МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра загальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА ДО ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ»**

Виконав: студент 2 курсу, групи 8.1118-з
спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми математика
В.П. Штенгєлов
(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Клименко М. І.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри прикладної математики та механіки, к.ф.-м.н. Левчук С.А.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111математика

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментально математики,
д.т.н., доцент
_______________ Гребенюк С.М.
(підпис)

« 10 » вересня 2019 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ (СТУДЕНТЦІ)

Штенгєлову Віталію Петровичу
(прізвище, ім'я та по батькові)

1. Тема роботи Застосування інтегрального перетворення Лапласа до дослідження коливань механічних систем

керівник роботи Клименко М.І., к.ф.-м.н., доцент
(прізвище, ім'я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 29 » 05 2019 року № 812-С

2. Строк подання студентом роботи 09.12.2019

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Постановка задачі.
2.Основні теоретичні відомості.
3. Дослідження коливань напівнескінченної струни під дією миттєвих поштовхів.
4. Дослідження коливань скінченної струни операційним методом.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
Два рисунки, презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 11.09.2019

К А Л Е Н Д А Р Н И Й П Л А Н

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	14.07.2019	
2.	Збір вихідних даних.	02.09.2019	
3.	Обробка методичних та теоретичних	01.10.2019	
	джерел.		
4.	Розробка першого та другого розділу.	03.10.2019	
5.	Розробка третього розділу.	15.11.2019	
6.	Оформлення та нормоконтроль	10.12.2019	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	10.01.2020	

Студент ______________ В.П. Штенгєлов
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ______________ М.І. Клименко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ______________ І.Г. Ткаченко
(підпис) (ініціали та прізвище)

ЗМІСТ

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Застосування інтегрального перетворення Лапласа до дослідження коливань механічних систем»: 61 с., 2 рис., 11 джерел.

ДЕЛЬТА-ФУНКЦІЯ, КОЛИВАННЯ, НАПІВНЕСКІНЧЕННА СТРУНА, ОПЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД, ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА, СКІНЧЕННА СТРУНА.

Об'єкт дослідження – коливання струни під дією миттєвих поштовхів.

Мета роботи: визначення переміщень точок струни у коливальних процесах, що виникають під дією миттєвих поштовхів.

Метод дослідження – операційний.

У даному магістерському дослідженні розв'язана задача про коливання струни під дією миттєвих поштовхів за допомогою інтегрального перетворення Лапласа. При цьому розглянуті коливання напівнескінченної струни під дією миттєвих поштовхів, а також аналогічні коливання скінченної струни для випадків наявності та відсутності тертя. Отримано функціональні залежності переміщень точок струни від просторової координати та часу.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis «Application of the Integral Laplace Transform to the Study of Mechanical Systems Oscillations»: 61 pages, 2 figures, 11 references.

DELTA-FUNCTION, MOVEMENTS, SEMI-FINISHED STRIP, OPERATING METHOD, LAPLES TRANSFORMATION, LINE.

The object of the study is oscillation of the string under the influence of instant shocks.

The aim of the study is to determine the displacement of the points of the string in the oscillatory processes that occur under the influence of instantaneous shocks.

The method of research is operating.

In this study the problem of the oscillation of a string under the action of instantaneous shocks by the integral Laplace transform is solved. In this case, the oscillations of a semi-infinite string under the action of instantaneous shocks, as well as similar oscillations of a finite string for cases of presence and absence of friction, are considered. Functional dependences of the displacement of the points of the string on the spatial coordinate and time are obtained.

ВСТУП

Важливе місце у сучасних науково-технічних дослідженнях займає математичне моделювання нестаціонарних процесів, які здебільшого описуються за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних відносно невідомих функцій, одним з аргументів яких є час. Оскільки він змінюється у межах від нуля до нескінченності, з'являється можливість застосування для зменшення розмірності таких рівнянь перетворення Лапласа за часовою змінною. У зв'язку з цим актуальною є задача розробки та реалізації методики застосування перетворення Лапласа для дослідження нестаціонарних процесів. Прикладом вирішення подібного завдання є дане магістерське дослідження.

Метою магістерської роботи є визначення переміщень точок струни у коливальних процесах, що виникають під дією миттєвих поштовхів. Об'єктом дослідження є коливання струни під дією миттєвих поштовхів. Предмет дослідження – коливальні процеси одновимірних об'єктів. У роботі розглянуто коливання напівнескінченної струни під дією миттєвих поштовхів, а також аналогічні коливання скінченної струни для випадків наявності та відсутності тертя. Для дослідження використано операційний метод, основою якого є застосування інтегрального перетворення Лапласа.

Операційне (символічне) числення є розділом математики, що вивчає інтегральне перетворення Лапласа та його застосування. Елементи операційного числення зустрічаються у працях Г.В. Лейбніца (1646-1716), Л. Ейлера (1707-1783), П. Лапласа (1749-1827), О. Коші (1789-1857). Вперше для практичних досліджень у галузі електротехніки операційний метод застосував англійський інженер – електрик О. Хевісайд (1850-1925). Застосувавши операційне числення до розв'язання диференціальних рівнянь, він отримав важливі результати у теорії електромагнітних коливань у електричних мережах. Чітке математичне обґрунтування на основі теорії інтегральних перетворень операційне числення отримало у дослідженнях Карсона, Бромвіча, Леві, Ван дер Поля та інших математиків.

На сьогодні методи операційного числення широко застосовуються у радіотехніці, електроніці, теорії автоматичного управління та регулювання, а також інших галузях науки та техніки, де виникає потреба у розв'язуванні лінійних рівнянь різних типів: звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь у частинних похідних, інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь, різницевих рівнянь. Використання операційного методу дозволяє звести розв'язання таких рівнянь до розв'язання лінійних алгебраїчних рівнянь. Перетворення Лапласа ставить у відповідність функції дійсної змінної її зображення – деяку функцію комплексної змінної. При цьому операції над зображеннями здебільшого виявляються простішими, ніж відповідні операції над вихідними функціями (оригіналами). Розв'язавши отримане рівняння відносно зображення, за знайденим зображенням відновлюють оригінал. Прикладом реалізації подібної схеми для дослідження коливальних процесів є дана магістерська робота.

1 ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

1.1 Зображення і оригінал

Перетворенням Лапласа функції $f(t), t \in R$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної p, яка визначається такою рівністю:

$$F(p) = \int_{0}^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt. \tag{1.1}$$

Оригіналом називається довільна функція $f(t)$, яка задовольняє таким умовам:

1) $f(t) = 0$ при $t < 0$ ($f(0) = f(+0)$);

2) на довільному обмеженому інтервалі функція $f(t)$ може мати скінченне число точок розриву першого роду;

3) $|f(t)|$ зростає не швидше показникової функції, тобто існують такі числа α і $M > 0$, що $|f(t)| < Me^{\alpha t}$. Число α називається показником росту функції $f(t)$ (найменше з α).

Найпростішим прикладом оригіналу є одинична функція або функція Хевісайда.

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0, \\ 0, t < 0. \end{cases}$$

Умови 1-3 задовольняють майже всі функції, які описують фізичні процеси.

Прикладом функції, які не є оригіналом,можуть бути функції e^{t^2} (не задовольняє умові 3) та $\frac{1}{t}$ (не задовольняє умові 2).

Доведемо наступну теорему існування зображення. Якщо $f(t)$ оригінал з показником росту α, то інтеграл Лапласа

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

збіжний абсолютно в напівплощині $\operatorname{Re} p > \alpha$ і функція $F(p)$ в ній аналітична.

Маємо $|f(t)| < Me^{\alpha t}$. Якщо $p = \sigma + is$, то $\left|e^{-pt}\right| = e^{-\sigma t}$ і $\left|f(t)e^{-pt}\right| \leq Me^{\alpha t}e^{-\sigma t} = Me^{(\alpha-\sigma)t}$.

Звідси

$$\int_0^{\infty} \left|f(t)e^{-pt}\right| dt \leq M \int_0^{\infty} e^{(\alpha-\sigma)t} dt = M \left.\frac{e^{(\alpha-\sigma)t}}{\alpha - \sigma}\right|_0^{\infty} = \frac{M}{\sigma - \alpha}, \tag{1.2}$$

оскільки за умовою теореми, $\alpha - \sigma < 0$ і тому $e^{(\alpha-\sigma)t} \to 0$ при $t \to \infty$. Отже, нерівність (1.2) показує, що інтеграл Лапласа абсолютно збіжний в області $\operatorname{Re} p > \alpha$.

