапласа.....	42
2.3 Застосування операційного числення до розв'язання інтегральних рівнянь типу згортки	46
3 Визначення ефективного поздовжнього модуля пружності в'язкопружного трансверсально-ізотропного композита	49
3.1 Застосування кінематичної умови узгодження.....	49
3.2 Визначення ефективного модуля пружності композиту з використанням енергетичної умови узгодження	66
Висновки	80
Перелік посилань.....	82

Додаток А Основні співвідношення теорії пружності у циліндричній системі координат для ізотропного матеріалу.....	84
Додаток Б Основні співвідношення теорії пружності у циліндричній системі координат для трансверсально-ізотропного матеріалу.....	86

ВСТУП

Волокнисті композити знайшли широке застосування у машинобудуванні, будівництві та інших сферах виробничої діяльності у якості конструкційних матеріалів. Особливості їх використання суттєво залежать від їх механічних властивостей, які визначають значення ефективних пружних сталих композита. Застосування односпрямованих волокнистих композитних матеріалів при проектуванні різноманітних конструкцій дозволяє змінювати властивості конструкційних елементів шляхом зміни складу композиту, концентрації та розташуванні волокон. Одночасне проектування конструкції та її матеріалу дозволяє суттєво збільшити ефективність її експлуатації. Властивості композитів залежать від властивостей їх складових елементів. Їх поєднання створює ефект синергії, що проявляється у утворенні у композита нових фізико-механічних властивостей, не притаманних його окремим фазовим елементам.

При проектуванні конструкцій з композиційних матеріалів необхідно виконувати розрахунки компонентів їх напружено-деформованого стану, для цього потрібні дані про ефективні пружні сталі композита. Це обумовлює актуальність задачі визначення цих показників. Основним методом, що використовується при цьому, є математичне моделювання. У зв'язку з цим актуальною є розробка засобів математичного моделювання ефективних характеристик композиційних матеріалів, яка, зокрема, здійснюється у даній кваліфікаційній роботі магістра.

Метою роботи є визначення ефективних характеристик інтегрального оператора поздовжнього модуля пружності для в'язкопружного трансверсально-ізотропного композитного матеріалу, що складається з в'язкопружної трансверсально-ізотропної матриці та пружного трансверсально-ізотропного волокна.

Для досягнення цієї мети потрібно вирішити наступні завдання:

- ознайомитися з основними принципами математичного моделювання властивостей в'язкопружних трансверсально-ізотропних композитів;
- дослідити особливості застосування інтегрального перетворення Лапласа до дослідження лінійної моделі спадковості для в'язкопружного середовища;
- ознайомитися з сучасними методиками визначення ефективних характеристик композитних матеріалів;
- застосувати методику визначення ефективного поздовжнього модуля пружності для в'язкопружного композита, що ґрунтується на використанні кінематичних умов узгодження, до знаходження характеристик відповідного інтегрального оператора
- визначити ефективний поздовжній модуль пружності трансверсально-ізотропного композиту з використанням енергетичного критерію узгодження деформування матриці, волокна та однорідного композиту.

Об'єктом дослідження у даній роботі є методика визначення ефективного поздовжнього модуля пружності в'язкопружного композиту, предмет дослідження – фізико-механічні властивості композитного матеріалу.

Визначення фізико-механічних характеристик композитів як однорідних матеріалів (ефективних характеристик) за відомими властивостями їх складових є складною задачею сучасної механіки, далекою від остаточного розв'язання, незважаючи на велику кількість пропонованих аналітичних та експериментальних підходів. Ця задача ускладнюється тим, що напружено-деформований стан багатьох композитів при певних навантаженнях суттєво залежить від часу, що свідчить про наявність у складових композита в'язкопружних властивостей. Одним з шляхів розв'язання даної задачі є використання енергетичного критерію узгодження деформування однорідного композиту та його складових, що висвітлюється у даному магістерському дослідженні.

1 ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

1.1 Класифікація та основні механічні властивості композиційних матеріалів

Розвиток механіки композиційних матеріалів на сучасному етапі тісно пов'язаний з потребами технічного прогресу. Він одночасно породжує необхідність у розробці нових конструкційних матеріалів і при цьому його напрям значною мірою обумовлений результатами цієї розробки. За останні роки були створені нові матеріали з наперед заданими властивостями, розроблена технологія їх виробництва та методи розрахунків, проте вимоги науково-технічного прогресу обумовлюють необхідність проектування та створення нових композиційних матеріалів.

Серед нових матеріалів особливе місце займають композиційні матеріали, які володіють цілим рядом різноманітних властивостей, раціональне поєднання яких дозволяє отримувати оптимальні конструкції. Композиційні полімерні матеріали широко застосовуються в хімічному та загальному машинобудуванні. З них виготовлюються різноманітні ємнісні апарати та трубопроводи, працюючі в агресивних середовищах, зубчасті колеса тощо. Поєднання високої міцності та мінімальної питомої ваги обумовлює широке використання композиційних матеріалів в автомобілебудуванні та сільськогосподарському машинобудуванні, суднобудуванні, в авіаційній та ракетно-космічній техніці.

Експериментальне визначення властивостей композитів з різними схемами армування вимагає значних обсягів експериментів, пов'язаних зі значними витратами. У зв'язку з цим виникає потреба у розробці математичних моделей їх властивостей, які дали б змогу визначити не тільки їх

характеристики, але й дослідити напружено-деформований стан виготовлених з них конструкційних елементів.

Композиційними називають матеріали, які мають наступну сукупність ознак: не зустрічаються у природі, оскільки створенні людиною; складаються з двох чи більше компонентів, що відрізняються за своїм хімічним складом та розділених певною межею; мають нові властивості, які відрізняються від властивостей складових їхніх компонентів; неоднорідні в мікромасштабі та однорідні в макромасштабі; склад, форма та розподіл компонентів є визначеними заздалегідь; властивості матеріалу у цілому залежать від властивостей кожного з компонентів.

Матрицею називають компонент, неперервний в усьому об'ємі композиційного матеріалу і при цьому роз'єднаний в об'ємі композиції арматурою чи армуючим елементом.

У залежності від геометрії армуючих елементів та їх взаємного розміщення композити бувають ізотропними та анізотропними. Перші мають однакові властивості за всіма напрямками, другі залежать від напрямку. До макроскопічних ізотропних композитів відносяться дисперсно-зміцненні сплави, псевдосплави та хаотично армовані матеріали, до анізотропних композитів – матеріали, у яких волокна орієнтовані у певних напрямках. Хаотично армовані композити зміцнюються короткими (дискретними) частинками голчастої форми (відрідками волокон), орієнтованими в просторі випадковим чином. При цьому матеріал виходить квазіізотропним, тобто анізотропним в мікрооб'ємах, але ізотропним в об'ємі всього виробу.

Анізотропію композитів, спроектовану заздалегідь з метою застосування для виготовлення певних конструкцій, називають конструкційною. Існує технологічна анізотропія, що виникає при пластичній деформації ізотропних матеріалів, та фізична, притаманна кристалам та пов'язана з особливостями будови їхньої кристалічної решітки. Зазвичай в техніці використовуються анізотропні композиційні матеріали з певною симетрією властивостей.

Ортотропні (ортогонально анізотропні) матеріали характеризуються наявністю у кожному елементарному об'ємі трьох взаємно перпендикулярних площин симетрії для властивостей цих матеріалів. До таких матеріалів відносяться композити, армовані послідовно шарами волокон в двох взаємно перпендикулярних напрямках та тканинами з поздовжньо – поперечним укладанням, а також шаруваті композиційні матеріали, армовані в двох не ортогональних напрямках x'_1 та x'_2 з правильним чергуванням шарів. В останньому випадку площиною симетрії є серединна площина листа та дві площини, що перпендикулярні до неї та проходять через бісектриси кутів, утворених осями x'_1 та x'_2 .

До деяких композитів поняття матриці та волокна не можна застосувати. До таких матеріалів відносяться шаруваті композити, які складаються з почергових шарів двох металевих сплавів, що мають каркасну будову.

Існує також класифікація композитів за наступними основними ознаками: за матеріалом матриці та армуючими елементами, геометрією компонентів, структурою та розташуванням компонентів, методами отримання. Іноді композиційні матеріали розділяють за призначенням, але оскільки одні й ті самі композити можуть мати різне призначення, то цей принцип класифікації використовують рідко. Повна характеристика композитів повинна містити усі вказані ознаки, на практиці ж зазвичай використовують одну або дві з них.

Загальна назва композиційних матеріалів, як правило, походить від матеріалу матриці. Тут розрізняють металеві композити, полімерні композити, неорганічні композиційні матеріали. Композити, що містять два або більше різних за складом чи природою матричні матеріали, називають поліматричними.

Характеристика композитів за матеріалом матриці та армуючих елементів вказує на їх природу. Назва полімерних композиційних матеріалів складається зазвичай з двох частин: в першій – вказується матеріал волокна, у другій – слово «пластик» чи «волокніт», наприклад, склопластики або скловолокнітами,

металопластики (металоволокніти), органоластики (органоволокніти), борноластики (борноволокніти), вуглеластики, азболастики (азбестоволокніти).

Для металевих та неорганічних композитів поки що немає чітко встановленої номенклатури. Частіше інших використовується подвійне позначення: спочатку пишуть матеріал матриці, потім – матеріал волокна. Наприклад, позначення мідь – вольфрам відноситься до композитів з мідною матрицею й вольфрамовими волокнами. Однак у літературі використовують й інші позначення: складне слово, в першій частині якого вказується матеріал волокна, а в другій – матриці (наприклад, бороалюміній, углеалюміній та інші). Композиційні матеріали, що містять два або більше різних за складом чи природою типи армуючих елементів, називають поліармуючими. Поліармуючі композити поділяються на прості, якщо армуючі елементи мають різну природу, але однакову геометрію, та комбіновані, якщо армуючі елементи мають різну як природу, так і геометрію.

Згідно з геометрією армуючих матеріалів (порошки чи гранули, волокна, пластини) композити поділяються на порошкові (гранульовані), волокнисті й пластинчасті. До першої групи відносяться матеріали типу псевдосплавів та інші композиції, отримані з сумішшю різноманітних порошків. До другої – композити, армовані неперервними та дискретними волокнами (наприклад, композиції алюміній – борні волокна, склоластики), до третьої – армовані неперервними та дискретними пластинами (наприклад, шаруваті композиційні матеріали, що являють собою набір фольги зі сталі, алюмінію та титану, що чергуються між собою).

Згідно з класифікацією композитів за структурою та розміщенням їх компонентів, вони поділяються на групи з каркасною, матричною, шаруватою та комбінованою структурою.

Композити з матричною структурою можуть бути армовані елементами, що містять хаотичну орієнтацію у просторі (дисперсними включеннями,

дискретними та неперервними волокнами). В такому випадку матеріал є ізотропним або квазіізотропним. Композити з матричною структурою, зміцнені армуючими елементами, орієнтовані певним чином у просторі, відносяться до впорядковано-армованих. Вони підрозділяються на одновісно армовані чи однонаправлені (з розміщенням волокна вздовж однієї осі), двохвісно армовані (з площинним розміщенням арматури) та трьохвісно армовані (з об'ємним розміщенням арматури).

Волокна використовують в якості арматури композитів. Вони повинні володіти невеликою щільністю, високою міцністю у всьому інтервалі робочих температур, технологічністю, мінімальною розчинністю в матриці, високою хімічною стійкістю, відсутністю фазових перетворень в зоні робочих температур и бути нетоксичними при виготовленні та експлуатації. Для армування використовують металевий дріт, неорганічні та органічні волокна.

Високоміцний металевий дріт зі сталі, вольфраму, молібдену та інших металів, хоча й має велику щільність та меншу міцність, ніж нанокompозити, завдяки своїй технологічності, широкій доступності, порівняно невисокій вартості, часто використовується в якості арматури. Полікристалічні неорганічні волокна, як і металевий дріт, випускаються промисловістю у великій кількості. Їхнім недоліком є висока чутливість до механічних пошкоджень, проте мала щільність, висока міцність, хімічна стійкість вуглеводних дозволяють широко використовувати їх для армування полімерних матриць.

Роль матриці в армуванні композитів полягає у наданні виробу необхідної форми та створенні монолітного матеріалу. Поєднуючи в єдине ціле численні волокна, матриця дозволяє композиції сприймати різноманітного роду зовнішні навантаження, розтягнення (як у напрямку армування, так і перпендикулярно до нього), стиснення, вигин, зсув тощо. В той же час матриця повинна приймати участь в створенні несучої здатності композиції, забезпечуючи передачу зусиль на волокна. За рахунок пластичності матриці здійснюється

також передача зусиль від зруйнованих чи дискретних (коротких) волокон до сусідніх волокон та зменшення концентрації напружень поблизу різноманітних дефектів. Матриця слугує також захисним покриттям, що оберігає волокна від металевих пошкоджень та окиснення.

1.2 Математичні моделі лінійної в'язкопружності композитів

Деякі матеріали, знаходячись під дією сталого напруження, можуть поступово деформуватися на протязі певного часу, тобто при сталих напруженнях їх деформації можуть бути функціями часу. Цю їх властивість називають в'язкопружністю або повзучістю. Розглянемо основні моделі, що застосовуються для описання явища в'язкопружності. Тут слід відзначити механічні моделі тіл та спадкові теорії повзучості, які можна розглядати як узагальнення механічних моделей. Спадкові теорії повзучості знайшли застосування в розрахунках елементів конструкцій з полімерних матеріалів і бетонів, а також в описі повзучості ґрунтів і гірських порід.

Лінійна теорія пружності встановлює наступні залежності між переміщеннями u_{ij} , деформаціями ε_{ij} та напруженнями σ_{ij} в суцільному середовищі. Розглянемо її основні рівняння.

1. Рівняння Коші:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

2. Рівняння сумісності деформацій:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_2 \partial x_3} &= 0, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} &= 0, \\
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0, \\
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0, \\
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_3} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

3. Рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

4. Закон Гука для анізотропного тіла:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & J_{15} & J_{16} \\ \cdot & J_{22} & J_{23} & J_{24} & J_{25} & J_{26} \\ \cdot & \cdot & J_{33} & J_{34} & J_{35} & J_{36} \\ \cdot & \cdot & \cdot & J_{44} & J_{45} & J_{46} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & J_{55} & J_{46} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & J_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

У наведених виразах f_i – компоненти об’ємної сили, $[J_{mn}]$ симетрична матриця податливості, $J_{mn} = J_{nm}$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3$, $m, n = 1, \dots, 6$.

Для ортотропних матеріалів, властивості яких симетричні відносно трьох взаємно перпендикулярних площин, коефіцієнти матриці $[J_{mn}]$ дорівнюють:

$$\begin{aligned} J_{11} &= 1/E_1, \quad J_{22} = 1/E_2, \quad J_{33} = 1/E_3, \\ J_{12} &= -\mu_{21}/E_2, \quad J_{13} = -\mu_{31}/E_3, \quad J_{23} = -\mu_{32}/E_3, \\ J_{44} &= 1/G_{23}, \quad J_{55} = 1/G_{13}, \quad J_{66} = 1/G_{12}, \\ J_{14} &= J_{15} = J_{16} = J_{24} = J_{25} = J_{26} = J_{34} = J_{35} = J_{36} = J_{45} = J_{46} = J_{56} = 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

де E_i – модулі Юнга,

G_{ij} – модулі зсуву,

μ_{ij} – коефіцієнти Пуассона, $\mu_{ij}E_j = \mu_{ji}E_i$.

