

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
Кафедра фундаментальної математики

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА**

на тему: «**НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ  
НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ  
ФРИКЦІЙНОГО КОНТАКТУ З ЧАСТКОВИМ  
ПРОКОВЗУВАННЯМ ЦИЛІНДРИЧНОГО ШТАМПА  
ТА ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ**»

Виконав: студент 2 курсу, групи 8.1119-з  
спеціальності 111 математика  
(шифр і назва спеціальності)  
освітньої програми математика  
(назва освітньої програми)  
І. В. Гудзь  
(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної  
математики, к.ф.-м.н. Стреляєв Ю.М.  
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри загальної математики,  
доцент, к.ф.-м.н. Стеганцев Є.В.  
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя

2020

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика  
(шифр і назва)

Освітня програма математика

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач кафедри  
фундаментальної математики,  
к.т.н., доцент

\_\_\_\_\_ Гребенюк С.М.  
(підпис)

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2020 р.

**ЗАВДАННЯ**  
**НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ**

Гудзю Івану Васильовичу

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи Наближене розв'язання крайових нелінійних інтегральних рівнянь  
фрикційного контакту з частковим проковзуванням циліндричного  
штампа та пружного півпростору

керівник роботи

Стреляєв Юрій Михайлович, к.ф.-м.н.

(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затвержені наказом ЗНУ від « 20 » травня 2020 року № 577-с

2. Строк подання студентом роботи \_\_\_\_\_

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.  
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)  
1. Постановка задачі.  
2. Основні теоретичні відомості.  
3. Розроблений програмний продукт згідно з темою кваліфікаційної роботи

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) \_\_\_\_\_  
презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 24.06.2020

**КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН**

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	червень 2020	
2.	Збір вихідних даних.	червень 2020	
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	липень 2020	
4.	Розробка першого та другого розділу.	вересень 2020	
5.	Розробка третього розділу.	жовтень 2020	
6.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	листопад 2020	
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	10 грудня 2020	

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

І. В. Гудзь  
(ініціали та прізвище)

Керівник роботи \_\_\_\_\_  
(підпис)

Ю. М. Стреляєв  
(ініціали та прізвище)

**Нормоконтроль пройдено**

Нормоконтролер \_\_\_\_\_  
(підпис)

О. Г. Спиця  
(ініціали та прізвище)

## РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Наближене розв'язання крайових нелінійних інтегральних рівнянь фрикційного контакту з частковим проковзуванням циліндричного штампа та пружного півпростору»: 60 с., 8 рис., 1 табл., 36 джерел, 1 додаток.

**ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ, КОНТАКТНА ЗАДАЧА, КРАЙОВІ УМОВИ, ЧАСТКОВЕ ПРОКОВЗУВАННЯ, ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК.**

Об'єкт дослідження – інтегральні рівняння, що описують напружено-деформований стан пружних тіл, які перебувають в умовах контактної взаємодії.

Мета роботи: застосувати метод крайових нелінійних інтегральних рівнянь до розв'язання задачі про фрикційний контакт кругового штампа з плоскою підшоною і пружного півпростору при дії на штамп нормального і дотичного навантаження.

Метод дослідження – метод крайових нелінійних інтегральних рівнянь.

В роботі викладено методику розв'язання квазістатичної контактної задачі теорії пружності за допомогою зведення цієї задачі до системи крайових нелінійних інтегральних рівнянь. Розглянуто алгоритм чисельного розв'язання отриманих інтегральних рівнянь. За допомогою представленого алгоритму отримано новий чисельний розв'язок задачі про контакт зі зчепленням і проковзуванням жорсткого циліндричного штампа з плоскою підшоною і пружного півпростору при нормальному і дотичному навантаженні штампа. Проаналізовано контактні напруження та конфігурацію зон зчеплення при поступовому збільшенні дотичного навантаження, а також умови початку повного проковзування штампа. Отримані результати можуть бути використані в подальших дослідженнях просторових задач контактної механіки.

## SUMMARY

Master's Qualification Thesis " An Approximate Solution of the Boundary Nonlinear Integral Equations of Frictional Partial Slip Contact of a Cylindrical Punch and Elastic Half-Space": 60 pages, 8 figures, 1 table, 36 references, 1 supplement.

INTEGRAL EQUATION, CONTACT PROBLEM, BOUNDARY CONDITIONS, PARTIAL SLIDING, NUMERICAL SOLUTION.

The object of study – integral equations that describe the stress-strain state of elastic bodies that are in contact.

Purpose: to apply the method of boundary nonlinear integral equations to solve the problem of frictional contact of a circular stamp with a flat sole and an elastic half-space under the action of a normal and tangential load on the stamp.

The research method is the method of boundary nonlinear integral equations.

The method of solving the quasi-static contact problem of the theory of elasticity by reducing this problem to a system of boundary nonlinear integral equations is presented in the paper. The algorithm of numerical solution of the obtained integral equations is considered. Using the presented algorithm, a new numerical solution of the problem of contact with the adhesion and slippage of a rigid cylindrical stamp with a flat sole and an elastic half-space at normal and tangential loading of the stamp is obtained. The contact stresses and the configuration of the adhesion zones with a gradual increase in the tangential load, as well as the conditions of the beginning of complete slippage of the stamp are analyzed. The obtained results can be used in further studies of spatial problems of contact mechanics.

## ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу студентіві .....	2
Реферат .....	4
Summary .....	5
Вступ.....	7
1 Кінематика контакту пружних тіл.....	8
1.1 Система відліку .....	8
1.1.1 Відносний рух поверхонь.....	10
1.1.2 Зусилля, які передаються через точку контакту.....	11
1.1.3 Поверхневі зусилля.....	13
1.2 Деформація пружного півпростору під дією поверхневих сил (потенціали Буссінеска та Черутті) .....	14
1.3 Вплив тертя на поверхні контакту .....	19
2 Постановка задачі.....	27
2.1 Механічна постановка задачі .....	27
2.2 Нелінійні інтегральні рівняння контактної задачі .....	30
2.3 Алгоритм чисельного розв'язання інтегральних рівнянь.....	33
3 Чисельні результати.....	40
Висновки .....	45
Перелік посилань.....	46
Додаток А Fortran програма для чисельного розв'язання контактної задачі .	49

## ВСТУП

Проблема контактної взаємодії різних за формою пружних тіл залишається головною при розрахунках надійності роботи фрикційних з'єднань та контактних пар. Дослідження таких процесів взаємодії достатньо якісно описується за допомогою апарату механіки контактної взаємодії в рамках лінійної теорії пружності. Особливо актуальною в інженерній практиці є розробка та дослідження просторових математичних моделей контактної взаємодії жорстких штампів різної форми з пружним півпростором. Розв'язки задач такого типу, що зводяться до нелінійних інтегральних рівнянь, рідко вдається виразити в скінченному аналітичному вигляді. Тому в даний час для їх розв'язання часто використовують різні ефективні наближені і чисельні методи [15, 17, 21-22, 24, 29, 35-36]. Одним з таких методів є метод крайових нелінійних інтегральних рівнянь [21, 35].

Мета роботи полягає у розробці алгоритму застосування методу крайових нелінійних інтегральних рівнянь до розв'язання задачі про фрикційний контакт кругового штампа з плоскою підшоною і пружного півпростору при дії на штамп нормального і дотичного навантаження.

Для реалізації поставленої мети необхідно вирішити такі завдання:

- проаналізувати теорію контактної взаємодії пружних тіл;
- записати механічну постановку контактної задачі;
- визначити крайові умови;
- отримати інтегральні рівняння фрикційної контактної взаємодії;
- визначити алгоритм чисельного розв'язання інтегральних рівнянь;
- застосувати розроблений алгоритм до розв'язання задачі про фрикційний контакт з частковим проковзуванням циліндричного штампа та пружного півпростору.

# 1 КІНЕМАТИКА КОНТАКТУ ПРУЖНИХ ТІЛ

## 1.1 Система відліку

В цьому розділі ми розглянемо напруги і деформації, які виникають при контакті поверхонь двох твердих тіл, що деформуються. Розрізняють контактні взаємодії узгоджених і неузгоджених за формою тіл. Контакт називається узгодженим, якщо поверхні обох тіл в недеформованому стані точно «підігнані» один до одного за формою, або мають дуже близькі обриси. Прикладами узгодженого контакту служать плоскі проковзуючі опори та підшипники ковзання. Тіла, що мають різні за формою профілі, називають неузгодженими. Якщо такі тіла привести в контакт без деформацій, то вони спочатку стикаються в точці – «точковий контакт» або уздовж лінії – «лінійний контакт». Наприклад, в шарикопідшипнику між окремою кулькою і кільцем (обоймою) має місце точковий контакт, а між циліндричним роликом і кільцем в роликовому підшипнику – лінійний контакт. Лінійний контакт виникає, коли профілі тіл узгоджені в одному напрямку і не узгоджені в перпендикулярному напрямку. Область контакту між тілами неузгодженої форми, взагалі кажучи, мала в порівнянні з розмірами самих тіл. При цьому в зоні, що примикає до області контакту, є висока концентрація напружень, які слабо залежать від конфігурації тіл далеко від області контакту.

