МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра фундаментальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМУ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ»**

Виконала : студентка 2 курсу, групи 8.1119-з
спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми математика
(назва освітньої програми)
А. О. Симоненко
(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Клименко М.І.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри прикладної математики та механіки, доцент, к.ф.-м.н. Левчук С.А.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя

2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
фундаментальної математики,
д.т.н., доцент
____________________ Гребенюк С.М.
(підпис)

« _______ » ________________ 2020 р.

ЗАВДАННЯ

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Симоненко Аліні Олександрівні
(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Застосування принципу максимуму до моделювання економічних систем

керівник роботи (проекту) Клименко Михайло Іванович, к.ф.-м.н., доцент
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 20 » травня 2020 року № 577-с

2. Строк подання студентом роботи 25.11.2020

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Постановка задачі.
2. Основні теоретичні відомості.
3. Розв'язання задачі оптимального економічного зростання.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання ______________________

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	30.05.2020	
2.	Збір вхідних даних.	10.06.2020	
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	05.08.2020	
4.	Розробка першого та другого розділу.	02.09.2020	
5.	Розробка третього розділу.	18.10.2020	
6.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	24.10.2020	
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	11.12.2020	

Студент __________________ А. О. Симоненко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи __________________ М. І. Клименко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер __________________ О. Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Застосування принципу максимуму до моделювання економічних систем» : 53 с., 12 джерел.

ДИНАМІЧНА СИСТЕМА, ЕКОНОМІЧНА СИСТЕМА, ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ, ОДНОСЕКТОРНА ЕКОНОМІКА, ПРИНЦИП МАКСИМУМУ.

Об’єкт дослідження – односекторна математична модель керованої економічної системи.

Мета роботи: отримання розв’язку задачі оптимального керування для математичної моделі односекторної економічної системи.

Предмет дослідження: застосування принципу максимуму для визначення оптимального керування односекторною економічною системою.

Методи дослідження – методи аналізу (аналіз інформації вітчизняних та зарубіжних науковців), діагностики (документальний та інструментальний методи збору інформації), математичного моделювання (задача оптимального керування).

У кваліфікаційній роботі розглядається принцип максимуму Л. С. Понтрягіна – один з основних інструментів розв’язання задач оптимального керування динамічними системами. Розглянуто основні поняття керування динамічною системою, поняття функціонала, а також задачу його оптимізації. Обгрунтовані основні задачі оптимального керування динамічною системою, поведінка якої може бути описана за допомогою системи звичайних диференціальних рівнянь. Наводиться декілька варіантів принципу максимуму, що відповідають різним модифікаціям задачі оптимального управління. Вивчається модель односекторної економіки, і на її основі формулюється та розв’язується задача оптимального економічного зростання.

Результати роботи можуть бути використані при викладанні математичної теорії керування, оптимального керування, математичної економіки.

SUMMARY

Master’s Qualification Thesis "Application of the Maximum Principle to Modeling Economic Systems": 53 pages, 12 references.

DYNAMIC SYSTEM, ECONOMIC SYSTEM, THE TASK OF OPTIMAL CONTROL, ONE-SECTORAL ECONOMY, PRINCIPLE OF MAXIMUM.

The object of the study is one-sector mathematical model of a managed economic system.

Purpose: to obtain a solution of the optimal control problem for a mathematical model of a one-sector economic system.

The aim of the study is application of the maximum principle to determine the optimal management of a single-sector economic system.

The methods of research are methods of analysis (analysis of information of domestic and foreign scientists), diagnostics (documentary and instrumental methods of information collection), mathematical modeling (the problem of optimal control).

The qualification work considers the principle of maximum of L. S. Pontryagin – one of the main tools for solving problems of optimal control of dynamic systems. The basic concepts of dynamic system control, the concept of functionality, as well as the problem of its optimization are considered. The main problems of optimal control of a dynamic system, the behavior of which can be described using a system of ordinary differential equations, are substantiated. There are several variants of the maximum principle, corresponding to different modifications of the optimal control problem. The model of one-sector economy is studied, and on its basis the problem of optimal economic growth is formulated and solved.

The results of the work can be used in teaching mathematical control theory, optimal control, mathematical economics, mathematical methods in economic research.

ЗМІСТ

ВСТУП

Математичні моделі є ефективним інструментом дослідження та прогнозування економічних процесів та об’єктів. Важливість вирішення задачі вдосконалення системи управління складними економічними системами (економіка країни, галузь економіки, підприємство) обумовлює актуальність досліджень, спрямованих на розробку математичного апарату, що може бути використаний для оптимізації процесів функціонування економіки. Перспективним напрямком створення та вдосконалення такого апарату є використання методів математичної теорії оптимального керування для розробки оптимальної стратегії управління економічними системами. Прикладом дослідження у цьому напрямі є дана кваліфікаційна робота магістра.

Метою магістерського дослідження є отримання розв’язку задачі оптимального керування для математичної моделі односекторної економічної системи. Для досягнення цієї мети у роботі потрібно вирішити наступні завдання:

а) вивчити постановку задачі оптимального керування;

б) вивчити особливості побудови математичної моделі динамічної системи;

в) вивчити особливості застосування принципу максимуму для розв’язання задачі оптимального керування;

г) побудувати математичну модель односекторної економічної системи;

д) розв’язати задачу оптимального керування для математичної моделі односекторної економічної системи;

е) виконати змістовний аналіз отриманого розв’язку.

Об’єктом дослідження у даній кваліфікаційній роботі магістра є односекторна математична модель керованої економічної системи. Предмет дослідження – застосування принципу максимуму для визначення оптимального керування односекторною економічною системою.

В умовах мінливого зовніщнього середовища, характерних для функціонування економічних систем, для дослідження їх поведінки необхідно використовувати математичні моделі динамічних систем. Для побудови та дослідження таких систем перспективним напрямом є використання сучасних методів теорії оптимального керування.

Застосування методів теорії оптимального керування дозволяє визначити вигляд функції керування, яка дозволяє максимізувати функціонал якості діяльності економічної системи, що є об’єктом дослідження. Для успішного застосування цих методів важливими є побудова адекватної математичної моделі економічної системи, визначення основних факторів, що впливають на ефективність її функціонування, визначення проміжків, у межах яких можуть змінюватися параметри керування та фазові змінні системи.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

1.1 Основні поняття теорії керованих систем

Найважливішими в теорії оптимального керування [1] є поняття системи та керування. Загальновживаним є уявлення про систему, як про сукупність взаємопов'язаних елементів (частин, підсистем). Взаємозв'язок елементів системи описується її структурою. Прикладом системи є Сонячна система. Її елементами є планети, що входять до неї. Планети за допомогою своїх гравітаційних полів певним чином взаємопов'язані між собою. Цей взаємозв'язок підпорядковується фізичним законам і його можна описати математичною мовою.

Будь-яка система (динамічна система, тобто система, яка певним чином розвивається, еволюціонує в часі) у кожен момент часу може перебувати в одному з деякої (скінченної або нескінченної) кількості можливих станів. Саме зміна станів системи з плином часу характеризує розвиток або функціонування даної системи. Наприклад, положення ракети в просторі (якщо її ототожнити з матеріальною точкою) може бути описано трьома координатами. Ці координати, що залежать від часу, визначають поточне положення ракети у просторі.

Будемо розглядати тільки такі об'єкти, стан яких в кожен момент часу може бути однозначно охарактеризовано певним скінченним набором n числових параметрів (тобто n – вимірним вектором) $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$. Такі системи поширені у техніці і економіці [5].

Векторний простір R^n, якому належать можливі стани системи, називають простором станів або фазовим простором [2]. Оскільки система розвивається (еволюціонує) в часі, то зазначені числові параметри є функціями часу. При зміні часу від якогось початкового значення $t = t_0$ до деякого кінцевого $t = T$ точка $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ в фазовому просторі описує певну криву, яку називають траєкторією системи. У разі $n \leq 3$ траєкторія може бути зображена у фазовому просторі відповідної розмірності, та з її допомогою можна отримати наочне уявлення про функціонування даної системи.

Існують два типи систем. Одну з них складають ті об'єкти, на розвиток яких людина не може вплинути. Прикладом такої системи є Сонячна система. Інший тип систем складають ті, стан яких може змінюватися під впливом людей у залежності від поставлених ними цілей (наприклад, фінансово-кредитна система, космічний корабель тощо). Під керуванням розуміють вплив, здатний змінити поточний стан та подальший розвиток системи. У технічних системах механізм керування реалізується за допомогою певних технічних пристроїв. В економічних системах керування здійснюється в основному завдяки зміні встановлених раніше правил економічної поведінки [6] (наприклад, шляхом зміни відсоткових ставок, введення обмежень на зростання цін на природні ресурси і т.п.). На функціонування складних систем впливають дуже багато чинників. Керування є лише одним з чималої кількості наявних впливів. Тому на практиці через силу «зовнішніх перешкод» людині в результаті управління часто не вдається повною мірою досягти бажаного ефекту.

Подальший розгляд буде обмежено класом керованих систем, поведінку яких можна змінювати, надаючи той чи інший вплив, причому таким чином, що в результаті змін досягаються певні, заздалегідь поставлені цілі.

Будемо вважати, що управлінський вплив можна описати деяким скінченним набором числових параметрів (керувань) – вектором $\bar{u} = \left(u_1, u_2, \ldots, u_r\right)$, які керуючий орган здатний вибирати в межах деякої множини U. Вибір певного керування залежить від поточного моменту часу, тому керування u задають вектор-функцією часу [7]:

$$\bar{u}(t) = \left(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t)\right), \text{ де } t \in [0; T].$$

1.2 Математична модель динамічної системи

Пара векторних функцій $\bar{y}(t)$, $\bar{u}(t)$ моделює процес керування. Між цими функціями є певний зв'язок: як тільки обраний якийсь конкретний закон керування у формі вектор-функції $\bar{u}(t)$, послідовність її станів (фазова траєкторія) $\bar{y}(t)$ визначається однозначно.

Нехай компоненти векторної функції $\bar{u}(t)$ є кусково-неперервними на проміжку $t \in [t_0; T]$. Будь-яке керування $\bar{u}(t)$ з кусково-неперервними компонентами, що задовольняє умову $\bar{u}(t) \in U$ при всіх $t \in [t_0; T]$, називають допустимим керуванням [7].

Далі розглянемо такі динамічні системи , в яких зв'язок між змінними керування та фазовими змінними описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_r), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_r), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_r), \\ t_0 \le t \le T. \end{cases}$$

Тут у правих частинах рівнянь записані функції $f_1,\ f_2\ \dots,\ f_n$ від $n\ + r\ + 1$ змінних, які визначають закон зміни похідних фазових координат $y_1, y_2, ..., y_n$. Якщо у (1.1) функції f_i не залежать явно від часу, тобто $f_i = f_i(y_1, y_2, ..., y_n, u_1, u_2, ..., u_r), i = 1, 2, ..., n$, отримуємо автономну систему [11].