Доведемо аналітичність $F(p)$. Для довільної точки напівплощини $\operatorname{Re} p > \alpha$ маємо

$$\frac{\Delta F}{\Delta p} = \frac{F(p + \Delta p) - F(p)}{\Delta p} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) \frac{1}{\Delta p} (e^{-\Delta pt} - 1) dt =$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) \frac{1}{\Delta p} \left(-\Delta pt + \frac{(\Delta pt)^2}{2!} - \frac{(\Delta pt)^3}{3!} + \ldots \right) dt = -\int_0^{\infty} e^{-pt} tf(t) dt + \varepsilon,$$

де

$$\varepsilon = \Delta p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} t^2 \left[\frac{1}{2!} - \frac{\Delta pt}{3!} + \frac{(\Delta pt)^2}{4!} - \ldots \right] dt \, .$$

Маємо

$$|\varepsilon| \le |\Delta p| \int_0^{\infty} |f(t)| \left| e^{-pt} \right| t^2 \left[\frac{1}{2!} - \frac{|\Delta p| t}{3!} + \frac{\left|\Delta p^2\right| t^2}{4!} - \ldots \right] dt <$$

$$< |\Delta p| \int_0^{\infty} M e^{\alpha t} e^{-\sigma t} t^2 \left[1 + \frac{|\Delta p| t}{1!} + \frac{\left|\Delta p^2\right| t^2}{2!} - \ldots \right]$$

або

$$|\varepsilon| < |\Delta p| M \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma - \alpha - |\Delta p|)t} t^2 dt \, .$$

Інтегруючи частинами цю нерівність при $\sigma - \alpha - (\Delta p) > 0$ одержимо:

$$|\varepsilon| < \frac{2M}{(\sigma - \alpha - |\Delta p|)^3} |\Delta p| \, .$$

Тому при $\Delta p \to 0$ маємо

$$|\varepsilon| \to 0 \ \text{ і } \ F'(p) = -\int_0^{\infty} e^{-pt} t f(t) dt \, .$$

Цей інтеграл існує. Дійсно, $|tf(t)| < Me^{(\alpha+\delta)t}e^{-\delta t}t, \quad \delta > 0$ –мале число. Функція $Mte^{-\delta t}$ при $t > 0$ має максимум, тому існує таке число $M_1 > 0$, для якого

$Mte^{-\delta t} < M_1$. Тоді $|tf(t)| < M_1 e^{(\alpha+\delta)t}$.

Отже, похідна $F(p)$ існує і тому $F(p)$ аналітична там, де $\operatorname{Re} p > \sigma + \delta$. Теорему доведено.

Хоча теорема стверджує збіжність інтегралу тільки при $\operatorname{Re} p > \alpha$, то функція $F(p)$виявляється визначеною і аналітичною найчастіше на всій площині, за винятком ізольованих особливих точок.

Доведемо необхідну ознаку існування зображення. Якщо функція $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$ з показником росту α, то $\lim\limits_{p \to \infty} F(p) = 0$.

Маємо $|F(p)| = \left|\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt\right| < \dfrac{M}{\sigma - \alpha}$.Це означає, що $\lim\limits_{\operatorname{Re} p \to \infty} F(p) = 0$. Оскільки $F(p)$ аналітична при $\operatorname{Re} p > \alpha$, то $F(p) \to 0$ при $p \to \infty$ по довільному напрямку. Теорему доведено.

Звідси випливає, що функції, наприклад, $F(p) = p^2$, $F(p) = 10$ не можуть бути зображеннями.

За формулою (1.1) кожному оригіналу ставиться у відповідність функція $F(p)$, яка аналітична в напівплощині $\operatorname{Re} p > \alpha$. Цю відповідність між оригіналом $f(t)$ і зображенням $F(p)$ будемо записувати у вигляді $f(t) \div F(p)$; користуючись також символами:

$$f(t) \to F(p),\ F(p) = L\{f(t)\},\ f(t) \exists F(p).$$

Оскільки оригінал дорівнює нулю при $t < 0$, то для простоти будемо писати $\eta(t) = 1$ і взагалі, якщо йдеться про функцію

$$f(t) = \begin{cases} f(t), t \geq 0, \\ 0, t < 0, \end{cases}$$

то будемо писати $f(t)$ [1].

1.2 Основні властивості перетворення Лапласа

Розглянемо одну з основних властивостей перетворення Лапласа – лінійність.Якщо $f(t) \div F(p), g(t) \div G(p)$, то $Af(t) + Bg(t) \div AF(p) + Bg(t)$, де A і B– числа.

Це випливає з властивості інтегралів:

$$\int_0^\infty (Af(t) + Bg(t))e^{-pt}dt = A\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt + B\int_0^\infty g(t)e^{-pt}dt = AF(p) + BG(p).$$

Використовуючи цю властивість і формули $|z| = \frac{1}{2}$, $|z| = z$, знайдемо зображення тригонометричних і гіперболічних функцій.

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \div \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}; \tag{1.3}$$

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}; \tag{1.4}$$

$$sh\omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{\omega t}}{2} \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - \omega} - \frac{1}{p + \omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}; \tag{1.5}$$

$$ch\omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{\omega t}}{2} \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - \omega} + \frac{1}{p + \omega}\right) = \frac{p}{p^2 - \omega^2}. \tag{1.6}$$

Тепер доведемовластивість подібності.Якщо $f(t) \div F(p)$, то для довільної сталої $\lambda > 0$ $f(\lambda t) \div \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$.

$$f(\lambda t) \div \int_0^\infty f(\lambda t) e^{-pt} dt = \left| \begin{matrix} \lambda t = t_1 \\ dt = \frac{1}{\lambda} dt_1 \end{matrix} \right| = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty f(t_1) e^{\frac{p}{\lambda} t_1} dt_1 = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Розглянемо теорему зміщення(затухання).Якщо $f(t) \div F(p)$, то $e^{at} f(t) \div F(p-a)$, де a – довільне число:

$$e^{at} f(t) \div \int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p-a),\ (\mathrm{Re}(p-a) > \alpha).$$

Перейдемо до доведення теореми прозапізнення.Якщо $f(t) \div F(p)$, то $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p)$, де $\tau > 0$довільна стала:

$$f(t-\tau) \div \int_0^\infty f(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_\tau^\infty f(t-\tau) e^{-pt} dt,$$

оскільки на проміжку $(0,\tau)$ підінтегральна функція дорівнює нулю. Зробивши заміну $t - \tau = t_1$, одержимо

$$\int_\tau^\infty f(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t_1) e^{-p(t_1+\tau)} dt_1 = e^{-pt} \int_0^\infty f(t_1) e^{pt_1} dt_1,$$

це означає, що

$$f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p).$$

Ця теорема дає можливість легко знайти зображення кусково-неперервних функцій, зокрема, функцій, які описують імпульсні процеси. Термін "запізнення" виник з того, що функції $f(t)$ і $f(t-\tau)$ описують один і той же процес, але процес, який описується функцією $f(t-\tau)$, починається з запізненням на час τ. Це випливає з того, що графік функції $f(t-\tau)$ зміщений відносно графіка $f(t)$ на τ, а на проміжку $(0,\tau)$ $f(t-\tau)$ дорівнює нулю, оскільки $t-\tau<0$.

Можна довести, що зображення періодичного оригіналу з періодом T буде

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^\tau f(t)e^{-pt}dt.$$

Розглянемо і доведемо теорему випередження. Якщо $f(t)\div F(p)$, то $f(t+\tau)\div e^{p\tau}\left(F(p)-\int_0^\tau f(t)e^{-pt}dt\right)$, де $\tau>0$ довільна стала.

$$f(t+\tau)\div\int_0^\infty f(t+\tau)e^{-pt}dt.$$

Зробивши заміну $t+\tau=t_1$, одержимо

$$f(t+\tau)\div e^{p\tau}\int_\tau^\infty f(t_1)e^{-pt_1}dt_1 = e^{p\tau}\left(\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt-\int_0^\tau f(t)e^{-pt}dt\right)=$$

$$=e^{p\tau}\left(F(p)-\int_0^\tau f(t)e^{-pt}dt\right).$$

Цю теорему використовують при розв’язуванні різницевих рівнянь [2].

Доведемо наступну теорему диференціювання по параметру. Якщо $f(t,x) \div F(p,x)$ і функція f при кожному фіксованому значенні x є оригіналом, а функція F має похідну по x, то

.
$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \div \frac{\partial F(p,x)}{\partial x}.$$

Це випливає з рівності

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} e^{-pt} dt = \frac{\partial F(p,x)}{\partial x}.$$

Тепер доведемо теорему диференціювання оригіналу. Якщо $f(t) \div F(p)$ і функції $f'(t), f''(t), ..., f^{(n)}(t)$ є оригінали, то

$$f'(t) \div pF(p) - f(0); \tag{1.7}$$

$$f''(t) \div p^2 F(p) - pf(0) - f'(0); \tag{1.8}$$

$$f'''(t) \div p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0); \tag{1.9}$$

……………………….………………..

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - ... - f^{(n-1)}(0); \tag{1.10}$$

$$f'(t) \div \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \begin{vmatrix} u = e^{-pt}, & du = -pe^{-pt} dt \\ dv = f'(t)dt, & v = f(t) \end{vmatrix} =$$

$$= f(t)e^{-pt}\Big|_0^{\infty} + p\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = -f(0) + pF(p).$$

Отже, $f'(t) \div pF(p) - f(0)$. Користуючись цією формулою, знайдемо зображення $f''(t)$:

$$f''(t) = \left(f'(t)\right)' \div p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Аналогічно знаходиться зображення $f'''(t)$. Застосовуючи формулу (1.7) $(n-1)$-раз, одержимо формулу (1.10).