Точки контакту поверхонь деталей, які зустрічаються в інженерній практиці, часто роблять складний рух; через них передаються зусилля і моменти. Наприклад, точка контакту пари зубів шестерень сама рухається в просторі, в той час як поверхні обох тіл в цій точці переміщаються відносно одне одного, причому їхній рух включає кочення і ковзання.

Тіла неузгодженої форми, приведені до контакту малою силою, дотикаються в одній точці. Прийнемо цю точку  $O$  за початок прямокутної системи координат  $Oxyz$ . Контактуючі тіла, показані на рис. 1.1. Вісь  $Oz$  виберемо таким чином, щоб вона збігалася з загальною нормаллю до поверхонь



обох тіл в точці  $O$ . Таким чином, площина  $xu$  є дотичною до обох поверхонь і називається стискаючою площиною. Напрямки осей  $Ox$  і  $Oy$  по можливості вибираються так, щоб вони співпадали з осями симетрії профілів поверхонь.

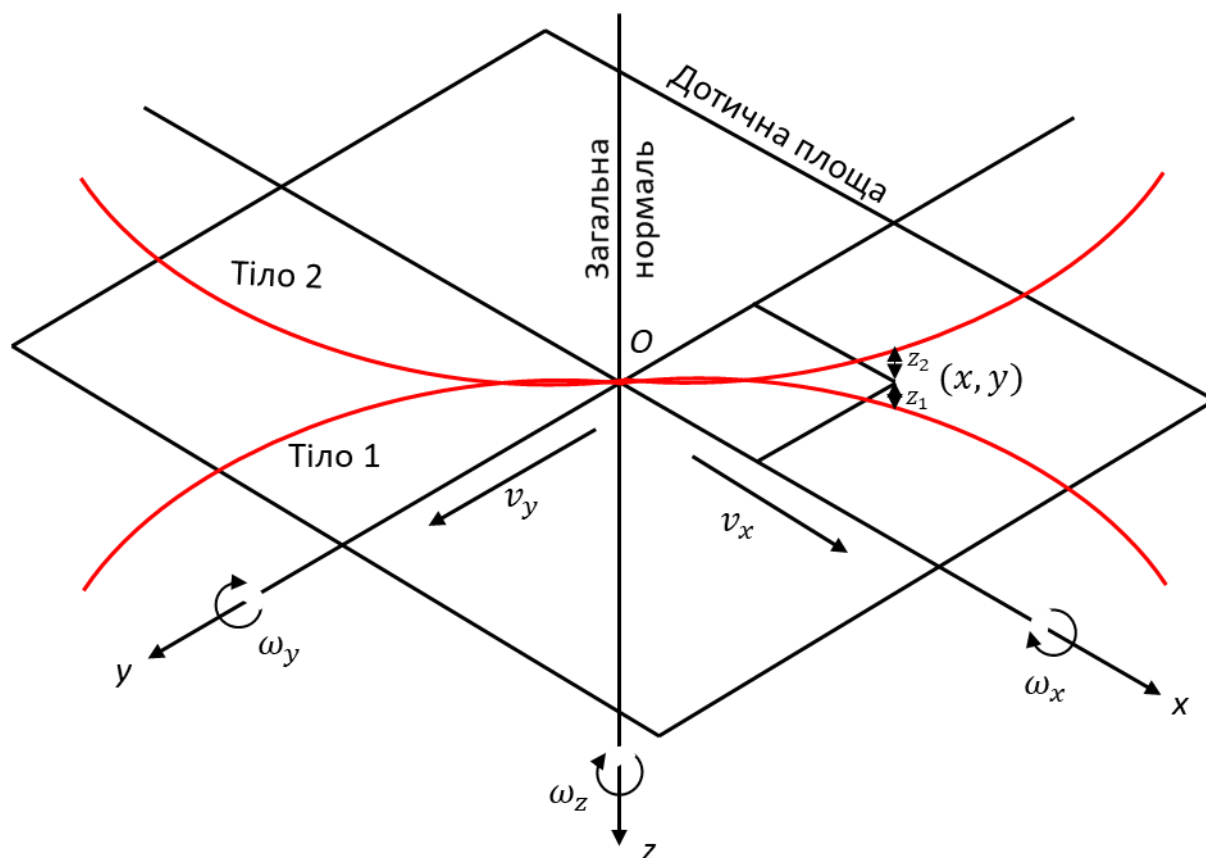


Рисунок 1.1 – Контакт незгоджених поверхонь в точці  $O$

Лінійний контакт уздовж утворюючих двох циліндричних тіл з паралельними осями є з точки зору зазначеного підходу окремим випадком. Профілі цих тіл незгоджені в площині поперечного перерізу, але узгоджені уздовж лінії контакту в площині, що містить осі контактуючих циліндрів. Проте цей важливий випадок вкладається в рамки загального підходу за допомогою наступної побудови: вісь  $x$  вибирається лежачою в площині поперечного перерізу, а вісь  $y$  – спрямованою уздовж осей циліндрів.

Недеформовані поверхні обох тіл в рамках описаної системи відліку задаються функціями  $z_1 = f_1(x, y)$ ,  $z_2 = f_2(x, y)$ . Проміжок між поверхнями перед вантаженням визначається співвідношенням:

$$h = z_1 + z_2 = f(x, y). \quad (1.1)$$

Формула (1.1) визначає початковий зазор між контактуючими тілами.

### 1.1.1 Відносний рух поверхонь – проковзування, кочення та обертання

Рух тіла в деякий момент часу визначається вектором лінійної швидкості, довільно обраної відлікової точки тіла і вектором кутової швидкості тіла в обертальному русі щодо деякої осі, що проходить через цю точку. Виберемо в якості відлікових точок кожного з двох тіл, точку початкового контакту  $O$  в даний момент часу, і нехай тіло 1 має лінійну швидкість  $V_1$  і кутову швидкість  $\Omega_1$ , а тіло 2 – лінійну швидкість  $V_2$  і кутову  $\Omega_2$ . Визначена вище система відліку рухається з лінійною швидкістю точки контакту  $V_0$  і повертається з кутовою швидкістю  $\Omega_0$  для збереження своєї орієнтації відносно загальної нормалі і дотичній площини в точці контакту.

У вибраній системі відліку контактуючі тіла мають наступні лінійні і кутові швидкості:

$$v_1 = V_1 - V_0, v_2 = V_2 - V_0 \quad (1.2)$$

$$\omega_1 = \Omega_1 - \Omega_0, \omega_2 = \Omega_2 - \Omega_0 \quad (1.3)$$

Розглянемо декартові компоненти векторів  $v_1, v_2, \omega_1$  та  $\omega_2$ . Якщо контакт є нерозривним, так що поверхні не відокремлюються один від одного і не схильні до взаємопроникнення, то їх компоненти швидкості уздовж загальної нормалі повинні бути рівні:

$$V_{z1} = V_{z2} = V_{z0}, \text{ тобто } v_{z1} = v_{z2} = 0 \quad (1.4)$$

Визначимо проковзування, як рух контактуючих поверхонь в точці  $O$  з відносною лінійною швидкістю, яку позначимо через  $\Delta v$ :

$$\Delta v = v_1 - v_2 = V_1 - V_2 \quad (1.5)$$

Швидкість проковзування має наступні компоненти:

$$\Delta v_x = v_{x1} - v_{x2}, \Delta v_y = v_{y1} - v_{y2} \quad (1.6)$$

Кочення визначимо як рух контактуючих тіл з деякою відносною кутовою швидкістю навколо осі, що лежить в дотичній площині. Кутова швидкість кочення має наступні компоненти:

$$\Delta \omega_x = \omega_{x1} - \omega_{x2} = \Omega_{x1} - \Omega_{x2}, \Delta \omega_y = \omega_{y1} - \omega_{y2} = \Omega_{y1} - \Omega_{y2} \quad (1.7)$$

Визначимо обертання (спін) як рух з відносною кутовою швидкістю навколо загальної нормалі:

$$\Delta \omega_z = \omega_{z1} - \omega_{z2} = \Omega_{z1} - \Omega_{z2} \quad (1.8)$$

Будь-який рух контактуючих поверхонь має задовольняти умові нерозривності контакту (1.4) і може інтерпретуватися як комбінація проковзування, кочення і обертання. Наприклад, колеса транспортного засобу при прямолінійному русі відчують кочення без проковзування і обертання. При розвороті з'являється обертання, а при блокуванні колеса в процесі гальмування воно відчуває проковзування без кочення.