Систему диференціальних рівнянь можна записати у векторній формі

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, u), t_0 \le t \le T, \tag{1.1}$$

де

$$\frac{dy}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{dy_1}{dt}\\ \frac{dy_2}{dt}\\ .\\ .\\ .\\ \frac{dy_n}{dt}\end{pmatrix},\ f(t,y,u)=\begin{pmatrix}f_1(t,y,u)\\ f_2(t,y,u)\\ .\\ .\\ .\\ f_n(t,y,u)\end{pmatrix}.$$

Автономна система (1.1) має вигляд

$$\frac{d\bar{y}}{dt}=\bar{f}(\bar{y},\bar{u}), t_0 \le t \le T, \tag{1.2}$$

де

$$\bar{f}(\bar{y},\bar{u})=\begin{pmatrix}f_1(\bar{y},\bar{u})\\ f_2(\bar{y},\bar{u})\\ .\\ .\\ .\\ f_n(\bar{y},\bar{u})\end{pmatrix}.$$

З'ясуємо, яким чином відбувається функціонування системи (1.1) та її окремого випадку – автономної системи (1.2). З цією метою виберемо довільне припустиме керування $\bar{u}(t)$ і зафіксуємо початковий стан системи $y^{(0)} \epsilon R^n$. Це означає, що задана початкова умова $\bar{y}(t_0)=y^{(0)}$, у якій $y^0=(y_1^0,y_2^0,...,y_n^0)$, яке у координатній формі запишемо у вигляді

$$y_i\,(t_0) = y^{(0)}, i = 1,2,\dots,n. \tag{1.3}$$

Після того, як векторна функція керування $\overline{u}$ = *u(t)* визначена, підставивши її в праву частину системи диференціальних рівнянь (1.1), отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, ..., y_n, u_1(t), ..., u_r(t)), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, ..., y_n, u_1(t), ..., u_r(t)), \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, ..., y_n, u_1(t), ..., u_r(t)), \\ t_0 \le t \le T, \end{cases}$$

щодо невідомих функцій $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), ..., y_n = y_n(t)$.

Нехай функції $f_1, f_2, \ldots, f_n$ володіють такими властивостями, що задача Коші для системи з початковою умовою (1.3) має єдиний розв'язок $\overline{y}$ = *y (t)* , що відповідає довільно обраному припустимому закону керування $\overline{u}$ = *u(t)*. У результаті маємо пару векторних функцій $\overline{y}(t)$, $\overline{u}(t)$, тобто деякий процес керування, який називають допустимим процесом. При цьому у даному випадку допустиме керування $\overline{u}$ = *u(t)* переводить систему з початкового стану $y^{(0)} \epsilon R^n$ в кінцевий стан $y(T)\ \epsilon\ R_n$ по фазовій траєкторії $\bar{y} = y(t), t_0 \le t \le T$.

1.3 Задача оптимального керування

Сформулюємо дві допоміжні задачі, які називають задачами керування [7] (на відміну від задачі оптимального керування).

Задача керування з фіксованою тривалістю передбачає задання у фазовому просторі двох точок (станів системи) $C, D \epsilon R^n$ і подальше знаходження серед усіх допустимих такого керування, яке переводить систему, що знаходиться в початковий момент часу в стані $y\,(t_0) = C$, в стан $y\,(T) = D$ до заздалегідь заданого моменту часу $t = T$.

Задача керування з нефіксованим тривалістю так само передбачає задання початкового C і кінцевого D станів і полягає у визначенні серед всіх допустимих керувань такого, що переводить систему з початкового стану в кінцевий, але при цьому кінцевий момент часу *T* заздалегідь не заданий, його також потрібно визначити.

У обох задачах задану систему потрібно перевести з одного фіксованого стану в інший. Відмінність сформульованих задач полягає лише у тому, що в задачі з нефіксованим тривалістю період керування (тобто час переходу системи з початкового стану в кінцевий) не заданий.

Для зазначених задач важливе значення має питання про існування допустимого керування, яке переводить дану систему з заданого початкового стану в заданий кінцевий. Це питання керованості системи. Якщо зазначеного керування не існує (тобто система некерована), то обидві сформульовані задачі розв'язку не мають [7].

Розглянемо клас систем, для яких можна розв'язати задачу керованості.

Систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = Ay + Bu,$$

де *A і B* – числові матриці,які називають лінійною системою керування.

Цю систему називають повністю керованою, якщо для будь-якої пари точок (станів) $C,\ D \in R^n$ існує допустиме керування, що переводить за деякий час цю систему з одного з цих станів в інший.

Лінійна система повністю керована тоді і тільки тоді, коли ранг матриці, складеної з матриць $B, AB,\ A^2\ B, \dots \dots . A^{n-1}B$, дорівнює n. Якщо ранг зазначеної матриці для деякої лінійної системи виявиться меншим за n, то знайдеться така пара точок, для яких неможливо знайти допустиме керування, що переводить цю лінійну систему з одного з двох даних станів в інший [1].

Для переважної більшості прикладних задач керування, пов'язаних з реальними об'єктами, існує векторна функція керування $\bar{u} = \bar{u}\ (t) = (\bar{u}_1\ (t), \bar{u}_2\ (t), ..., \bar{u}_r\ (t))$, що є розв'язком відповідної задачі керування (з фіксованим або нефіксованим часом керування). Тому виникає можливість вибору з усіх розв'язків задачі керування такого розв'язку, що був би у якомусь сенсі найбільш вигідним для суб'єкта керування. У цьому випадку отримуємо задачу оптимального керування.

Для того, щоб сформулювати задачу оптимального керування, необхідно задати умову, яка є дозволяє визначити найкращий варіант розв'язку даної задачі, тобто оптимальне керування та відповідну йому фазову траєкторію системи. Для цього застосовують критерій оптимальності (критерій якості керування або цільовий функціонал)

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} f_0(t, y_1(t), \dots, y_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t))dt, \tag{1.4}$$

в якому $f_0(t, y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_r)$ – фіксована функція $n + r + 1$ змінних .

Ознакою якості керування u є значення інтегрального функціоналу (1.4), обчисленого на цьому керуванні, тобто $I\ (u)$. Нехай чим більшим є значення критерію оптимальності $I\ (u)$, тим кращим є керування u. Тоді оптимальним буде керування, яке надає найбільше можливе значення інтегральному функціоналу (3.4). Зауважимо, що в окремому випадку підінтегральна функція f_0 з (1.4) може від часу не залежати, тобто можливою є рівність

$$f_0(t, y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_r).$$

Верхня межа інтегрування T в інтегралі з (1.4) у залежності від типу задачі керування може бути фіксованою чи ні. У другому випадку цільовий функціонал залежить не тільки від керування u, а й від кінцевого моменту часу T.

Отже, задача оптимального керування для системи диференціальних рівнянь (1.1) полягає в максимізації інтегрального функціоналу (1.4) на множині всіх допустимих керувань, що переводять систему (1.1) із заданого початкового стану в заданий кінцевий стан. Ця задача є задачею оптимізації інтегрального функціоналу на певній множині з функціонального простору кусково-неперервних функцій керування [3]. Розв'язком цієї задачі є керування (вектор-функція) $\bar{u}(t) = (\bar{u}\ (t), \bar{u}\ (t), ..., \bar{u}\ (t))$, яке називають оптимальним керуванням. Йому однозначно відповідає певна фазова траєкторія $\bar{y}(t) = (\bar{y}\ (t), \bar{y}(t), ..., \bar{y}\ (t))$.

Її називають оптимальною траєкторією. При цьому пару векторних функцій $\bar{y}(t), \bar{u}(t)$ називають оптимальним процесом. Задачу оптимального керування формулюють як задачу пошуку не тільки оптимального керування, а й усього оптимального процесу (тобто оптимального керування і відповідної оптимальної траєкторії).

Нехай підінтегральна функція f_0 в (1.4) тотожно дорівнює – 1. Тоді

$$I = \int_{t_0}^{T} (-1)dt = -(T - t_0)\,.$$

У цьому випадку максимізація функціонала I при фіксованому часі t_0 і нефіксованому T є еквівалентною задачі мінімізації періоду керування $T - t_0$, тобто мінімізації T. Отримуємо задачу оптимальної швидкодії, в якій потрібно знайти керування, що переводить систему з одного стану в інший за найменший можливий час.

Функції керування повинні обиратись в межах визначеної множини допустимих керувань. До цієї множини входять векторні функції $\bar{u} = \bar{u}\ (t)$, компонентами $\bar{u}_1\ (t), \bar{u}_2\ (t), ..., \bar{u}_r\ (t)$ яких є кусково-неперервні функції на відрізку $[t_0, T]$ зі значеннями у заданій допустимої області U, тобто для всіх $t \in [t_0, T]$.

Одним з найпростіших способів задання допустимої області є визначення сталих меж, у яких повинні змінюватися компоненти векторної функції керування:

$$\alpha_i \le u_i(t) \le \beta_i, i = 1, 2, ...r, \text{ при усіх } t \in [t_0, T],$$

де $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ і $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ – задані числа.

Такий спосіб задання відповідає випадку, коли керуючий вплив u_i може змінюватися лише в межах певного проміжку $[a_i, b_i]$. Зазначені обмеження на вибір функцій керуввання часто зустрічаються на практиці. Наприклад, серед органів керування літаком є кермо висоти і повороту. Зміна кута повороту цих пристроїв обмежена певними значеннями, які визначаються технічними параметрами даного літака [5]. Величина подачі пального в двигун літака (або автомобіля) також обмежена деякою верхньою межею.

2 ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

2.1 Принцип максимуму для задачі з фіксованим часом керування

Розглянемо задачу оптимального керування об'єктом, поведінка якого описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_r), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_r), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_r), \end{cases} \quad t_0 \le t \le T. \tag{2.1}$$

Із заданим початковим моментом часу $t = t_0$, фіксованим кінцевим моментом часу управління $t = T$, початковим станом $\bar{y}\ (t) = y^{(0)}\ \epsilon\ R^n$, кінцевим станом $y\ (T) = y^{(1)} R^n$, критерієм якості керування

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} f_0(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t), \bar{u}_r(t), \dots, \bar{u}_r(t))dt \tag{2.2}$$

і областю допустимих керувань U. При цьому щодо функцій y, u, f_0, f_1, ..., f_n будемо вважати виконаними всі вимоги, які знадобляться при формулюванні принципу максимуму.

Задача оптимального керування для системи (2.1) полягає в максимізації інтегрального функціоналу (2.2) на множині всіх допустимих керувань, що переводять систему (2.1) із заданого початкового стану $y_{(0)}$, визначеного в початковий момент часу t_0 в заданий кінцевий стан $y_{(1)}$ для фіксованого моменту часу T. Розв'язком цієї задачі є оптимальне керування $\bar{u}(t) = (\bar{u}\ (t), \bar{u}$

(t), ..., $\bar{u}$ (t)) і оптимальна траекторія $\bar{y}(t) = (\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), ..., \bar{y}_r(t))$, які у сукупності утворюють оптимальний процес $\bar{y}(t), \bar{u}(t)$.