Однонаправлені волокнисті композити є трансверсально-ізотропними.

Нехай вісь x_3 співпадає з напрямком волокон. Закон Гука (1.4), (1.5) можна записати у вигляді:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_T} - \mu_T \frac{\sigma_{22}}{E_T} - \mu_T \frac{\sigma_{33}}{E_L},$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{22} &= -\mu_T \frac{\sigma_{11}}{E_T} + \frac{\sigma_{22}}{E_T} - \mu_T \frac{\sigma_{33}}{E_L}, \\
\varepsilon_{33} &= -\mu_T \frac{\sigma_{11}}{E_L} - \mu_T \frac{\sigma_{22}}{E_L} + \frac{\sigma_{33}}{E_L}, \\
\varepsilon_{23} &= \frac{\sigma_{23}}{G_L}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{G_L}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G_T}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Властивості таких композитів описуються за допомогою шести незалежних пружних констант: $E_L = E_3$, $E_T = E_1 = E_2$, $G_L = G_{13} = G_{23}$, $G_T = G_{12}$, $\mu_L = \mu_{31} = \mu_{32}$, $\mu_T = \mu_{12} = \mu_{21}$, при чьому $\mu_{13} = \mu_{23} = \mu_L E_T / E_L$.

Гексагональна решітка циліндричних волокон є трансверсально-ізотропною. До співвідношень (1.6) додається залежність $G_T = E_T / [2(1 + \mu_T)]$, а число незалежних пружних констант скорочується до п'яти.

В зернистих композитах три площини симетрії взаємозамінні. Закон Гука має вигляд:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E} - \mu_T \frac{\sigma_{22}}{E} - \mu_T \frac{\sigma_{33}}{E}, \\
\varepsilon_{22} &= -\mu \frac{\sigma_{11}}{E} + \frac{\sigma_{22}}{E} - \mu_T \frac{\sigma_{33}}{E}, \\
\varepsilon_{33} &= -\mu \frac{\sigma_{11}}{E} - \mu \frac{\sigma_{22}}{E} + \frac{\sigma_{33}}{E}, \\
\varepsilon_{23} &= \frac{\sigma_{23}}{G}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{G}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G},
\end{aligned} \tag{1.7}$$

де $E = E_1 = E_2 = E_3$, $G = G_{12} = G_{13} = G_{23}$, $\mu = \mu_{ij}$. Число незалежних пружних констант дорівнює трьом.

Нарешті, у випадку ізотропного середовища додатково до рівняння (1.7) виконується співвідношення $G = E / [2(1 + \mu)]$. При цьому незалежними залишаються тільки дві пружні константи.

До практичних задач для опису властивостей матеріалів часто використовується об'ємний модуль K , який встановлює зв'язок між об'ємною деформацією й сумою нормальних напружень. При плоскій поперечній деформації волокнистих композитів ($\varepsilon_{33} = 0$):

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2K_T(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}),$$

$$\text{де } K_T = \left[\frac{2(1 - \mu_T)}{E_T} - \frac{4\mu_L^2}{E_L} \right]^{-1}.$$

При деформації зернистих композитів:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3K(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}),$$

$$\text{де } K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}.$$

Наведені основні рівняння механіки компоозиційних матеріалів є базовими для розв'язування задач цього розділу механіки суцільного середовища.

Розглянемо два основних елементи механічних моделей в'язкопружних тіл: пружний і в'язкий. Конструктивно пружний елемент можна уявити собі у вигляді пружини. Подовження її δ_y пропорційне прикладеній силі P

$$\delta_y = k_1 P, \quad (1.8)$$

де k_1 – коефіцієнт пропорційності.

В'язкий елемент може бути зображений у вигляді циліндра, заповненого рідиною, усередині якого переміщається поршень так, що рідина витікає через зазор між циліндром і поршнем. Швидкість переміщення δ_ϵ поршня щодо циліндра пропорційна прикладеній силі P :

$$\frac{\partial \delta_\epsilon}{dt} = k_2 P, \quad (1.9)$$

де k_2 – коефіцієнт пропорційності.

Якщо з'єднати пружний і в'язкий елементи послідовно, то зміна відстані між точками прикладення сил P дорівнюватиме сумі подовження пружини δ_y і переміщення поршня щодо циліндра δ_ϵ :

$$\delta = \delta_y + \delta_\epsilon;$$

диференціюючи це співвідношення за часом і використовуючи вирази (1.8) та (1.9), маємо:

$$\frac{d\delta}{dt} = k_1 \frac{dP}{dt} + k_2 P.$$

Переходячи від переміщення δ і сили P до деформації ϵ і напруження σ й замінюючи коефіцієнти k_1 і k_2 на $\frac{1}{E}$ і $\frac{1}{\eta}$ відповідно, де E – модуль пружності, η – коефіцієнт в'язкості, отримуємо

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (1.10)$$

Останнє рівняння (1.10) описує так зване в'язкопружне тіло Максвелла.

Розглянемо деякі властивості цього тіла. Як впливає з рівняння (1.10), при сталому у часі напруженні деформація зростає з постійною швидкістю, пропорційною напруженню, тобто матеріал поводить себе як в'язка рідина, що не підтверджується експериментальними дослідженнями конструкційних матеріалів.

При сталій деформації з рівняння (1.10) випливає, що

$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} = 0.$$

Інтегруючи це рівняння і використовуючи початкову умову при $t = 0$ і $\sigma = \sigma(0)$, отримаємо:

$$\sigma = \sigma(0) \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right),$$

де величина

$$t_0 = \frac{\eta}{\sigma} \quad (1.11)$$

являє собою час, за який початкове напруження $\sigma(0)$ зменшується в e разів. Цю величину називають часом релаксації. Згідно з отриманою залежністю напруження зменшується в часі за експоненціальним законом, прагнучи до нуля.

З'єднаємо тепер пружний і в'язкий елементи паралельно. Тоді очевидно, що сила P дорівнює сумі сил P_1 та P_2 , що діють на пружний і в'язкий елементи:

$$P = P_1 + P_2.$$

Використовуючи вирази (1.8) і (1.9), отримуємо

$$P = \frac{\delta}{k_1} + \frac{1}{k_2} \frac{d\delta}{dt}.$$

Переходячи від сили P і переміщення δ до напруження σ й деформації ε і замінюючи так само, як і раніше, коефіцієнти k_1 і k_2 на $\frac{1}{E}$ і $\frac{1}{\eta}$ відповідно, отримуємо

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (1.12)$$

Це рівняння описує так зване в'язкопружне тіло Фойгта.

Інтегруючи рівняння (1.12) при сталому напруженні і враховуючи, що в початковий момент часу деформація дорівнює нулю, отримуємо

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) \right]. \quad (1.13)$$

З рівняння (1.13) робимо висновок, що деформація зростає по експотенціальному закону, прагнучи до величини $\frac{\sigma}{E}$.

Як впливає з рівняння (1.12), при сталій деформації напруження теж є сталим, тобто це рівняння не відображає релаксації напружень, що є його недоліком.

Як впливає з викладеного, моделі Максвелла і Фойгта тільки якісно відображають деякі сторони складних процесів деформування матеріалів в часі.

Розглянемо більш складну модель, що складається з пружного елемента, послідовно з'єднаного з двома паралельно з'єднаними пружним елементом і в'язким елементом.

У цьому випадку зміна відстані між точками докладання сил P буде дорівнювати сумі подовження пружини – δ_1 і подовження пружини – δ_2 , який дорівнює переміщенню поршня відносно циліндра у в'язкому елементі

$$\delta = \delta_1 + \delta_2.$$

Диференціюючи це співвідношення за часом, отримуємо

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta_1}{dt} + \frac{d\delta_2}{dt}. \quad (1.14)$$

Залежність між переміщеннями δ_1 і δ_2 і силами, діючими на модель, – P , на пружину – P_y і поршень – P_θ :

$$\delta_1 = k_1 P; \quad \delta_2 = k_2 P_y; \quad \frac{d\delta_2}{dt} = k_3 P_\theta, \quad (1.15)$$

причому

$$P = P_y + P_\theta. \quad (1.16)$$

Підставимо співвідношення (1.15) в вираз (1.14), використовуючи при цьому рівність (1.16) тоді отримаємо:

$$\begin{aligned}\frac{d\delta}{dt} &= k_1 \frac{dP}{dt} + k_3 P_\theta = k_1 \frac{dP}{dt} + k_3 (P - P_y) = k_1 \frac{dP}{dt} + k_3 P - \frac{k_3}{k_2} \delta_2 = \\ &= k_1 \frac{dP}{dt} + k_3 P - \frac{k_3}{k_2} (\delta - \delta_1) = k_1 \frac{dP}{dt} + k_3 P - \frac{k_3}{k_2} \delta + \frac{k_3 k_1}{k_2} P,\end{aligned}$$

Звідки

$$\frac{dP}{dt} + \frac{k_3(k_1 + k_2)}{k_1 k_2} P = \frac{1}{k_1} \frac{d\delta}{dt} + \frac{k_3}{k_1 k_2} \delta.$$

Переходячи від переміщення δ і сили P до деформації ε і напруження σ й замінюючи коефіцієнти k_1 і k_2 відповідно на $\frac{1}{E_1}$ і $\frac{1}{E_2}$, а k_3 на $\frac{1}{\eta}$, отримуємо

$$\frac{d\sigma}{dt} + \alpha\sigma = E \left(\frac{d\varepsilon}{dt} + \beta\varepsilon \right), \quad (1.17)$$

де

$$\alpha = \frac{E_1 + E_2}{\eta}; \quad \beta = \frac{E_2}{\eta}; \quad E = E_1. \quad (1.18)$$

Рівняння (1.17) описує в'язкопружне тіло Кельвіна.

У окремому випадку дуже швидкого прикладання навантаження, коли похідні за часом від напружень і деформацій досить великі і другими доданками в правій і лівій частинах рівності (1.17) в порівнянні з першими можна знехтувати, отримуємо

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \frac{d\varepsilon}{dt}$$

і, отже,

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Величину $\frac{E\beta}{\alpha}$ називають тривалим модулем пружності.

Зі співвідношень (1.18) робимо висновок, що $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ і тому тривалий модуль пружності менше миттєвого.

Спочатку розв'яжемо рівняння (1.17) відносно деформації. При цьому припустимо, що в початковий момент часу $t=0$ деформації є пружними, а модуль пружності дорівнює миттєвому модулю E . Тоді після перетворень отримаємо

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \left\{ \sigma + (\alpha - \beta) \int_0^t \sigma(\xi) \exp[-\beta(t - \xi)] d\xi \right\}. \quad (1.19)$$

У разі сталого напруження $\sigma = const$ отримуємо рівняння кривої повзучості

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \left\{ 1 + \frac{\alpha - \beta}{\beta} [1 - \exp(-\beta t)] \right\}. \quad (1.20)$$

З цієї формули випливає, що ордината асимптоти кривої повзучості в обраному масштабі дорівнює деформації, розрахованої за напруженням σ за допомогою тривалого модуля пружності $\frac{\alpha}{\beta} \frac{\sigma}{E}$.

Якщо процес повзучості при сталому напруженні σ відбувається протягом часу t_1 , а потім напруження миттєво зменшується до нуля, то деформація миттєво зменшиться на величину пружної деформації $\frac{\sigma}{E}$, а наступний процес зміни деформації (зворотна повзучість або зворотна післядія) буде визначатися формулою:

$$\varepsilon = \frac{(\alpha - \beta)}{E} \int_0^{t_1} \sigma \exp[-\beta(t - \xi)] d\xi = \frac{(\alpha - \beta)}{\beta} \frac{\sigma}{E} \{ \exp[-\beta(t - t_1)] - \exp(-\beta t) \}. \quad (1.21)$$

З отриманого рівняння випливає, що при необмеженому збільшенні часу деформація ε прагне до нуля, тобто вся деформація повзучості є оборотною і післядія в тілі Кельвіна пружна.

Розв'яжемо тепер рівняння (1.17) відносно σ . Припустимо, що в початковий момент часу деформації є пружними, а модуль пружності дорівнює миттєвому модулю. Після перетворень отримаємо

$$\sigma = E \left\{ \varepsilon - (\alpha - \beta) \int_0^t \varepsilon(\xi) \exp[-\alpha(t - \xi)] d\xi \right\}. \quad (1.22)$$

У разі сталої деформації $\varepsilon = const$ (процес релаксації) з цього рівняння одержуємо рівняння кривої релаксації

$$\sigma = E\varepsilon \left\{ 1 - \frac{\alpha - \beta}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha t)] \right\}. \quad (1.23)$$

Як випливає з викладеного, модель тіла Кельвіна на відміну від моделей тіл Максвелла і Фойгта відображає обидві сторони явища повзучості – власне повзучість або післядію і релаксацію напружень, а також явище зворотної

повзучості. Проте експериментальні дослідження повзучості більшості матеріалів не узгоджуються кількісно з результатами, отриманими на основі моделі тіла Кельвіна.

Можна побудувати більш складних моделі в'язкопружних матеріалів, що складаються з чотирьох або більшого числа пружних і в'язких елементів.

Однак використання складних багатоелементних моделей приводить до громіздких математичних виразів і не дозволяє задовільно описати деформування реальних матеріалів в часі.

Можна узагальнити рівняння (1.17), додавши в правій і лівій частинах рівності похідні вищого порядку, що призведе до наступного виразу:

$$a_0\sigma + a_1 \frac{d\sigma}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n\sigma}{dt^n} = b_0\sigma + b_1 \frac{d\varepsilon}{dt} + \dots + b_n \frac{d^n\varepsilon}{dt^n}. \quad (1.24)$$

Це рівносильно побудові багатоелементних моделей.

Найпростішою лінійною теорією, в основі якої лежить принцип накладання (суперпозиції) деформацій, є лінійна теорія спадковості Больцмана–Вольтерра.

Припустимо, що в момент часу ξ (відлік часу ведеться від початку навантаження), протягом малого проміжку $d\xi$, напруження в розтягнутому стержні дорівнює $\sigma(\xi)$. Це напруження викликало деяку деформацію, яка згодом змінюється в часі. Покладемо, що в момент часу $t > \xi$ ця деформація пропорційна напруженню $\sigma(\xi)$, тривалості впливу $d\xi$ і деякій спадній функції відрізка часу $t - \xi$, яку позначимо $H(t - \xi)$; при цьому деформація є обернено пропорційною модулю пружності E . Функція $H(t - \xi)$ повинна бути спадною функцією часу t , оскільки з плином часу матеріал «забуває» про вплив напруження σ . Залежність функції H від різниці двох аргументів $t - \xi$

свідчить про те, що ця функція не змінюється при зміні початку відліку часу, тобто вона є інваріантною відносно початку відліку часу.

Для опису деформування старіючих матеріалів, механічні властивості яких змінюються в часі, як наприклад, бетонів, функція H повинна бути функцією аргументів t і ξ окремо.