### 1.1.2 Зусилля, які передаються через точку контакту

Результуюча сила, що передається від однієї поверхні до іншої через точку контакту, розкладається на нормальну силу  $P$ , що діє вздовж загальної нормалі, яка, взагалі кажучи, повинна бути стискаючою, і дотичну (тангенціальну) силу  $Q$ , діючу в дотичній площині і зазнає протидію з боку сил тертя. Величина сили  $Q$  повинна бути менше або в граничному стані дорівнювати силі граничного

тертя, тобто

$$Q \leq \mu P, \quad (1.9)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт граничного тертя.

Сила  $Q$  розкладається на компоненти  $Q_x$  і  $Q_y$ , які паралельні осям  $O_x$  і  $O_y$ . При чисто проковзуваному контакті дотична сила, що діє на поверхню кожного з контактуючих тіл, досягає свого граничного значення в напрямку, протилежному напрямку вектора швидкості проковзування, звідки:

$$Q_x = -\frac{\Delta v_x}{|\Delta v|} \mu P, \quad Q_y = -\frac{\Delta v_y}{|\Delta v|} \mu P. \quad (1.10)$$

Зусилля, які передаються через точку контакту, призводять до стискання тіл, що деформуються, внаслідок чого вони вступають в контакт по площині кінцевих розмірів. В результаті стає можливою передача через площину контакту додатково до сил ще й результуючого моменту (рис. 1.2). Дві складові цього моменту  $M_x$  і  $M_y$  називаються моментами кочення. Вони зумовлюють опір руху відносного перекочування контактуючих тіл, зване зазвичай «тертям кочення» і в більшості практичних задач є досить малим для того, щоб їм знехтувати.

Третя складова результуючого моменту  $M_z$ , діюча відносно загальної нормалі, виникає внаслідок тертя по площині контакту і називається моментом обертання (спіна). Якщо обертання супроводжує кочення, то енергія, що дисипується моментом обертання, підсумовується з енергією, що дисипується моментами кочення, що визначає загальний опір коливанню.

Дамо визначення вільного кочення («кочення по інерції»). Цей термін використовують для опису кочення, при якому обертання відсутні, а дотична сила  $Q$  в точці контакту дорівнює нулю. Така ситуація відповідає відомому розблокованому колесу транспортного засобу, коли опір кочення і тертя в підшипнику на осі підвіски відсутні. Протилежною є ситуація для приводного

або заблокованого колеса, яке відчуває значний вплив дотичних зусиль, переданих через площину контакту з дорогою.

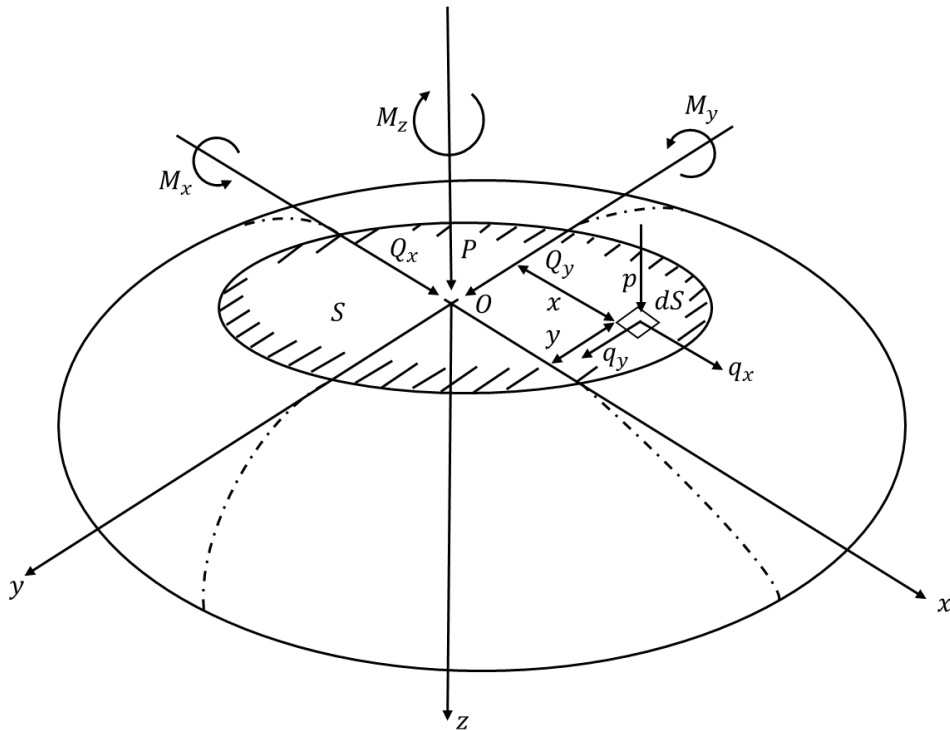


Рисунок 1.2. – Сили і моменти, діючі на площині контакту

### 1.1.3 Поверхневі зусилля

Сили і моменти передаються через площину контакту за допомогою поверхневих зусиль, розподілених по області контакту. Нормальні поверхневі зусилля (тиску) позначаються через  $p$ , а дотикові поверхневі зусилля (обумовлені тертям) через  $q$ ; на рис. 1.2 вони показані діючими в додатних напрямках на нижній поверхні. Незважаючи на те, що заздалегідь про розподіли зусиль  $p$  і  $q$  по області контакту  $S$  нічого сказати не можна, вони повинні задовольняти наступні умови загальної рівноваги:

$$P = \int_S p dS, \quad (1.11)$$

$$Q_x = \int_S q_x dS, \quad Q_y = \int_S q_y dS. \quad (1.12)$$

У разі контакту неузгоджених поверхонь (включаючи циліндри з

паралельними осями) можна наближено вважати, що область контакту лежить в площині  $xu$ , і знехтувати її слабким викривленням, звідки:

$$M_x = \int_S p y dS, M_y = \int_S p x dS, \quad (1.13)$$

$$M_z = \int_S (q_y x - q_x y) dS. \quad (1.14)$$

Якщо контактуючі тіла мають добре узгоджені криволінійні поверхні, як, наприклад в разі шарикопідшипника з глибокою доріжкою кочення, то відхилення області контакту від відповідної ділянки дотичній площини є вже значним і вирази для моментів  $M_x$  і  $M_y$  (1.13) повинні бути модифіковані з урахуванням членів, що включають зсувні зусилля  $q_x$  і  $q_y$ .

## 1.2 Деформація пружного півпростору під дією поверхневих сил (потенціали Буссінеска та Черугті)

У цьому підрозділі ми розглянемо напруги і деформації в пружному півпросторі з граничною площиною  $z = 0$ , виникаючі під дією нормальних і дотичних зусиль, прикладених по замкнутій області  $S$  границі в зоні початку координат. Поза навантаженої області як нормальні, так і дотичні зусилля дорівнюють нулю. Отже, розглядається задача яка відноситься до числа задач теорії пружності, в яких напруги задані на всій границі  $z = 0$ .

Оскільки область, до якої прикладене навантаження, обмежена, то всі компоненти напружень при збільшенні відстані від початку координат прагнуть до нуля. Навантаження відбувається по двовимірній області: нормальний тиск  $p(x, y)$ , а також дотичні зусилля  $q_x(x, y)$  і  $q_y(x, y)$  які залежать від змінних  $x$  і  $y$ . Тому напружений стан в загальному випадку тривимірне і відмінне від нуля всі шість компонентів напруги:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ .

Відзначимо окремий випадок, відповідний навантаженню, осе симетричного відносно осі  $z$ . В циліндричних координатах  $(r, \theta, z)$  тиск  $p(r)$  і

дотичні зусилля  $q(r)$  не залежать від  $\theta$ ; крім того, зусилля  $q(r)$  діють в радіальному напрямку, якщо вони взагалі мають місце. Компоненти напружень  $\tau_{r\theta}$  і  $\tau_{\theta z}$  відсутні, а інші компоненти не залежать від  $\theta$ .

Класичний підхід до визначення напружень і деформацій в пружному півпросторі від дії поверхневих зусиль був запропонований Буссінеском і Черруті, які використовували теорію потенціалу. Цей підхід описаний в книзі Лява [7]; тут будуть згадані лише деякі результати.