Принцип максимуму є необхідною умовою оптимальності, що дозволяє серед всіх можливих допустимих процесів відібрати ті, які надають екстремум функціоналу якості [8].

У теорії оптимального керування для формулювання умов досягнення екстремуму функціоналом якості використовують функцію Гамільтона або гамільтоніан:

$$H(t, y, \bar{\psi}, u) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i t_i(t, y, u), \tag{2.3}$$

де $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $u = (u_1, u_2, ..., u_r)$, $f_0, f_1, ..., f_n$ – функції, визначені з (2.1), (2.2).

Функція Гамільтона *H* всього має $2n + r + 2$ змінних.

Для зручності подальшого запису введемо позначення

$$\bar{\psi} = (\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n).$$

Змінні $\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n$ називають приєднаними змінними.

Теорема 2.1 (принцип максимуму для задачі з фіксованою тривалістю керування). Нехай вектор-функція $\bar{u}(t)$ є оптимальним керуванням, а вектор-функція $\bar{y}(t)$ – відповідною оптимальною траекторією у сформульованій задачі оптимального керування з фіксованими межами і фіксованими початковим t_0 та кінцевим T моментами часу. Тоді існують невід'ємне число $\bar{\psi}_0$ та векторна функція $\bar{\psi}(t) = (\bar{\psi}_1(t), \bar{\psi}_2(t), ..., \bar{\psi}_n(t))$ з неперервними на відрізку $[t_0, T]$ компонентами, такі, що виконуються наступні умови :

а) вектор-функція $\bar{\psi}(t) = (\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1(t), ..., \bar{\psi}_n(t)), t_0 \le t \le T$, є ненульовою;

б) вектор-функція $\bar{\psi}(t) = (\bar{\psi}_1(t), \bar{\psi}_2(t), ..., \bar{\psi}_n(t))$ є розв'язком приєднаної системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{dt} = -\dfrac{\partial H(t,y,\psi,\hat{u})}{\partial y_1}\Big|_{\substack{u=u^*(t)\\ y=y^*(t)}} = -\sum\limits_{j=0}^{n} \bar{\psi}_j \dfrac{\partial f_j(t,y^*,u^*)}{\partial y_1}, \\ \dfrac{d\psi_2}{dt} = -\dfrac{\partial H(t,y,\psi,\hat{u})}{\partial y_2}\Big|_{\substack{u=u^*(t)\\ y=y^*(t)}} = -\sum\limits_{j=0}^{n} \bar{\psi}_j \dfrac{\partial f_j(t,y^*,u^*)}{\partial y_2}, \quad t_0 \le t \le T; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d\psi_n}{dt} = -\dfrac{\partial H(t,y,\psi,\hat{u})}{\partial y_n}\Big|_{\substack{u=u^*(t)\\ y=y^*(t)}} = -\sum\limits_{j=0}^{n} \bar{\psi}_j \dfrac{\partial f_j(t,y^*,u^*)}{\partial y_n}, \end{cases} \tag{2.4}$$

в) при кожному значенні t є $[t_0, T]$, при якому всі компоненти вектор-функції керування $u^*(t)$ неперервні, функція Гамільтона $H(t,\bar{y}(t),\bar{\psi}(t),\bar{u})$ векторної змінної $\bar{u} = (u_1, u_2, ..., u_r)$ досягає максимуму на множині U при $\bar{u} = \bar{u}(t)$, тобто виконується рівність

$$H(t,\bar{y}(t),\bar{\psi}(t),\bar{u}(t)) = \max_{u\in U} H(t,\bar{y}(t),\bar{\psi}(t),\bar{u}), t_0 \le t \le T. \tag{2.5}$$

У формулюванні теореми 2.1 є умова максимуму (2.5). Саме тому цю теорему називають принципом максимуму [11].

Приєднана система (2.4) складається з n рівнянь щодо n невідомих функцій $(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n)$. Вона є лінійною однорідною системою звичайних диференціальних рівнянь, у якій матрицю коефіцієнтів утворюють функції $\dfrac{\partial f_j(\bar{y},\bar{u})}{\partial y_i}, i, j = 1, 2, ..., n$ аргументу t.

За допомогою функції Гамільтона H вихідну систему (2.1) разом з приєднаною системою (2.4) записують у наступному симетричному вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = \dfrac{dH(t,\bar{y},\bar{\psi},\bar{u})}{d\psi_i}, \\ \dfrac{d\psi_i}{dx} = -\dfrac{dH(t,\bar{y},\bar{\psi},\bar{u})}{dy_i}, \end{cases} i = 1, 2, ..., n.$$

Принцип максимуму у загальному випадку надає лише необхідну умову оптимальності. Тому якщо якесь допустиме керування задовольняє цьому принципу, то воно не обов'язково є оптимальним. Бажаючи підкреслити цю обставину, векторну функцію $\bar{u}$ *(t),* що задовольняє всі умови принципу максимуму, називають екстремаллю Понтрягіна [11].

При розв'язуванні багатьох прикладних задач принцип максимуму дозволяє однозначно визначити оптимальне керування. Зокрема, якщо відомо, що оптимальне керування існує, екстремалі Понтрягіна знайдені, доведено, що ця екстремаль єдина, то вона є шуканим оптимальним керуванням.

Розглянемо найпростіший випадок, коли система рівнянь (2.1) перетворюється в одне рівняння і є одна змінна керування:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, \bar{y}, \bar{u}), t_0 \le t \le T.$$

Тут $\bar{y} = \bar{y}$ (t), $\bar{u} = \bar{u}$ *(t)* , *f (t,* $\bar{y}$*,* $\bar{u}$ *)* – скалярні функції. Критерієм оптимальності є інтегральний функціонал

$$I(u) = \int_0^T f_0(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t))dt,$$

а функція Гамільтона має вигляд

$$H(t, y, \psi_0, \psi_1, u) = \psi_0 f_0(t, y, u) + \psi_1 f_1(t, y, u).$$

Моменти часу t_0 і T зафіксовані і межі траєкторії закріплені:

$$\bar{y}(t_0) = y_0, \bar{y}(T) = y_1.$$

Принцип максимуму стосовно до даного випадку набуває наступного вигляду.

Теорема 2.2 Нехай скалярна функція $\bar{u}\,(t)$ є оптимальним керуванням, а скалярна функція $\bar{y}$(t) – відповідною оптимальною траекторією в задачі оптимального керування з закріпленими межами при $n = r = 1$.

Тоді існують невід'ємне число $\bar{\psi}_0\,(t)$ та неперервна на $[t_0, T]$ функція $\bar{\psi}_1\,(t)$ такі, що виконуються наступні умови:

а) векторна функція $(\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1(t))$ є ненульовою на відрізку $[t, T_0]$;

б) функція $\bar{\psi}_1(t)$ є розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{d\bar{\psi}_1}{dt} = -\bar{\psi}_0 \frac{\partial f_0(t,\bar{y},\bar{u})}{\partial y} - \bar{\psi}_1 \frac{\partial f(t,\bar{y},\bar{u})}{\partial y}, t_0 \le t \le T;$$

в) для кожної точки $t \in [t_0,T]$, в якій функція $\bar{u}\ (t)$ неперервна, функція $H(t,\bar{y}(t),\bar{\psi}_0,\bar{\psi}_1(t),\bar{u})$ скалярної змінної u досягає максимуму на числовій множині$U, U \subset R$, при $\bar{u} = \bar{u}\ (t)$ тобто,

$$H(t,\bar{y}(t),\bar{\psi}_0,\bar{\psi}_1(t),\bar{u}(t)) = \max_{u \in U} H(t,\bar{y}(t),\bar{\psi}_0,\bar{\psi}_1(t),u), t_0 \le t \le T.$$

Розглянемо задачу оптимального керування, у якій керована система задана диференціальним рівнянням

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{u}, 0 \le t \le T.$$

Тут $\bar{y}=\bar{y}(t)$, $\bar{u}=\bar{u}(t)$ – скалярні функції. Будемо вважати, що обмеження на область допустимих керувань відсутні, тобто $U = R$.

Нехай задані крайові умови y (0) = 0, y (T) = 0; при цьому зафіксовані початковий і кінцевий момент часу. На множині допустимих керувань потрібно мінімізувати інтегральний функціонал

$$I(u) = \int_0^T (u^2(t) + y^2(t))dt.$$

Тут під знаком інтеграла записана сума квадратів двох функцій, яка не може приймати від’ємні значення.

Отже, інтеграл також приймає лише невід’ємні значення. Тим самим, найменшим можливим його значенням є нуль. Пара сталих функцій $\bar{u}(t)=0, \bar{y}(t)=0$ задовольняє крайову умову для вихідного диференціального рівняння та надає мінімальне значення функціоналу якості. Отже, вона утворює шуканий оптимальний процес.

У даному випадку критерій оптимальності полягає у мінімізації функціоналу якості $I(u)$, тому слід розглядати протилежний за знаком функціонал $-I\ (u)$. Функція Гамільтона має вигляд:

$$H=-\bar{\psi}_0(u^2+y^2)+\bar{\psi}\bar{u}$$

і приєднане рівняння

$$\frac{d\psi}{dx}=-\frac{dH}{dy}=2\bar{\psi}_0 y.$$

Розглянемо випадок $y_0 = 0$. У цьому випадку функція Гамільтона $H = \psi u$ може досягати максимального значення u на всій числовій осі R лише при $\bar{\psi}_0 = 0$. Але подвійна рівність $\bar{\psi}_0=\bar{\psi}=0$ суперечить умові а) теореми 2.1 Отже, $\bar{\psi}_0\neq 0$. У такому випадку, поділивши функцію Гамільтона і обидві частини приєднаного рівняння на коефіцієнт $\bar{\psi}_0\neq 0$, отримаємо, що $\bar{\psi}_0=1$. Тоді функція Гамільтона набуде вигляду

$$H=-u^2-y^2+\psi u.$$

Згідно з останньою умовою теореми 2.2 ця функція на оптимальному керуванні повинна досягати максимуму. Оскільки ніяких обмежень на величину зміни керування немає ($U = R$), цей максимум можна знайти, прирівнявши до нуля похідну функції H по u, тобто

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \psi = 0.$$

Звідси знаходимо $u = \frac{\psi}{2}$. В результаті отримуємо

$$y' = \frac{\psi}{2}, \psi' = 2y, 0 \le t \le T, \bar{y}(0) = \bar{y}(T) = 0.$$

У результаті отримуємо диференціальне рівняння ψ' = ψ, що має загальний розв’язок $\bar{\psi}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$. Після цього з рівняння $y' = \frac{\psi}{2}$ визначаємо фазову змінну $y' = \frac{1}{2}(C_1 e^t - C_2 e^t)$. З початкової умови $\bar{y}(0) = 0$ знаходимо, що $C_1 = C_2 = 0$. Отже, $\bar{y}(t) = \bar{\psi}(t) = 0$. Враховуючи, що $\bar{u} = \frac{\bar{\psi}}{2} = 0$, отримуємо оптимальне керування $\bar{u}$ *(t)==0.*

У випадку $n = r = 2$ вихідна система (2.1) складається з двох диференціальних рівнянь і записується у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1\big(t, y_1, y_2, u_1(t), u_2, (t)\big), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2\big(t, y_1, y_2, u_1(t), u_2, (t)\big), \end{cases} t_0 \le t \le T. \tag{2.6}$$

Критерій якості має вигляд

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} f_0(t, y_1(t), y_2(t), u_1(t), u_2(t))dt, \tag{2.7}$$

а гамільтоніан –

$$H(t,y_1,y_2,\psi_0,\psi_1,u_1,u_2)=\psi_0 f_0(t,y_1,y_2,u_1,u_2)+$$
$$+\psi_1 f_1(t,y_1,y_2,u_1,u_2). \qquad (2.8)$$

Теорема 2.3 Нехай вектор-функція $\bar{u}=(u_1,u_2)$ є оптимальним керуванням, а вектор-функція $\bar{y}=(\bar{y}_1(t),\bar{y}_2(t))$ – відповідною оптимальною траєкторією в сформульованій задачі оптимального керування при $n = r = =2$.