Згідно з принципом суперпозиції величина деформації в момент часу t , що виникла за рахунок напружень, що діяли до моменту часу t , дорівнює

$$\frac{1}{E} \int_0^t H(t - \xi) \sigma(\xi) d\xi.$$

Напруження в момент часу t викликає пружну деформацію $\frac{\sigma}{E}$. Отже, повна деформація в момент часу t складається з цієї деформації і деформації, що виникла за рахунок напружень, що діяли до моменту часу t :

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \left[\sigma + \int_0^t H(t - \xi) \sigma(\xi) d\xi \right]. \quad (1.25)$$

Рівняння (1.25) дозволяє за даним законом зміни напружень в часі визначити закон зміни деформації і, зокрема, описати явище повзучості (післядії) при сталому напруженні. У цьому випадку $\sigma = \sigma(0) = const$ і з рівняння (1.25) отримуємо

$$\varepsilon = \frac{\sigma(0)}{E} \left[1 + \int_0^t H(t - \xi) d\xi \right]. \quad (1.26)$$

За допомогою останнього рівняння може бути побудована крива повзучості при сталому напруженні, якщо відоме ядро $H(t)$ інтегрального рівняння (1.25). Останнє можна знайти з відомої кривої повзучості. Для цього продиференціюємо вираз (1.26). Тоді отримаємо

$$\zeta = \frac{\sigma(0)}{E} \frac{d}{dt} \int_0^t H(\chi) d\chi = \frac{\sigma(0)}{E} H(t), \quad (1.27)$$

де $\chi = t - \xi$.

Отже,

$$H(t) = \frac{E\zeta}{\sigma(0)}.$$

Таким чином, ядро інтегрального рівняння (1.27) визначається законом зміни швидкості деформації у часі.

Найпростішим ядром інтегрального рівняння (1.27) є спадна показникова функція

$$e^{-a-\xi}. \quad (1.28)$$

Підставляючи її в вираз (1.27), отримаємо

$$E\varepsilon = \sigma + \int_0^t C e^{-a-(t-\xi)} \sigma(\xi) d\xi. \quad (1.29)$$

Диференціюючи це рівняння за t , маємо:

$$E \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + C\sigma - a \int_0^t C e^{-a-(t-\xi)} \sigma(\xi) d\xi. \quad (1.30)$$

Виключаючи з рівнянь (1.29) і (1.30) інтеграл, встановлюємо:

$$\frac{d\sigma}{dt} + (C + a)\sigma = E \left(\frac{d\varepsilon}{dt} + a\varepsilon \right).$$

Порівнявши отриманий результат з рівнянням (1.17), бачимо, що вони збігаються, причому $\alpha = C + a$; $\beta = a$.

Таким чином, вибір ядра у вигляді функції (1.28) рівносильний використанню моделі в'язкопружного тіла Кельвіна.

Якщо $a = 0$ і ядро обираємо у вигляді сталої величини, отримуємо тіло Максвелла (рівняння (1.10)).

Ядро інтегрального рівняння (1.25) можна вибрати у вигляді суми спадних показникових функцій

$$H(t - \xi) = \sum_{i=1}^n C_i e^{-a_i(t-\xi)}. \quad (1.31)$$

Можна показати, що в такому випадку інтегральне рівняння (1.25) еквівалентне лінійному диференціальному рівнянню n -го порядку (1.24).

Больцманом було запропоновано ядро інтегрального рівняння у вигляді

$$H(t - \xi) = \frac{C}{t - \xi}. \quad (1.32)$$

Ядро Больцмана (1.32) має сильну особливість в тому сенсі, що в початковий момент часу швидкість деформації нескінченно велика і інтеграл

від нього є розбіжним. Цей недолік може бути усунений вибором ядра у вигляді, запропонованому Дюффіном:

$$H(t - \xi) = \frac{C}{(t - \xi)^a}, \quad (1.33)$$

де $0 < a < 1$.

У такому випадку з виразу (1.26) отримуємо рівняння кривої повзучості при сталому напруженні:

$$\varepsilon = \frac{\sigma(0)}{E} \left(1 + \frac{C}{1-a} t^{1-a} \right).$$

У роботі [4] наведені інші типи ядер, зокрема, ядро Работнова

$$H(t - \xi) = \frac{(t - \xi)^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}, \quad (1.34)$$

де $\Gamma(1 + \alpha)$ – Гамма-функція.

З формули (1.27) випливає, що границя деформації при прагненні часу до нескінченності має вигляд:

$$\varepsilon(\infty) = \frac{\sigma(0)}{E} \left[1 + \int_0^\infty H(\chi) d\chi \right].$$

Таким чином, величина

$$\frac{E}{1 + \int_0^{\infty} H(\chi) d\chi}$$

може бути названа тривалим модулем пружності.

Розглянемо явище зворотної повзучості. Припустимо, що після повзучості стержня при сталому напруженні $\sigma(0)$ протягом часу t_1 стержень розвантажується. Миттєве зменшення деформації при розвантаженні за законом розвантаження (законом Гука) дорівнює $\frac{\sigma(0)}{E}$. Подальше зменшення деформації встановлюємо згідно з формулою (2.19).

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma(0)}{E} \int_0^{t_1} H(t - \xi) d\xi = -\frac{\sigma(0)}{E} \int_t^{t-t_1} H(\chi) d\chi = \\ &= \frac{\sigma(0)}{E} \int_{t-t_1}^t H(\chi) d\chi = \frac{\sigma(0)}{E} \left[\int_0^t H(\chi) d\chi - \int_0^{t-t_1} H(\chi) d\chi \right]. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Різниця інтегралів в квадратних дужках, очевидно, зменшується зі збільшенням часу t і прагне до нуля при прагненні часу t до нескінченності. Таким чином, як і у випадку тіла Кельвіна, післядія є пружною.

Рівняння (1.26) відносно функції σ є лінійним інтегральним рівнянням Вольтерра другого роду. Функція $H(t - \xi)$ є ядром цього рівняння (ξ – змінна інтегрування, змінюється від 0 до t).

У роботі [3] розвинений варіант цієї теорії, що відображає повзучість і старіння бетону. В цьому випадку

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} - \int_{\xi_1}^t \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{E(\xi)} + C(t, \xi) \right] d\xi, \quad (1.36)$$

де ξ_1 – вік матеріалу,

$C(t, \xi)$ – так звана міра повзучості.

Співвідношення (1.36) є лінійним інтегральним рівнянням Вольтеррра для функції $\sigma(\xi)$ з ядром

$$K(t, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{E(\xi)} + C(t, \xi) \right].$$

Як показують експериментальні дослідження, ця теорія лінійної спадкової в'язкопружності добре підтверджується дослідами при напруженнях, менших, ніж половина тимчасового опору бетону [3].

Для знаходження характеристик інтегрального оператора, що описує в'язкопружні властивості матеріалу, використовують операційний метод, що дає змогу розв'язувати інтегральні рівняння типу згортки.

Застосуємо перетворення Лапласа до рівняння (1.26). Тоді отримаємо

$$\varepsilon^* = \frac{1}{E} (\sigma^* + \Phi^*), \quad (1.37)$$

де $\Phi^* = \Phi^*(\lambda)$ – зображення функції

$$\Phi(t) = \int_0^t H(t - \xi) \sigma(\xi) d\xi.$$

Воно визначається формулою

$$\Phi(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \int_0^t H(t - \xi) \sigma(\xi) d\xi.$$

Функцію $\Phi(t)$ називають згорткою двох функцій $H(t)$ і $\sigma(t)$. В операційному обчисленні доводиться наступна теорема про згортки [6]:

$$\Phi^* = H^* \sigma^* . \quad (1.38)$$

Підставляючи це співвідношення в формулу (2.32), отримаємо

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma^*}{E} (1 + H^*).$$

Звідки

$$\sigma^* = \frac{E\varepsilon^*}{1 + H^*} . \quad (1.39)$$

Покладемо

$$\frac{1}{1 + H^*} = 1 - R^*$$

та, отже,

$$R^* = \frac{H^*}{1 + H^*} . \quad (1.40)$$

Тоді вираз (1.39) приймає вигляд

$$\sigma^* = E(\sigma^* - \Psi^*), \quad (1.41)$$

де

$$\Psi^* = R^* \varepsilon^* \quad (1.42)$$

згідно теоремі про згортку є зображенням згортки

$$\Psi = \int_0^t R(t - \xi) \varepsilon(\xi) d\xi$$

функцій $R(t)$ та $\varepsilon(t)$. З формул (1.38), (1.39), (1.40) та (1.41) випливає, що

$$\Phi^* = E\Psi^*. \quad (1.43)$$

Переходячи у виразі (2.36) від зображень до оригіналів, отримуємо

$$\sigma = E \left[\varepsilon - \int_0^t R(t - \xi) \varepsilon(\xi) d\xi \right], \quad (1.44)$$

де функція різниці двох змінних $R(t - \xi)$ – резольвента інтегрального рівняння (1.26).

Рівняння (1.44) дозволяє за заданим законом зміни деформацій визначати закон зміни напруг і, зокрема, описати явище релаксації при постійній деформації. В цьому окремому випадку $\varepsilon(t) = \varepsilon(0) = \text{const}$ і з рівняння (1.42) маємо

$$\sigma = E\varepsilon \left[1 - \int_0^t R(t - \xi) d\xi \right]. \quad (1.45)$$

За допомогою останнього рівняння може бути побудована крива релаксації напружень при сталій деформації, якщо відома резольвента інтегрального рівняння (1.26). Остання визначається за зображенням R^* за допомогою формули (1.37), яка, в свою чергу, визначається формулою (1.40).

Перехід від зображення до оригіналу за формулою (1.37) зазвичай пов'язаний з подоланням значних труднощів математичного характеру.

2 ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1 Поняття та властивості перетворення Лапласа

Функцією-оригіналом або оригіналом називають функцію дійсної змінної $f(t)$, яка задовольняє такі умови:

- 1) функція $f(t)$ неперервна або кусково-неперервна, тобто функція $f(t)$ інтегровна на будь-якому скінченному проміжку;
- 2) $f(t) = 0$ при $t < 0$;
- 3) існують такі сталі $M > 0$ та $s_0 \geq 0$, що для всіх t виконується нерівність $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ (де величина $s_0 = \inf s$ називають показником зростання функції $f(t)$).

Зображенням функції-оригіналу $f(t)$ називають функцію $F(p)$ комплексної змінної $p = s + i\sigma$, яка визначається рівністю

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (2.1)$$

Інтеграл, що стоїть справа у формулі (2.1), називають інтегралом Лапласа. Цей інтеграл залежить від параметра p . Функцію $F(p)$ називають також лапласовим зображенням функції $f(t)$.

Той факт, що $F(p)$ є зображенням $f(t)$ символічно записується так:

$$F(p) \doteq f(t), f(t) \doteq F(p).$$

Перетворенням Лапласа функції $f(t)$ називають перетворення, що ставить у відповідність функції дійсної змінної $f(t)$ функцію комплексної змінної $F(p)$ за формулою (1).

Якщо $f(t)$ – функція-оригінал з показником зростання s_0 , то функція $F(p)$ визначена у півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$ і є аналітичною в цій півплощині.

Найпростішою функцією-оригіналом є одинична функція Хелісайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

У подальшому під заданою за допомогою аналітичної формули функцією $f(t)$ розумітимемо функцію $f(t) \cdot \eta(t)$, тобто будемо вважати, що $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Виходячи з означення зображення, можна довести, що $\eta(t) \doteq \frac{1}{p}$, тобто зображенням $f(t) = 1$ є функція $\frac{1}{p}$.

Розглянемо основні властивості перетворення Лапласа.

1. Властивість лінійності. Якщо $f_i(t) \doteq F_i(p)$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, n}$, то

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t) \doteq \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(p).$$

2. Теорема подібності. Якщо $f(t) \doteq F(p)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, то

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

3. Теорема запізнення. Якщо $f(t) \doteq F(p)$, $\tau \in R$, $\tau > 0$, то

$$\eta(t - \tau)f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau}F(p). \quad (2.2)$$

Теорему запізнення зручно використовувати при знаходженні зображень функцій, які на різних проміжках задаються різними аналітичними виразами.

4. Теорема зміщення. Якщо $f(t) \doteq F(p)$, $\alpha \in C$, то

$$e^{-\alpha t}f(t) \doteq F(p + \alpha).$$

5. Диференціювання оригіналу. Якщо функції $f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ є функціями-оригіналами і $f(t) \doteq F(p)$, то

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \doteq p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$f'''(t) \doteq p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0),$$

.....

$$f^{(n)}(t) \doteq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Зокрема, якщо $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то

$$f^{(n)}(t) \doteq p^nF(p).$$

6. Диференціювання зображення. Якщо $F(p) \doteq f(t)$, то

$$\begin{aligned}
 F'(p) &\doteq -tf(t), \\
 F''(p) &\doteq t^2 f(t), \\
 F'''(p) &\doteq -t^3 f(t), \\
 &\dots\dots\dots \\
 F^{(n)}(p) &\doteq (-1)^n t^n f(t).
 \end{aligned}$$

Останню формулу представимо у вигляді

$$t^n f(t) \doteq (-1)^n F^{(n)}(p).$$

7. Інтегрування оригіналу. Якщо $f(t) \doteq F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}. \quad (2.3)$$

8. Інтегрування зображення. Якщо $F(p) \doteq f(t)$ і $\int_p^{+\infty} F(p) dp$ збігається, то

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^{+\infty} F(p) dp.$$

9. Теорема про множення зображень (теорема про згортку або теорема Бореля). Якщо $f_1(t) \doteq F_1(p)$, $f_2(t) \doteq F_2(p)$ то

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \doteq F_1(p) \cdot F_2(p).$$

Тут вираз

$$f_1(t) \cdot f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) \cdot f_2(\tau) d\tau.$$

називають згорткою функцій $f_1(t)$ та $f_2(t)$.

10. Формула Дюамеля. Якщо $f_1(t) \doteq F_1(p)$, $f_2(t) \doteq F_2(p)$, то

$$pF_1(p) \cdot F_2(p) \doteq f_1(0) \cdot f_2(t) + f_1'(t) \cdot f_2(t) = f_1(t) \cdot f_2(0) + f_1(t) \cdot f_2'(t).$$

Ці властивості широко використовуються при знаходженні оригіналів та зображень у операційному численні.

2.2 Знаходження оберненого перетворення Лапласа

У багатьох випадках задане зображення можна перетворити до такого вигляду, коли оригінал легко визначається безпосередньо з використанням властивостей перетворення Лапласа та таблиці зображень. Наведемо деякі методи знаходження оригіналу за заданим зображенням.

1. Знаходження оригіналу $f(t)$ за зображенням $F(p)$, що є правильним раціональним дробом, тобто $F(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, де $P_m(p)$, $Q_n(p)$ – многочлени степенів m та n відповідно, причому $m < n$.

Розкладаємо задане зображення на суму найпростіших дробів

$$\frac{A}{p-a}, \frac{A}{(p-a)^k}, \frac{Bq+C}{p^2+\alpha p+\beta}, \frac{Bq+C}{(p^2+\alpha p+\beta)^k}.$$

Для кожного з дробів знаходимо оригінал, користуючись властивостями перетворення Лапласа. Далі, використовуючи лінійність перетворення Лапласа, знаходимо шуканий оригінал $f(t)$.

2. Знаходження оригіналу для зображення вигляду $F_1(p) \cdot F_2(p)$.