Нехай  $C(\xi, \eta)$  – довільна точка поверхні навантаженої області  $S$ , а  $A(x, y, z)$  – довільна точка всередині тіла (півпростору). Відстань між точками  $C$  і  $A$  дорівнює:

$$CA \equiv \rho = [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{1/2}. \quad (1.15)$$

В області  $S$  діють розподілу зусиль  $p(\xi, \eta)$ ,  $qx(\xi, \eta)$  і  $qy(\xi, \eta)$ . Визначимо наступні потенційні функції, кожна з яких задовольняє рівняння Лапласа:

$$F_1 = \iint_S q_x(\xi, \eta) \Omega d\xi d\eta, \quad (1.16)$$

$$G_1 = \iint_S q_y(\xi, \eta) \Omega d\xi d\eta, \quad (1.17)$$

$$H_1 = \iint_S p(\xi, \eta) \Omega d\xi d\eta, \quad (1.18)$$

де

$$\Omega = z \ln(\rho + z) - \rho. \quad (1.19)$$

Крім того, введемо в розгляд функції:

$$F = \frac{\partial F_1}{\partial z} = \iint_S q_x(\xi, \eta) \ln(\rho + z) d\xi d\eta, \quad (1.20)$$

$$G = \frac{\partial G_1}{\partial z} = \iint_S q_y(\xi, \eta) \ln(\rho + z) d\xi d\eta, \quad (1.21)$$

$$H = \frac{\partial H_1}{\partial z} = \iint_S p(\xi, \eta) \ln(\rho + z) d\xi d\eta. \quad (1.22)$$

Тепер запишемо:

$$\psi_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y} + \frac{\partial H_1}{\partial z}, \quad (1.23)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}. \quad (1.24)$$

Як показав Ляв [7], компоненти пружних переміщень  $u_x$ ,  $u_y$ , і  $u_z$  в довільній точці  $A(x, y, z)$  тіла виражаються через введені функції наступним чином:

$$u_x = \frac{1}{4\pi G} \left[ 2 \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right], \quad (1.25)$$

$$u_y = \frac{1}{4\pi G} \left[ 2 \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y} + 2\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right], \quad (1.26)$$

$$u_z = \frac{1}{4\pi G} \left[ \frac{\partial H}{\partial z} + (1 - 2\nu)\psi - z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]. \quad (1.27)$$

Ці вирази зменшуються як  $1/\rho$  на великих відстанях від навантаженої області. Отже, вони визначають пружні переміщення точок поблизу навантаженої області щодо точок тіла, розташованих на великій відстані від цієї області ( $\rho \rightarrow \infty$ ), де півпростір може вважатися як би закріпленим. Зазначена поведінка переміщень в разі навантаження по двовимірній області (просторова задача), коли відлікові (нульові) значення переміщень можна взяти на нескінченності, вигідно відрізняється від випадку навантаження вздовж прямої



(плоска задача), де зміна переміщень за логарифмічним законом ( $\ln\rho$ ) перешкоджало вибору відлікових значень переміщень на нескінченності і призводило до необхідності встановлення довільних відлікових значень.

За знайденими виразами для переміщень за допомогою співвідношень закону Гука визначаються компоненти напруги:

$$\sigma_x = \frac{2\nu G}{1-2\nu} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (1.28)$$

$$\sigma_y = \frac{2\nu G}{1-2\nu} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad (1.29)$$

$$\sigma_z = \frac{2\nu G}{1-2\nu} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (1.30)$$

$$\tau_{xy} = G \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad (1.31)$$

$$\tau_{yz} = G \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \quad (1.32)$$

$$\tau_{zx} = G \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right), \quad (1.33)$$

При дії тільки нормального тиску  $p(\xi, \eta)$ , що має місце при контакті під час відсутності тертя, наведені вище співвідношення спрощуються. В цьому випадку  $F = F_1 = G = G_1 = 0$ , і отримуємо:

$$\psi_1 = \frac{2H_1}{\delta z} = H = \iint_S p(\xi, \eta) \ln(\rho + z) d\xi d\eta, \quad (1.34)$$

$$\psi = \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \iint_S p(\xi, \eta) \frac{1}{\rho} d\xi d\eta, \quad (1.35)$$

$$u_x = -\frac{1}{4\pi G} \left[ (1-2\nu) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right], \quad (1.36)$$

$$u_y = -\frac{1}{4\pi G} \left[ (1-2\nu) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right], \quad (1.37)$$

$$u_z = \frac{1}{4\pi G} \left[ 2(1-\nu)\psi - z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]. \quad (1.38)$$

З огляду на, що  $\psi$  і  $\psi_1$  – гармонійні функції аргументів  $x, y$  і  $z$ , тобто обидві задовольняють рівняння Лапласа:

$$\nabla^2 \psi = 0, \nabla^2 \psi_1 = 0, \quad (1.39)$$

для об'ємної деформації  $\Delta$  отримаємо вираз:

$$\Delta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1-2\nu}{2\pi G} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (1.40)$$

Підстановка співвідношень (1.36-1.38) і (1.40) в (1.28-1.33) дає наступні вирази для компонент напружень в довільній точці тіла:

$$\sigma_x = \frac{1}{2\pi} \left[ 2\nu \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - (1-2\nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right], \quad (1.41)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2\pi} \left[ 2\nu \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - (1-2\nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right], \quad (1.42)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right], \quad (1.43)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{2\pi} \left[ (1-2\nu) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right], \quad (1.44)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}, \quad (1.45)$$

$$\tau_{zx} = -\frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}. \quad (1.46)$$

Зауважимо, що компоненти напружень  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$  і  $\tau_{zx}$  залежать тільки від функції  $\psi$ . Компоненти напружень  $\sigma_x$  і  $\sigma_y$  залежать від функції  $\psi_1$ , але їх сума не залежить:

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{1}{2\pi} \left[ (1+2\nu) \frac{\partial \psi}{\partial z} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right]. \quad (1.47)$$

На поверхні півпростору нормальна напруга дорівнює:

$$\bar{\sigma}_z = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=0} = \begin{cases} -p(\xi, \eta) & \text{в області } S \\ 0 & \text{поза області } S \end{cases}, \quad (1.48)$$

а переміщення поверхні  $\epsilon$ :

$$\bar{u}_x = -\frac{1-2\nu}{4\pi G} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)_{z=0}, \quad (1.49)$$

$$\bar{u}_y = -\frac{1-2\nu}{4\pi G} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right)_{z=0}, \quad (1.50)$$

$$\bar{u}_z = \frac{1-\nu}{2\pi G} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right)_{z=0} = \left. \frac{1-\nu}{2\pi G} \psi \right|_{z=0}. \quad (1.51)$$

З виразів (1.48) і (1.51) слідує, що нормальне напруження і нормальне переміщення на поверхні виражаються через потенційну функцію  $\psi$ .

Наведені вище співвідношення дають формальний розв'язок задачі про напружено-деформований стан пружного півпростору, на поверхню якого діють задані навантаження. Якщо задані розподіли зусиль по області  $S$ , то в принципі можна визначити напруги і переміщення в довільній точці півпростору. Практично ж отримання відповідних виразів в замкнутій формі навіть в найпростіших задачах пов'язано з труднощами.

Стосовно до деяких окремих випадків були розроблені досконаліші аналітичні методи розв'язку з метою подолання труднощів класичного підходу. Наприклад, задачі, в яких область навантаження обмежена еліпсом, зручніше вирішувати за допомогою переходу від прямокутних координат до еліпсоїдальних [2, 25, 31]. У завданнях з круговими областями контакту застосування спеціальної комплексної функції напружень, запропонованої Ростовцевим [34], дозволяє визначити напруги, якщо в області контакту задані переміщення.

Стосовно до осе симетричних задач Снеддон [12] вперше застосував метод інтегральних перетворень, який був розвинений потім Ноблом і Спенсом [10].

### 1.3 Вплив тертя на поверхні контакту

Тертя на поверхні розділу двох тіл неузгодженої форми, що знаходяться в умовах нормального контакту, грає роль тільки в тому випадку, коли пружні константи двох матеріалів різні. Взаємний контактний тиск викликає

тангенціальні переміщення на поверхні розділу поряд з нормальним стисненням (для випадку контакту куль). Якщо матеріали двох тіл відрізняються, то тангенціальні переміщення будуть, взагалі кажучи, різні, так що буде мати місце проковзування. Це проковзування може обмежуватися і до деякої міри стримуватися тертям. Можна припускати, що в центральній частині області контакту поверхні повністю зчеплені, а зона проковзування примикає до границі області контакту. Якщо коефіцієнт граничного тертя досить великий, проковзування може повністю виключатися.

У перших дослідженнях цієї проблеми розрахунок дотичних зусиль на поверхні розділу проводився покроково при збільшенні ділянки контакту від  $a$  до  $a + da$ . Але при відповідних умовах поле напружень залишається подібним на всіх етапах навантаження, так що розв'язок може бути отриманий безпосередньо без звернення до інкрементального підходу.

При встановленні граничних умов в розглянутій задачі починаються припущення про те, що при наявності проковзування дотичне зусилля  $q$  пов'язано з нормальним тиском  $p$  співвідношенням:

$$|q| = \mu p, \quad (1.52)$$

де  $\mu$  – постійний коефіцієнт тертя.