Тоді існують невід'ємне число $\bar{\psi}_0$ і векторна функція $\bar{\psi}(t)=(\bar{\psi}_1(t),\bar{\psi}_2(t))$ з непрервними на відрізку $[t_0,T]$ компонентами такі, що виконуються наступні умови:

а) вектор-функція $\bar{\psi}(t)=(\bar{\psi}_0,\bar{\psi}_1(t),\bar{\psi}_2(t))$ є ненульовою на відрізку $t_0 \le t \le T$;

б) вектор-функція $\bar{\psi}(t)=(\bar{\psi}_1(t),\bar{\psi}_2(t))$ є розв'язком системи

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{\psi}_1}{dt}=-\bar{\psi}_0\dfrac{\partial f_0(t,\bar{y},\bar{u})}{\partial y_1}-\bar{\psi}_1\dfrac{\partial f_1(t,\bar{y},\bar{u})}{\partial y_1}-\bar{\psi}_2\dfrac{\partial f_2(t,\bar{y},\bar{u})}{\partial y_1}, \\ \dfrac{d\bar{\psi}_2}{dt}=-\bar{\psi}_0\dfrac{\partial f_0(t,\bar{y},\bar{u})}{\partial y_2}-\bar{\psi}_1\dfrac{\partial f_1(t,\bar{y},\bar{u})}{\partial y_2}-\bar{\psi}_2\dfrac{\partial f_2(t,\bar{y},\bar{u})}{\partial y_2}, \end{cases} t_0\le t\le T; \qquad (2.9)$$

в) кожному *t є [t₀,T]*, в якому обидві функції $\bar{u}_1=\bar{u}_1(t),\bar{u}_2=\bar{u}_2(t)$ є неперервними, функція $H(t,\bar{y}_1(t),\bar{y}_2(t),\bar{\psi}_0,\bar{\psi}_1(t),\bar{\psi}_2(t),\bar{u}_1,\bar{u}_2)$ двох змінних u_1, u_2 досягає максимуму на множині$U, U\subset R^2$, при $\bar{u}_1=\bar{u}_1(t),\bar{u}_2=\bar{u}_2(t)$

$$H(t,\bar{y}_1(t),\bar{y}_2(t),\bar{\psi}_0,\bar{\psi}_1(t),\bar{\psi}_2(t),\bar{u}_1(t),\bar{u}_2(t))=$$
$$=\max_{(u_1,u_2)\in U} H(t,\bar{y}_1(t),\bar{y}_2(t),\bar{\psi}_0,\bar{\psi}_1(t),\bar{\psi}_2(t),\bar{u}_1,\bar{u}_2), \qquad (2.10)$$
$$t_0\le t\le T.$$

2.2 Модифікація принципу максимуму

Раніше передбачалося, що управління здійснюється на певному скінченному проміжку часу $[t_0,T]$. У деяких задачах важливо визначити оптимальний процес при його тривалому, практично необмеженому продовженні. Тоді задачу керування слід формулювати для нескінченного проміжку часу $[t_0, +\infty)$ [8]. У цьому випадку твердження принципу максимуму також є вірним.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1,..., y_n, u_1,..., u_r), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1,..., y_n, u_1,..., u_r), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1,..., y_n, u_1,..., u_r), \end{cases} t_0 \le t < +\infty. \tag{2.11}$$

Вважається заданим початковий момент часу $t = t_0$, початковий стан системи $y_0 \in R^n$, область допустимих керувань U та критерій оптимальності

$$I(u) = \int_{t_0}^{+\infty} f_0(t, \bar{y}_1(t),..., \bar{y}_n(t), \bar{u}_1(t),..., \bar{u}_r(t))dt. \tag{2.12}$$

Нехай компоненти векторних функцій керування $\bar{u}$ (t) є обмеженими та кусково-неперервними на проміжку $[t_0, +\infty)$, причому виконано включення $\bar{u}(t)$ є U для всіх $t \ge t_0$.

Задано також кінцевий стан системи $y^{(1)} \in R^n$, до якого має прагнути поточний стан $\bar{y}(t)$ при $t \to \infty$, тобто

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = y^{(1)}.$$

Потрібно перевести систему з заданого початкового у кінцеве положення на проміжку керування $[t_0, +\infty)$.

Задача оптимального керування з нескінченним проміжком часу для системи (2.11) полягає в знаходженні такого допустимого керування, яке переводить систему із заданого початкового стану $y^{(0)}$ в кінцевий стан $y^{(1)}$ на часовому проміжку $[t_0, +\infty)$ і при цьому надає найбільше можливе значення критерію оптимальності (2.2). Розв'язок цієї задачі є оптимальним керуванням, а відповідна йому траекторія – оптимальною траекторією [11].

Наведемо загальний вигляд функції Гамільтона

$$H(t,y,\psi,u)=\sum_{i=0}^{n}\psi_i f_i(t,y,u). \tag{2.13}$$

Теорема 2.4 (принцип максимуму для задачі з нескінченним часом керування). Нехай вектор-функція $\bar{u}(t)$ є оптимальним керуванням, а вектор-функція $\bar{y}(t)$ – відповідною оптимальною траєкторією в задачі оптимального керування на нескінченному проміжку часу. Тоді існують невід'ємне число ψ_0 і векторна функція $\bar{\psi}(t)=(\bar{\psi}_1(t),\bar{\psi}_2(t),...,\bar{\psi}_n(t))$, визначена та неперервна на проміжку $[t_0, +\infty)$, такі, що виконуються наступні умови

а) вектор-функція $\bar{\psi}(t)=(\bar{\psi}_0,\bar{\psi}_1(t),...,\bar{\psi}_n(t)), t_0\le t<+\infty$, є ненульовою;

б) вектор-функція $\bar{\psi}(t)=(\bar{\psi}_1(t),\bar{\psi}_2(t),...,\bar{\psi}_n(t))$ є розв'язком приєднаної системи рівнянь

$$\begin{cases}
\dfrac{d\psi_1}{dt}=-\dfrac{\partial H(t,y,\psi,\hat{u})}{\partial y_1}\Big|_{\substack{\bar{u}=\bar{u}(t)\\ \bar{y}=\bar{y}(t)}}=-\sum\limits_{j=0}^{n}\psi_j\dfrac{\partial f_j(t,\bar{y},\bar{u})}{\partial y_1}, \\
\dfrac{d\psi_2}{dt}=-\dfrac{\partial H(t,y,\psi,\hat{u})}{\partial y_2}\Big|_{\substack{\bar{u}=\bar{u}(t)\\ \bar{y}=\bar{y}(t)}}=-\sum\limits_{j=0}^{n}\psi_j\dfrac{\partial f_j(t,\bar{y},\bar{u})}{\partial y_2}, \quad t_0\le t<+\infty; \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dfrac{d\psi_n}{dt}=-\dfrac{\partial H(t,y,\psi,\hat{u})}{\partial y_n}\Big|_{\substack{\bar{u}=\bar{u}(t)\\ \bar{y}=\bar{y}(t)}}=-\sum\limits_{j=0}^{n}\psi_j\dfrac{\partial f_j(t,\bar{y},\bar{u})}{\partial y_n},
\end{cases}$$

в) при кожному t $\geq$ t_0, в якому всі компоненти вектор функції $\bar{u}$(t) неперервні, функція Гамільтона $H(t,\bar{y}(t),\bar{\psi}(t),\bar{u})$ векторної змінної $\bar{u}=(\bar{u}_1,\bar{u}_2,...,\bar{u}_r)$ досягає максимуму на множині U при $\bar{u}$= $\bar{u}$ (t), тобто

$$H(t,\bar{y}(t),\bar{\psi}_0,\bar{\psi}_1(t),\bar{u}(t))=\max_{u\in U} H(t,\bar{y}(t),\bar{\psi}_0,\bar{\psi}_1(t),\bar{u}),$$
$$t_0 \leq t<+\infty.$$

Розглянемо стандартну схему застосування принципу максимуму на прикладі задачі оптимального керування з закріпленими кінцями при $n = r = 2$. Цьому випадку відповідає твердження теореми 2.2.

Відповідно до принципу максимуму $\bar{\psi}_0$ повинне бути невід’ємне. Тут слід виділити два випадки: $\bar{\psi}_0 > 0$ и $\bar{\psi}_0 = 0$. У першому з них, ділячи рівності (2.9) – (2.10) на $\bar{\psi}_0$ і вводячи нові приєднані змінні, що відрізняються від старих $\bar{\psi}_1(t)$ и $\bar{\psi}_2(t)$ множником $1/\bar{\psi}_0$, отримаємо рівність, аналогічну (2.9) – (2.10), в яких, проте, $\bar{\psi}_0 = 1$.

Отже, завжди можна обмежитися розглядом лише двох можливостей: $\bar{\psi}_0 = 1$ або $\bar{\psi}_0 = 0$. У другому випадку функція Гамільтона (2.8) не включає доданок з функцією f_0 з критерію оптимальності (2.7). Це означає, що при $\bar{\psi}_0 = 0$ твердження принципу максимуму не містить ніякої інформації про критерії оптимальності. Отже, замінюючи вихідний критерій оптимальності будь-яким іншим, ми отримаємо ті ж самі умови оптимальності у формі принципу максимуму. Задачі такого типу вимагають спеціального дослідження.