Якщо всі початкові умови нульові:

$$f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0,$$

то

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p). \tag{1.11}$$

З цієї теореми випливає:

1) якщо $f'(t)$ є оригіналом, а $F(p)$ – аналітична в нескінченності, то

$$\lim_{p \to \infty} pF(p) = f(0); \tag{1.12}$$

2) якщо $f'(t)$ є оригіналом і існує границя функції $f(t)$ при $t \to \infty$,

то

$$\lim_{p \to 0} pF(p) = \lim_{p \to \infty} f(t) = f(\infty). \tag{1.13}$$

Покажемо, що коли $f(t) \div F(p)$, то

$$F'(p) \div -tf(t),$$

$$F''(p) \div t^2 f(t),$$

………………..

$$F^{(n)}(p) \div (-1)^n t^n f(t).$$

Доведемо цю теорему.Оскільки функція $F(p)$ аналітична в напівплощині $\operatorname{Re} p > \alpha$, то у неї існує похідна довільного порядку. Тому диференціюючи інтеграл (1.1) за p, одержимо

$$F'(p) = \int_0^\infty (f(t)e^{-pt})_p{}' \, dt = \int_0^\infty f(t)(-t)e^{-pt} dt = \int_0^\infty (-tf(t))e^{-pt} dt \div -tf(t).$$

Тоді

$$F''(p) \div -t(-tf(t)) = t^2 f(t), \; F'''(p) \div -t^3 f(t),$$

і взагалі

$$F^{(n)}(p) \div (-1)^n t^n f(t).$$

Виконується наступна теорема інтегрування оригіналу. Якщо $f(t) \div F(p)$, то $\int_0^t f(\tau)d\tau \div \dfrac{F(p)}{p}$.

Доведемо цю теорему.Функція $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ очевидно є оригіналом. Нехай $\varphi(t) \div \Phi(p)$. За теоремою диференціювання оригіналу $\varphi'(t) \div p\Phi(p) - \varphi(0) = p\Phi(p)$, але, оскільки,

$$\varphi'(t) = \left(\int_0^t f(\tau)d\tau \right)_t' = f(t),$$

то

$$F(p)=p\Phi(p).$$

Звідси

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{p}.$$

Розглянемо і доведемо теорему інтегрування зображення. Якщо $f(t)\div F(p)$ і інтеграл $\int_p^{\infty} F(p)dp$ збіжний, то $\int_p^{\infty} F(p)dp \div \frac{f(t)}{t}$.

Змінюючи порядок інтегрування з (1.1) одержимо

$$\int_p^{\infty} F(p)dp=\int_p^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt\right)dp=\int_0^{\infty}\left(\int_p^{\infty} e^{-pt}dp\right)f(t)dt=$$

$$=\int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{t}e^{-pt}\Big|_p^{\infty}\right)f(t)dt=\int_0^{\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt\div\frac{f(t)}{t}.$$

Перейдемо до наступної теореми.Якщо $f(t)\div F(p)$, $g(t)\div G(p)$, то $F(p)\cdot G(p)\div f(t)*g(t)$, де $f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ – згорткафункцій $f(t)$ і $g(t)$.

Легко перевірити, що функція $f(t)*g(t)$ є оригіналом. Використовуючи (1.1), запишемо

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\div\int_0^{\infty}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)e^{-pt}dt=\int_0^{\infty} e^{-pt}dt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Область D інтегрування задається умовами $0 \le t < \infty, 0 \le \tau < t$.

Змінивши порядок інтегрування і зробивши підстановку $t_1 = t - \tau$ одержимо

$$\int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} g(t-\tau) d\tau =$$
$$= \int_0^\infty f(\tau) e^{-pt} d\tau \int_0^\infty g(t_1) e^{-pt_1} dt_1 = F(p) \cdot G(p).$$

Дія згортки комутативна, тобто.

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

$f(t) * g(t) = F(p) G(t)$ Якщої $f'(t)$ є оригіналом, то справедлива формула Дюамеля:

$$pF(p)G(p) \div \int_0^t f'(\tau) g(t-\tau) d\tau + f(0) g(t),$$

$$pF(p)G(p) = pF(p)G(p) - f(0)G(p) + f(0)G(p) =$$
$$= (pF(p) - f(0)) \cdot G(p) + f(0)G(p). \qquad (1.14)$$

Звідси

$$pF(p)G(p) \div f'(t) * g(t) + f(0) g(t).$$

Тепер перейдемо до доведення теореми про згортку. Якщо $f(t) \div F(p)$, $g(t) \div G(p)$, то

$$f(t)\cdot g(t)\div F(p)*G(p),$$

де

$$F(p)*G(p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(z)G(p-z)dz$$

– згортка зображень $F(p)$ і , а $G(p)$ шлях інтегрування –це довільна вертикальна пряма $\mathrm{Re}z=\gamma>\alpha$ [3].

Для зручності перерахуємо ще раз всі властивості перетворення Лапласа, які складають основні правила операційного числення.

$$Af(t)+Bg(t)+AF(p)+BG(p);$$

$$f(\lambda t)\div\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right);$$

$$e^{at}f(t)\div F(p-a);$$

$$f(t-\tau)\div e^{-p\tau}F(p);$$

$$f(t+\tau)\div e^{p\tau}\left(F(p)-\int_{0}^{\tau}f(t)e^{-pt}dt\right);$$

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\div\frac{\partial F(p,x)}{\partial x};$$

$$f'(t)\div pF(p)-f(0);$$

$$f''(t)\div p^{2}F(p)-pf(0)-f'(0);$$

$$f'''(t)\div p^{3}F(p)-p^{2}f(0)-pf'(0)-f''(0);$$

……………………………………...............

$$F'(p)\div -tf(t);$$

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \div \frac{F(p)}{p};$$

$$\int_p^\infty F(p)dp \div \frac{f(t)}{t};$$

$$F(p)G(p) \div f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau;$$

$$f(t) * g(t) \div F(p) * G(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(z)G(p-z)dz.$$

Розглянуті властивості перетворення Лапласа дозволяють застосувати його для розв’язання диференціальних рівнянь відносно функцій, визначених на напівнескінченних областях.

2 ЗНАХОДЖЕННЯ ОРИГІНАЛУ ЗА ЗОБРАЖЕННЯМ

2.1 Елементарний метод

У багатьох випадках зображення вдається перетворити до такого вигляду, коли відповідний оригінал легко знаходиться за допомогою властивостей перетворення Лапласа і таблиці зображень. Зокрема, для цього можна використати метод розкладу раціонального дробу в суму простіших.

2.2 Теореми розвинення

Для знаходження оригіналу в більш загальних випадках користуються теоремами розвинення.

Доведемо наступну теорему. Якщо функція $F(p)$ аналітична в околі $p=\infty$ і її розклад в ряд Лорана має вигляд.

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{p^{n+1}}=\frac{C_0}{p}+\frac{C_1}{p^2}+\frac{C_2}{p^3}+\ldots,$$

то функція

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\frac{t^n}{n!}=C_0+C_1t+\ldots \qquad (2.1)$$

є оригіналом, який має зображення $F(p)$.

Тепер розглянемо другу теорему розкладу. Якщо функція $F(p)$ однозначна і має скінченне число особливих точок $p_1, p_2, \ldots, p_k$, які лежать в скінченій частині площини, то функція:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}res\left(e^{p_k t}F(p_k)\right) \qquad (2.2)$$

є оригіналом, який має зображення $F(p)$.

З теореми випливають такі наслідки:

1) якщо $F(p)=\dfrac{Q(p)}{R(p)}$ – правильний раціональний дріб,то оригіналом для нього буде функція:

$$f(t)=\sum_{k}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\left((p-p_k)^{n_k}\frac{Q(p)e^{pt}}{R(p)}\right)^{(n_k-1)}, \qquad (2.3)$$

де p_k – полюси $F(p)$ кратності n_k;

2) якщо $F(p)=\dfrac{Q(p)}{R(p)}$, і всі нулі p_k знаменника прості, то оригіналом для $F(p)$ буде функція

$$f(t)=\sum_k \frac{Q(p_k)}{R'(p_k)}e^{p_k t}; \tag{2.4}$$

3) якщо $F(p)=\dfrac{Q(p)}{(p-p_1)(p-p_2)...(p-p_k)}$, де p_k – прості нулі знаменника, то оригіналом для $F(p)$ буде функція:

$$\begin{aligned} f(t)=&\frac{Q(p_1)}{(p_1-p_2)(p_1-p_3)...(p_1-p_k)}e^{p_1 t}+\\ &+\frac{Q(p_2)}{(p_2-p_1)(p_2-p_3)...(p_2-p_k)}e^{p_2 t}+...+\\ &+\frac{Q(p_k)}{(p_k-p_1)(p_k-p_2)...(p_k-p_{k-1})}e^{p_k t}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Якщо $f(t)$ – оригінал і $F(p)$ – його зображення, то в кожній точці, де $f(t)$ неперервна, справедлива формула обернення.

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)e^{pt}dp, \tag{2.6}$$

де інтегрування ведеться по довільній прямій $\operatorname{Re}p=\gamma, \gamma>\alpha$ – показник росту $f(t)$ і інтеграл розглядається в розумінні головного значення.

Доведемо цю теорему. Як відомо з теорії інтегралів Фур'є для абсолютно інтегрованої і кусково-гладкої на проміжку функції $f(t)$ справедлива рівність:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ist}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-isu}f(u)du\right)ds\,, \tag{2.7}$$

де зовнішній інтеграл розглядається в розумінні головного значення.

Розглянемо функцію $\varphi(t)=e^{\sigma t}f(t), \sigma>\alpha$. Для неї справедлива формула (2.7), тобто

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ist}\Phi(s)ds\,,$$

де

$$\Phi(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ist}\varphi(t)dt=\int_{0}^{+\infty}e^{ist}\varphi(t)dt,\ \varphi(t)=0,\ t<0.$$

Тоді

$$\int_{0}^{\infty}e^{ist}\varphi(t)dt=\int_{0}^{\infty}e^{-ist}e^{-\sigma t}f(t)dt=\int_{0}^{\infty}e^{-(\sigma+is)t}f(t)dt\,.$$

Позначимо $p=\gamma+is$ і $F(p)=\int_{0}^{\infty}e^{-pt}f(t)dt$. Оскільки $\Phi(s)=F(p)$, то

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ist}F(\gamma+is)ds\,,$$

і тому

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(\gamma+is)t}F(\sigma+is)ds\,.$$

Це означає, що

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{pt}F(p)dp\,.$$

Теорему доведено.