Напрямок зусилля  $q$  протилежний напрямку проковзування. В умовах плоскої задачі зусилля  $q$  діє в напрямку, паралельному осі  $x$ , всередину області контакту уздовж однієї поверхні і ззовні уздовж іншої. При осесиметричному контакті проковзування, а отже, і зусилля  $q$  повинні бути розподілені осесиметрично і орієнтовані в радіальному напрямку. Для неузгоджених поверхонь, що мають квадратичні профілі, величини напруги і переміщень в будь-якій точці збільшуються пропорційно розміру області контакту  $a$ . Тобто, співвідношення (1.41-1.46) напруги і деформації, викликані зсувними зусиллями, також збільшуються пропорційно  $a$  й межа між зонами зчеплення і проковзування буде розділяти область контакту в постійній пропорції. Таким чином, підтримується схожість поля напружень на всіх стадіях навантаження.

При зростанні навантаження і збільшення розміру області контакту, контактуючі точки обох поверхонь, які спочатку лежали поза зоною зчеплення, відчувають різні тангенціальні зміщення. Після того як ці точки охоплюються зоною зчеплення, їх подальше відносне зміщення припиняється. Такі точки будуть зберігати відносне тангенціальне зміщення  $(\bar{u}_{x1} - \bar{u}_{x2})$  і відносну деформацію  $(\frac{\partial \bar{u}_{x1}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_{x2}}{\partial x})$ , набуті ними до цього моменту. Тепер величина деформацій зростає прямо пропорційно  $a$ , так що для двох контактуючих точок, які знаходяться в зоні зчеплення на відстані  $x$  від центру, ми можемо записати:

$$\frac{\partial \bar{u}_{x1}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_{x2}}{\partial x} = C|x|, \quad (1.53)$$

де  $C$  – константа, що підлягає визначенню.

Розглянемо спочатку контакт двох паралельних циліндрів. На проміжному етапі навантаження ширина ділянки контакту дорівнює  $2a$ , і ми припустимо, що тертя запобігає проковзування в центральній зоні шириною  $2c$ . На поверхні розділу діють симетрично розподілений нормальний тиск  $p(x)$  і косо симетрично розподілені дотичні зусилля  $q(x)$ . Підставляючи градієнти нормальних зміщень в повній області контакту в рівняння і враховуючи, що дотичні зусилля, діючі на кожную поверхню, рівні і протилежно направлені, знаходимо:

$$\int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} dS - \pi\beta q(x) = \frac{\pi E^* x}{2R}, \quad -a \leq x \leq a, \quad (1.54)$$

де  $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$ , а константа  $\beta$  є мірою відмінності пружних постійних двох матеріалів.

Підставляючи в умову відсутності проковзування (1.53), отримаємо для зони зчеплення:

$$\pi\beta p(x) + \int_{-a}^a \frac{q(s)}{x-s} dS = -\frac{1}{2}\pi E^* C|x|, \quad |x| \leq c. \quad (1.55)$$

Крім того, в зоні зчеплення:

$$|q| \leq \mu p. \quad (1.56)$$

На ділянках проковзування:

$$q = \pm \mu p, c < |x| < a, \quad (1.57)$$

де знак величини  $q$  визначається напрямом проковзування.

Якщо рівняння (1.54–1.57) розділити на розмір ділянки контакту  $a$ , вони переходять в рівняння щодо величин  $p/a$  і  $q/a$ , що не залежать від значення  $a$ . Таким чином, підтверджується наведене вище твердження про збереження подібності поля напружень при навантаженні.

В якості першого кроку в рішенні рівнянь (1.54) і (1.55) щодо зусиль  $p(x)$  і  $q(x)$  спростимо задачу, припустивши, що проковзування в області контакту відсутнє. Тоді рівняння (1.55) справедливе на всій ділянці ( $|x| \leq a$ ) і разом з рівнянням (1.54) утворює систему парних інтегральних рівнянь щодо  $p(x)$  і  $q(x)$ . Подальші спрощення отримаємо, нехтуючи впливом зсувних зусиль на нормальний тиск, тобто опускаючи другий член в лівій частині (1.54). Рівняння виявляються, таким чином, непов'язаними. Розподіл тисків дається теорією Герца, а рівняння (1.55) щодо дотичних зусиль може бути записано у вигляді:

$$\int_{-a}^a \frac{q(s)}{s-x} ds = -\pi\beta p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \pi E^* C |x|. \quad (1.58)$$

Зручно представити розподіл  $q(x)$  яка складається з двох доданків  $q'(x)$  і  $q''(x)$ , які задовольняють рівняння (1.57), якщо в правій частині залишити відповідно перший або другий член. Таким чином,  $q'(x)$  – дотичні зусилля, необхідно для усунення відмінностей тангенціальних переміщень, викликаних нормальним тиском, а  $q''(x)$  – зусилля, необхідні для отримання додаткових переміщень, пропорційних  $|x|$ , які потрібні для задоволення умови відсутності проковзування. Підставляючи вказане представлення і інтегруючи, отримаємо:

$$q'(x) = 2\beta \frac{p_0}{\pi} \left[ \frac{x}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2a} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \right], \quad (1.59)$$

$$q''(x) = \frac{CE^*}{2\pi} \left[ -\frac{2x}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} + x \ln \left\{ \frac{a+(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{a-(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} \right]. \quad (1.60)$$

Константа  $C$  визначається з умови звернення зусиль в нуль на границі області контакту. Оскільки член  $(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$  повинен зникати при додаванні  $q'(x)$  і  $q''(x)$ , то  $C = 2\beta p_0 / (E * a)$  і

$$q(x) = \frac{\beta p_0}{\pi a} \left[ (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + x \ln \left\{ \frac{a+(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{a-(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} \right]. \quad (1.61)$$

Якщо проаналізувати відношення  $q(x)$  до  $p(x)$ , то ми виявимо, що воно стає необмеженим на краях ділянки контакту, отже, неминуча наявність проковзування. Реальна ситуація, коли з кожного боку центральної зони зчеплення ширини  $2c$  має місце проковзування, досліджувалась Спенсом [14].

На основі міркувань подібності Спенс показав, що для однакових пружних констант і коефіцієнта тертя відносні розміри зони проковзування зберігаються для будь-якого індентора, що має профіль  $z = Ax^n$ , та є рівними відповідним величинам для штампа з плоскою основою. Значення  $c$  тепер визначається рівнянням:

$$\frac{K'(\frac{c}{a})}{K(\frac{c}{a})} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)\mu}, \quad (1.62)$$

в якому множник  $(1 - 2\nu) / (1 - \nu)$  слід замінити на  $2\beta$  для обліку пружності обох тіл.

Контакт куль з різних матеріалів без проковзування розглядався Гудменом [3] на основі зневаги впливанням дотичних зусиль на нормальний тиск. Контактні зусилля знову розкладемо на дві складові: для зняття тангенціальних переміщень, що виникли внаслідок нормального тиску,

$$q'(r) = \frac{\beta p_0}{\pi} \frac{1}{r} \left[ a^2 (a^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} - 2(a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} + \int_r^a \frac{t^2}{(t^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} \ln \left| \frac{t+r}{t-r} \right| dt \right], \quad (1.63)$$

і для задоволення умов відсутності проковзування (1.56)

$$q''(r) = \frac{3CE^*}{8} \left[ -r(a^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{r}{a} \ln \left\{ \frac{a + (a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}}{r} \right\} \right], \quad (1.64)$$

Невідома константа  $C$  знову визначається з умови звернення в нуль сумарного зусилля при  $r = a$ , звідки:

$$q(r) = \frac{\beta p_0}{\pi} \left[ -\frac{1}{r} (a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{r}{a} \ln \left\{ \frac{a + (a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}}{r} \right\} + \frac{2}{ra} \int_r^a \frac{t^2}{(t^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} \ln \left| \frac{t+r}{t-r} \right| dt \right]. \quad (1.65)$$

Відношення  $q(r) / p(r)$  знову необмежено при  $r = a$ , так що може мати місце проковзування. Розширення зони проковзування при монотонному навантаженні відбувається так само, як і для жорсткого плоского штампа, і визначається співвідношенням:

$$\frac{a}{2c} \ln \left( \frac{a+c}{a-c} \right) = \frac{\beta}{\mu} K' \left( \frac{c}{a} \right), \quad (1.66)$$

де  $K'(c/a)$ -повний еліптичний інтеграл аргументу  $(1 - c^2/a^2)^{1/2}$ .

При зменшенні коефіцієнта тертя коло, всередині якого відсутнє проковзування, стягується до центральної точки і дотичні зусилля наближаються до величини  $\mu p(r)$ .