Знаходимо оригінали $f_1(t)$, $f_2(t)$ для зображень $F_1(p)$, $F_2(p)$, тобто

$$F_1(p) \doteq f_1(t), F_2(p) \doteq f_2(t).$$

Обчислюємо згортку функцій $f_1(t)$, $f_2(t)$:

$$f_1(t) \cdot f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau.$$

Далі використовуємо теорему множення:

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq f_1(t) \cdot f_2(t).$$

3. Знаходження оригіналу для зображення вигляду $F(p) = R(p)e^{-p\tau}$, де $R(p)$ – правильний раціональний дріб і $\tau > 0$.

Знаходимо оригінал $r(t)$ за його зображенням $R(p)$.

Далі використовуємо теорему запізнення, згідно з якою шуканий оригінал $f(t)$ визначається за формулою

$$f(t) = \eta(t-\tau)f(t-\tau). \quad (2.4)$$

4. Теорема обернення. Якщо функція $f(t)$ – оригінал з показником зростання s_0 й $F(p)$ – її зображення, то у будь-якій точці неперервності $f(t)$ виражається через $F(p)$ за формулою

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad (2.5)$$

де інтеграл береться по будь-якій прямій $\operatorname{Re} p = s > s_0$ і розуміється як головне значення, тобто

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{s-iR}^{s+iR} e^{pt} F(p) dp.$$

У точках розриву $\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \frac{1}{2} [f(t-0) + f(t+0)]$.

Формулу (2.5) називають формулою обернення Рімана-Мелліна. Вона визначає обернене перетворення Лапласа.

Відшукування оригіналів безпосередньо за формулою (5) є доволі непростою задачею. Тому на практиці звичайно користуються наслідками з теореми обернення – так званими теоремами розкладання.

6. Перша теорема розкладу. Якщо функція $F(p)$ аналітична в нескінченно віддаленій точці, $F(\infty) = 0$ і в деякому околі цієї точки її розвинення в ряд за степенями $1/p$ має вигляд

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}},$$

то функція $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$ є оригіналом, що відповідає зображенню $F(p)$.

7. Друга теорема розкладу. Якщо зображення $F(p)$ є однозначною функцією й має лише скінченне число полюсів p_1, p_2, \dots, p_n , що лежать у скінченній частині площини, то відповідний оригінал $f(t)$ дорівнює сумі лишків функції $F(p)e^{pt}$, що обчислені в усіх полюсах p_k функції $F(p)$, тобто

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \text{res} [F(p)e^{pt}, p_k]. \quad (2.6)$$

Особливе значення для практики має обернене перетворення дробово-раціональних функцій, тобто функцій вигляду $F(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, де

$P_m(p)$, $Q_n(p)$ – многочлени степенів m та n відповідно, причому $m < n$, p_1, p_2, \dots, p_r – корені многочлена $Q_n(p)$ з кратностями l_1, l_2, \dots, l_r , де $l_1 + l_2 + \dots + l_r = n$.

На підставі відомої формули для обчислення лишку функції $\varphi(z)$ у полюсі z_0 порядку n

$$\text{res}\varphi(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n \varphi(z)],$$

з (2.6) одержуємо

$$f(t) = \sum_{k=1}^r \frac{1}{(l_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{l_k - 1}}{dp^{l_k - 1}} [(p - p_k)^{l_k} e^{pt} F(p)], \quad (2.7)$$

де підсумовування виконується по усіх полюсах p_k зображення $F(p)$, тобто по усіх нулях многочлена $Q_n(p)$.

Якщо усі полюси p_k прості, то формула (2.7) набуває спрощеного вигляду:

$$f(t) = \sum_{k=1}^r \lim_{p \rightarrow p_k} [(p - p_k) e^{pt} F(p)]. \quad (2.8)$$

2.3 Застосування операційного числення до розв'язання інтегральних рівнянь типу згортки

Інтегральним рівнянням називається рівняння, яке містить шукану функцію під знаком інтеграла.

Розглянемо інтегральні рівняння Вольєрра першого та другого роду.

До інтегральних рівнянь Вольєрра другого роду відноситься рівняння виду

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt,$$

з ядром $K(x,t)$, яке залежить від різниці аргументів $x-t$, причому $f(x)$, $K(x-t)$ – задані функції, $\varphi(x)$ – шукана. Цей тип рівнянь називають рівняннями типу згортки.

Розглянемо інтегральне рівняння Вольєрра другого роду типу згортки

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt \quad (2.9)$$

Будемо вважати, що $f(x)$, $K(x)$ – достатньо гладкі функції, які мають скінченний порядок зростання. В цьому випадку і функція $\varphi(x)$ при $x \geq 0$ має скінченний порядок зростання. Отже, можна знайти зображення функцій $f(x)$, $K(x)$, $\varphi(x)$ по Лапласу.

Нехай $\varphi(x) \leftrightarrow \Phi(p)$, $f(x) \leftrightarrow F(p)$, $K(x) \leftrightarrow L(p)$.

Оскільки інтеграл у правій частині формули (2.9)

$K(x) \cdot \varphi(x) = \int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt$ – згортка оригіналів $K(x)$, $\varphi(x)$, то за теоремою

Бореля

$$K(x) \cdot \varphi(x) \leftrightarrow L(p) \cdot \Phi(p).$$

Отже інтегральному рівнянню (2.9) буде відповідати операторне рівняння

$$\Phi(p) = F(p) + L(p) \cdot \Phi(p).$$

Звідки

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - L(p)}, \quad L(p) = 1 \quad (2.10)$$

Знайшовши оригінал $\varphi(x)$, який відповідає зображенню (2.10), отримаємо розв'язок інтегрального рівняння (2.9).

Аналогічно розв'язують інтегральні рівняння Вольтерра першого роду, с ядром $K(x,t)$, яке залежить від різниці аргументів $x-t$, тобто рівняння вигляду

$$f(x) = \int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt \quad (2.11)$$

де $f(x)$, $K(x-t)$ – задані функції, $\varphi(x)$ – шукана функція.

Нехай $\varphi(x) \leftrightarrow \Phi(p)$, $f(x) \leftrightarrow F(p)$, $K(x) \leftrightarrow L(p)$. Оскільки інтеграл в правій частині формули (2.11) $K(x) \cdot \varphi(x) = \int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt$ – згортка оригіналів

$K(x)$, $\varphi(x)$, то за теоремою Бореля

$$K(x) \cdot \varphi(x) \leftrightarrow L(p) \cdot \Phi(p).$$

Отже, інтегральному рівнянню (2.11) буде відповідати операторне рівняння

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{L(p)}, \quad L(p) \neq 0.$$

Оригінал для $\Phi(p)$ є розв'язком інтегрального рівняння (2.11).

3 ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНОГО ПОЗДОВЖНЬОГО МОДУЛЯ ПРУЖНОСТІ В'ЯЗКОПРУЖНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО КОМПОЗИТА

3.1 Застосування кінематичної умови узгодження

Визначення механічних характеристик композитів за властивостями їх складових є одним із важливих завдань сучасної механіки композитних матеріалів. Структура таких матеріалів у багатьох випадках являє собою систему односпрямовано армованих шарів, що містять волокна, розділені зв'язуючим матеріалом (матрицею). Механічні характеристики таких шарів визначають як експериментально, так і з використанням аналітичних методів.

Напружено-деформований стан багатьох композиційних матеріалів істотно залежить від часу, що обумовлено наявністю у складових композиту в'язкопружних властивостей. Задачі визначення механічних в'язкопружних характеристик односпрямованих композитів за відомими характеристиками матриці і волокна розглядаються у великій кількості робіт. У [1-5] розглядаються проблеми прогнозування в'язкопружних властивостей композитів при наявності в'язкопружної матриці або в'язкопружного волокна, розглядається також випадок наявності в'язкопружних властивостей як матриці, так і волокна. У публікаціях [1, 2] відзначається, що істотними в'язкопружними властивостями володіють органічні волокна, проте можна виділити певні типи волокон, в'язкопружністю яких можна знехтувати. Поздовжня повзучість композитів для в'язкопружного органічного волокна досліджена у наукових працях [3, 6]. У [3, 5, 7, 8, 10] матриця композиту розглядається як ізотропний в'язкопружний матеріал, при цьому досліджується її поздовжня деформація. В [9] розглянуто чисельне визначення ефективних термов'язкопружних характеристик односпрямованих полімерних композитів,

для чого запропоновано варіант методу квазіконстантних операторів з частковими апроксимаціями.

Задачу визначення характеристик в'язкопружного деформування композитів з використанням теорії спадкової в'язкопружності Больцмана – Вольтерра розглянуто в [11]. Тут запропонована методика визначення ефективних в'язкопружних характеристик композитів, що ґрунтується на застосуванні апроксимації функції деформування ланцюговим дробом та подальшому застосуванні методу операторних ланцюгових дробів.

Одним з найбільш поширених методів моделювання механічних властивостей композиційного матеріалу є його представлення у вигляді суцільного однорідного середовища. Метою даного дослідження є визначення ефективного поздовжнього модуля пружності композиційного матеріалу з в'язкопружною ізотропною матрицею і трансверсально-ізотропним волокном. Для досягнення цієї мети необхідно розв'язати задачу про спільне деформування матриці і волокна в разі їх рівномірного поздовжнього розтягу. Визначення ефективних пружних сталих в'язкопружного композиту ґрунтується на використанні вибраних умов узгодження стану матриці, волокна та композиту, який розглядається як суцільний однорідний матеріал.

Розглянемо осесиметричний напружено-деформований стан циліндричної комірки композиційного матеріалу. Введемо циліндричну систему координат (r, θ, z) , причому вісь Oz збігається з напрямком армування композиту волокном. Моделлю матриці є в'язкопружний ізотропний порожній циліндр $(a \leq r \leq b)$, моделлю волокна є трансверсально-ізотропний суцільний циліндр $(0 \leq r \leq a)$. Передбачається, що радіальні переміщення і напруження на межі контакту матриці і волокна $(r = a)$ є неперервними, осьові переміщення матриці і волокна збігаються. Надалі будемо використовувати символ σ^* для компонент напружень, переміщень та деформацій матриці, символ σ° – для волокна.

На волокно діє осьове стале навантаження, відповідно осьове напруження для волокна також є сталим: $\sigma_z^\circ = \sigma_0^\circ$. Радіальне і тангенціальне напруження $\sigma_r^\circ = \sigma_r^\circ(r, t)$, $\sigma_\theta^\circ = \sigma_\theta^\circ(r, t)$, де t – час, дотичні напруження тут дорівнюють нулю. З рівнянь рівноваги залишається лише одне, інші виконуються тотожно. Це рівняння набуває вигляду:

$$\frac{d\sigma_r^\circ}{dr} + \frac{\sigma_r^\circ - \sigma_\theta^\circ}{r} = 0.$$

Виразивши напруження через переміщення, з останнього рівняння одержимо рівняння щодо радіального переміщення $u_r^\circ(r, t)$ точок волокна:

$$\frac{d^2 u_r^\circ}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r^\circ}{dr} - \frac{u_r^\circ}{r^2} = 0.$$

Його загальний розв'язок має вигляд:

$$u_r^\circ(r, t) = C(t)r + \frac{D(t)}{r}.$$

Оскільки цей розв'язок повинен бути обмеженим при $r=0$, то $D(t) \equiv 0$.

Вираз для радіального переміщення волокна набуває вигляду:

$$u_r^\circ(r, t) = C(t)r, \quad (3.1)$$

Вираз для осьового переміщення і радіального напруження трансверсально-ізотропного матеріалу волокна запишемо згідно з результатами, отриманими в роботі [12]:

$$u_z^\circ(z,t) = \frac{1}{1-\nu_{23}^\circ} \left(\frac{\sigma_0^\circ(1-\nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C(t)\nu_{21}^\circ \right) z, \quad (3.2)$$

$$\sigma_r^\circ(t) = \frac{E_2^\circ}{1-\nu_{23}^\circ} \left(\frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C(t) \right) \quad (3.3)$$

Тут E_1° и E_2° – модулі пружності, ν_{12}° , ν_{21}° и ν_{23}° – коефіцієнти Пуассона, індекс 1 відповідає осі z , перпендикулярній площині ізотропії.

Нормальні напруження в матриці для даної задачі мають вигляд: $\sigma_z^* = \sigma_0^*(t)$, $\sigma_r^* = \sigma_r^*(r,t)$, $\sigma_\theta^* = \sigma_\theta^*(r,t)$, дотичні напруження дорівнюють нулю. Аналогічно розглянутому вище випадку волокна отримуємо радіальні переміщення точок матриці у вигляді:

$$u_r^*(r,t) = A(t)r + \frac{B(t)}{r}. \quad (3.4)$$

Для моделювання в'язкопружних властивостей композиту та його складових застосуємо лінійний інтегральний оператор:

$$\bar{E}[x(t)] = E \cdot \left(x(t) - \int_0^t R(t-\tau)x(\tau)d\tau \right). \quad (3.5)$$

Тут $E = \text{const}$ – миттєвий модуль пружності (значення модуля пружності в'язкопружного матеріалу в початковий момент часу $t=0$), $R(t)$ – ядро релаксації. Оператор, обернений до (3.2), має вигляд:

$$\tilde{E}^{-1}[y(t)] = \frac{1}{E} \cdot \left(y(t) + \int_0^t Q(t-\tau)y(\tau)d\tau \right),$$

де $Q(t)$ – ядро повзучості.