Застосування принципу максимуму (знаходження екстремалі Понтрягіна) починають з формування функції Гамільтона [11]

$$H=H(t,\bar{y}_1,\bar{y}_2,\bar{\psi}_0,\bar{\psi}_1,\bar{\psi}_2,\bar{u}_1,\bar{u}_2)$$

і використання умови максимуму:

$$H\rightarrow \max_{(u_1,u_2)\in U}.$$

З цієї умови при кожному фіксованому наборі параметрів $t,\bar{y}_1,\bar{y}_2,\bar{\psi}_0,\bar{\psi}_1,\bar{\psi}_2$ знаходять керування $\bar{u}=(u_1,u_2)$, що надає максимальне значення функції Гамільтона H. Позначимо це управління через

$$\bar{u}=(\bar{u}_1(t,y,\psi),\bar{u}_2(t,y,\psi)). \tag{2.14}$$

Для деяких класів задач функцію керування (2.11) можна записати у вигляді. Наприклад, нехай

$$\begin{aligned}
&f_k(t,y,u)=f_k(t,y)+f_{k1}(t,y)u_1+f_{k2}(t,y)u_2,\ k=0,1,2,\\
&U=\left\{\bar{u}=(u_1,u_2)\,|\,\alpha_1\le u_1\le\beta_1,\alpha_2\le u_2\le\beta_2\right\},
\end{aligned}$$

де $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ — задані числа.

У цьому випадку функцію Гамільтона можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
&H=\psi_0 f_0(t,y)+\psi_1 f_1(t,y)+\psi_2 f_2(t,y)+\\
&+(\psi_0 f_{01}(t,y)+\psi_1 f_{11}(t,y)+\psi_2 f_{21}(t,y))u_1+\\
&+(\psi_0 f_{02}(t,y)+\psi_1 f_{12}(t,y)+\psi_2 f_{22}(t,y))u_2.
\end{aligned}$$

Вона досягає свого максимального значення завдяки лінійності по змінним u_1, u_2 лише у граничних точках множини U, а саме при

$$u_k=\begin{cases}\beta_k, & \text{если } \psi_0 f_{0k}(t,y)+\psi_1 f_{1k}(t,y)+\psi_2 f_{2k}(t,y)>0,\\ \alpha_k, & \quad\ \ \psi_0 f_{0k}(t,y)+\psi_1 f_{1k}(t,y)+\psi_2 f_{2k}(t,y)<0,\end{cases} k=1,2.$$

Припустимо, що в загальному випадку функція (2.11) знайдена. Підставимо її у вихідну та приєднану системи:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, u_1(t, y, \psi), u_2(t, y, \psi)), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, u_1(t, y, \psi), u_2(t, y, \psi)), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{dt} = -\psi_0 \dfrac{\partial f_0(t, y, u(y, \psi)}{\partial y_1} - \psi_1 \dfrac{\partial f_1(t, y, u(y, \psi))}{\partial y_1} - \psi_2 \dfrac{\partial f_2(t, y, u(y, \psi))}{\partial y_1}, \\ \dfrac{d\psi_2}{dt} = -\psi_0 \dfrac{\partial f_0(t, y, u(y, \psi)}{\partial y_2} - \psi_1 \dfrac{\partial f_1(t, y, u(y, \psi))}{\partial y_2} - \psi_2 \dfrac{\partial f_2(t, y, u(y, \psi))}{\partial y_2}. \end{cases}$$

Отримана система з чотирьох звичайних диференціальних рівнянь містить чотири невідомі функції y_1, y_2, ψ_1, ψ_2 та число ψ_0. Припустимо, що вдалося знайти її загальний розв'язок, що містить чотири довільні сталі. Конкретні значення цих сталих визначаються за допомогою наявних чотирьох крайових умов:

$$\bar{y}_1(t_0) = y_1^{(0)}, \bar{y}_2(t_0) = y_2^{(0)}, \bar{y}_1(T) = y_1^{(1)}, \bar{y}_2(T) = y_2^{(2)}.$$

У підсумку будуть знайдені деякі функції $\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \bar{\psi}_1(t), \bar{\psi}_2(t)$. Для визначення числа $\psi_0 = \bar{\psi}_0$ досить встановити, який із двох випадків $\bar{\psi}_0 = 1$ чи $\psi_0 = 0$ має місце в дійсності. При цьому слід враховувати, що згідно з умовою а) принципу максимуму векторна функція $\bar{\psi}(t) = (\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1(t), \bar{\psi}_2(t))$ не повинна бути тотожньою рівною нулю на проміжку $t_0 \le t \le T$.

Нехай ψ^0 і всі функції $\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \bar{\psi}_1(t), \bar{\psi}_2(t)$ знайдені. Підставивши їх у праву частину рівності (2.11), отримаємо

$$\bar{u} = (\bar{u}_1(t, \bar{y}(t), \bar{\psi}_1(t)), \bar{u}_2(t, \bar{y}(t), \bar{\psi}(t))).$$

Якщо ця двовимірна векторна функція має кусково-неперервні компоненти, причому її значення не виходять за межі допустимої області, тобто $(u_1(t, \bar{y}(t), \bar{\psi}(t)), u_2(t, \bar{y}(t), \bar{\psi}(t))) \in U$ при усіх $t \in [t_0, T]$, то вона є екстремаллю Понтрягіна і може визначати оптимальне керування [5].

Якщо відомо, що розв'язок задачі оптимального керування існує, а екстремаль Понтрягіна є єдиною, то знайдена екстремаль є оптимальним керуванням.

Розглянемо принцип максимуму для задачі з нефіксованим часом управління. Для цього розглянемо задачу оптимального керування системою:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1,..., y_n, u_1,..., u_r), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1,..., y_n, u_1,..., u_r), \; t_0 \le t \le T. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1,..., y_n, u_1,..., u_r), \end{cases}$$

З критерієм якості управління

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} f_0(t, \bar{y}_1(t),...,\bar{y}_n(t), \bar{u}_1(t),..., \bar{u}_r(t))dt,$$

заданими початковим моментом часу $t = t_0$, областю керування $U, U \subset R^r$, початковим станом $\bar{y}(t_0) = y^{(0)} \in R^n$ і кінцевим станом $\bar{y}(T) = y^{(1)} \in R^n$. На відміну від задачі оптимального керування, розглянутої раніше, тут кінцевий момент часу T будемо рахувати не фіксованим і таким, що підлягає визначенню.

Запишемо функцію Гамільтона

$$H(t, y, \psi, u) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i(t, y, u).$$

Задача оптимального керування з нефіксованим кінцевим моментом часу полягає в максимізації інтегрального функціоналу (2.2) на множині всіх допустимих управлінь, переводять систему (2.1) із заданого початкового стану $y^{(0)}$ в заданий кінцевий стан $y^{(1)}$ до деякого заздалегідь невідомому моменту часу

T. Рішенням цього завдання є оптимальне управління (векторна функція) $\bar{u}(t) = (\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t), ..., \bar{u}_r(t))$, відповідна оптимальна траєкторія (векторна функція) $\bar{y}(t) = (\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), ..., \bar{y}_r(t))$ і оптимальний час T^*. Слід зауважити, що в даному випадку правильніше було б замість $I(u)$ писати $I(T,u)$, підкреслення тим самим залежність критерію якості від кінцевого моменту часу. Але ми цього робити не будемо, оскільки заздалегідь обумовили, що тут розглядається задача з нефіксованим кінцевим моментом часу.

Припустимо, що пара векторних функцій $\bar{u}(t)$, $\bar{y}(t)$ та час T^* є оптимальними в сформульованої задачі. Цілком очевидно, що ця пара функцій буде являти собою оптимальний процес і в завданні оптимального управління, що відрізняється від наведеної вище лише фіксацією кінцевого моменту часу $T=T^*$. Тому відповідно до теореми 2.1 процес $\bar{u}(t)$, $\bar{y}(t)$, оптимальний у вихідній задачі з нефіксованим кінцевим моментом часу управління, буде відповідати всім трьом умовам цієї теореми при $T = T^*$. Тим самим, принцип максимуму для даної задачі повинен містити вже відомі умови а), б), в) теореми 2.1, але при цьому вони повинні бути доповнені якимось додатковою вимогою для визначення оптимального значення кінцевого моменту часу Т *.

Теорема 2.2 (принцип максимуму для задачі з нефіксованим часом управління). Нехай $\bar{u}$ (t), $\bar{y}$ (t) – оптимальний процес в завданні оптимального керування з нефіксованим часом керування системою (2.1), критерієм оптимальності (2.2), заданими початковим $\bar{y}(t_0) = y^{(0)} \in R^n$ і кінцевим $\bar{y}(T) = y^{(1)} \in R^n$ сотаном.

Тоді необхідно існують невід'ємне число ψ^*_0 і безперервна векторна-функція $\bar{\psi}(t) = (\bar{\psi}_1(t), \bar{\psi}_2(t), ..., \bar{\psi}_n(t))$ такі, що виконуються умови 1), 2), 3) (в яких слід покласти $T = T^0$) теореми 2.1 і, крім того, має місце рівність

$$\max_{u \in U} H(T, \bar{y}(T), \bar{\psi}(T), \bar{u})\Big|_{T=T^*} = 0. \qquad (2.15)$$

2.3 Принцип максимуму у задачі з рухомими межами

У багатьох задачах керування один або обидва кінці траекторій, що відповідають допустимим керуванням, не є фіксованими і можуть вибиратися в межах деяких заданих множин. Такі задачіі називають задачами керування з рухомими кінцями.

Спочатку розглянемо задачу оптимального керування з рухомим правим кінцем. У ній цільовий функціонал підлягає максимізації на множині всіх допустимих управлінь, що переводять керовану систему із заданої точки $y(t_0)$ фазового простору в будь-яку точку деякої заданої множини $S, S \subset R^n$. У цьому випадку говорять, що систему із заданого початкового стану слід перевести на множину S. У випадку, коли $S = R^n$, маємо задачу з вільним правим кінцем [9].

Якщо вказано певна множина можливих початкових станів системи, то отримуємо задачу оптимального керування з рухомим лівим кінцем. У загальному випадку обидва кінці траекторії можуть бути рухливими, тобто розташовуватися на двох заданих множинах.

Далі будемо припускати, що обмеження на можливі зміни початкового $y(t_0) \in R^n$ та кінцевого $y(T) \in R^n$ станів задані за допомогою наступної системи нерівностей і рівнянь:

$$\max_{u \in U} H(T, \bar{y}(T), \bar{\psi}(T), \bar{u})\Big|_{T=T^*} = 0. \qquad (2.16)$$

Тут може бути $m = 0$ або $M = m$. Першому варіанту відповідає випадок відсутності обмежень-нерівностей, а другому – обмежень-рівностей.

Задача оптимального керування з рухомими кінцями формулюється наступним чином. Дана керована система (2.11) і заданий інтегральний функціонал (2.12). Серед усіх допустимих керувань, що переводять систему (2.11) з деякою початкової точки $y\ (t_0)$, що задовольняє обмеження (2.16), у множину кінцевих станів $y\ (T)$, для яких виконані співвідношення (2.16), потрібно знайти таке керування, яке доставляє найбільше можливе значення інтегральному функціоналу. Потрібно визначити також кінці оптимальної траєкторії, тобто точки $y(t_0)$, $y(T)$. При цьому час керування може бути фіксованим або нефіксованим.

Припустимо, що процес $u*, y*$ є оптимальним, причому траєкторія починається в точці $y(t_0) = y^{(0)}$ і закінчується в точці $y^*(T) = y^{(1)}$, обидві ці точки задовольняються співвідношенння (2.16). Із загальних міркувань ясно, що елемент, який надає функціоналу найбільше можливе значення на деякій допустимій множині максимізує той же самий функціонал на будь-якій підмножині, що містить даний елемент.