Головним значенням інтеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ називається $\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}f(x)dx$, тобто для інтеграла (2.6) маємо:

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)e^{pt}dp=\lim_{a\to\infty}\int_{\gamma-ia}^{\gamma+ia}F(p)e^{pt}dp\,,$$

і інтеграл не залежить від γ $(\gamma>\alpha)$ [4].

Безпосереднє застосування формули обернення (2.6) часто призводить до труднощів і тому для знаходження оригіналу за його зображенням користуючись попередніми теоремами розкладу, які, звичайно, є наслідками цієї теореми, оскільки

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)e^{pt}dp=\sum_{k}res\left(F(p_k)e^{p_k t}\right).$$

Розглянемо теорему про єдиність оригіналу. Якщо функція $F(p)$ є зображенням двох оригіналів $f_1(t)$ і $f_2(t)$, то ці оригінали збігаються у всіх точках, де вони диференційовані.

Дійсно, в точці t, де $f_1(t)$, $f_2(t)$ диференційовні справедливі формули:

$$f_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{pt}F(p)dp,\ f_2(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{pt}F(p)dp.$$

Оскільки праві частини цих формул однакові, то $f_1(t)=f_2(t)$.

2.3 Зображення функції інтегралом Лапласа

Розглянемо критерії, заякимиможна було б визначити, чи є дана функція, аналітична внапівплощині $\mathrm{Re}z>\gamma$, перетвореннямЛапласа.

Виконується наступна теорема. Функція, що є аналітичною в околінескінченновіддаленоїточкита дорівнюєвнійнулю,представленаабсолютнозбіжнимінтеграломЛапласа.

Відповідно до умови, існує таке число R,що функціяможе бути представленою при $|z|>R$ збіжним рядом

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{z^k}. \tag{2.8}$$

Враховуючи, що

$$\frac{1}{z^k}=\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{k-1}e^{zt}}{(k-1)!}dt,\mathrm{Re}\,z\geq 0,$$

побудуємофункцію

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k t^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{2.9}$$

Очевидно,маємо

$$F(z)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-zt}dt. \tag{2.10}$$

Доведемосправедливістьцієї рівності. Нехай $\frac{1}{z}=\zeta$, $F\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\zeta^k$, рядбудезбігатисяпри $|\zeta|<\frac{1}{R}$. Томувідповідно до нерівностіКошідлякоефіцієнтівстепеневого рядумаємо

$$|a_k|<MR_1^k\text{, де } R_1>R \quad \text{і} \quad M=\max_{|\zeta|<R_1}\left|F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right|.$$

Звідси випливаєзбіжністьряду (2.9) прибудь-якому t іоцінка

$$|f(t)|\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k||t|^{k-1}}{(k-1)!}\le MR_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{R_1^{k-1}|t|^{k-1}}{(k-1)!}=MR_1e^{R_1|t|}.$$

Такимчином, $f(t)$є цілафункціяекспоненціальногоросту. З рівномірної збіжності ряду (2.9) при $\operatorname{Re}z>R_1$ випливає:

$$\int_0^A f(t)e^{-zt}dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{(k-1)!}\int_0^A t^{k-1}e^{-zt}dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{(k-1)!}\left[\int_0^{\infty} t^{k-1}e^{-zt}dt - \int_A^{\infty} t^{k-1}e^{-zt}dt\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{(k-1)!}\left[\frac{(k-1)!}{z^k} - \int_A^{\infty} t^{k-1}e^{-zt}dt\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{z^k} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{(k-1)!}\int_A^{\infty} t^{k-1}e^{-zt}dt = F(z) -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{(k-1)!}\int_A^{\infty} t^{k-1}e^{-zt}dt.$$

Тому

$$F(z) - \int_0^A f(t)e^{-zt}dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{(k-1)!}\int_A^{\infty} t^{k-1}e^{-zt}dt,$$

звідки

$$\left|F(z) - \int_0^A f(t)e^{-zt}dt\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|}{(k-1)!}\int_A^{\infty} t^{k-1}e^{-\operatorname{Re} zt}dt. \qquad (2.11)$$

Праворуч стоїть ряд, кожен член якого залежить від змінної A. Цей ряд мажорується числовим рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|}{(k-1)!}\int_0^{\infty} t^{k-1}e^{-R_1 t}dt, \qquad (2.12)$$

тобто кожен член останнього ряду більше відповідного члена ряду (2.11). Зазначимо, що при $R > R_1$ ряд (2.12) збігається. Дійсно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|}{(k-1)!}\int_0^{\infty} t^{k-1}e^{-R_1 t}dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|}{R_1^k} < \infty.$$

Тому ряд (2.11) відносно $A > 0$ збігається рівномірно. Але при $A \to \infty$ кожен член ряду прямує до нуля.

Отже, при $\mathrm{Re}\, z > R_1$

$$\lim_{A \to \infty} \left| F(z) - \int_0^A f(t) e^{-zt} dt \right| = 0 .$$

Тим самим рівність (2.10) доведена.

Якщо аналітична в напівплощині $\mathrm{Re}\, z > \gamma_0$ функція $F(z)$ прямує до нуля при $|z| \to \infty$ в будь-якій напівплощині $\mathrm{Re}\, z \geq \gamma > \gamma_0$ рівномірно відносно $\arg z$ і інтеграл

$$\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(z) dz, \gamma > \gamma_0 \tag{2.13}$$

абсолютно збігається, то $F(z)$ може бути представлена абсолютно збіжним інтегралом Лапласа.

Доведемо цю теорему. Нехай

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(z) e^{zt} dz = \frac{e^{\gamma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma + iy) e^{iyt} dy, \gamma > \gamma_0 . \tag{2.14}$$

З абсолютної збіжності інтеграла (2.13) і нерівності

$$\left| \int_a^b F(\gamma + iy) dy \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| F(\gamma + iy) \right| dy ,$$

випливає рівномірна збіжність інтеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\gamma + iy)e^{iyt}dy$$

відносно $t, -\infty < t < +\infty$. Отже, $f(t)$ – неперервна функція в інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Функція $f(t)$ не залежить від γ. Дійсно доведемо, що для всіх t

$$\int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(z)e^{zt}dz = \int\limits_{\gamma_1 - \infty}^{\gamma_1 + \infty} F(z)e^{zt}dz(\gamma_1 > \gamma > \gamma_0) \ . \qquad (2.15)$$

Оскільки $F(z)e^{zt}$ – аналітична функція в напівплощині $\mathrm{Re} z > \gamma_0$, то інтеграл, узятий по замкнутому контуру $ABCD$ (див. рис. 2.1), від цієї функції дорівнює нулю. Отже,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\gamma + iy)e^{(\gamma + iy)t}idy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\gamma_1 + iy)e^{(\gamma_1 + iy)t}idy +$$

$$+ \int\limits_{\gamma}^{\gamma_1} F(x - i\omega)e^{(x - i\omega)t}dx - \int\limits_{\gamma}^{\gamma_1} F(x + i\omega)e^{(x + i\omega)t}dx. \qquad (2.16)$$

Алеза умовоютеоремипри $\omega \to \infty$, $|F(x \pm i\omega)| \to 0$ рівномірно відносно $\gamma \le x \le \gamma_1$. Томудваостанніхінтегралнаближаються до нуляпри $\omega \to \infty$ і з рівності (2.16) при $\omega \to \infty$ слідуєрівність(2.15). З лемиЖорданавипливає, що $f(t) = 0$ при $t < 0$. Нарешті, з (2.14) маємо нерівність $|f(t)| \le Qe^{\gamma t}$, де

$Q = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(\gamma + iy)|dy$ і γ – будь-якечисло,більшеніж γ_0.

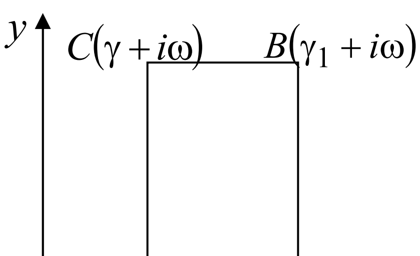

Рисунок 2.1 – Контур інтегрування для знаходження оригіналу
за заданим зображенням

Отже, існуєінтеграл

$$F_1(z)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-zt}dt \text{ при } \operatorname{Re} z>\gamma .$$

Длядоведення теоремидостатньо тепердовести, що $F_1(z)$ збігається з функцією $F(z)$. Замінимов $F_1(z)$змінну z на змінну $\zeta=\xi+i\eta$, де $\xi>\gamma$:

$$F_1(\zeta)=\lim_{A\to\infty}\int_0^{A} f(t)e^{-\zeta t}dt=\lim_{A\to\infty}\int_0^{A} e^{-\zeta t}dt\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(z)e^{zt}dt .$$

Інтегралзбігаєтьсяабсолютно.Томувправій частиніостанньої рівностіможназмінитипорядокінтегрування.Отже,

$$F_1(\zeta)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(z)dz\int_0^{A} e^{-(\zeta-z)t}dt,\ \operatorname{Re}\zeta>\operatorname{Re} z .$$

При цьому виконується рівність:

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-(\zeta-z)t}dt=\int_0^\infty e^{-(\zeta-z)t}dt=\frac{1}{\zeta-z}$$