Знайдемо деформації ε_r^* та ε_θ^* матриці. Згідно з формулами Коші, вони набувають вигляду:

$$\varepsilon_r^* = \frac{du_r^*}{dr} = A(t) - \frac{B(t)}{r^2};$$

$$\varepsilon_\theta^* = \frac{u_r^*}{r} = A(t) + \frac{B(t)}{r^2}.$$

Деформацію ε_z^* знайдемо з оберненого закону Гука з урахуванням в'язкопружності матриці:

$$\sigma_z^* = \frac{\tilde{E} \left[(1-\nu)\varepsilon_z^* + \nu(\varepsilon_r^* + \varepsilon_\theta^*) \right]}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

де ν – коефіцієнт Пуассона для її матеріалу. Оскільки $\sigma_z^* = \sigma_0^*(t)$,

$\varepsilon_r^* + \varepsilon_\theta^* = 2A(t)$, то отримуємо:

$$\sigma_0^*(t) = \frac{\tilde{E} \left[(1-\nu)\varepsilon_z^* + 2\nu A(t) \right]}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

З останньої рівності знаходимо ε_z^* :

$$\varepsilon_z^* = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \tilde{E}^{-1} \left[\sigma_0^*(t) \right] - \frac{2\nu}{1-\nu} A(t).$$

Осьове переміщення $u_z^*(r, t)$ точок матриці має вигляд:

$$u_z^*(r, t) = \int_0^z \varepsilon_z^* dz_1 = \left(\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \tilde{E}^{-1}[\sigma_0^*(t)] - \frac{2\nu A(t)}{1-\nu} \right) z. \quad (3.6)$$

З урахуванням ε_z^* , ε_r^* й ε_θ^* знайдемо вираз для радіального напруження σ_r^* :

$$\sigma_r^* = \frac{1}{1-\nu} \tilde{E}[A(t)] - \frac{\tilde{E}[B(t)]}{(1+\nu)r^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_0^*(t). \quad (3.7)$$

На межі контакту матриці і волокна $r = a$ маємо крайові умови неперервності радіальних переміщень і напружень:

$$u_r^*(a) = u_r^\circ(a); \quad (3.8)$$

$$\sigma_r^*(a) = \sigma_r^\circ(a). \quad (3.9)$$

При будь-якому $z = h$ осьові переміщення матриці і волокна повинні бути співпадати:

$$u_z^*(h) = u_z^\circ(h). \quad (3.10)$$

На межі $r = b$ композитної комірки радіальні напруження дорівнюють нулю:

$$\sigma_r^*(b) = 0. \quad (3.11)$$

Використовуючи крайові умови (3.8) – (3.11), а також рівності (3.1) – (3.3), (3.4), (3.6) і (3.7), отримаємо систему рівнянь, з якої визначимо невідомі

функції $A(t)$, $B(t)$ і $C(t)$, а також співвідношення між σ_0° і $\sigma_0^*(t)$. Введемо позначення:

$$\alpha_1 = \frac{1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ}{E_1^\circ(1 - \nu_{23}^\circ)}, \quad \alpha_2 = \frac{2\nu_{21}^\circ}{1 - \nu_{23}^\circ}, \quad \beta_1 = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu},$$

$$\beta_2 = \frac{2\nu}{1 - \nu}, \quad \gamma_1 = \frac{E_2^\circ\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ(1 - \nu_{23}^\circ)}, \quad \gamma_2 = \frac{E_2^\circ}{1 - \nu_{23}^\circ}.$$

Вказана система приймає вигляд:

$$\begin{cases} C(t) = A(t) + \frac{B(t)}{a^2}, \\ \frac{1}{1 - \nu} \tilde{E}[A(t)] - \frac{1}{(1 + \nu)a^2} \tilde{E}[B(t)] + \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_0^*(t) = \gamma_1 \sigma_0^\circ + \gamma_2 C(t), \\ \beta_1 \tilde{E}^{-1}[\sigma_0^*(t)] - \beta_2 A(t) = \alpha_1 \sigma_0^\circ - \alpha_2 C(t), \\ \frac{1}{1 - \nu} \tilde{E}[A(t)] - \frac{1}{(1 + \nu)b^2} \tilde{E}[B(t)] + \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_0^*(t) = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Застосовуючи до обох частин третього рівняння системи (3.12) оператор \tilde{E} , з урахуванням першого рівняння цієї системи і співвідношення $\tilde{E}[\tilde{E}^{-1}[\sigma_0^*(t)]] = \sigma_0^*(t)$, отримаємо:

$$\beta_1 \sigma_0^*(t) - \beta_2 \tilde{E}[A(t)] = \alpha_1 \sigma_0^\circ h(t) - \alpha_2 \left(\tilde{E}[A(t)] + \frac{\tilde{E}[B(t)]}{a^2} \right), \quad (3.13)$$

де $h(t) = \tilde{E}[1] = E\left(1 - \int_0^t R(t-\tau) d\tau\right)$. Замінюючи третє рівняння системи (3.12) на рівняння (3.13), отримаємо систему, розв'язавши яку відносно $\tilde{E}[A(t)]$, $\tilde{E}[B(t)]$ і $C(t)$, отримаємо:

$$\tilde{E}[A(t)] = m\left(\alpha_1(1-\nu)fh(t)\sigma_0^\circ - (\alpha_2\nu(1+\nu) + \beta_1(1-\nu)f)\sigma_0^*(t)\right), \quad (3.14)$$

$$\tilde{E}[B(t)] = m\left(a^2(1+\nu)\alpha_1h(t)\sigma_0^\circ + a^2(1+\nu)(\nu(\alpha_2 - \beta_2) - \beta_1)\sigma_0^*(t)\right), \quad (3.15)$$

$$C(t) = \frac{1}{\gamma_2}\left(m\alpha_1(f-1)h(t) - \gamma_1\right)\sigma_0^\circ + \frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{\nu}{1-\nu} - m\left(\frac{\alpha_2\nu(1+\nu)}{1-\nu} + \nu(\alpha_2 - \beta_2) + \beta_1(f-1)\right)\right)\sigma_0^*, \quad (3.16)$$

де $f = \frac{a^2}{b^2}$ – об'ємний вміст волокна у матеріалі композиту,

$$m = \frac{1}{(\alpha_2 - \beta_2)(1-\nu)f + \alpha_2(1+\nu)}.$$

Введемо позначення:

$$k_1 = m\alpha_1(1-\nu)f, \quad k_2 = m(\alpha_2\nu(1+\nu) + \beta_1(1-\nu)f),$$

$$k_3 = m(1+\nu)\alpha_1, \quad k_4 = m(1+\nu)(\nu(\alpha_2 - \beta_2) - \beta_1), \quad k_5 = \frac{m\alpha_1(f-1)}{\gamma_2},$$

$$k_6 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad k_7 = \frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{\nu}{1-\nu} - m\left(\frac{\alpha_2\nu(1+\nu)}{1-\nu} + \nu(\alpha_2 - \beta_2) + \beta_1(f-1)\right)\right).$$

Застосовуючи до обох частин рівності (3.14) і (3.15) оператор \tilde{E}^{-1} , знаходимо вирази для функцій $A(t)$ і $B(t)$:

$$A(t) = k_1 \sigma_0^\circ - k_2 \tilde{E}^{-1} \left[\sigma_0^*(t) \right], \quad (3.17)$$

$$B(t) = k_3 a^2 \sigma_0^\circ + k_4 a^2 \tilde{E}^{-1} \left[\sigma_0^*(t) \right]. \quad (3.18)$$

Вираз для $C(t)$ приймає вигляд:

$$C(t) = (k_5 h(t) - k_6) \sigma_0^\circ + k_7 \sigma_0^*(t). \quad (3.19)$$

Знайдемо співвідношення між $\sigma_0^*(t)$ і σ_0° , для цього використовуємо перше з рівнянь системи (3.12). Підставляючи туди рівності (3.17) – (3.19), отримаємо:

$$(k_5 h(t) - k_6 - k_1 - k_3) \sigma_0^\circ + k_7 \sigma_0^*(t) = (k_4 - k_2) \tilde{E}^{-1} \left[\sigma_0^*(t) \right].$$

Застосувавши до цього рівняння оператор \tilde{E} , знайдемо:

$$k_7 \tilde{E} \left[\sigma_0^*(t) \right] + (k_2 - k_4) \sigma_0^*(t) = \tilde{E} \left[k_1 + k_3 + k_6 - k_5 h(t) \right] \sigma_0^\circ. \quad (3.20)$$

Застосуємо до отриманого інтегрального рівняння щодо функції $\sigma_0^*(t)$ перетворення Лапласа. Для оператора $\tilde{E} \left[x(t) \right]$, який визначається рівністю (3.5), перетворення Лапласа має вигляд:

$$\tilde{E} \left[x(t) \right] \div E \left(\tilde{X}(p) - \tilde{R}(p) \tilde{X}(p) \right) = E \tilde{X}(p) (1 - \tilde{R}(p)), \quad (3.21)$$

де $\tilde{X}(p) \div x(t)$, $\tilde{R}(p) \div R(t)$. Знайдемо зображення функції $h(t)$:

$$h(t) = \tilde{E}[1] \div \frac{E(1 - \tilde{R}(p))}{p}. \quad (3.22)$$

Застосування перетворення Лапласа до рівняння (3.20) з урахуванням співвідношень (3.21) і (3.22) призводить до алгебраїчного рівняння відносно функції $\tilde{S}(p)$, що є зображенням функції $\sigma_0^*(t)$:

$$\begin{aligned} & k_7 E \tilde{S}(p) (1 - \tilde{R}(p)) + (k_2 - k_4) \tilde{S}(p) = \\ & = \frac{E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E(1 - \tilde{R}(p))) (1 - \tilde{R}(p))}{p} \sigma_0^\circ. \end{aligned}$$

З цього рівняння знаходимо $\tilde{S}(p)$:

$$\tilde{S}(p) = \frac{E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E(1 - \tilde{R}(p))) (1 - \tilde{R}(p))}{p(k_7 E(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4)} \sigma_0^\circ \div \sigma_0^*(t) = \phi(t) \sigma_0^\circ.$$

Таким чином, співвідношення між $\sigma_0^*(t)$ та σ_0° визначається рівністю

$$\sigma_0^*(t) = \phi(t) \sigma_0^\circ, \quad (3.23)$$

де $\phi(t)$ є оригіналом функції $\tilde{\Phi}(p) = \frac{E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E(1 - \tilde{R}(p))) (1 - \tilde{R}(p))}{p(k_7 E(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4)}$.

Отримавши розв'язок задачі про спільне деформування матриці і волокна, розглянемо поздовжнє розтягнення для трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює поведінку даного композиту. Він є в'язкопружним. Поле напружень для нього моделюється співвідношеннями:

$$\sigma_z = \sigma_0(t), \quad \sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0. \quad (3.24)$$

Для розглянутого матеріалу формули оберненого закону Гука для нормальних напружень мають вигляд:

$$\sigma_z = \frac{\tilde{E}_1 \left[(1 - \nu_{23}^2) \varepsilon_z + \nu_{21} (1 + \nu_{23}) (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) \right]}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \quad (3.25)$$

$$\sigma_r = \frac{\tilde{E}_2 \left[\nu_{12} (1 + \nu_{23}) \varepsilon_z + (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \varepsilon_r + (\nu_{23} + \nu_{12}\nu_{21}) \varepsilon_\theta \right]}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \quad (3.26)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\tilde{E}_2 \left[\nu_{12} (1 + \nu_{23}) \varepsilon_z + (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \varepsilon_\theta + (\nu_{23} + \nu_{12}\nu_{21}) \varepsilon_r \right]}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}. \quad (3.27)$$

Тут \tilde{E}_1 – лінійний інтегральний оператор, аналогічний (3.5):

$$\tilde{E}_1 [x(t)] = E_1 \cdot \left(x(t) - \int_0^t R_1(t-\tau) x(\tau) d\tau \right), \quad (3.28)$$

де $E_1 = \text{const}$ – миттєвий модуль пружності, $R_1(t)$ – ядро релаксації, оператори

$$\tilde{E}_2 \text{ та } \tilde{E}_1 \text{ пов'язані співвідношенням: } \frac{\tilde{E}_1}{\nu_{12}} = \frac{\tilde{E}_2}{\nu_{21}}.$$

Знайдемо лінійні деформації ε_z , ε_r та ε_θ . Для цього до обох частин рівності (3.25) застосуємо обернений оператор \tilde{E}_1^{-1} , до рівностей (3.26) та (3.27) – оператор \tilde{E}_2^{-1} . Отримаємо систему:

$$\begin{aligned} & (1 - \nu_{23}^2) \varepsilon_z + \nu_{21} (1 + \nu_{23}) (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) = \\ & = \left(1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12} \right) \tilde{E}_1^{-1} [\sigma_0(t)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_{12}(1+\nu_{23})\varepsilon_z + (1-\nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_r + (\nu_{23} + \nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_\theta &= 0; \\ \nu_{12}(1+\nu_{23})\varepsilon_z + (\nu_{23} + \nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_r + (1-\nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_\theta &= 0. \end{aligned}$$

З цієї системи знаходимо деформацію ε_z :

$$\varepsilon_z = \tilde{E}_1^{-1}[\sigma_0(t)], \quad (3.29)$$

Знайдемо переміщення $u_z(z, t)$:

$$u_z(z, t) = \int_0^z \varepsilon_z dz_1 = \tilde{E}_1^{-1}[\sigma_0(t)] \cdot z. \quad (3.31)$$

Значення $\sigma_0^*(t)$, σ_0° та $\sigma_0(t)$ повинні задовольняти умові рівноваги:

$$\pi a^2 \sigma_0^\circ + \pi (b^2 - a^2) \sigma_0^*(t) = \pi b^2 \sigma_0(t).$$

Підставляючи в цю рівність (3.23), отримаємо:

$$f \cdot \sigma_0^\circ + (1-f)\phi(t) \cdot \sigma_0^\circ = \sigma_0(t). \quad (3.32)$$

У якості умови узгодження поздовжнього розтягування моделі композиту і композитної комірки «матриця – волокно» приймемо рівність осьових переміщень: для будь-яких значень координати z $u_z^* = u_z^\circ = u_z$. Звідси випливає рівність осьових деформацій матриці, волокна і моделі композиту. З урахуванням введених позначень з (3.2), (3.19) і (3.23) випливає, що осьова деформація волокна має вигляд:

$$\varepsilon_z^\circ = \alpha_1 \sigma_0^\circ - \alpha_2 (k_5 h(t) - k_6 + k_7 \phi(t)) \sigma_0^\circ. \quad (3.33)$$

Для моделі композита, використовуючи рівність (3.32) й умову (3.23), можна записати, що

$$\varepsilon_z = \tilde{E}_1^{-1} [\sigma_0(t)] = \tilde{E} k_5 h(t) - k_6 + k_7 \phi(t) \tilde{E}_1^{-1} [f \cdot \sigma_0^\circ + (1-f) \phi(t) \sigma_0^\circ]. \quad (3.34)$$

З огляду на умову (3.10), отримаємо, що виконання умови узгодження забезпечує рівність $\varepsilon_z = \varepsilon_z^\circ$. Підставимо в цю рівність співвідношення (3.33) і (3.34):

$$\alpha_1 \sigma_0^\circ - \alpha_2 (k_5 h(t) - k_6 + k_7 \phi(t)) \sigma_0^\circ = \tilde{E}_1^{-1} [f \cdot \sigma_0^\circ + (1-f) \phi(t) \sigma_0^\circ].$$

Застосовуючи до обох частин цієї рівності оператор \tilde{E}_1 , після ділення на відмінну від нуля константу σ_0° отримаємо:

$$f + (1-f) \phi(t) = \tilde{E}_1 [\alpha_1 + \alpha_2 k_6 - \alpha_2 k_5 h(t) - \alpha_2 k_7 \phi(t)]. \quad (3.35)$$

З (3.28) випливає, що (3.35) являє собою лінійне інтегральне рівняння типу згортки щодо невідомого ядра перетворення (3.28) $R_1(t)$. Для його розв'язання використовуємо перетворення Лапласа. Нехай $R_1(t) \div \tilde{R}_1(p)$. Оскільки зображення для оператора (3.28) $\tilde{E}_1 [x(t)] \div E_1 \tilde{X}(p) (1 - \tilde{R}_1(p))$, то, з урахуванням отриманого раніше зображення функції

$$\phi(t) \div \tilde{\Phi}(p) = \frac{E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E(1 - \tilde{R}(p)))(1 - \tilde{R}(p))}{p(k_7 E(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4)},$$

отримаємо зображення рівняння (2.35). З нього знаходимо:

$$\tilde{R}_1(p) = \frac{E_1 F_2(p) - F_1(p)}{E_1 F_2(p)}, \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} F_1(p) &= f(k_7 E(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4) + \\ &+ (1 - f)E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E(1 - \tilde{R}(p)))(1 - \tilde{R}(p)); \\ F_2(p) &= (\alpha_1 + \alpha_2 k_6)(k_7 E(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4) - \\ &- \alpha_2 k_5(1 - \tilde{R}(p))E(Ek_7(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4) - \\ &- \alpha_2 k_7 E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E(1 - \tilde{R}(p)))(1 - \tilde{R}(p)). \end{aligned}$$