Повний розв'язок задачі з урахуванням впливу дотичних зусиль на тиск було отримано В. І. Моссаковським [32] і Спенсом [13, 14]. Доведено, що в залежності від значення  $\beta$  тертя може збільшувати сумарне навантаження, необхідне для утворення області контакту заданої площі, більш ніж на 5% в порівнянні з розрахунком теорії Герца. Зусилля тертя діють у напрямку



зовнішності області контакту на поверхню більш деформованого тіла і у напрямку середини області на поверхню більш жорсткого тіла. При відсутності проковзування величина дотичних зусиль пропорціональна параметру  $\beta$ , який характеризує відмінність пружних властивостей матеріалів. Параметр  $\beta$  звертається в нуль не тільки в разі ідентичних матеріалів, але також в тому випадку, коли вони обидва нестискаючі ( $\nu = 0,5$ ).

У цих випадках дотичні зусилля відсутні і застосовується теорія Герца.

Максимально можливе значення  $\beta$  дорівнює 0,5, а на практиці значення рідко перевищують 0,2. Таким чином, дотичні зусилля значно менші від нормальних тисків і їх вплив на внутрішні напруги невелика. Однак вони істотно впливають на тангенціальні напруги  $\bar{\sigma}_x$  або  $\bar{\sigma}_r$  поблизу поверхні в зоні контакту. У випадку плоскої контактної задачі за відсутності проковзування рівняння (1.57) дає значення напруги на границі області контакту:

$$\bar{\sigma}_x(-a) = \bar{\sigma}_x(a) = -2\beta p_0, \quad (1.67)$$

які є стискаючими для відносно піддатливої поверхні і розтягуючими для відносно жорсткої.

Проковзування призводить до зниження цих напруг. Якби проковзування було б повне, так що всюди  $|q| = \mu p$ , то:

$$\bar{\sigma}_x(-a) = \bar{\sigma}_x(a) = -\left(\frac{4}{\pi}\right) \mu p_0. \quad (1.68)$$

Насправді проковзування є частковим і в центрі області існує зона непроковзування шириною  $2c$ . Проте вираз (1.64) дає хорошу апроксимацію за умови  $c/a < 0,7$ , тобто коли  $\mu/\beta < 1,0$ .

За відсутності проковзування рівняння (1.61) дає таке значення радіальної напруги на поверхні при  $r = a$ :

$$\bar{\sigma}_r(a) = -1,515(1 - 0,16\nu)\beta p_0. \quad (1.69)$$

Якщо, навпаки, має місце повне проковзування, то:

$$\bar{\sigma}_r(a) = -1,185(1 - 0,23\nu)\mu p_0. \quad (1.70)$$

Знову рівність (1.68) дає хороше наближення в разі часткового проковзування при  $c/a < 0,7$ , коли  $\mu/\beta < 0,66$ . У осе симетричному випадку нормальний тиск обумовлює радіальні напруги поза кругової області контакту, який має максимальне значення  $1/3 (1 - 2\nu) p_0$  при  $r = a$  і зменшуються як  $r^2$ . На більш деформованій поверхні стискаючі напруги, викликані зусиллями тертя, послаблюють розтягнення, обумовлене нормальним тиском, і призводять до зміщення положення максимуму розтягуючих зусиль в точку з радіусом, більшим ніж  $a$ . На більш жорсткій поверхні радіальні напруги, викликані тертям, є розтягуючими і, складаючись з напругами, зумовленими тиском, дають максимальну величину розтягуючих зусиль в точці  $r = a$ . Ці ефекти досліджувалися в роботі Джонсона, О'Коннора і Вудворда [4], де було показано, що вони впливають на опір тендітних матеріалів герцевському руйнуванню, коли матеріали індентора і зразка різні.

Зусилля тертя, які розвиваються при зменшенні навантаження, також представляють інтерес в зв'язку з часто спостерігаючою освітою кругових тріщин при розвантаженні. Деякі оцінки такої поведінки були отримані Тернером [16] для випадку розвантаження штампа з плоскою основою.

## 2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

### 2.1 Механічна постановка задачі

Розглянемо просторову контактну задачу про взаємодію двох лінійно пружних тіл при наявності тертя Кулона між ними. Припустимо, що в початковий момент часу  $t = 0$  тіла торкаються один одного в одній точці і їхні геометричні поверхні є гладкими. Нехай опора [22] нижнього тіла залишається нерухомою, а опора верхнього (рис. 2.1) тіла робить жорстке переміщення, яке визначається вектор-функцією  $\gamma(t)$ , що залежить від часу  $t$ .

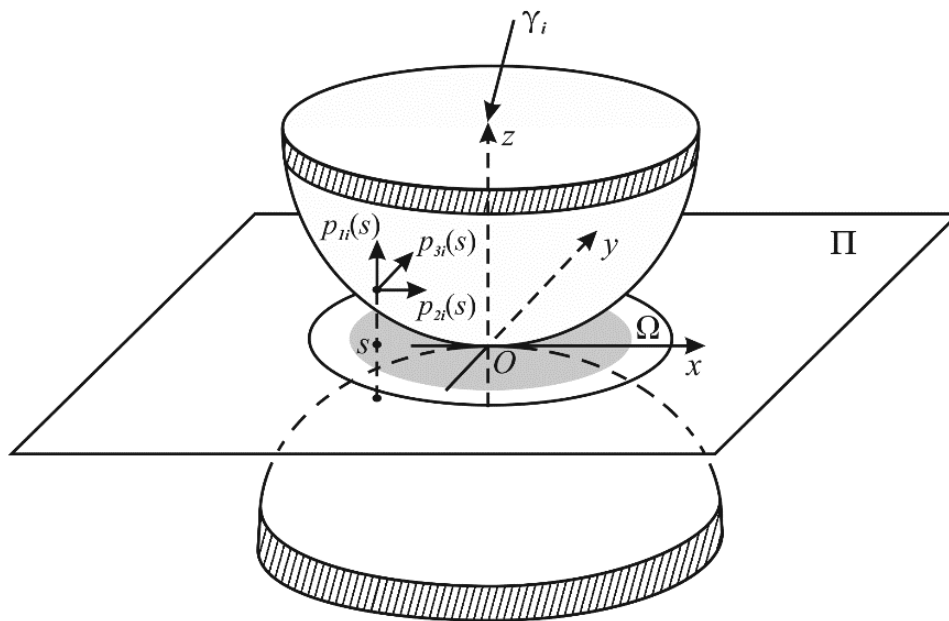


Рисунок. 2.1 – Схема контактної взаємодії пружних тіл

Будемо вважати, що вектор-функція  $\gamma(t)$  повільно змінюється зі зростанням  $t$  від 0 до фіксованого значення  $T > 0$  і нехтує інерційними і хвильовими ефектами. Будемо вважати, що розміри зони контакту малі в порівнянні з лінійними розмірами тіл і мінімальними радіусами кривизни їх поверхонь. Останні припущення дозволяють вважати, що заздалегідь невідома область контакту є плоскою і лежить в загальній для двох тіл дотичній площині  $\Pi$ , що проходить через точку їх початкового дотику. Позначимо через  $\Omega$

обмежену область площині  $\Pi$ , що містить в собі невідому область контакту тіл. Припустимо, що процес стиснення тіл супроводжується поверхневим тертям, що підкоряється закону Кулона [27]. Введемо прямокутну систему координат  $zxy$  з початком в точці початкового торкання тіл і віссю  $z$ , спрямованої всередину верхнього тіла, перпендикулярно площині  $\Pi$  (рис. 2.1).

Будемо розглядати процес навантаження тіл лише в фіксовані моменти часу  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$  такі, що  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ . Будемо також припускати, що при кожному значенні  $t = t_i$  для системи контактуючих тіл встановлюється рівновага. Таким чином, процес навантаження тіл відбувається покроково і складається з послідовності станів рівноваги, тобто, є квазістатичною. Нехай індекс  $i$  визначає номер кроку навантаження. Тоді вектор-функція  $\gamma(t)$  буде приймати на кожному кроці навантаження значення  $\gamma_i = (\Delta_{1i}, \Delta_{2i}, \Delta_{3i})$ . Граничні умови контактної взаємодії тіл на  $i$ -му кроці навантаження будемо висловлювати за допомогою двох вектор-функцій  $p_i(s) = (p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s))$ ,  $v_i(s) = (v_{1i}(s), v_{2i}(s), v_{3i}(s))$ , де  $s$ - довільна точка області  $\Omega$ , а залежність компонент цих вектор-функцій від часу виражається лише в дискретно зміні їх значень при переході до наступного кроку навантаження. Вектор-функція  $p_i(s)$  визначає розподіл питомої контактної навантаження, що передається від нижнього тіла до верхнього тіла через точки області  $\Omega$  на  $i$ -му кроці навантаження. Вектор-функція  $v_i(s)$  задає переміщення точок поверхні верхнього тіла щодо протилежних точок поверхні нижнього тіла на  $i$ -му кроці навантаження. Протилежними тут названі точки поверхонь верхнього і нижнього тіл розташовані на прямій, проведеної через точку  $s \in \Omega$  перпендикулярно площині  $\Pi$  (рис. 2.1). Відзначимо, що значення 1,2,3 індексів відповідають напрямкам координатних осей  $z, x, y$ . З урахуванням прийнятих припущень, граничні умови контактної взаємодії тіл можна виразити наступною системою нерівностей і рівнянь [22]:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1i}(s) \geq 0; v_{1i}(s) \geq 0; p_{1i}(s)v_{1i}(s) = 0; \\ \sqrt{p_{2i}^2(s) + p_{3i}^2(s)} \leq \mu p_{1i}(s); \\ \sqrt{[\dot{v}_{2i}(s)]^2 + [\dot{v}_{3i}(s)]^2} p_{2i}(s) + \mu p_{1i}(s) \dot{v}_{2i}(s) = 0; \\ \sqrt{[\dot{v}_{2i}(s)]^2 + [\dot{v}_{3i}(s)]^2} p_{3i}(s) + \mu p_{1i}(s) \dot{v}_{3i}(s) = 0; \\ s \in \Omega; i = \overline{1, n}, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

де додатна константа  $\mu$  – коефіцієнт тертя і  $\dot{v}_{Ti}(s) = (\dot{v}_{2i}(s), \dot{v}_{3i}(s))$  швидкість відносного проковзування тіл в точці  $s \in \Omega$  на  $i$ -му кроці навантаження.