Тому керування u *, оптимальне в у задачі переходу об'єкта керування, що описується системою (2.11) з однієї множини на іншу, має бути оптимальним і в задачі переходу даної системи з фіксованого початкового стану $y^{(0)}$ в фіксований кінцевий стан $y^{(1)}$. Звідси випливає, що для зазначеного вище оптимального керування u * і відповідної йому траєкторії $y*$ обов'язково повинен виконуватися принцип максимуму в формі теореми 2.1 або 2.2 у залежності від того, чи є фіксованим час керування. Таким чином, основна частина твердження принципу максимуму для задачі з рухомими кінцями залишається такою ж, як в задачі з фіксованими кінцями.

Зміна формулювання необхідної умови оптимальності у формі принципу максимуму для задачі з рухомими кінцями полягає в заміні $2n$ крайових умов $y^*(t_0) = y^0, y^0(T) = y^1$ для кінців оптимальної траєкторії на вимоги, що записуються у вигляді такої системи $2n$ рівностей:

$$\psi_i^*(t_0) = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \frac{\partial g_j(y(t_0), y(T))}{\partial y_i(t_0)}\Big|_{(y^*(t_0), y^*(T))}, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

$$\psi_i^*(T) = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \frac{\partial g_j(y(t_0), y(T))}{\partial y_i(T)}\Big|_{(y^*(t_0), y^*(T))}, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

їх називають умовами трансверсальності.

Повинні виконуватися також m рівностей:

$$\alpha_j g_j(y^*(t_0), y^*(T)) = 0, \quad j = 1, 2, ..., m,$$

які називають умовами доповнюючої нежорсткості. Вони виконуються при деяких невід'ємних числах $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, а також числах $\alpha_{m+1}, ..., \alpha_M$ довільного знака, які необхідно визначити. Вони в сукупності задовольняють умову $(\psi_0^*, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_M) \neq 0$. У разі, коли один з кінців траєкторії (наприклад, початковий), закріплений, умова трансверсальності на цьому кінці є зайвою.

Загальна кількість всіх виписаних вище рівностей $2n+ m$ збігається з сумою числа m констант $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ та числа $2n$ координат початкової і кінцевої точок $y^{*(0)}, y^{*(1)}$ оптимальної траєкторії. Якщо сюди додати ще $M - m$ обмежень- рівностей з (2.16), то в результаті отримаємо $2n + M$ рівностей для визначення такого ж числа невідомих компонент $y_1^*(0), ..., y_n^*(0), y_1^*(T), ..., y_n^*(T)$ початкової і кінцевої точок оптимальної траєкторії та констант $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_M$.

Розглянемо вигляд умов трансверсальності та умов доповнюючої нежорсткості в деяких найпростіших випадках.

Для випадку задачі керування з вільним правим кінцем маємо крайову умову $y(t_0) = y^{(0)}$. Цю умову можна переписати у вигляді обмежень-рівностей

$$g_j(y(t_0), y(T)) = y_j(t_0) - y_j^{(0)} = 0, \; j = 1, 2, ..., n.$$

Через відсутність обмежень-нерівностей умови доповнюючої нежорсткості тут відсутні. Коли лівий кінець траекторії закріплений, то умова трансверсальності виконується лише при $t = T$ [10]. При цьому жодна з функцій g_j від $y_i(T)$ не залежить. Отже, в умові трансверсальності похідні від функції g_i по цій змінній дорівнюють нулю. Таким чином, для задачі оптимального керування з вільним правим кінцем умова трансверсальності має вигляд

$$\psi^*(T) = 0.$$

Нехай лівий кінець фазової траєкторії закріплений, а для правого кінця повинні виконуватися нерівності

$$y_i(T) \geq a_i, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

де $a_1, a_2, ..., a_n$ – задані числа.

У цьому випадку обмеження-рівності відсутні, а наявні обмеження-нерівності можна подати у формі $g_i(y(t_0), y(T)) = y_i(T) - a_i \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., n$. Випишемо для даного випадку умови трансверсальності і доповнюючої нежорсткості на правому кінці траєкторії:

$$\psi_i^*(T) = \alpha_i, i = 1, 2, ..., n; \quad \alpha_j(y_j^*(T) - a_j) = 0, \; j = 1, 2, ..., n.$$

Оскільки числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ невід'ємні, ці умови можна записати в наступному еквівалентному вигляді:

$$\psi_i^*(T) \geq 0, \qquad \psi_i^*(T)(y_i^*(T) - a_i) = 0, i = 1, 2, ..., n.$$

Загальна схема застосування принципу максимуму для задач з рухомими кінцями залишається такою ж, що і для задачі з закріпленими кінцями. Відмінність полягає в необхідності визначення додаткових величин з використанням умов трансверсальності та доповнюючої нежорсткості.

3 ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ ОПТИМАЛЬНОГО ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ НА ОСНОВІ ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМУ

3.1 Економічна інтерпретація принципу максимуму

Припустимо, що деяка фірма прагне отримати максимально можливий прибуток на часовому проміжку $[0, T]$. Нехай єдиною змінною стану є капітал $K = K(t)$, а єдиною змінною керування є функція $u = u(t)$ (це, наприклад, величина коштів на рекламну компанію або інвестиції у впровадження нових технологій). У кожен момент часу t величина прибутку фірми залежить від величини капіталу K і від керування u. Відповідно до цього, функція прибутку в момент часу t має вигляд $\pi(t, K, u)$. Тоді сумарний прибуток за весь часовий проміжок $[0, T]$ складе

$$\Pi(u) = \int_0^T \pi(t, K(t), u(t))dt. \tag{3.1}$$

Для отримання найбільшого можливого прибутку функціонал (3.1) необхідно максимізувати. Швидкість зміни величини капіталу, тобто похідна K, залежить від величини капіталу K і від керування u = u (t); при цьому вона змінюється з часом за певним законом:

$$\Pi(u) = \int_0^T \pi(t, K(t), u(t))dt. \tag{3.2}$$

Крім того, нехай задано початкову умову $K(0) = K_0$ і кінцевий момент часу T, при цьому правий кінець траєкторії $K(T)$ вільний.

У формулюванні принципу максимуму в загальному випадку присутні три типи змінних – стану, керування і приєднані змінні. Змінні стану і керування для даної моделі описані вище. Оскільки (3.2) являє собою одне диференціальне рівняння, то приєднана змінна у цій задачі єдина. З'ясуємо економічний зміст приєднаної змінної $\psi^* = \psi^*(t)$.

Нехай ψ_0^* = 1. Для цього випадку запишемо функцію Гамільтона для оптимального процесу:

$$H(t, K^*, u^*, \psi^*) = \pi(t, K^*, u^*) + \psi^* f(t, K^*, u^*).$$

Використовуючи рівняння (3.2), цільовий функціонал можна записати у вигляді:

$$\Pi^*(u) = \int_0^T \Big\{ \pi(t, K^*(t), u^*(t)) + \psi^*(t)(f(t, K^*(t), u^*(t) - K^{*'}(t)) \Big\} dt.$$

Виконаємо перетворення цього функціоналу:

$$\begin{aligned}
\Pi^*(u) &= \int_0^T \Big\{ H(t, K^*(t), u^*(t)\psi^*(t)) - \psi^*(t) K^{*'}(t) \Big\} dt = \\
&= \int_0^T H(t, K^*(t), u^*(t)\psi^*(t)) dt - \int_0^T \psi^*(t) K^{*'}(t) dt = \\
&= \int_0^T H(t, K^*(t), u^*(t)\psi^*(t)) dt - \psi^*(t) K^*(t) \Big|_0^T + \int_0^T \psi^{*'}(t) K^*(t) dt = \\
&= \int_0^T \Big\{ H(t, K^*(t), u^*(t)\psi^*(t)) + \psi^{*'}(t) K^*(t) \Big\} dt - \psi^*(t) K^*(t) + \psi^*(0) K_0.
\end{aligned}$$

Використовуючи цю рівність, обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial K_0} = \psi^*(0), \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial K^*(T)} = -\psi^*(T). \tag{3.3}$$

З (3.2) випливає, що ψ_0^* являє собою міру чутливості сумарного прибутку до заданого початкового капіталу K_0. Якщо збільшити початковий капітал на умовну одиницю, то величина сумарного прибутку зросте на величину ψ_0^*.

Таким чином, ψ_0^* можна розглядати як тіньову ціну одиниці початкового капіталу.

Аналогічно з другої рівності (3.3) отримуємо, що $\psi^*(T)$ – це від'ємна швидкість зміни сумарного прибутку Π^* . Таким чином, якщо ми хочемо зберегти умовну одиницю капіталу в кінці розглянутого періоду часу (зменшити його на одиницю), то нам доведеться піти на зменшення сумарного прибутку на величину $\psi^*(T)$. Отже, $\psi^*(T)$ є тіньовою ціною одиниці кінцевого капіталу.

У загальному випадку у межах даної задачі оптимального керування величина $\psi^*(t)$ може розглядатися як тіньова ціна капіталу в поточний момент часу t .

Розглянемо умову трансверсальності. Оскільки правий кінець траєкторії є вільним, то умова трансверсальності на правому кінці має вигляд $\psi^*(T) = 0$.

Виконання цієї рівності означає, що для оптимального процесу тіньова ціна капіталу в кінцевий момент часу дорівнює нулю.

Для фірми, яка має намір продовжити своє існування понад розглянутого періоду часу *[0, T]*, доцільно було б зарезервувати кілька одиниць капіталу на певному мінімально прийнятному рівні. Ця умова приводить до вимоги виконання нерівності $K(T) \geq K_{min}$ в кінцевий момент часу. Згідно з результатами попереднього розділу в такому випадку умови трансверсальності і доповнюючої нежорсткості мають вигляд:

$$\psi^*(T) \geq 0, \quad \psi^*(T)(K^*(T) - K_{\min}) = 0.$$

Аналіз цих умов свідчить, що при можливості перевищення величини $K^*(T)$ над граничним значенням $K_{\min}$, тіньова ціна $\psi^*(T)$ обов'язково дорівнює нулю, як і в розглянутому вище випадку з вільним правим кінцем. Але якщо тіньова ціна $\psi^*(T)$ капіталу в кінцевий момент часу є додатною, то завдяки другій з записаних вище умов обов'язково повинна виконуватися рівність $K^*(T)=K_{\min}$. Це означає, що наявний капітал до кінцевого моменту часу слід витратити до мінімально можливої межі.

3.2 Модель функціонування односекторної економічної системи

Розглянемо економіко-математичну модель Солоу, що є односекторною моделлю економічного зростання. У цій моделі економічна система розглядається як єдине ціле, що виробляє один універсальний продукт, який вона може як використовувати , так і інвестувати. Ринки збуту працюють безперебійно, фактори виробництва (капітал і праця) істотно не знижуються і не підвищуються при зміні цін, технологія виробництва є сталою. У цілому, дана модель досить адекватно відображає найважливіші макроекономічні аспекти процесу відтворення. Експорт-імпорт в явному вигляді тут не враховується.