ізбіжністьостанньогоінтегралапри $\mathrm{Re}(\zeta-z)=\xi-\gamma>0$ рівномірнавідносно y. Справді

$$\left|\int_A^\infty e^{-(\zeta-z)t}dt\right|\le\int_A^\infty e^{-\mathrm{Re}(\zeta-z)t}dt=\int_A^\infty e^{-(\zeta-z)t}dt\to 0,$$

при $A\to\infty$. Тому

$$F_1(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{F(z)}{\zeta-z}dz. \tag{2.17}$$

Теперпобудуємозамкнутий контур Γ, що складається з відрізка ABпрямої $\mathrm{Re}z=\gamma$ ідуги c_R, напівколарадіуса R, що спирається нацей відрізок(див. рис.2.2).При досить великому Rточка ζ будезнаходитися всерединіцього контуруі згідноінтегральноїформулиКоші $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$,

$$F(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{F(z)dz}{z-\zeta}=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{F(z)dz}{z-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_R}\frac{F(z)dz}{z-\zeta}. \tag{2.18}$$

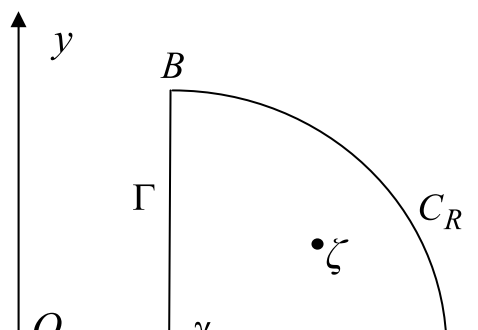

Рисунок 2.2 – Контур для зображення функції $F(p)$

за допомогою інтегральної формули Коші

З умовитеоремивипливає, щодлябудь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке R_0, що при всіх $R > R_0$, $|F(z)| < \varepsilon$ для всіх точок z, що лежать на півколі c_R, тобто $z = \gamma + \mathrm{Re}^{i\varphi}, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Тому

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_R}\frac{F(z)dz}{z-\zeta}\right| \le \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_R}\frac{|F(z)||dz|}{|z-\zeta|} \le \frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{Rd\varphi}{R-|\zeta-\gamma|} = \frac{\varepsilon R}{2(R-|\zeta-\gamma|)} < \varepsilon,$$

якщо тільки $R > R_0$ і $R > 2|\zeta - \gamma|$. Отже,в(2.18) інтегралподузі c_R при $R \to \infty$ наближається до нуля.Звідси випливає, щопри $R \to \infty$

$$F(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty}\frac{F(z)dz}{z-\zeta}.$$

Порівнюючиостанню рівністьз (2.17), отримуємо $F(\zeta) = F_1(\zeta)$ у напівплощині $\mathrm{Re}\zeta > \gamma_0$.

Тепер можна довести наступну теорему. Якщо аналітична в напівплощині $\mathrm{Re}\, z > \gamma_0$ функція $F(z)$ задовольняє умовам:

1) $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{F(z)}{z} = 0, \mathrm{Re}\, z > \gamma_0$ і збіжність рівномірна відносно $\arg z$ в будь-якій напівплощині $\mathrm{Re}\, z \geq \gamma_1 > \gamma_0$;

2) для всіх $t, -\infty < t < +\infty$, існує

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{F(z)}{z} e^{zt} dz = \Phi(t); \tag{2.19}$$

3) функція $\Phi(t)$ диференційовна на інтервалі $(-\infty, +\infty)$ і її похідну можна записати у вигляді абсолютно збіжного інтеграла Лапласа

$$F_1(z) = \int_0^{\infty} \Phi'(t) e^{-zt} dt, \tag{2.20}$$

то $F(z) = F_1(z)$ отже, $F(z)$ може бути представлена інтегралом Лапласа [5].

Доведемо цю теорему. З умови 1) робимо висновок, що $\Phi(t)$ не залежить від γ. Функція $\dfrac{F(z)}{z}$ задовольняє в напівплощині $\mathrm{Re}\, z \geq \gamma_1 > \gamma_0$ умовам леми Жордана. Тому $\Phi(t) = 0$ при всіх $t < 0$, а в силу неперервності $\Phi(t)$ і $\Phi(0) = 0$. Застосовуючи до інтегралу (2.20) теорему обернення, знайдемо:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{F_1(z)}{z} e^{zt} dz, -\infty < t < +\infty.$$

Отже, длявсіх $t, -\infty < t < +\infty$, і досить великих γ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{F(z)-F_1(z)}{z}e^{zt}dz=0$$

або

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\gamma+iy)-F_1(\gamma+iy)}{(\gamma+iy)}e^{iyt}dy=0$$

для всіх t. Звідси випливає

$$\frac{F(\gamma+iy)-F_1(\gamma+iy)}{(\gamma+iy)}=0, -\infty<y<+\infty.$$

Отже, $F(z)=F_1(z)$, що і потрібно було довести.

Доведемо, що коли $q(z)$у півплощині $\mathrm{Re}\,z>\gamma_0$ можна записати у вигляді абсолютнозбіжногоінтегралаЛапласа

$$q(z)=\int_0^{\infty}h(t)e^{-zt}dt\quad, \tag{2.21}$$

де $H(z)$–аналітичнавоколі нуля(включаючиточку $z=0$)функція і $H(0)=0$, то $H[q(z)]$ єабсолютнозбіжнимінтеграломЛапласа.При цьому $h(t)$задовольняє нерівності

$$|h(t)|\le Qe^{\alpha t}, 0\le t<\infty. \tag{2.22}$$

Згідно з умовоютеореми,функція $H(z)$можна розвинути устепеневий ряд

$$H(z)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k , \tag{2.23}$$

радіусзбіжностіякого $\rho_0 > 0$. З(2.21) і (2.22) випливає

$$|q(z)| \le Q\int_0^{\infty} e^{-(\gamma-\alpha)t}dt = \frac{Q}{\gamma-\alpha},\ \text{де}\ \gamma = \operatorname{Re} z > \gamma_0 . \tag{2.24}$$

Нехай $\gamma_1 > \gamma_0$, так що

$$\frac{Q}{\gamma_1-\alpha} \le \rho < \rho_0 .$$

Тодів напівплощині $\operatorname{Re} z \ge \gamma_1$ маємо $|q(z)| \le \rho$. Звідси випливаєрівномірназбіжністьряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k [q(z)]^k = H[q(z)]$$

в області $\operatorname{Re} z > \gamma_1$.

Дійсно, $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k [q(z)]^k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| |q(z)|^k \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \rho^k < \infty$.Позначимо

$$h_1(t)=h(t),\ h_k(t)=\int_0^t h_{k-1}(t-u)h(u)du\ ,\ k=2,3... . \tag{2.25}$$

Тоді маємо:

$$\int_0^\infty h_k(t)e^{-zt}dt = [q(z)]^k,\ k = 1, 2\ldots .$$

З (2.22) випливає

$$|h_2(t)| \le Q^2 \int_0^t e^{\alpha(t-u)} e^{\alpha u} u^{k-1} du = Q^2 t e^{\alpha t} .$$

Припустимо, що

$$|h_k(t)| \le \frac{Q^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\alpha t}, \tag{2.26}$$

то з (2.25) знаходимо

$$|h_{k+1}(t)| \le \frac{Q^{k+1}}{(k-1)!} \int_0^t e^{\alpha(t-u)} e^{\alpha u} u^{k-1} du = \frac{Q^{k+1} t^k}{k!} e^{\alpha t} .$$

Таким чином, нерівність (2.26) справедлива для всіх цілих k.

Доведемо тепер рівномірну збіжність ряду:

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k h_k(t) \tag{2.27}$$

в будь-якому інтервалі $0 \le t \le A$.

Зі збіжності ряду (2.23) при $z = \rho$ випливає існування такого числа M, що $\left|a_k \rho^k\right| \le M$ для всіх k. У такому випадку, користуючись (2.26), знайдемо

$$\left|a_k h_k(t)\right| \le \left|a_k\right| \frac{Q^k t^{k-1} e^{\alpha t}}{(k-1)!} \le M\left(\frac{Q}{\rho}\right)^k e^{\alpha t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \qquad (2.28)$$

звідки випливає, що при $0 \le t \le A$ має місце нерівність:

$$\left|a_k h_k(t)\right| \le M\left(\frac{Q}{\rho}\right)^k \frac{e^{\alpha A} A^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Звідси

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k h_k(t)\right| \le \frac{MQ}{\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha A}\left(\frac{QA}{\rho}\right)^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{MQ}{\rho} e^{\left(\alpha+\frac{Q}{\rho}\right)A}.$$

Тим самим доведена рівномірна збіжність ряду (2.27). З нерівності (2.28) випливає

$$\left|\Phi(t)\right| \le \frac{MQ}{\rho} e^{\left(\alpha+\frac{Q}{\rho}\right)A}. \qquad (2.29)$$

Позначимо $\alpha + \frac{Q}{\rho} = \gamma_2$ в напівплощині $\operatorname{Re} z > \gamma_2$ інтеграл Лапласа

$$\Phi^*(z) = \int_0^{\infty} \Phi(t) e^{-zt} dt = \lim_{\omega \to \infty} \int_0^{\infty} \Phi(t) e^{-zt} dt$$

збігається абсолютно.