Перше з співвідношень (2.1) висловлює знакосталість контактного тиску, друге означає відсутність взаємного проникнення тіл і третє означає відсутність контактного тиску за межами ділянки контакту. Останні три співвідношення системи (2.1) висловлюють закон тертя Кулона.

Будемо вважати, що компоненти  $p_{ki}$ ,  $v_{ki}$  вектор функцій  $p_i(s)$ ,  $v_i(s)$  належать гільбертовому простору  $L_2(\Omega)$  [28], а самі вектор-функції  $p_i(s)$ ,  $v_i(s)$  є елементами тривимірного гільбертового простору  $L_2^3(\Omega)$  [21]. Зв'язок між вектор-функціями  $p_i(s)$  і  $v_i(s)$  виражається співвідношеннями: [22]

$$v_{ki}(s) = \sum_{j=1}^3 A_{kj}(p_{ji})_s - f_{ki}(s) \equiv F_k(p_i, \Delta_{ki})_s \quad \forall k = \overline{1, 3}, \quad (2.2)$$

де  $A_{kj}: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$  – оператори впливу поверхневих навантажень на поверхневі переміщення,  $f_i(s) = (f_{1i}(s), f_{2i}(s), f_{3i}(s)) \in L_2^3(\Omega)$  – вектор-функція, для якої  $f_{1i}(s) = -\delta_0(s) - \Delta_{1i}$ ,  $f_{2i}(s) = -\Delta_{2i}$ ,  $f_{3i}(s) = -\Delta_{3i}$ , а функція  $\delta_0(s) \in L_2(\Omega)$  задає початковий проміжок між тілами, що визначається рівняннями їх поверхонь.

Ядра  $K_{kj}(s, s')$  інтегральних операторів  $A_{kj}$  визначаються у відповідності з розв'язками Буссінеска та Черруті з наступних співвідношень:

$$K_{11}(s, s') = \frac{c_1}{r}; \quad (2.3)$$

$$K_{12}(s, s') = -K_{21}(s, s') = \frac{c_2(x_2 - x'_2)}{r^2}; \quad (2.4)$$

$$K_{13}(s, s') = -K_{31}(s, s') = \frac{c_2(x_3 - x'_3)}{r^2}; \quad (2.5)$$

$$K_{22}(s, s') = \frac{c_1}{r} + \frac{c_3(x_2 - x'_2)^2}{r^3}; \quad (2.6)$$

$$K_{23}(s, s') = -K_{32}(s, s') = \frac{c_3(x_2 - x'_2)(x_3 - x'_3)}{r^3}; \quad (2.7)$$

$$K_{33}(s, s') = \frac{c_1}{r} + \frac{c_3(x_3 - x'_3)^2}{r^3}; \quad (2.8)$$

$$c_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2}; \quad (2.9)$$

$$c_2 = \frac{(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)}{2\pi E_2} - \frac{(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)}{2\pi E_1}; \quad (2.10)$$

$$c_3 = \frac{\nu_1(1 + \nu_1)}{\pi E_1} + \frac{\nu_2(1 + \nu_2)}{\pi E_2}; \quad (2.11)$$

$$r = |s - s'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}. \quad (2.12)$$

У співвідношеннях (2.3-2.12)  $E_1$ ,  $E_2$  і  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  – модулі Юнга і коефіцієнти Пуассона першого та другого тіла відповідно, а  $x$ ,  $x'$  та  $y$ ,  $y'$  – абсциси та ординати точок  $s$  і  $s'$  області  $\Omega$  відповідно.

## 2.2 Нелінійні інтегральні рівняння контактної задачі

Виразимо компоненти  $\dot{v}_{2i}(s)$ ,  $\dot{v}_{3i}(s)$  вектора швидкості відносного проковзування тіл в точці  $s \in \Omega$  на  $i$ -му кроці навантаження за допомогою кінцевих різниць:

$$\dot{v}_{ki}(s) = \frac{v_{ki}(s) - v_{ki-1}(s)}{h_i} = \frac{1}{h_i} \cdot F_k(p_i, \tilde{\Delta}_{ki})_s, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 2, 3; \quad (2.13)$$

де  $h_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $\tilde{\Delta}_{ki}(s) = \Delta_{ki} - F_k(p_{i-1}, \Delta_{ki-1})_s$ , а  $F_k(p_i, \Delta_{ki})_s$  визначається співвідношеннями (2.2).

Тоді систему (2.1) можна записати у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1i}(s) \geq 0; F_1(p_i, \Delta_{1i})_s \geq 0; p_{1i}(s)F_1(p_i, \Delta_{1i})_s = 0; \\ \sqrt{p_{2i}^2(s) + p_{3i}^2(s)} \leq \mu p_{1i}(s); \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} p_{2i}(s) + \mu p_{1i}(s) F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s = 0; \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} p_{3i}(s) + \mu p_{1i}(s) F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s = 0; \\ s \in \Omega; i = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Таким чином, розглянута контактна задача на  $i$ -му кроці навантаження полягає у визначенні невідомих функцій  $p_{ki}(s) \in L_2(\Omega)$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , які майже всюди на  $\Omega$  задовольняють співвідношенням (2.14). Відзначимо, що для знаходження рішення системи (2.14) при  $i = k$  має бути відомо рішення цієї системи при  $i = k - 1$ . Це випливає з співвідношень (2.3-2.12). Таким чином, необхідно задати початкові умови, в якості яких приймемо тотожна рівність нулю всіх компонент вектор-функцій  $\gamma_0$  и  $p_0(s)$ .

Для спрощення постановки контактної задачі розглянемо наступну модифікацію співвідношень, які визначають закон тертя Кулона в системі (2.14). Спочатку, запишемо цю систему в еквівалентному вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1i}(s) \geq 0; F_1(p_i, \Delta_{1i})_s \geq 0; p_{1i}(s)F_1(p_i, \Delta_{1i})_s = 0; \\ \sqrt{p_{2i}^2(s) + p_{3i}^2(s)} \leq \mu(p_{1i-1}(s) + \varepsilon_i(s)); \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} p_{2i}(s) + \mu(p_{1i-1}(s) + \varepsilon_i(s)) F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s = 0; \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} p_{3i}(s) + \mu(p_{1i-1}(s) + \varepsilon_i(s)) F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s = 0; \\ s \in \Omega; i = \overline{1, n}, \end{array} \right. \quad (2.15)$$

де  $\varepsilon_i(s) = p_{1i}(s) - p_{1i-1}(s)$ .

Потім, будемо припускати, що при досить великій кількості кроків навантаження  $n$  різниці  $p_{1i}(s) - p_{1i-1}(s)$  малі в порівнянні з величинами контактних тисків  $p_{1i}(s)$  на кожному  $i$ -му кроці навантаження. Нарешті, з огляду

на останнє припущення, відкинемо в системі (2.15) все збільшення  $\varepsilon_i(s)$ . Тоді система (2.14) приймає наступний модифікований вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1i}(s) \geq 0; F_1(p_i, \Delta_{1i})_s \geq 0; p_{1i}(s)F_1(p_i, \Delta_{1i})_s = 0; \\ \sqrt{p_{2i}^2(s) + p_{3i}^2(s)} \leq \mu p_{1i-1}(s); \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} p_{2i}(s) + \mu p_{1i-1}(s)F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s = 0; \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} p_{3i}(s) + \mu p_{1i-1}(s)F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s = 0; \\ s \in \Omega; i = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

При використанні зазначеної модифікації закону тертя Кулона розглянута контактна задача на  $i$ -му кроці навантаження зводиться до визначення невідомих функцій  $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s) \in L_2(\Omega)$ , які майже всюди на  $\Omega$  задовольняють співвідношенням (2.16). Прийняттю модифікацію закону тертя Кулона, виражену останніми трьома співвідношеннями системи (2.16), можна витлумачити як наявність запізнювання в виразах  $\mu \cdot p_{1i}(s)$ , що входять в останні три співвідношення системи (2.16) і обмежують модуль питомої контактної навантаження. При цьому, очевидно, що на  $i$ -му кроці навантаження обмежує контактний тиск  $p_{1i-1}(s)$  є відомим, що істотно спрощує граничні умови контактної задачі.