Стан економіки в моделі Солоу задається наступними п'ятьма ендогенними змінними:

а) X – валовий внутрішній продукт (ВВП),

б) C – фонд невиробничого споживання,

в) I – інвестиції,

г) L – праця (число зайнятих),

д) K капітал (основні виробничі фонди).

Крім того, в моделі використовуються наступні екзогенні (визначені поза системою) показники: n – річний темп приросту числа зайнятих, m – частка вибулих за рік основних виробничих фондів, r – норма накопичення (частка валових інвестицій у валовому внутрішньому продукті). Екзогенні параметри підпорядковані наступним обмеженням : $-1 < n < 1, 0 < m < 1, 0 < r < 1$.

Передбачається, що ендогенні змінні змінюються в часі. Екзогенні величини не залежать від часу, норма накопичення є керуючим параметром, тобто в початковий момент часу може визначатися керуючим органом системи на будь-якому рівні з області допустимих значень.

Час t змінюється неперервно від початкового моменту $t_0 = 0$, одиницею вимірювання є рік.

Передбачається, що річний обсяг виробництва в кожен момент часу визначається лінійно-однорідною неокласичною виробничою функцією

$$X = F(K, L),$$

яка є невід’ємною при невід’ємних значеннях змінних K i L, і має місце рівність $F(0,0) = 0$. Вважається, що функція $F(K, L)$ має частинні похідні до другого порядку включно, причому обидві її частинні похідні першого порядку є додатними. Крім того, ця функція є однорідною, тобто рівність $F(rK, rL) = rF(K, L)$ має місце для всіх додатних r.

Виконаємо дослідження поведінки односекторної економічної системи на основі моделі Солоу:

$$\begin{aligned} &\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho f(k), \lambda = \mu + \nu, k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0}, \\ &x = f(k), i = \rho f(k), c = (1-\rho) f(k), \end{aligned} \tag{3.4}$$

де $k = K/L$ – фондоозброєність, K – фонди, L – праця (число зайнятих);

$x = X/L$ – продуктивність праці,

X – валовий внутрішній продукт (ВВП);

$i = I/L$ – питомі інвестиції (на одного зайнятого);

I – інвестиції;

$c = C/L$ – середньостатистичне (питоме) споживання (на одного зайнятого);

C – фонд невиробничого споживання;

y – річний темп приросту числа зайнятих;

ρ – норма накопичення;

μ – частка тих, хто вибув за рік основних виробничих фондів.

Сформулюємо задачу оптимального керування описаною економічною симтемою, подальше дослідження якої проведемо за допомогою принципу максимуму Понтрягіна.

Отже, будемо вважати, що $\rho \neq const$. З останньої рівності в (3.4) отримаємо, що $\rho f(k) = f(k) - c$ і перше з рівнянь (3.6) запишемо у вигляді:

$$\frac{dk}{dt} = f(k) - (\mu + \nu)k - c, k(0) = k_0.$$

Подальше дослідження здійснимо на основі аналізу отриманої моделі об’єкту керування.

3.3 Визначення оптимального керування для моделі односекторної економічної системи

Нехай функцією керування є питоме споживання c. Допустимим керуванням будемо вважати довільну кусково-неперервну функцію $c = c(t)$, що задовольняє нерівності

$$0 < c_* \leq c(t) \leq f(k(t)), t \geq 0, \qquad (3.5)$$

де c_* – нижня гранично допустима межа питомого споживання.

Задача керування економічною системою полягає у тому, щоб регулювати її за допомогою податково-кредитної політики, змінюючи при цьому величину $c(t)$, щоб за тривалий інтервал часу дисконтована корисність від споживання продукту діяльності системи була б найбільшою, тобто

$$\int_0^{+\infty} e^{-\delta t} u(c(t))dt \to \max, \qquad (3.6)$$

де δ – додатна норма дисконту, за допомогою якої майбутні корисності приводяться до теперішнього часу, виходячи з того, що найближче у часі споживання є більш пріоритетним, ніж віддалене.

У рівності (3.6) $u = u(c)$ – функція корисності споживання. Вона повинна бути додатною, зростаючою функцією та задовольняти умові $u(0) = 0$. Далі вважатимемо, що корисність є прямо пропорційною питомому споживанню, тобто виконується рівність:

$$u(c) = \alpha c, \quad \alpha > 0, \quad \alpha - const.$$

З математичної точки зору задача оптимального зростання для одно-секторної замкнутої економічної системи з нескінченним часом керування полягає у максимізації інтегрального функціоналу

$$I(c) = \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} c(t) dt$$

за умов

$$\begin{gathered} \frac{dk}{dt} = f(k) - \lambda k - c(t), \quad k(0) = k_0, \\ 0 < c_* \le c(t) \le f(k(t)), \quad k(t) \ge 0, t \ge 0. \end{gathered} \tag{3.7}$$

У цій задачі оптимального керування єдиною фазовою змінною є фондоозброєність $k = k(t)$, єдиною керуючою функцією – питоме споживання $c = c(t)$, а цільовим функціоналом є інтеграл корисності (3.6). Правий кінець траєкторії $k=k(t)$ (при $t \to +\infty$) не фіксований, але задовольняє вимогу $\lim_{t \to +\infty} k(t) \ge 0$.

Розв'язком задачі є оптимальний процес $k^*(t), c^*(t)$, при якому корисність системи є максимальною.

3.4 Застосування принципу максимуму

Замість приєднаної змінної $\psi_1(t)$ введемо нову $\psi(t) = e^{\delta t} \psi_1$ і запишемо для неї гамільтоніан (в припущенні $\psi_0^* = 1$):

$$H = e^{-\delta t}\left\{\alpha c + \psi\left[f(k) - \lambda k - c\right]\right\}. \tag{3.8}$$

Виходячи з (3.8), нову приєднану змінну ψ можна визначити як тіньову ціну фондів. Вираз у фігурних дужках (3.8) – це корисність кінцевого питомого виробництва, оскільки αc – корисність частини продукції, що використовується для невиробничого споживання, а $\psi\left[f(k) - \lambda k - c\right]$— корисність частини, що використовується на збільшення капіталу. Множенням на коефіцієнт дисконтування $e^{-\delta t}$ корисність приведена до теперішнього моменту часу.

Запишемо диференціальне рівняння для приєднаної змінної:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{-\delta t}\psi) = -\frac{\partial H}{\partial k}.$$

Після почленного диференціювання і подальшого спрощення воно набуде вигляду

$$\frac{d\psi}{dt} = \left[(\lambda + \delta) - f'(k)\right]\psi.$$

Запишемо це рівняння разом з вихідним диференціальним рівнянням у вигляді системи

$$\begin{gathered} \frac{dk}{dt} = f(k) - \lambda k - c(t), \quad k(0) = k_0, \\ \frac{d\psi}{dt} = \left[(\lambda + \delta) - f'(k)\right]\psi. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Функція $f(k)$ підпорядкована умовам $f' > 0, f'' < 0$. Це означає, що вона зростає, а її похідна спадає для всіх невід’ємних k . Відповідно до рівності $f(0) = 0$ графік функції f проходить через початок координат. Будемо вважати, що $\lim\limits_{k\to+0} f'(k) = +\infty, \lim\limits_{k\to+\infty} f'(k) = 0.$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (3.9). У неї існує стаціонарний розв'язок $k(t) = k* - const,\ c(t) = c* - const,$ для якого $dk^*/dt = dc^*/dt = 0$. Знаходимо його, прирівнявши до нуля праві частини цих рівнянь:

$$f'(k^*) = \lambda + \delta,\quad c^* = f(k^*) - \lambda k^*. \tag{3.10}$$

Доведемо існування і єдиність констант $c*$ і $k*$ (а тим самим, і стаціонарного режиму), що задовольняють (3.10). Відповідно до рівності $f(0) = 0$ графік функції починається у початку координат. Крім того,

$$f'' < 0,\ \lim_{k \to +0} f'(k) = +\infty,\quad \lim_{k \to +\infty} f'(k) = 0.$$

Отже, похідна f при зміні k від нуля до нескінченності неперервно зменшується від $+\infty$ до нуля. Тому знайдеться єдине додатне число $k = k*$, при якому ця похідна набуде додатного значення $\lambda + \delta$, причому

$$(\lambda + \delta) - f'(k) > 0 \quad при\ k < k^*;$$
$$(\lambda + \delta) - f'(k) < 0 \quad при\ k > k^*.$$

Таким чином, перша рівність в (3.10) для заданого фіксованого $\delta > 0$ виконується. Після цього число $c*$ можна знайти у відповідності з другою рівністю у (3.10). При цьому завдяки нерівності $f'(k^*) = \lambda + \delta > \lambda = (\lambda k)'\big|_{k=k^*}$ між кутовими коефіцієнтами дотичної до графіка функції $y = f(k)$ у точці $k = k*$ і прямої $y = \lambda k$ буде виконуватися нерівність $f(k*) > \lambda k*$. Тому число $c*$ буде задовольняти нерівність $0 < c* < f(k*)$.

Знайденим значенням констант c^* і k^* відповідає єдина траєкторія збалансованого зростання (стаціонарний режим). Ця траєкторія з економічної точки зору є відповідає ситуації, коли здійснюється відтворення, що дозволяє при постійному питомому споживанні підтримувати фондоозброєність на стаціонарному рівні $k = k*$. Далі число c_* будемо вважати достатньо малим, що виконується нерівність $c_* < c^*$.

Перепишемо гамильтоніан (3.10) у формі

$$H = e^{-\delta t}\left\{(\alpha - \psi)c + \psi\left[f(k) - \lambda k\right]\right\}.$$

Оскільки він лінійно залежить від c, то його максимум по c визначається знаком виразу $(\alpha\text{-}\psi)$ і в силу нерівностей (3.9) досягається при наступному законі зміни питомого споживання:

$$c^*(t) = \begin{cases} c_*, & \psi^*(t) > \alpha, \\ f(k(t)), & \psi^*(t) < \alpha. \end{cases} \tag{3.11}$$

Умова трансверсальності на правому кінці траєкторії в даному випадку має вигляд $\lim\limits_{t\to+\infty}\psi_1^*(t)k^*(t) = 0.$

Вивчимо характер інтегральних кривих вихідного диференціального рівняння (3.13) в залежності від початкової умови $k\ (0)$ в двох випадках: при $c(t) = c*, c(t) = f(k(t)$. Значення фондоозброєності $k*$ визначається першою з нерівністей (3.10).

Розглянемо можливі випадки.