З рівномірної збіжності ряду (2.27) отримаємо

$$\int_0^{\infty}\Phi(t)e^{-zt}dt=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_0^{\infty}h_k(t)e^{-zt}dt\,. \qquad (2.30)$$

Доведемо, що ряд у правій частині сходиться рівномірно відносно $\omega>0$. Для цього треба оцінити суму

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}a_k\int_0^{\infty}h_k(t)e^{-zt}dt\,.$$

Вважаючи $\operatorname{Re}z=\gamma>\gamma_2=\alpha+\dfrac{Q}{\rho}$ та враховуючи (2.26), маємо

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}a_k\int_0^{\infty}h_k(t)e^{-zt}dt\right|\le\sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k|\int_0^{\infty}\frac{Q_k t^{k-1}e^{\alpha t}e^{-\gamma t}}{(k-1)!}dt\,,$$

звідки

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}a_k\int_0^{\infty}h_k(t)e^{-zt}dt\right|\le\sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k|Q^k\int_0^{\infty}\frac{t^{k-1}e^{-(\gamma-\alpha)t}}{(k-1)!}dt=\sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k|Q^k\frac{1}{(\gamma-\alpha)^k}\le$$

$$\le\sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k|Q^k\frac{1}{(\gamma_2-\alpha)^k}=\sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k|Q^k\frac{\rho^k}{Q^k}=\sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k|\cdot\rho^k<\varepsilon,$$

де $\varepsilon>0$ – будь-яке наперед задане число, якщо тільки $N>N_0(\varepsilon)$. Останній висновок випливає зі збіжності ряду $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\rho^k$. Таким чином, ряд (2.30) збігається відносно ∞ рівномірно. Вважаючи $\omega\to\infty$, знайдемо

$$\Phi^*(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_0^{\infty}h_k(t)e^{-zt}dt=\sum_{k=1}^{\infty}a_k[q(z)]^k=H[q(z)],$$

що потрібно було довести [6].

Таким чином, ми з’ясували умови, яким повинна задовольняти функція комплексної змінної $F(z)$, що бути зображенням при перетворенні Лапласа.

3 ОПЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ ПІД ДІЄЮ МИТТЄВИХ ПОШТОВХІВ

3.1 Коливання напівнескінченної струни

Малі вільні коливання однорідної струни описуються хвильовим рівнянням

$$u_{tt}=a^2u_{xx}. \tag{3.1}$$

Тут $u(t,x)$ – відхилення струни від положення рівноваги в точці x в момент часу t, $a>0$ – стала.

Нехай струна напівнескінченна $(0<x<\infty)$, її кінець $x=0$ вільний і в початковий момент часу струна знаходиться в стані спокою, тобто початкові дані нульові:

$$u|_{t=0}\equiv 0, u_t|_{t=0}\equiv 0. \tag{3.2}$$

У момент часу $T>0$по кінцю $x=0$струни наноситься миттєвий удар, так що виконується крайова умова

$$u_x(t,0)=V\delta(t-T)\,, \tag{3.3}$$

де δ є δ-функція Дірака, $V\neq 0$ – стала.

Розв’яжемо змішану задачу (3.1)-(3.3) в області $0<x<\infty$, $0<t<\infty$. Перейдемо до перетворення Лапласа

$$v(p,x)=\int\limits_0^\infty u(t,x)e^{-pt}dt\,. \tag{3.4}$$

$$u_t=\frac{\partial u}{\partial t}=p\cdot v(p,x)-u(0.x)=p\cdot v(p,x),$$

$$u_{tt}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=p^2\cdot v(p,x)-p\cdot u(0,x)-u_t(0,x)=p^2\cdot v(p,x),$$

оскільки $u(0,x)=u_t(0,x)=0$ з початкових умов (3.2)

$$u_{xx}=\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=\frac{d^2 v}{dx^2}$$

за теоремою про диференціювання по параметру. Підставляємо зображення в (3.1) для функції v отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$v''_{xx}-\frac{p^2}{a^2}v=0\,,\ 0<x<\infty, \tag{3.5}$$

і крайову умову

$$v'_x\big|_{x=0}=Ve^{-pT}\,, \tag{3.6}$$

оскільки зображення δ-функції є одинична функція. Поставимо ще крайову умову на нескінченності:

$$v(p,x)\to 0,\ \mathrm{Re}\,p\to+\infty. \tag{3.7}$$

Ця умова забезпечує існування зображення $v(p,x)$[7].

Рівняння (3.5) є звичайним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Йогохарактеристичне рівняння $k^2-\frac{p^2}{a^2}$ має корені $k_{1,2}=\pm\frac{p}{a}$, тому $v(p,x)=C_1e^{\frac{-px}{a}}+C_2e^{\frac{px}{a}}$. З (3.7) випливає, що $C_2=0$, $v(p,x)=C_1e^{\frac{-px}{a}}$. Застосуємо для визначення C_1 крайову умову (3.6): $v_x=-\frac{p}{a}C_1e^{\frac{-px}{a}}$, $v_x(p,0)=\frac{-pa}{a}=Ve^{-pT}$, $C_1=-\frac{aVe^{-pt}}{p}$. Тоді зображення розв'язку задачі має вигляд:

$$v(p,x)=-\frac{aV}{p}e^{-\frac{p}{a}x-pT},$$

і за формулою обернення знаходимо

$$u(t,x)=-\frac{aV}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{p}e^{p\left(t-T-\frac{x}{a}\right)}dp,$$

де $c>0$. Для знаходження оригіналу $u(t,x)$можна використати також теорему запізнення, з якої отримуємо:

$$u(t,x) \equiv 0\,, t < T + \frac{x}{a},\; u(t,x) = -aV\,,\; t > T + \frac{x}{a}. \qquad (3.8)$$

Цю рівність запишемо у вигляді:

$$u(t,x) = -aV\theta\left(t - T - \frac{x}{a}\right),$$

де θ – функція Хевісайда.

Таким чином, по струні після удару розповсюджується плоска хвиля (прямокутна сходинка висоти $a|V|$) зі швидкістю a.

Коливання струни за наявності тертя описуються рівнянням

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \alpha u_t\,, \qquad (3.9)$$

де $a > 0$, $\alpha > 0$ – сталі. Початкові і граничні умови знову візьмемо у вигляді (3.2), (3.3). Для перетворення Лапласа $v(p,x)$ функції u одержимо рівняння

$$v''_{xx} - \frac{p^2 + \alpha p}{a^2} v = 0 \qquad (3.10)$$

і крайові умови (3.6), (3.7). Розв'язуючи отриману крайову задачу для звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами, знаходимо зображення:

$$v = -\frac{aV}{\sqrt{p^2 + \alpha p}} e^{-\frac{1}{a}\sqrt{p^2 + \alpha p}\cdot x - pT}.$$

Для знаходження оригіналу використаємо формулуобернення:

$$u(t,x)=-\frac{aV}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{p(t-T)-\frac{x}{a}\sqrt{p^2+\alpha p}}}{\sqrt{p^2+\alpha p}}dp\ . \qquad (3.11)$$

Функція $\sqrt{p^2+\alpha p}$ має дві точки розгалуження: $p=0$, $p=-\alpha$. Її регулярна гілка в правій півплощині $\operatorname{Re} p>0$ обрана так, що $\sqrt{p^2+\alpha p}>0$ при дійсних $p>0$ з тим, щоб функція $v(p,x)$ задовольняла умові (3.7). Запишемо показник експоненти при $p\to\infty$ в (3.11) і використовуючи формулу Тейлора,одержимо:

$$p(t-T)-\frac{px}{a}\left(1+\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{2}}=p\left(t-T-\frac{x}{a}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{p}+o\left(\frac{\alpha}{p}\right)\right)\right)=p\left(t-T-\frac{x}{a}\right)-\frac{x\alpha}{2a}+o(1).$$

Тому далі замість (3.11) будемо розглядати $u(t,x)$ у вигляді:

$$u(t,x)=-\frac{aV}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{p\left(t-T-\frac{x}{a}\right)-\frac{x\alpha}{2a}}}{\sqrt{p^2+\alpha p}}.$$

Підінтегральна функція у формулі (3.11) не має полюсів у правій півплощині $\operatorname{Re} p>0$, і за лемою Жордана $u(t,x)\equiv 0$ при $t-T-\dfrac{x}{a}<0$.

При $t-T-\dfrac{x}{a}>0$ інтеграл (3.11) не виражається через елементарні функції, і ми скористаємося відомою формулою операційного числення

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{-\tau\sqrt{p^2-b^2}+tp}}{\sqrt{p^2-b^2}}dp\div I_0\left(b\sqrt{t^2-\tau^2}\right)\theta(t-\tau),$$

де I_0 – функція Бесселя уявного аргументу. Інтеграл (3.11) приводиться до такого вигляду за допомогою заміни $p = \widetilde{p} - \frac{\alpha}{2}$, так що $b = \frac{\alpha}{2}$, $\tau = \frac{x}{a}$, і остаточно отримуємо:

$$u(t,x) = -aVe^{-\frac{\alpha}{2}(t-T)} I_0\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{(t-T)^2 - \frac{x^2}{a^2}}\right)\theta\left(t - T - \frac{x}{a}\right). \qquad (3.12)$$

При $\alpha = 0$ ця формула набуває вигляду (3.8). Розв'язок (3.12) також описує хвилю, передній фронт якої – точка $x = a(t-T)$ – рухається вправо зі швидкістю a [8].

Фіксуємо точку $x \left(x > 0\right)$ і досліджуємо поведінку $u(t,x)$ при $t \to +\infty$. Використовуючи асимптотику

$$I_0 \sim \frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}}, \; x \to +\infty,$$

отримуємо з (3.12) $u(t,x) \sim -\frac{aV}{\sqrt{\alpha\pi t}} \; (t \to +\infty)$, так що коливання у фіксованій точці з часом затухають на відміну від (3.8). Це явище обумовлене наявністю тертя.