Знайдемо миттєвий модуль пружності E_1 . Для цього підставимо в рівняння (3.35) $t = 0$ і скористаємося тим, що $\tilde{E}_1[y(0)] = E_1 y(0)$. Отримаємо:

$$f + (1 - f) \cdot \phi(0) = E_1 [\alpha_1 + \alpha_2 k_6 - \alpha_2 k_5 h(0) - \alpha_2 k_7 \phi(0)]. \quad (3.37)$$

Знайдемо $\phi(0)$. Відомо те, що для диференційовної функції – оригіналу $\phi(t)$, що має зображення $\Phi(p)$, $\lim_{p \rightarrow \infty} p\Phi(p) = \phi(0)$. Враховуючи, що $\tilde{R}(p)$ є зображенням, і тому $\lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{R}(p) = 0$, визначимо значення $\phi(0)$, яке позначимо через k :

$$\begin{aligned}\phi(0) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E(1 - \tilde{R}(p)))(1 - \tilde{R}(p))}{(k_7 E(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4)} = \\ &= \frac{E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E)}{k_7 E + k_2 - k_4} = k.\end{aligned}$$

Підставивши в (3.37) знайдене значення $k = \phi(0)$, а також $h(0) = E$, отримаємо рівняння, з якого визначаємо E_1 :

$$E_1 = \frac{f + (1 - f) \cdot k}{\alpha_1 + \alpha_2(k_6 - k_5 E - k_7 k)}. \quad (3.38)$$

Знайдемо оригінал $R_1(t)$ ядра перетворення \tilde{E}_1 у виразі для ефективного модуля пружності композиту. Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}x = x(p) &= 1 - \tilde{R}(p), \quad c_1 = E(\alpha_1 k_7 + \alpha_2(k_5(k_4 - k_2) - k_7(k_1 + k_3))), \\ c_2 &= (f - 1)E^2 k_5, \quad c_3 = E(fk_7 + (1 - f)(k_1 + k_3 + k_6)), \\ c_4 &= f(k_2 - k_4), \quad x_0 = \frac{(k_4 - k_2)(\alpha_1 + \alpha_2 k_6)}{c_1}.\end{aligned}$$

Тоді зображення $\tilde{R}_1(p)$ (3.36) можна записати у вигляді:

$$\tilde{R}_1(p) = \frac{E_1 c_1 (x - x_0) - c_2 x^2 - c_3 x - c_4}{E_1 c_1 (x - x_0)}. \quad (3.39)$$

Особливими точками зображення $\tilde{R}_1(p)$ (3.39) є особливі точки функції $R(p)$, а також корені рівняння $x(p) = 1 - \tilde{R}(p) = 0$. Для знаходження оригіналу $R_1(t)$ можна використовувати теорему обернення для перетворення Лапласа.

У якості ілюстрації застосування викладеної методики розглянемо випадок експоненціального ядра $R(t) = s_1 e^{s_0 t}$. Тоді $\tilde{R}(p) = \frac{s_1}{p - s_0}$,

$x(p) = \frac{p - s_0 - s_1}{p - s_0}$. Позначимо $y_1 = y_1(p) = p - s_0$, $y_2 = y_2(p) = y_1 - s_1$. Вираз

(3.39) для $\tilde{R}_1(p)$ набуває вигляду:

$$\tilde{R}_1(p) = \frac{E_1 c_1 y_1 (y_2 - x_0 y_1) - c_2 y_2^2 - c_3 y_2 y_1 - c_4 y_1^2}{E_1 c_1 (y_2 - y_1 x_0) y_1}.$$

Особливі точки цієї функції знаходимо з рівнянь $y_2(p) - y_1(p)x_0 = 0$ та $y_1(p) = 0$. Отримуємо два простих полюси: $p_1 = s_0 + \frac{s_1}{1 - x_0}$ та $p_2 = s_0$. Тоді оригінал $R_1(t)$ зображення перетворення $\tilde{R}_1(p)$ знаходимо за формулою:

$$R_1(t) = q_1 e^{p_1 t} + q_2 e^{p_2 t}, \quad (3.40)$$

$$\text{де } q_1 = \text{Res } \tilde{R}_1(p) \Big|_{p=p_1} = -\frac{s_1 (c_2 x_0^2 + c_3 x_0 + c_4)}{E_1 c_1 (1 - x_0)^2}, \quad q_2 = \text{Res } \tilde{R}_1(p) \Big|_{p=s_0} = \frac{c_2 s_1}{E_1 c_1}.$$

Таким чином, для розглянутої в'язкопружної матриці і трансверсально-ізотропного волокна отримано лінійний інтегральний оператор (3.28), за допомогою якого ця система моделюється в'язкопружним трансверсально-ізотропним однорідним матеріалом.

Як приклад застосування викладеної вище методики побудови оператора \tilde{E}_1 проведено розрахунок його характеристик при наступних параметрах волокна і матриці. Матеріалом матриці є гума типу 67 Л, для якої $E_0 = 4,5$ ГПа, статичний (умовно-рівноважний) поздовжній модуль пружності $E_\infty = 2,34$ ГПа, $\nu = 0,5$, інтегральний оператор $\tilde{E}[\varepsilon(t)] = E_0 \left(\varepsilon(t) - \int_0^t \frac{E_0 - E_\infty}{E_0} e^{s_0(t-\tau)} d\tau \right)$, $s_0 = -1$, волокно – поліетилен VHDPE Tenfor SNIA з параметрами $E_1 = 60,4$ ГПа, $E_2 = 4,68$ ГПа, $\nu_{12} = 0,38$, $\nu_{23} = 0,55$. Результати розрахунку наведені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Значення характеристик оператора \tilde{E}_1 при різних значеннях f

f	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
E_1	4,5	15,69	26,87	38,06	40,23	60,4
p_1	-0,89	-0,91	-0,93	-0,95	-0,98	-1,00
q_1	$3,6 \cdot 10^{-17}$	$0,28 \cdot 10^{-3}$	$0,27 \cdot 10^{-3}$	$0,21 \cdot 10^{-3}$	$0,12 \cdot 10^{-3}$	$0,17 \cdot 10^{-9}$
q_2	0,480	0,11	0,048	0,022	0,009	0,00

Для знайдених параметрів реологічної моделі композиту при різних значеннях f побудуємо залежності

$$\begin{aligned} \phi(t) = \tilde{E}_1[1] &= E_1 \left(1 - \int_0^t \left(q_1 e^{p_1(t-\tau)} + q_2 e^{s_0(t-\tau)} \right) d\tau \right) = \\ &= E_1 \left(1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{s_0} - \frac{q_1}{p_1} e^{p_1 t} - \frac{q_2}{s_0} e^{s_0 t} \right). \end{aligned}$$

Вони наведені на рисунку. 3.1.

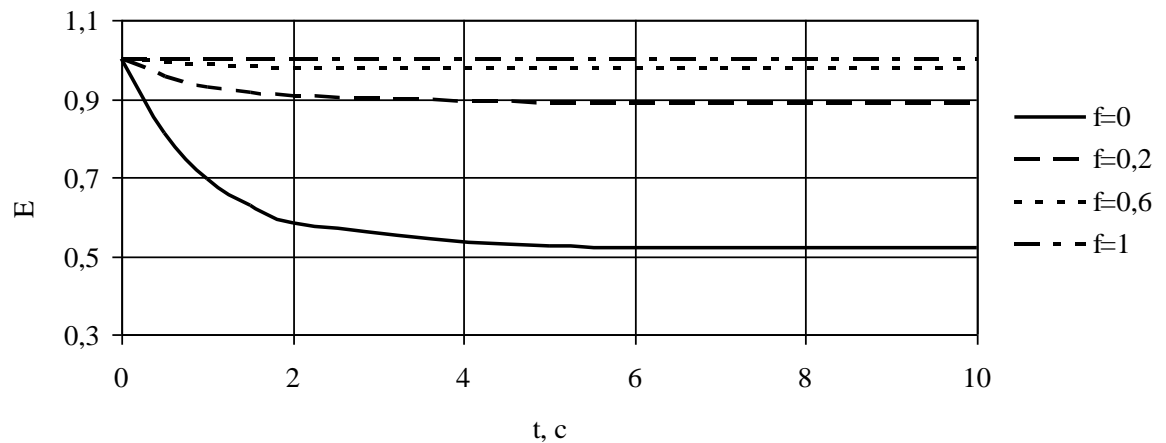


Рисунок 3.1 – Часові залежності $\tilde{E}_1 [1]$ при різних значеннях відносної об'ємної частки f волокна у композиті

Таким чином, розглянута тут методика, що ґрунтується на використанні кінематичної умови узгодження осьових деформацій матриці, волокна та однорідного композиту дозволяє знаходити реологічні параметри ефективного поздовжнього модуля пружності в'язкопружного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює композитну систему «матриця – волокно» для в'язкопружної ізотропної матриці і трансверсально-ізотропного волокна. Вона може бути застосована для різних типів ядер релаксації, що описують в'язкопружні властивості матриці.

3.2 Визначення ефективного модуля пружності композиту з використанням енергетичної умови узгодження

Визначимо ефективний модуль пружності трансверсально-ізотропного в'язкопружного композиту, використовуючи замість кінематичних умов узгодження, використаних у попередньому розділі, енергетичну умову узгодження. Її сутність полягає у тому, що пружні сталі знаходяться з умови

рівності енергії пружної деформації трансверсально-ізотропного однорідного циліндра, що моделює представницьку комірку композиційного матеріалу, та енергії пружної деформації системи коаксіальних циліндрів, яка складається з суцільного циліндра, що моделює волокно, та порожнистого циліндра, що є моделлю матриці. Цю умову можна використати для моделювання ефективних пружних сталей, що визначають механічні характеристики композиту. Застосуємо її до розв'язання задачі, розглянутої у п. 3.1 для випадку, коли не лише волокно, але й матриця композиту володіє трансверсальною ізотропними властивостями.

Спочатку розв'яжемо задач у про спільне деформування волокна та матриці.

Радіальне переміщення точок волокна знаходимо аналогічно п. 3.1:

$$u_r^\circ(r, t) = C(t)r. \quad (3.41)$$

Використовуючи співвідношення Коші та формули закону Гука, знаходимо вирази для осьової деформації та радіально напруження волокна у вигляді:

$$\varepsilon_z^\circ(z, t) = \frac{1}{1 - \nu_{23}^\circ} \left(\frac{\sigma^\circ(t)(1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C(t)\nu_{21}^\circ \right); \quad (3.42)$$

$$\sigma_r^\circ(t) = \frac{E_2^\circ}{1 - \nu_{23}^\circ} \left(\frac{\sigma^\circ(t)\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C(t) \right); \quad (3.43)$$

$$\sigma_\theta^\circ = \frac{E_2^\circ}{1 - \nu_{23}^\circ} \left(\frac{\sigma_0^\circ(t)\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C(t) \right).$$

Тут E_1° та E_2° – відповідно поздовжній та поперечний модулі пружності, ν_{12}° , ν_{21}° и ν_{23}° – коефіцієнти Пуассона, індекс 1 відповідає осі z , перпендикулярній

площині ізотропії. Далі будемо використовувати лише поздовжній модуль пружності першого типу E_1 для матриці та волокна, використавши для переходу від E_2 до E_1 співвідношення $\frac{E_1}{\nu_{12}} = \frac{E_2}{\nu_{21}}$.

Нормальні напруження для матриці у матриці мають вигляд: $\sigma_z^* = \sigma_0^*(t)$, $\sigma_r^* = \sigma_r^*(r, t)$, $\sigma_\theta^* = \sigma_\theta^*(r, t)$, дотичні напруження дорівнюють нулю. Радіальні переміщення точок матриці мають вигляд:

$$u_r^*(r, t) = A(t)r + \frac{B(t)}{r}. \quad (3.44)$$

Для визначення в'язкопружних властивостей матриці та композиту будемо застосовувати лінійний інтегральний оператор:

$$\bar{E}[y(t)] = E \cdot \left(y(t) - \int_0^t R(t-\tau)y(\tau)d\tau \right). \quad (3.45)$$

У рівності (3.45) $E = \text{const}$ – миттєвий модуль пружності, тобто значення цього показника в'язкопружного матеріалу у початковий момент часу $t=0$, $R(t)$ – ядро релаксації. Оператор, обернений до (3.45), має вигляд:

$$\bar{E}^{-1}[y(t)] = \frac{1}{E} \cdot \left(y(t) + \int_0^t Q(t-\tau)y(\tau)d\tau \right), \quad (3.46)$$

де $Q(t)$ – ядро повзучості.

Деформації ε_r^* та ε_θ^* матриці композиту мають вигляд:

$$\varepsilon_r^* = \frac{du_r^*}{dr} = A(t) - \frac{B(t)}{r^2}, \quad (3.47)$$

$$\varepsilon_\theta^* = \frac{u_r^*}{r} = A(t) + \frac{B(t)}{r^2}. \quad (3.48)$$

Використовуючи закон Гука, знаходимо ε_z^* та σ_r^* :

$$\varepsilon_z^* = \frac{1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^*}{1 - \nu_{23}^*} (\bar{E}_1^*)^{-1} [\sigma^*(t)] - \frac{2\nu_{21}^*}{1 - \nu_{23}^*} A(t), \quad (3.49)$$

$$\sigma_r^* = \frac{\nu_{21}^*}{1 - \nu_{23}^*} \sigma^*(t) + \frac{\nu_{21}^*}{\nu_{12}^*(1 - \nu_{23}^*)} \bar{E}_1^* [A(t)] - \frac{\nu_{21}^*}{\nu_{12}^*(1 + \nu_{23}^*)} \cdot \frac{\bar{E}_1^* [B(t)]}{r^2}, \quad (3.50)$$

$$\sigma_\theta^* = \frac{\nu_{21}^*}{1 - \nu_{23}^*} \sigma^*(t) + \frac{\nu_{21}^*}{\nu_{12}^*(1 - \nu_{23}^*)} \bar{E}_1^* [A(t)] + \frac{\nu_{21}^*}{\nu_{12}^*(1 + \nu_{23}^*)} \cdot \frac{\bar{E}_1^* [B(t)]}{r^2}.$$

Напруження σ_z^* та σ_θ^* знаходять за формулами (3.26) та (3.27). З крайових умов (3.8) – (3.11) отримуємо систему рівнянь відносно невідомих функцій $A(t)$ та $B(t)$, $C(t)$, а також співвідношення між напруженнями $\sigma^*(t)$ та $\sigma^\circ(t)$. Застосуємо до цієї системи інтегральне перетворення Лапласа $X(p) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt$. Між оригіналами та зображеннями встановлюємо наступну відповідність: $A(t) \div \tilde{A}(p)$, $B(t) \div \tilde{B}(p)$, $C(t) \div \tilde{C}(p)$, $\sigma^*(t) \div \tilde{\sigma}^*(p)$, $\sigma^\circ(t) \div \tilde{\sigma}^\circ(p)$.

Зображення інтегрального оператора типу згортки

$$\bar{E}_1^* [y(t)] = E_1^* \cdot \left(y(t) - \int_0^t R(t-\tau) y(\tau) d\tau \right) \text{ має вигляд:}$$

$$\tilde{E}_1^* = E_1^* [\tilde{Y}(p)(1 - \tilde{R}(p))],$$

де $\tilde{R}(p)$ – зображення ядра релаксації $R(t)$.