Нехай $c(t) = c*$. У цьому випадку рівняння (3.8) можна записати у вигляді:

$$\frac{dk}{dt} = f(k) - \lambda k - c_*, \quad k(0) = k_0. \tag{3.12}$$

Положення рівноваги $k(t) = const$, для якого $\frac{dk}{dt} = 0$, знаходимо з умови

$$f(k) - \lambda k = c_*. \tag{3.13}$$

Будемо вважати, що рівняння (3.13) має два додатні корені $k_1 = k_{\min}$ и $k_2 = k_{\max}$ і відповідні стаціонарні траєкторії $k(t) = k_{\min}$ и $k(t) = k_{\max}$). До першого кореня $k_{\min}$ вираз $f(k) - \lambda k = c_*$ є від'ємним, між першим та другим коренем k_{max} – від'ємним, при цьому $k_{\min} < k^* < k_{\max}$

Розв'язки диференціального рівняння (3.12) мають різний вигляд у випадках $0 < k_0 < k_{\min}$, $k_{\min} < k < k_{\max}$, $k > k_{\max}$..

Якщо виконана нерівність $0 < k_0 < k_{\min}$, то права частина рівняння (3.18) є від'ємною. З від'ємності похідної $\frac{dk}{dt}$ випливає спадання фондоозброєності $k = k(t)$ з часом.

Продифференціюємо рівняння (3.8)

$$k'' = f'(k)k' - \lambda k' = (f'(k) - \lambda)k'.$$

Скориставшись тим же рівнянням (3.8), отримаємо наступне подання для похідної другого порядку

$$k'' = (f'(k) - \lambda)(f(k) - \lambda k - c_*). \tag{3.14}$$

В даному випадку $k_0 < k_{\min}$, а значить f'(k) – λ > 0 і $f(k) - \lambda k - c_* < 0$. Звідси на підставі (3.14) випливає, що $k'' < 0$, що свідчить про опуклість вниз інтегральної кривої $k(t)$.

Якщо $k_{\min} < k_0 < k_{\max}$, то завдяки тому, що права частина рівняння (3.12) є додатною, розв'язок $k(t)$ монотонно зростає, асимптотично наближаючись до значення $k = k_{\max}$. При цьому аналіз знаку похідної другого порядку (3.14) показує, що при збільшенні t ця похідна спочатку додатна, а потім в деякій точці дорівнює нулю, після чого стає від'ємною і далі знаку не змінює. Звідси можна зробити висновок про те, що при збільшенні t в певний момент (при

$f^0(k)=\lambda$) опуклість вгору функції $k(t)$ змінюється на опуклість вниз.

При $k_0 > k_{\max}$ права частина рівняння (3.12) є від'ємною. Від'ємність лівої частини цього рівняння означає спадання фондоозброєності і подальше її наближення до другого стаціонарного значення $k_{\max}$.

Тепер нехай $c(t) = f(k(t)$. У цьому випадку вся вироблена продукція використовується для споживання. Рівняння тоді набуває вигляду

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k, \quad k(0) = k_0.$$

Його розв'язок знаходимо шляхом інтегрування: $k(t) = k_0 e^{-\lambda t}$. У цьому випадку незалежно від початкової точки k_0 фондоозброєність $k(t)$ з часом знижується експоненціально, асимптотично наближаючись до нульового значення.

Траєкторія збалансованого зростання економічної системи відповідає значенням $k(t) = k*, c(t) = c*$. Якщо у початковий момент часу $k_0 = k(0) == k*$, то, застосовуючи керування $c(t) = c*$, отримаємо при всіх $t \geq 0$ стаціонарний режим, який відповідає траєкторії збалансованого зростання. Якщо ж $k_0 \neq k*$, то стаціонарний режим може бути досягнутий лише по закінченні якогось часу, або взагалі ніколи не буде досягнутий. Далі розглянемо екстремалі Понтрягіна, які в певний кінцевий момент часу виводять систему на траєкторію збалансованого зростання:

а) нехай $k_0 < k_{\min}$. У цьому випадку керування $c(t) = c_*$, та керування $c(t) = f(k(t))$ веде до зменшення фондоозброєності, що виключає досягнення траєкторії збалансованого зростання в будь-який наступний момент часу;

б) нехай $k_{\min} < k_0 < k^*$. У цьому випадку підвищити значення фондоозброєності з k_0 до k^* можна лише в результаті використання керування $c(t) = c_*$. Оскільки $k_{\min} < k^* < k_{\max}$, то існує такий момент часу $t_1 > 0$, при якому виконується рівність $k(t_1) = k^*$, тобто в цей момент система вийде на траєкторію збалансованого зростання. Щоб залишитися на зазначеній траєкторії для всіх наступних $t > t_1$ слід застосовувати управління $c^*(t) = c^*$ – const, що відповідає стаціонарному режиму.

Якщо в момент $t = t_1$ не перейти з керування $c*(t) = c_*$ на $c*(t) = c*$, то у подальшому фондоозброєність набуватиме значень з проміжку між k^* и k_{max} і подальше перемикання в якийсь момент часу на керування $c(t) = f(k(t)$ вже не в змозі вивести систему на траекторію збалансованого зростання. Дійсно, якщо в момент t' було б здійснено перемикання керування, то неперервна приєднана змінна $y(t)$ в момент $t = t'$ набула б значення, що дорівнює α. При $k* < k < k_{max}$ з (3.10) випливає, що приєднана змінна спадає, тому її значення в той момент, коли траєкторія наблизиться до рівня $k = k*$. буде менше α , тому з (3.11) випливає, що перемикання управління при $t = t'$ не потрібне. Воно можливе лише після деякого часу після перетину інтегральної кривої кривою стаціонарного рівня $k = k*$, коли $k_{min} < k < k*$ і приєднана змінна зростає. Отже, перехід на стаціонарний рівень неможливий ні в якій іншій наступний момент часу $t > t_1$.

Нехай $k_0 > k*$. У цьому випадку при $k* < k_0 < k_{max}$ та при $k_0 > k_{max}$ для виходу на траєкторію збалансованого зростання необхідно застосувати управління $c(t) = =f(k(t))$. Це випливає з того, що управління $c*(t) = c_*$ без подальшого перемикання не здатне привести до досягнення стаціонарного рівня $k = k*$, а при подальшому використанні перемикання значення цільового функціоналу, очевидно, буде меншим, ніж у випадку, коли відразу застосовується максимально можливе управління $c*(t) = f(k(t)$. Далі, після того система досягне рівня $k=k^*$, до кінця періоду керування використовується стаціонарне керування $c*(t) = c*$.

При $k_{\min} < k_0 < k^*$ спочатку використовується керування $c^*(t) = c_*$ і фондоозброєність неперервно зростає за рахунок того, що питоме споживання утримується на гранично низькому рівні c_*. Як тільки в певний момент часу фондоозброєність досягає стаціонарного значення k^*, що визначається рівністю $f'(k^*) = l + \delta$, система перемикається на траєкторію збалансованого зростання і залишається на ній протягом всього іншого періоду часу. У стаціонарному режимі завдяки застосуванню керування $c*(t) = c*$ – const має місце відтворення, що дозволяє підтримувати фондоозброєність на постійному рівні

k^*; при цьому питоме споживання є незмінним і становить $f(k^*) - \lambda k^*$.

Якщо $k_0 > k^*$, то на першому етапі закон керування має вигляд $c^*(t)$= $=f(k(t))$, тобто до фондів не надходить ніяких вкладень і фондоозброєність експоненціально скорочується (за рахунок зносу і збільшення числа зайнятих) згідно із законом $k(t) = k_0 e^{-\lambda t}$, $\lambda=\mu+\nu$. Споживання також скорочується за законом $c^*(t) = f(k_0 e^{-\lambda t})$. У всіх інших випадках стаціонарний режим не досягається.

ВИСНОВКИ

У даній кваліфікаційній роботі магістра розв’язано задачу оптимального керування для математичної моделі односекторної економічної системи. Для отримання розв’язку було використано принцип максимуму (принцип Л. С. Понтрягіна) розв’язання задачі оптимального керування. Застосування цього принципу дозволяє знаходити оптимальне програмне керування для систем, моделі яких описуються нормальними системами звичайних диференціальних рівнянь, а ефективність функціонування визначається інтегральним функціоналом якості або цільовим функціоналом.

У першому розділі магістерського дослідження розглянуто постановку задачі оптимального керування, зокрема тут висвітлюються основні поняття теорії керованих систем, структура математичної моделі динамічної системи, постановка задачі оптимального керування.

Другий розділ містить необхідні теоретичні відомості для застосування принципу максимума до розв’язання задачі оптимального керування. Тут сформульовано принцип максимуму, наведено алгоритм його застосування для різних типів моделей систем керування, розглянуто особливості його використання для дослідження систем з нескінченним часом керування.

Розв’язання задачі оптимального керування для односекторної моделі економічної системи здійснюється у третьому розділі. Спочатку тут розглядається економічна інтерпретація принципу максимуму на прикладі задачі про максимізацію прибутку фірми. При цьому фазовою змінною, що описує стан системи (підприємства), є величина його активів, а змінною керування – величина інвестицій у підприємство.

Далі на основі відомої моделі Солоу економічної динаміки пропонується модель односекторної економічної системи. На основі цієї моделі формулюється задача оптимального керування, де фазовою змінною є фондоозброєність системи, функцією керування – питоме споживання, а цільовим функціоналом є інтеграл корисності споживання. При цьому розглядається керування на нескінченному проміжку часу. Застосування принципу максимуму у відповідній формі дозволило визначити значення функції керування та фазової змінної, що забезпечують оптимальний режим функціонування односекторної економічної системи з точки зору максимізації корисності споживання виробленого продукту.

Перспективи подальших досліджень у цьому напряму пов’язані з розв’язанням задачі оптимального керування для моделі функціонування багатосекторної економічної системи. Для роз’язання вказаної задачі оптимального керування можна застосувати також метод динамічного програмування Р. Беллмана, що дозволить визначити оптимальне керування з повним зворотним зв’язком.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Алексеев В. М. Оптимальное управление. Москва : Наука, 1979. 410 с.
2. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления : учеб. пос. Москва : Наука, 1969. 408 с.
3. Громов Ю. Ю. Специальные разделы теории управления. Оптимальное управление динамическими системами. Тамбов : Издательство ТГТУ, 2004. 320 с.
4. Дубатовська М. В. Математическая статистика : метод. пос. Минск : БГУ, 2015. 143 с.
5. Колемаев В. А., Малыхин В. И., Калинина В. Н. Математическая экономика в примерах и задачах : метод. пос. Москва : ГАУ им. С. Орджоникидзе, 1995. 156 с.
6. Колемаев В. А. Математическая экономика. Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2002. 399 с.
7. Колмановский В. Б. Задачи оптимального управления в економическом контексте. *Задачи оптимального управления: науч. журнал*. 1997. №6. С. 121–127.
8. Колемаєв В. А. Моделирование сбалансированного экономического роста. *Вестник Московского государственного университета*. 2000. №1(3). С. 41–48.
9. Моделі економічного зростання. URL : http://posibnyky.vntu.edu.ua/makroek/123.htm (дата звернення : 12.09.20)
10. Модель Р. Солоу. URL: http://economics.studio/ekonomicheskaya-teoriya/model-solou-86443.html (дата звернення : 25.08.2020).
11. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процесов. Москва : Наука, 1969. 384 с.
12. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. Москва : Наука, 1978. 488 с.