3.2 Коливання скінченної струни без тертя

Нехай струна скінченна $(0 < x < l)$, її лівий кінець $x = 0$ вільний, а правий кінець $x = l$ закріплений, так що

$$u(0, l) = 0. \tag{3.13}$$

Як і в пункті 3.1, розглянемо задачу при нульових початкових умовах Коші і умові, що при $t = T > 0$ відбувається миттєвий удар. Тоді $u(t, x)$ задовольняє рівнянню (3.1), даним Коші (3.2), та крайовим умовам (3.3), (3.13). Переходячи до перетворення Лапласа (3.4), для функції v отримаємо рівняння (3.5) і крайові умови

$$v'_x\big|_{x=0} = Ve^{-pT}, \ v\big|_{x=l} = 0. \tag{3.14}$$

Звідси знаходимо

$$v(p, x) = \frac{aVe^{-pT}}{pch\left(\frac{pl}{a}\right)} sh\left[\frac{p}{a}(x - l)\right] \tag{3.15}$$

і за формулою обернення отримуємо

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} v(p, x) dp,$$

де $c > 0$. Обчислимо цей інтеграл за допомогою лишків. Особливі точки підінтегральної функції збігаються з нулями функції $ch\frac{pl}{a}$ ($p = 0$ – не особлива точка). Отже, підінтегральна функція має полюси в точках $p = p_n$,

$$p_n = \frac{ia\pi}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right), \ n = 0, \ \pm 1, \ldots .$$

Всі ці полюси прості і розташовуються на уявній осі, причому

$$\underset{p=p_n}{res}\left(e^{pt}v(p,x)\right)=\frac{aVe^{p_n(t-T)}sh\left(\dfrac{p_n}{a}(x-l)\right)}{p_n\left(ch\dfrac{pl}{a}\right)'\Bigg|_{p=p_n}}=$$

$$=\frac{2taV(-1)^{n+1}}{\pi(2n+1)}e^{i\frac{\pi\alpha}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-T)}\varphi_n(x), \qquad (3.16)$$

де

$$\varphi_n(x)=\sin\left[\frac{\pi}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-l)\right]. \qquad (3.17)$$

Покажемо, що

$$u(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underset{p=p_n}{res}\left(e^{pt}v(p,x)\right) \qquad (3.18)$$

при $t>T+\dfrac{l}{a}$. Оскільки a – швидкість поширення збурень, то за такий час збурення встигне досягти правого кінця і відбитися від нього. Якщо ж $t<T+\dfrac{l}{a}$, розв'язок має вигляд (3.8).

Розглянемо інтеграл

$$J_N=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}e^{pt}v(p,x)dp, \qquad (3.19)$$

де Γ_N – прямокутник з вершинами в точках $c \pm iy_N$, $\pm iy_N - y_N$, $y_N = \dfrac{\pi a N}{l}$.
Інтеграл J_N дорівнює сумі лишків по полюсах підінтегральної функції, які лежать всередині контуру Γ_N. Інтеграл по відрізку $\left[c - iy_N, c + iy_N\right]$ при $N \to \infty$ збігається до $u(t, x)$. Покажемо, що інтеграл по контуру $\tilde{\Gamma}_N$, який складається з інших трьох відрізків, збігається до нуля при $N \to \infty$. Маємо

$$ch\frac{pl}{a} = \frac{1}{2}e^{-\frac{pl}{a}}\varphi(p), \varphi(p) = 1 + e^{\frac{2pl}{a}}.$$

Покажемо, що $|\varphi(p)| \geq A > 0$ при $p \in \tilde{\Gamma}_N$, де стала A не залежить від N. На відрізку $\left[-y_N + iy_N, c + iy_N\right]$, маємо:

$$|\varphi(p)| = 1 + e^{\frac{2l}{a}y}, \ -y_N \leq y \leq C,$$

тому $|\varphi(p)| \geq 1$. Така ж оцінка має місце на відрізку $\left[-y_N - iy_N, c - iy_N\right]$, а на відрізку, що залишився функція $e^{\frac{2l}{a}p}$ експоненціально спадає при $N \to \infty$. Отже, підінтегральна функція з (3.15) дорівнює

$$\frac{aV}{2\varphi(p)p}\left[e^{p\left(t - T + \frac{l}{a} + \frac{x-l}{a}\right)} - e^{p\left(t - T + \frac{l}{a} + \frac{x-l}{a}\right)}\right].$$

Перший співмножник має порядок $O\left(\frac{1}{p}\right)$ на контурах $\widetilde{\Gamma}_N$ при $N\to\infty$, а показники експонент строго додатні, так як $t>T+\frac{l}{a}$, $0\le x\le l$. За лемою Жордана інтеграл по контуру $\widetilde{\Gamma}_N$ збігається до нуля при $N\to\infty$.

З (3.8), (3.6) знаходимо

$$u(t,x)=-\frac{2iaV}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{\frac{i\pi a}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-T)}\frac{\varphi_n(x)}{2n+1}.$$

Об'єднуючи попарно доданки з номерами n, $-n-1\,(n=0,1,2,...)$ і враховуючи, що $\varphi_{-n-1}(x)=-\varphi_n(x)$, остаточно отримуємо:

$$u(t,x)=\frac{4Va}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\sin(\omega_n(t-T))\sin\left(\frac{\omega_n}{a}(x-l)\right), \tag{3.20}$$

де

$$\omega_n=\frac{\pi a}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right). \tag{3.21}$$

Кожний доданок в цій сумі – це власне коливання струни, у якої кінець $x=0$ вільний, а кінець $x=l$ закріплений. Власні частоти цих коливань дорівнюють ω_n [9].

З (3.20) випливає, що поштовх збуджує всі власні коливання струни. Їх амплітуди спадають $\frac{1}{n}$ із зростанням частоти, але енергія E_n кожного з власних коливань приблизно однакова. Дійсно, нехай ρ – щільність маси струни, T – натяг, $a^2 = \frac{T}{\rho}$. Тоді енергія E_n власного коливання з номером n дорівнює:

$$E_n = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\rho \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 + T \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 \right] dx =$$

$$= \frac{2a^2V^2}{l} \left[\rho a^2 \cos^2 \left(\omega_n (t - T) \right) + T \sin^2 \left(\omega_n (t - T) \right) \right]. \qquad (3.22)$$

Розглянемо результат впливу на струну серії з N періодичних поштовхів. Нехай вони мають однакову величину і відбуваються в моменти часу $T, 2T, \ldots, NT$. Це означає, що крайова умова (3.3) замінюється умовою

$$\frac{\partial u_N}{\partial x}(t, 0) = V \sum_{m=1}^{N} \delta(x - mT).$$

Очевидно, що при $t > NT + \frac{l}{a}$

$$u_N(t, x) = \sum_{m=1}^{N} u_1(t - (m-1)T, x),$$

де $u_1(t, x)$ – розв'язок, що має вигляд (3.20). Маємо

$$\sum_{m=1}^{N} \sin(\omega(t - mT)) = \frac{\sin\left(\frac{\omega_n NT}{2} \right) \sin\left(\omega_n \left(t - \frac{(N+1)}{2} \right) T \right)}{\sin\left(\frac{\omega_n T}{2} \right)}.$$

Остаточно отримуємо:

$$u_N(t,x)=\frac{4aV}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\left(\frac{\omega_n NT}{2}\right)}{(2n+1)\sin\left(\frac{\omega_n T}{2}\right)}\cdot\sin\left(\omega_n\left(t-\frac{N+1}{2}\right)T\right)\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\omega_n}{a}(x-l)\right). \qquad (3.23)$$

Амплітуда n-го коливання A_n дорівнює

$$A_n=\frac{4aV(-1)^n\sin\left(\frac{\omega_n NT}{2}\right)}{\pi(2n+1)\sin\left(\frac{\omega_n T}{2}\right)}. \qquad (3.24)$$

Розглянемо резонансний випадок: період поштовхів T співпадає з однією з власних частот, тобто $T=\frac{2\pi}{\omega_n}$. Тоді з (3.24) отримуємо:

$$A_n=\frac{4aVN(-1)^n}{\pi(2n+1)}, \qquad (3.25)$$

так що $|A_n|$ необмежено зростає зі зростанням N.

Розглянемо, коли T співпадає з періодом першого власного коливання, тобто

$$u(t,x)=\frac{4aVN}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\sin(\omega_n T)\sin\left(\frac{\omega_n}{a}(x-l)\right), \qquad (3.27)$$

при цьому

$$u_N(t,x)=Nu_1(t,x)\,. \tag{3.28}$$

Таким чином, коливання $u_1(t,x)$ після наступних $(N-1)$-го поштовху з періодом,що має вигляд (3.24) посилюється в N разів [10].