Введемо наступні позначення: $\alpha^* = \frac{v_{21}^*}{1-v_{23}^*}$, $\beta^\circ = \frac{\alpha^\circ}{v_{12}^\circ}$, $\beta^* = \frac{\alpha^*}{v_{12}^*}$,

$$\gamma^* = \frac{v_{21}^*}{v_{12}^*(1+v_{23}^*)}, \delta^\circ = \frac{1-v_{23}^\circ-2v_{12}^\circ v_{21}^\circ}{1-v_{23}^\circ}, \delta^* = \frac{1-v_{23}^*-2v_{12}^* v_{21}^*}{1-v_{23}^*}, y^* = E_1^*(1-\tilde{R}(p)).$$

Для знаходження зображень невідомих функцій $\tilde{A}(p)$, $\tilde{B}(p)$, а також відношення $\frac{\tilde{\sigma}^*}{\tilde{\sigma}^\circ}$ отримуємо систему:

$$\begin{cases} (\beta^\circ E_1^\circ - \beta^* y^*) \tilde{A} + (\beta^\circ E_1^\circ + \gamma^* y^*) \frac{\tilde{B}}{a^2} = \alpha^* \tilde{\sigma}^* - \alpha^\circ \tilde{\sigma}^\circ, \\ \alpha^* \tilde{\sigma}^* + \beta^* y^* \tilde{A} - \gamma^* y^* \frac{\tilde{B}}{b^2} = 0, \\ 2(\alpha^\circ - \alpha^*) y^* \tilde{A} + 2\alpha^\circ y^* \frac{\tilde{B}}{a^2} = -\delta^* \tilde{\sigma}^* + \frac{\delta^\circ}{E_1^0} y^* \tilde{\sigma}^\circ. \end{cases} \quad (3.51)$$

Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} k_1 &= 2((\alpha^* - \alpha^\circ)\gamma^* - \alpha^\circ\beta^*), \quad k_2 = 2\alpha^*\beta^\circ E_1^\circ, \quad k_3 = 2\alpha^\circ\alpha^* + \delta^*\gamma^*, \quad k_4 = \delta^*\beta^\circ E_1^\circ, \\ k_5 &= \frac{\gamma^*\delta^\circ}{E_1^\circ}, \quad k_6 = 2(\alpha^\circ)^2 + \beta^\circ\delta^\circ, \quad k_7 = \beta^*\delta^* + 2(\alpha^* - \alpha^\circ)\alpha^*, \quad k_8 = -\beta^\circ E_1^\circ\delta^*, \\ k_9 &= \frac{\beta^*\delta^\circ}{E_1^\circ}, \quad k_{10} = 2\alpha^\circ(\alpha^* - \alpha^\circ) - \beta^\circ\delta^\circ. \end{aligned}$$

Вирази для \tilde{A} , $\frac{\tilde{B}}{a^2}$ та $\frac{\tilde{\sigma}^*}{\tilde{\sigma}^\circ}$, визначені з (3.46), мають вигляд:

$$\tilde{A} = \frac{(k_3 y^* + k_4) \tilde{\sigma}^* - (k_5 (y^*)^2 + k_6 y^*) \tilde{\sigma}^\circ}{k_1 (y^*)^2 + k_2 y^*}; \quad (3.52)$$

$$\frac{\tilde{B}}{a^2} = \frac{(k_7 y^* + k_8) \tilde{\sigma}^* - (k_9 (y^*)^2 + k_{10} y^*) \tilde{\sigma}^\circ}{k_1 (y^*)^2 + k_2 y^*}; \quad (3.53)$$

$$\frac{\tilde{\sigma}^*}{\tilde{\sigma}^\circ} = \frac{(\beta^* k_5 - \gamma^* f k_9) (y^*)^2 + (\beta^* k_6 - \gamma^* f k_{10}) y^*}{(\alpha^* k_1 + \beta^* k_3 - \gamma^* f k_7) y^* + \alpha^* k_2 + \beta^* k_4 - \gamma^* f k_8}, \quad (3.54)$$

де $f = \frac{a^2}{b^2}$ – відносна частка волокна у об'ємі композиту. Для зображення \tilde{C} отримуємо:

$$\tilde{C} = \tilde{A} + \frac{\tilde{B}}{a^2}. \quad (3.55)$$

Розглянемо поздовжнє розтягнення трансверсально-ізотропного в'язкопружного матеріалу, що моделює композит. Поле напружень для нього визначається співвідношеннями

$$\sigma_z = \sigma_0, \sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0. \quad (3.56)$$

В'язкопружні властивості композиту моделюються за допомогою інтегрального оператора:

$$\tilde{E}_1[x(t)] = E_1 \cdot \left(x(t) - \int_0^t R(t - \tau) x(\tau) d\tau \right), \quad (3.57)$$

де $E_1 = \text{const}$ – миттєвий модуль пружності,

$R(t)$ – ядро релаксації.

Осьова деформація композиту визначається рівністю:

$$\varepsilon_z = \tilde{E}_1^{-1}[\sigma(t)]. \quad (3.58)$$

Зображення осьової деформації однорідного композиту:

$$\tilde{\varepsilon}_z = \frac{\tilde{\sigma}}{E_1(1-\tilde{R})} = \frac{f\tilde{\sigma}^\circ + (1-f)\tilde{\sigma}^*}{E_1(1-\tilde{R})}. \quad (3.59)$$

Знайдемо пружні сталі композиційного матеріалу, використовуючи енергетичний критерій як умову узгодження. Цей критерій полягає в тому, що пружні сталі знаходяться з умови рівності енергії пружної деформації трансверсально-ізотропного однорідного циліндра (або іншого тіла), що моделює композиційний матеріал, та енергії пружної деформації суцільного циліндра, який складається з суцільного циліндра, що моделює волокно, та порожнистого циліндра, що моделює матрицю, тобто

$$U^* + U^\circ = U, \quad (3.60)$$

де енергія пружної деформації для композиційного матеріалу, матеріалу матриці та матеріалу волокна в циліндричній системі координат визначається за формулою:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{r\theta} \gamma_{r\theta} + \tau_{\theta z} \gamma_{\theta z} + \tau_{zr} \gamma_{zr}) r dr d\theta dz. \quad (3.61)$$

Тоді у випадку поздовжнього розтягнення пружна енергія деформації для матриці, волокна й композита набуде вигляду:

$$U^* = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_a^b (\sigma_r^* \varepsilon_r^* + \sigma_\theta^* \varepsilon_\theta^* + \sigma_z^* \varepsilon_z^*) r dr d\theta dz;$$

$$U^\circ = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\sigma_r^\circ \varepsilon_r^\circ + \sigma_\theta^\circ \varepsilon_\theta^\circ + \sigma_z^\circ \varepsilon_z^\circ) r dr d\theta dz; \quad (3.62)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^b (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z) r dr d\theta dz.$$

Після застосування перетворення Лапласа до компонент напружень, переміщень та деформацій з врахуванням співвідношень (3.1) – (3.4), отриманих для напружено-деформованого стану волокна та матриці при поздовжньому розтягненні, а також вирази для зображень функцій $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ (3.52) – (3.55), матимемо:

$$\tilde{U}^\circ = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\tilde{\sigma}_r^\circ \tilde{\varepsilon}_r^\circ + \tilde{\sigma}_\theta^\circ \tilde{\varepsilon}_\theta^\circ + \tilde{\sigma}_z^\circ \tilde{\varepsilon}_z^\circ) r dz dr d\theta, \quad (3.63)$$

де замість компонент напружено-деформованого стану матриці та волокна підставлені їх зображення.

Аналогічно отримуємо:

$$\tilde{U}^* = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\tilde{\sigma}_r^* \tilde{\varepsilon}_r^* + \tilde{\sigma}_\theta^* \tilde{\varepsilon}_\theta^* + \tilde{\sigma}_z^* \tilde{\varepsilon}_z^*) r dr d\theta dz. \quad (3.64)$$

У випадку поздовжнього розтягнення зображення компонент напружено-деформованого стану трансверсально-ізотропного композиційного матеріалу описуватимуться формулами:

$$\tilde{\varepsilon}_r = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \tilde{\sigma}_0; \quad \tilde{\varepsilon}_z = \frac{1}{E_1} \tilde{\sigma}_0; \quad \tilde{\varepsilon}_\theta = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \tilde{\sigma}_0, \quad (3.65)$$

$$\tilde{\sigma}_r = 0, \tilde{\sigma}_\theta = 0, \tilde{\sigma}_z = \tilde{\sigma}_0. \quad (3.66)$$

Для зображення енергії композиту маємо:

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^h (\tilde{\sigma}_r \tilde{\varepsilon}_r + \tilde{\sigma}_\theta \tilde{\varepsilon}_\theta + \tilde{\sigma}_z \tilde{\varepsilon}_z) r dz dr d\theta. \quad (3.67)$$

На основі енергетичної умови узгодження (3.60) з урахуванням виразів для зображення компонент напружень та деформацій матриці, волока та композита отримуємо:

$$f \cdot \tilde{\sigma}^\circ(t) + (1-f) \tilde{\sigma}^*(t) = \tilde{\sigma}(t), \quad (3.68)$$

$$\frac{f \tilde{\sigma}^\circ + (1-f) \tilde{\sigma}^*}{E_1(1-\tilde{R})} = \frac{1}{1-\nu_{23}^\circ} \left(\frac{\tilde{\sigma}^\circ (1-\nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2\tilde{C} \nu_{21}^\circ \right). \quad (3.69)$$

Вирази для зображень $\tilde{\sigma}^\circ$, $\tilde{\sigma}^*$ та \tilde{C} містять $y^* = E_1^*(1-\tilde{R}^*)$. Перейдемо у рівності (3.69) до границі при $p \rightarrow \infty$. Оскільки \tilde{R}^* та \tilde{R} є зображеннями, то $\lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{R}(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{R}^*(p) = 0$ і з (3.69) отримуємо вираз для миттєвого модуля пружності E_1 .

Введемо позначення:

$$d_1 = \frac{-(\nu_{21}^*)^2 \nu_{12}^\circ (f-1)^3 (1-\nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) (1-\nu_{23}^\circ)}{E_1^\circ \nu_{12}^*},$$

$$\begin{aligned}
d_2 &= v_{21}^* (1-f)^2 \left(v_{21}^\circ \left(f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^\circ v_{21}^*) + 1 + v_{23}^* \right) (1-v_{23}^\circ) + \frac{v_{21}^* v_{12}^\circ}{v_{12}^*} \times \right. \\
&\quad \left. \times f(1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) \times (1-v_{23}^\circ) - (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) v_{21}^\circ (v_{23}^* (f-1) - 1 - f) \right); \\
d_3 &= v_{21}^* (f-1) f(1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) v_{21}^\circ E_1^\circ (v_{23}^* (f-1) - 1 - f) - (v_{21}^\circ)^2 \times \\
&\quad \times \frac{v_{12}^*}{v_{12}^\circ} E_1^\circ (v_{23}^* (f-1) - 1 - f) \times \left(f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^\circ v_{21}^*) + 1 + v_{23}^* \right) (1-f) - \\
&\quad - f v_{21}^\circ E_1^\circ \left(f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) + 1 + v_{23}^* \right) v_{21}^* (f-1) (1-v_{23}^\circ); \\
d_4 &= f (v_{21}^\circ)^2 (E_1^\circ)^2 v_{12}^* \left(f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) + 1 + v_{23}^* \right) (v_{23}^* (f-1) - 1 - f); \\
d_5 &= \frac{(v_{21}^*)^2 v_{12}^\circ (f-1)^2 (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) (1-v_{23}^\circ)}{E_1^\circ v_{12}^*}, \\
d_6 &= v_{21}^* (f-1) (1-v_{23}^\circ) v_{21}^\circ \left(f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) + 1 + v_{23}^* \right) + v_{21}^\circ \times \\
&\quad \times \left(1 + v_{23}^* + f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) \right) \times v_{21}^* (f-1) (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) + \\
&\quad + 2f (v_{21}^*)^2 v_{21}^\circ v_{12}^\circ (f-1) (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^* v_{21}^\circ); \\
d_7 &= \frac{(v_{21}^\circ)^2 v_{12}^* E_1^\circ}{v_{12}^\circ} \left(1 + v_{23}^* + f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) \right) \left(f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) + 1 + v_{23}^* \right) + \\
&\quad + 2(v_{21}^\circ)^2 E_1^\circ v_{12}^* v_{21}^* \left(1 + v_{23}^* + f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) \right).
\end{aligned}$$

Вираз для миттєвого модуля пружності E_1 набуває вигляду:

$$E_1 = \frac{d_1 (E_1^*)^3 + d_2 (E_1^*)^2 + d_3 E_1^* - d_4}{d_5 (E_1^*)^2 - d_6 E_1^* + d_7}, \quad (3.70)$$

де E_1^* – миттєвий модуль пружності матриці.

Зображення ядра релаксації ефективного інтегрального оператора знаходимо з (3.69):

$$\tilde{R} = 1 - \frac{(f\tilde{\sigma}^\circ + (1-f)\tilde{\sigma}^*)(1-\nu_{23}^\circ)E_1^\circ}{E_1(\tilde{\sigma}^\circ(1-\nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ) - 2E_1^\circ\nu_{21}^\circ\tilde{C})}.$$

Його вираз через параметри комірки композиту має вигляд:

$$\tilde{R}(p) = \frac{1}{E_1} \frac{E_1 \left[d_5 (y^*)^2 - d_6 y^* + d_7 \right] - d_1 (y^*)^3 - d_2 (y^*)^2 - d_3 y^* + d_4}{d_5 (y^*)^2 - d_6 y^* + d_7}. \quad (3.71)$$

Отримана формула для зображення ядра релаксації у поздовжньому модулі пружності композиту співпадає з аналогічною формулою, отриманою у п. 3.1, якщо у ній матеріал матриці прийняти ізотропним, тобто прийняти $E_1^* = E_2^*$, $\nu_{12}^* = \nu_{23}^* = \nu_{13}^*$, $\nu_{ij}^* = \nu_{ji}^*$, $i, j = 1, 2, 3$.

За знайденим зображенням ядра релаксації, використовуючи теорему обернення для перетворення Лапласа, знаходимо його оригінал $R(t)$. Цю задачу можна розв'язати досить просто, якщо інтегральні оператори, що описують релаксаційні властивості матриці та волокна, мають ядра експоненціального типу. У цьому випадку зображення ядра релаксації для композиту – це відношення двох поліномів. Ця функція має скінченну кількість полюсів і оригінал можна отримати, використавши для обернення перетворення Лапласа теорему розкладу.

Нехай ядро релаксації для матриці $R^*(t) = be^{at} \div \tilde{R}(p) = \frac{b}{p-a}$. У цьому випадку зображення (3.71) набуває вигляду:

$$\tilde{R}(p) = \frac{1}{E_1} \frac{Q(p)}{(p-a)(s_1 p^2 - s_2 p + s_3)}, \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned}
Q(p) &= -d_1(E_1^*)^3(p-a-b)^3 + (E_1d_5 - d_2)(E_1^*)^2(p-a-b)^2(p-a) - \\
&\quad - (E_1d_6 + d_3)E_1^*(p-a-b)(p-a)^2 + (E_1d_7 + d_4)(p-a)^3, \\
s_1 &= d_5(E_1^*)^2 - d_6E_1^* + d_7, \quad s_2 = 2(a+b)d_5(E_1^*)^2 - (2a+b)d_6E_1^* + 2ad_7, \\
s_3 &= d_5(E_1^*)^2(a+b)^2 - d_6E_1^*a(a+b) + d_7a^2.
\end{aligned}$$

Оригінал ядра релаксації для композиту має вигляд:

$$R(t) = \alpha_0 e^{at} + \alpha_1 e^{p_1 t} + \alpha_2 e^{p_2 t},$$

де p_1 та p_2 – корені квадратного тричлена у знаменнику дроби (3.71), коефіцієнти α_0 , α_1 та α_2 знайдемо за формулами:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{Q(a)}{E_1 s_1 (a-p_1)(a-p_2)}, \quad \alpha_1 = \frac{Q(p_1)}{E_1 s_1 (p_1-a)(p_1-p_2)}, \\
\alpha_2 &= \frac{Q(p_2)}{E_1 s_1 (p_2-a)(p_2-p_1)}.
\end{aligned}$$

У якості прикладу застосування викладеної методики визначено в'язкопружні характеристики композиту, у якого матеріалом трансверсально-ізотропного пружного волокна є поліетилен VHDPE Tenfor SNIA с параметрами $E_1^\circ = 60,4$ ГПа, $\nu_{12}^\circ = 0,38$, $\nu_{21}^\circ = 0,03$, $\nu_{23}^\circ = 0,55$. В'язкопружною ізотропною матрицею для даного композиту є епоксидна смола Ciba-Geigy 913 ($E_1^* = E^* = 5,55$ ГПа, $\nu^* = 0,37$), в'язкопружні характеристики якої описуються

$$\text{інтегральним оператором } \bar{E}_1^*[\varepsilon(t)] = E^* \left(\varepsilon(t) - \int_0^t e^{-(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau \right).$$

Отримані значення ефективного миттєвого модуля пружності E_1 композиту для різних значень об'ємного вмісту f волокна у ньому свідчать про наявність між цими показниками залежності, що описується зростаючою функцією, близькою до лінійної. Значення характеристик інтегрального оператора \bar{E}_1 – миттєвий модуль пружності E_1 та коефіцієнти ядра релаксації $R(t) = \alpha_0 e^{-t} + \alpha_1 e^{p_1 t} + \alpha_2 e^{p_2 t}$ для досліджуваного композиту при деяких значеннях f наведені у таблиці 3.2.

Таблиця 3.2. – Значення характеристик оператора \bar{E}_1 для різноманітних значень об'ємного вмісту f волокна у композиті

f	0,2	0,4	0,6	0,8
E_1 , ГПа	15,69	26,87	38,06	40,23
p_1	-0,784	-0,838	-0,893	-0,947
p_2	-0,781	-0,835	-0,888	-0,943
α_0	0,269	0,121	0,057	0,022
α_1	$0,26 \cdot 10^{-5}$	$-0,99 \cdot 10^{-5}$	$-0,43 \cdot 10^{-5}$	$0,54 \cdot 10^{-5}$
α_2	$0,19 \cdot 10^{-5}$	$1,43 \cdot 10^{-5}$	$0,75 \cdot 10^{-5}$	$-0,31 \cdot 10^{-5}$

На рисунку 3.2 наведено криві

$$h(t) = \bar{E}_1[1] = E_1 \left(1 - \alpha_0 (1 - e^{-t}) + \frac{\alpha_1}{p_1} (1 - e^{p_1 t}) + \frac{\alpha_2}{p_2} (1 - e^{p_2 t}) \right),$$

що описують дію інтегрального оператора на одиничну функцію при значеннях $f = 0,2$; $f = 0,4$ та $f = 0,6$. Відзначимо, що для довільних f найбільший внесок у реологічні властивості композиту вносить доданок, що містить e^{-t} . Коефіцієнт α_0 є максимальним за абсолютною величиною серед коефіцієнтів при експонентах у формулі для ядра релаксації композиту вигляду $R(t) = \alpha_0 e^{at} + \alpha_1 e^{p_1 t} + \alpha_2 e^{p_2 t}$.

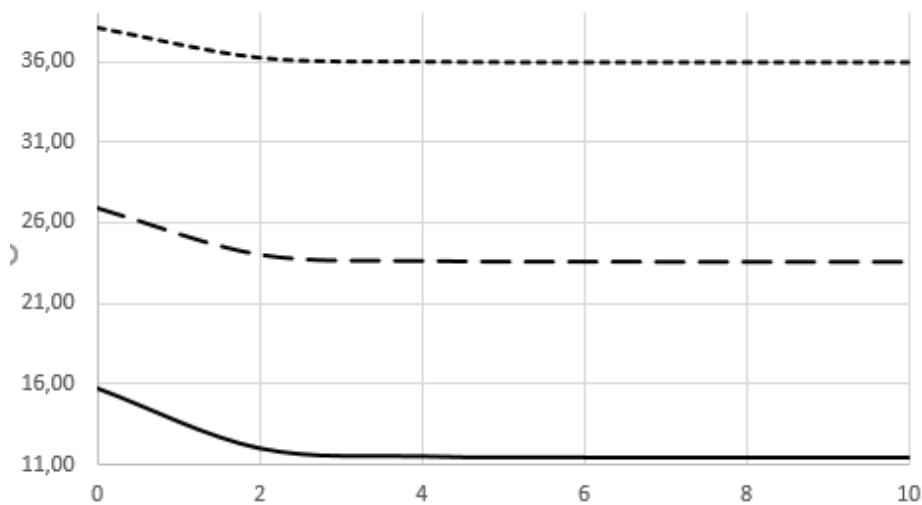


Рисунок 3.2 – Криві, що описують дію інтегрального оператора на одиничну функцію при — $f = 0,2$, - - - $f = 0,4$ та ----- $f = 0,6$

Вибір експоненціального ядра релаксації при великих значеннях t досить добре відображає якісні сторони лінійного деформування в'язкопружного матеріалу. Вибір такого ядра відповідає вибору для дослідження в'язкопружних властивостей матеріалу моделі типу Максвелла [12]. У цьому випадку матеріал моделюється комбінацією з'єднаних послідовно в'язких та пружних елементів.

Отже, розглянута у даній роботі методика дозволяє визначати реологічні параметри ефективного поздовжнього модуля пружності для в'язкопружного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює односпрямований волокнистий композит з трансверсально-ізотропними компонентами. Її можна застосувати для різних типів ядер релаксації в'язкопружної матриці.

ВИСНОВКИ

Розрахунок компонентів напружено-деформованого стану елементів конструкцій, виготовлених з композитних матеріалів, потребує знання механічних сталих, що визначають властивості композиту. Для визначення цих сталих композиційний матеріал подається у вигляді суцільного однорідного середовища, пружні сталі якого найбільш адекватно відображають основні механічні властивості матеріалу. Ці сталі називають ефективними. Їх визначають у вигляді коефіцієнтів, що пов'язують між собою усереднені по об'єму значення компонентів тензорів напружень та деформацій за певних, заздалегідь вибраних умов. Процедуру знаходження таких коефіцієнтів називають гомогенізацією композитного матеріалу.

У даному магістерському дослідженні визначено ефективний поздовжній модуль пружності трансверсально-ізотропного в'язкопружного волокнистого композиту з трансверсально-ізотропним волокном та в'язкопружною ізотропною матрицею. Основним методом дослідження у кваліфікаційній роботі магістра є операційний метод у поєднанні з використанням вибраних умов узгодження. Розглянуто два випадки: у першому ефективний інтегральний оператор, що описує поздовжнє розтягнення в'язкопружного композиту визначається на основі використання кінематичної умови узгодження осьових переміщень точок матриці, волокна та однорідного композиту. При цьому розглядався композит з ізотропною матрицею. Для знаходження ефективного поздовжнього модуля пружності композиту з трансверсально-ізотропними складовими використано енергетичний критерій узгодження.

У першому розділі кваліфікаційної роботи магістра розглянуто класифікацію та основні механічні властивості композиційних матеріалів, що формує уявлення про предмет дослідження. Тут розглянуто також основні математичні моделі, що використовуються при дослідженні лінійної

в'язкопружності матеріалів. У другому розділі наведено основні теоретичні відомості про інтегральне перетворення Лапласа, його властивості, знаходження оригіналів та зображень, його застосування до розв'язання інтегральних рівнянь типу згортки. Потреба у розв'язанні таких рівнянь виникає при визначенні ядер інтегральних операторів, що описують в'язкопружні властивості композиту.

У третьому розділі розв'язується задача про визначення ефективних параметрів інтегрального оператора, що визначає поздовжнє розтягнення волокнистого трансверсально-ізотропного в'язкопружного композиту. Спочатку для розв'язання цієї задачі використано підхід, що ґрунтується на застосуванні кінематичних умов узгодження переміщень точок матриці, волокна та однорідного композиту. При цьому розглядалася комірка композиту, що складається з в'язкопружної ізотропної матриці та трансверсально-ізотропного пружного волокна. Спочатку розглядалася задача про сумісне поздовжнє розтягнення матриці та волокна. Осьові переміщення точок цих елементів прирівнювалися до таких ж переміщень комірки композиту, що розглядається як однорідний матеріал, звідки визначалися ефективні характеристики в'язкопружного композиту.

Далі аналогічна задача була розв'язана з використанням енергетичного критерію, згідно з яким сума потенціальної енергії трансверсально-ізотропних матриці та волокна прирівнювалась до потенціальної енергії однорідного композиту. Розв'язання обох задач здійснювалось у просторі зображень по Лапласу. Отримані формули для миттєвого поздовжнього модуля пружності та зображення ядра релаксації. Для випадку ізотропної матриці ці формули для обох випадків співпадають. Для знаходження оригіналу ядра релаксації використовувалася теорема розкладу для перетворення Лапласа, де для визначення оригіналу застосовуються лишки зображення. Розв'язано конкретні приклади знаходження параметрів ефективного інтегрального оператора поздовжнього модуля пружності.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Булат А. Ф., Дырда В. И., Гребенюк С. Н., Клименко М. И. Определение эффективных характеристик волокнистого вязкоупругого композита с трансверсально-изотропными составляющими // *Проблеми міцності. Міжнародний науково-технічний журнал*. 2019. №2. С. 15 – 25.
2. Зелин В. И., Янсон Ю. О. Определение ядер ползучести по результатам кратковременных испытаний // *Механика полимеров*. 1977. № 6. С.972 – 975.
3. Каминский А. А., Селиванов М. Ф. Об одном методе определения характеристик вязкоупругого деформирования композитов // *Прикладная механика*. 2005. № 5. С. 9 – 21.
4. Кочетков В. А. Прогнозирование термического деформирования слоистых гибридных композитов с учетом термовязкоупругих свойств связующего и волокон // *Механика композитных материалов*. 1993. № 3. С.317 – 323.
5. Куимова Е. В., Труфанов И. А. Численное прогнозирование эффективных термовязкоупругих характеристик однонаправленного волокнистого композита с вязкоупругими компонентами // *Вестник Самарского гос. ун-та*. 2009. № 4. С.129 – 148.
6. Максимов Р. Д., Плуме Э. З. Длительная ползучесть органопластика // *Механика композитных материалов*. 1992. № 4. С.435 – 450.
7. Максимов Р. Д., Плуме Э. З. Ползучесть однонаправлено армированных полимерных композитов // *Механика композитных материалов*. 1984. № 2. С.215 – 223.
8. Максимов Р. Д., Плуме Э. З. Прогнозирование ползучести однонаправлено армированного пластика с термореологически простыми

структурными компонентами // *Механика композитных материалов*. 1982. № 6. С.1081 – 1089.

9. Труфанов И. А., Сметанников О. Ю. Приближенное определение трансверсальных вязкоупругих свойств органоволокна в составе однонаправленного органопластика. Свердловск : Изд-во Свердловск, 1990. 114 с.

10. Уржумцев Ю. С. Прогнозирование длительного сопротивления полимерных материалов. Москва : Наука, 1982. 222с.

11. Янсон Ю. О., Дмитриенко И. П., Зелин В. И. Прогнозирование деформаций ползучести однонаправленно армированного органопластика по результатам квазистатических испытаний // *Механика композитных материалов*. 1983. № 4. С.610 – 613.

12. Grebenyuk S., Klymenko M., Titova O., Boguslavska A. Effective longitudinal elastic modulus of the composite with viscoelastic matrix and transtropic fiber // *Mechanika 2015. Proceedings of the 20th international scientific conference. Kaunas University of Technology*. 2015. P. 96 – 100.

ДОДАТОК А

Основні співвідношення теорії пружності у циліндричній системі координат для ізотропного матеріалу

Формули Коші:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta}; \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \quad \gamma_{zr} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}.\end{aligned}$$

Рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + G_r &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + G_\theta &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + G_z &= 0.\end{aligned}$$

Закон Гука:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{1}{2G} \left(\sigma_{rr} - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) \right); \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{2G} \left(\sigma_{\theta\theta} - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) \right);\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{zz} - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) \right);$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{\theta z}; \quad \gamma_{zr} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{zr}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{r\theta}.$$

Зворотний закон Гука:

$$\sigma_{rr} = 2G \left(\varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \left(\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \right);$$

$$\sigma_{zz} = 2G \left(\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \right);$$

$$\sigma_{\theta z} = G\gamma_{\theta z}; \quad \sigma_{zr} = G\gamma_{zr}; \quad \sigma_{r\theta} = G\gamma_{r\theta}.$$

ДОДАТОК Б

Основні співвідношення теорії пружності у циліндричній системі координат для трансверсально-ізотропного матеріалу

Закон Гука:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{zz} + \frac{1}{E_2}\sigma_{rr} - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{E_2}(\sigma_{rr} - (\nu_{21}\sigma_{zz} + \nu_{23}\sigma_{\theta\theta})); \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{zz} - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{rr} + \frac{1}{E_2}\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{E_2}(\sigma_{\theta\theta} - (\nu_{21}\sigma_{zz} + \nu_{23}\sigma_{rr})); \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E_1}\sigma_{zz} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{rr} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{E_1}(\sigma_{zz} - \nu_{12}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})); \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2}\sigma_{r\theta}; \quad \gamma_{zr} = \frac{1}{G_{12}}\sigma_{zr}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_{12}}\sigma_{z\theta}.\end{aligned}$$

Зворотний закон Гука:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= \frac{E_1 \left((1 - \nu_{23}^2)\varepsilon_{zz} + \nu_{21}(1 + \nu_{23})\varepsilon_{rr} + \nu_{21}(1 + \nu_{23})\varepsilon_{\theta\theta} \right)}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \\ \sigma_{rr} &= \frac{E_2 (\nu_{12}(1 + \nu_{23})\varepsilon_{zz} + (1 - \nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_{rr} + (\nu_{23} + \nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_{\theta\theta})}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E_2 (\nu_{12}(1 + \nu_{23})\varepsilon_{zz} + (\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12})\varepsilon_{rr} + (1 - \nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_{\theta\theta})}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \\ \sigma_{zr} &= G_{12}\gamma_{zr}; \quad \sigma_{z\theta} = G_{12}\gamma_{z\theta}; \quad \sigma_{r\theta} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}\gamma_{r\theta}.\end{aligned}$$