3.3 Коливання скінченної струни за наявності тертя

У цьому випадку функція $u(t,x)$ задовольняє рівнянню (3.9), а початкові умови і крайові умови залишаються такими ж, що і в пункті. 3.2. Переходячи до перетворення Лапласа, отримуємо для функції v рівняння (3.10) і крайові умови (3.14). Розв'язавши цю задачу, отримаємо

$$v(p,x)=\frac{aVe^{-pT}sh\left(\frac{x-l}{a}\sqrt{p^2+\alpha p}\right)}{\sqrt{P^2+\alpha p}\cdot ch\left(\frac{l}{a}\sqrt{p^2+\alpha p}\right)}\,. \tag{3.29}$$

Зауважимо, що v – однозначна функція аргументу p, функції $ch\sqrt{z}$, $sh\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ – однозначні функції змінної z. Особливі точки функції v – це корені рівняння $ch\left(\frac{l}{a}\sqrt{p^2+\alpha p}\right)=0$, які дорівнюють

$$p_n^{\pm}=-\frac{\alpha}{2}\pm\frac{i\sqrt{D_n}}{2}\,,\ D_n=\frac{\pi^2a^2}{l^2}(2n+1)^2-\alpha^2\,. \tag{3.30}$$

Усі вони – прості полюси і розташовані на прямій $\operatorname{Re} p = -\frac{\alpha}{2}$, за винятком, можливо, їх скінченного числа, оскільки $D_n > 0$ при більших n. Якщо $\alpha > \frac{\pi a(2n+1)}{l}$ при деякому n, то корені $p_n^{\pm}$ дійсні і від'ємні.

Як і в попередньому випадку, інтеграл $u(t, x)$ дорівнює сумі лишків по всім полюсам підінтегральної функції. При обчисленні лишків слід врахувати, що вибір значення $\sqrt{p^2 + \alpha p}$ є довільним – важливо лише, щоб це значення було одним і тим же у всіх виразах. Обчислюючи інтеграл

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{pt} V(p, x) dp,$$

отримуємо

$$u(t, x) = \frac{2ia^2 V}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(e^{p_n^-(t-T)} - e^{p_n^+(t-T)} \right) \frac{(-1)^n \varphi_n(x)}{\sqrt{D_n}},$$

де $\varphi_n(x)$ – функції, що визначаються рівністю (3.17). Перетворимо цей вираз. Маємо

$$e^{p_n^-(t-T)} - e^{p_n^+(t-T)} = -2ie^{-\frac{\alpha}{2}(t-T)} \sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}(t-T) \right).$$

Об'єднуючи потім доданки з номерами n, $-n-1$, знаходимо:

$$u(t, x) = \frac{4a^2 V}{l} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-T)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{D_n}} \sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}(t-T) \right) \times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-l)\right). \tag{3.31}$$

При $\alpha=0$ цей вираз співпадає з (3.20). З (3.31). З нього випливає, що тертя змінює власні частоти коливань струни: в даному випадку

$$\omega_n=\sqrt{\frac{\pi^2 a^2}{l^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{\alpha^2}{4}}\,. \tag{3.32}$$

Нехай $\alpha<\frac{\pi a}{l}$ для визначеності, тоді $\sqrt{D_n}>0$ при всіх n. Розв'язок $u(t,x)=O\left(e^{-\frac{\alpha}{2}t}\right)$ при $t\to+\infty$, тобто експоненціально спадає, що обумовлено наявністю тертя. Розглянемо результат впливу на струну N однакових поштовхів, які здійснюють в моменти часу $T, 2T, \ldots, NT$ [11]. Підсумовуючи ці коливання, при $t>NT+\frac{l}{a}$ отримуємо

$$u_N(t,x)=\frac{4a^2V}{l}e^{-\frac{\alpha}{2}t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\varphi_n(x)}{\sqrt{D_n}}\times$$
$$\times\left[\sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}t\right)-e^{\frac{\alpha}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}(t+T)\right)-e^{-\frac{\alpha}{2}(N+1)T}\times\right.$$
$$\left.\times\sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}\big(t-(N+1)T\big)\right)+e^{-\frac{\alpha}{2}(N+1)T}\sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}\big(t-NT\big)\right)\right]\times$$
$$\times\left[1-2e^{-\frac{\alpha}{2}T}\cos\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}T\right)+e^{-\alpha T}\right]^{-1}. \tag{3.33}$$

Нехай число поштовхів велике, тобто можна вважати, що $N \to \infty$. Тоді величина $e^{-\frac{\alpha}{2}NT}$ є нескінченно малою, і суму (3.33) можна наближено замінити виразом

$$u_N(t,x) \approx \frac{4a^2V}{l} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-T)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{D_n}} \varphi_n(x) \cdot \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}\tau\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}(\tau - T)\right)}{1 - 2e^{-\frac{\alpha}{2}T} \cos\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}T\right) + e^{-\alpha T}}; \qquad (3.34)$$

де використаємо позначення:

$$t = NT + \tau,\ \tau > \frac{l}{2}. \qquad (3.35)$$

Розглянемо випадок,коли періодпоштовхівспівпадає зперіодомпершоговласного коливанняструни,тобто $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{4\pi}{\sqrt{D_0}}$. Тоді співвідношення(3.34) матиме вигляд

$$u_N(t,x) \approx \frac{4a^2V}{l} e^{-\frac{\alpha}{2}(\tau - T)} \left[-\frac{\varphi_0(x)}{\sqrt{D_0}} \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{D_0}}{2}\tau\right) e^{\frac{\alpha}{2}T}}{\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{2}T}\right)} + + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{D_n}} \varphi_n(x) \times \right.$$

$$\times\frac{e^{\frac{\alpha}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}T\right)-\sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}(\tau-T)\right)}{1-2e^{-\frac{\alpha}{2}T}\cos\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}T\right)+e^{-\alpha T}}\Bigg]. \qquad (3.36)$$

У цьому випадкурезонанспроявляєтьсязначно слабкіше, оскільки принаявностітертявласні частоти ω_n не єцілимикратниминайменшоючастоти ω_1.

Таким чином, використання операційного методу дозволяє знаходити розв'язки крайових задач для диференціальних рівнянь гіперболічного типу, зокрема, рівняння коливань струни у нескінченній та скінченній області.

ВИСНОВКИ

У даному магістерському дослідженні розв'язана задача про коливання струни під дією миттєвих поштовхів за допомогою інтегрального перетворення Лапласа. При цьому розглянуті коливання напівнескінченної струни під дією миттєвих поштовхів, а також аналогічні коливання скінченної струни для випадків наявності та відсутності тертя.

Перший розділ дипломної роботи магістра містить основні теоретичні відомості щодо перетворення Лапласа, необхідні для розв'язання поставленої задачі. Зокрема, тут розглянуто поняття інтегрального перетворення Лапласа, умови, яким повинна задовольняти функції, щоб для неї було можливим виконання даного перетворення. Висвітлюються також властивості перетворення Лапласа, що використовуються при знаходженні оригіналів та зображень у процесі застосування операційного методу.

У другому розділі розглянуті основні методи відтворення оригіналу за даним зображенням, що дають можливість здійснити перехід від зображення до оригіналу при розв'язанні диференціальних рівнянь з частинними похідними. У першу чергу, до таких методів слід віднести застосування теорем розвинення, що випливають з інтегральної формули Рімана-Мелліна для обернення перетворення Лапласа. Розглянуто також умови, що надають можливість застосування таких методів.

Розв'язання задачі про коливання струни під дією миттєвих поштовхів здійснюється у третьому розділі магістерської роботи. З допомогою операційного методу визначаються переміщення точок напівнескінченної струни у коливальному процесі, коли по одному з її кінців здійснюється миттєвий удар. Для моделювання таких коливань у крайову умову вводиться дельта-функція. Гіперболічне рівняння, що моделює коливальний процес для даного випадку, розв'язується шляхом застосування перетворення Лапласа та зведення його до крайової задачі для звичайного диференціального рівняння.

Для знаходження оригіналу отриманого зображення використана теорема запізнення. Отримані розв'язки для випадків вільних коливань напівнескінченної струни та коливань струни за наявності тертя. Аналогічну задачу розв'язано для скінченної струни для випадків наявності та відсутності тертя. Тут розв'язки отримані у вигляді нескінченних рядів, для знаходження яких використано теореми розвинення, розглянуті у другому розділі. Отримано також розв'язання даної задачі, коли на одному кінці струни через однакові проміжки часу здійснюється скінченна кількість миттєвих поштовхів.

Проведене дослідження засвідчило ефективність використання операційного методу для розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу, зокрема, для задач, що виникають при аналізі коливальних процесів у скінченних та нескінченних областях.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики [Текст] / В.С. Владимиров. М.: Наука, 1981. 512 с.
2. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа [Текст] / Г. Дёч. М.: Наука, 1965. 287 с.
3. Диткин В.А. Операционное исчисление [Текст]/ В.А. Диткин, А.П. Прудников. М.: Высшая школа, 1975. 407 с.
4. Диткин В.А. Справочник по операционному исчислению [Текст] / В.А. Диткин, А.П. Прудников. М.: Высшая школа, 1965. 465 с.
5. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости [Текст] / М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко. М.: Наука, 1981. 304 с.
6. Курант Р. Методы математической физики [Текст] / Р. Курант, Д. Гильберт. М.: Гостехиздат, 1961. 620 с.
7. Мартыненко В.С. Операционное исчисление [Текст] / В.С. Мартыненко. К.: Вища школа, 1973. 268 с.
8. Мартиненко М.А. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. Навчальний посібник [Текст] / М.А. Мартиненко, І.І. Юрик. К.: Видавничий Дім «Слово», 2007. 296 с.
9. Пикулин В.П. Практический курс по уравнениям математической физики [Текст]/ В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. М.: МЦНМО, 2004. 208 с.
10. Сидоров Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного [Текст] / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. М.: Наука, 1989. 480 с.
11. Штокало И.З. Операционное исчисление [Текст] / И.З. Штокало.К.: Наук. Думка, 1972. 303 с.