Якщо система (2.16) вирішена для  $i$ -го кроку навантаження, то конфігурацію області контакту можна визначити наступним чином [22]:

$$\Omega_0^{(i)} = \{s \in \Omega \mid F_1(p_i, \Delta_{1i})_s = 0\}, \quad (2.17)$$

$$\Omega_C^{(i)} = \{s \in \Omega_0^{(i)} \mid F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s = 0\}, \quad (2.18)$$

$$\Omega_{II}^{(i)} = \{s \in \Omega_0^{(i)} \mid F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s > 0\}, \quad (2.19)$$

де  $\Omega_0^{(i)}$  – область контакту,  $\Omega_C^{(i)}$  – зона зчеплення,  $\Omega_{II}^{(i)}$  – зона проковзування.



Остаточним рішенням розглянутої квазістатической завдання домовимося вважати функції  $p_{kn}(s)$ ,  $k = \overline{1,3}$  і області  $\Omega_0^{(n)}$ ,  $\Omega_C^{(n)}$ ,  $\Omega_\Pi^{(n)}$ , знайдені на останньому кроці навантаження  $n$ .

### 2.3 Алгоритм чисельного розв'язання інтегральних рівнянь

Для зведення системи (2.16) до нелінійного операторного рівняння розглянемо безперервний нелінійний оператор  $G_{\mu p_1}: L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ , що задається рівностями:

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega); y = G_{\mu p_1}(x), \\ y_1(s) = h(x_1(s)), \\ y_2(s) = q(x_2(s), x_3(s), \mu p_1(s)), \\ y_3(s) = q(x_3(s), x_2(s), \mu p_1(s)), \quad s \in \Omega, \end{cases} \quad (2.20)$$

в яких  $p_1(s) \in L_2(\Omega)$  є задана, майже всюди на  $\Omega$  невід'ємна функція, а функції  $h(x)$  і  $q(x, y, z)$  визначаються співвідношеннями:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0; \\ 0, & \text{якщо } x < 0; \end{cases}$$

$$q(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} \leq z; \\ x \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} > z. \end{cases}$$

За допомогою введеного оператора  $G_{\mu p_1}$  систему співвідношень (2.16) можна записати у вигляді операторного рівняння:

$$p_i = G_{\mu p_{i-1}}(p_i - E \cdot (A(p_i) - \tilde{f}_i)), \quad (2.21)$$

в якому  $\tilde{f}_i = (-\delta_0(s) - \Delta_{1i}, -\tilde{\Delta}_{2i}(s), -\tilde{\Delta}_{3i}(s))$ ,  $E$  – довільна позитивна константа,

а невід'ємна функція  $\mu \cdot p_{1i-1}(s)$  є відомою. Лінійний обмежений оператор  $A: L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$  задається системою рівностей:

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega); \\ y = A(x), y_k = \sum_{j=1}^3 A_{kj}(x_j) \quad \forall k = \overline{1,3}. \end{cases} \quad (2.22)$$

Оператори впливу  $A_{kj}: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ , що входять в співвідношення (2.22) мають інтегральний вигляд:

$$A_{kj}(x)_s = \int_{\Omega} K_{kj}(s, s') \cdot x(s') ds', \quad (k, j = \overline{1,3}).$$

Таким чином, при фіксованому  $i$  операторне рівняння (2.21) еквівалентно системі трьох нелінійних інтегральних рівнянь щодо невідомих функцій  $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s) \in L_2(\Omega)$ . Для наближеного рішення подібних систем в роботах [9,10,12] був запропонований чисельний алгоритм, заснований на використанні ітераційних процесів. Згідно з цим алгоритмом, здійснюється розбиття області  $\Omega$  на граничні елементи  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l$  з подальшим чисельним рішенням дискретного аналога відповідного операційного рівняння. У нашій задачі в якості області  $\Omega$  можна вибрати відкритий квадрат зі сторонами, паралельними осям  $x, y$ , який свідомо містить в собі область можливого контакту, а в якості граничних елементів  $\omega_i$  – однакові відкриті квадрати зі сторонами, паралельними сторонам квадрата  $\Omega$ . Будемо припускати, що при кожному фіксованому значенні  $i$  на кожному граничному елементі  $\omega_k$  невідомі функції  $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s)$  приймають постійні значення  $x_{3k-2i}, x_{3k-1i}, x_{3ki}$ . Тоді, для рівняння (2.21), можна отримати його дискретний аналог у вигляді системи  $3l$  нелінійних рівнянь з  $3l$  невідомими  $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{3li}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{3k-2i} = h(x_{3k-2i} - E(\sum_{j=1}^{3l} a_{3k-2j} x_{ji} - b_{3k-2i})); \\ x_{3k-1i} = q(x_{3k-1i} - E(\sum_{j=1}^{3l} a_{3k-1j} x_{ji} - b_{3k-1i})), \\ x_{3ki} - E(\sum_{j=1}^{3l} a_{3kj} x_{ji} - b_{3ki}), \alpha_k); \\ x_{3ki} = q(x_{3ki} - E(\sum_{j=1}^{3l} a_{3kj} x_{ji} - b_{3ki})), \\ x_{3k-1i} - E(\sum_{j=1}^{3l} a_{3k-1j} x_{ji} - b_{3k-1i}), \alpha_k); k = \overline{1, l}. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

У цій системі числові параметри  $a_{kj}$  і  $b_{ki}$  можна визначити з відомих співвідношень [9,12]:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{3k-j3k-j} = \int_{\omega_k} K_{3-j3-j}(s_k, s) ds; \\ a_{3k-23k-1} = a_{3k-23k} = a_{3k-13k-2} = a_{3k-13k} = a_{3k3k-2} = a_{3k3k-1} = 0; \\ a_{3k-m3j-g} = mes(\omega_j) K_{3-m3-g}(s_k, s_j) \\ b_{3k-2i} = -\delta_0(s_k) - \Delta_{1l}, \quad b_{3k-1i} = -\tilde{\Delta}_{2i}(s_k), \\ b_{3ki} = -\tilde{\Delta}_{3i}(s_k) \quad \forall k = \overline{1, l}; \quad \forall j, m, g = \overline{0, 2}. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

де  $s_k$  – центр квадрата  $\omega_k$ ,  $mes(\omega_k)$  – площа квадрата  $\omega_k$ .

У рівняннях (2.23) невід'ємні постійні  $\alpha_k$  задаються рівностями  $\alpha_k = \mu \cdot x_{3k-2i-1}$ , в яких  $\mu$  – коефіцієнт тертя, а значення  $x_{3k-2i-1}$  контактних тисків на  $(i-1)$ -ом кроці навантаження вважаються відомими. У разі апроксимації взаємодіючих тіл пружний півпростір співвідношення (2.24) гарантують симетричність і позитивну визначеність матриці  $A_0 = \{a_{ij}\}, i, j = \overline{1, 3l}$ . Ця обставина дозволяє для наближеного рішення системи рівнянь (2.23) використовувати наступний ітераційний процес, заснований на методі простої ітерації:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_{1i}^{(0)}, x_{2i}^{(0)}, \dots, x_{3li}^{(0)}) \in R^{3l}, k = \overline{1, l}, m = 0, 1, 2, \dots \\ x_{3k-2i}^{(m+1)} = h \left( x_{3k-2i}^{(m)} - E \left( \sum_{j=1}^{3l} a_{3k-2j} x_{ji}^{(m)} - b_{3k-2i} \right) \right); \\ x_{3k-1i}^{(m+1)} = q \left( x_{3k-1i}^{(m)} - E \left( \sum_{j=1}^{3l} a_{3k-1j} x_{ji}^{(m)} - b_{3k-1i} \right), x_{3ki}^{(m)} - E \left( \sum_{j=1}^{3l} a_{3kj} x_{ji}^{(m)} - b_{3ki} \right), \alpha_k \right); \\ x_{3ki}^{(m+1)} = q \left( x_{3ki}^{(m)} - E \left( \sum_{j=1}^{3l} a_{3kj} x_{ji}^{(m)} - b_{3ki} \right), x_{3k-1i}^{(m)} - E \left( \sum_{j=1}^{3l} a_{3k-1j} x_{ji}^{(m)} - b_{3k-1i} \right), \alpha_k \right); \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Збіжність ітераційного процесу (2.25) буде мати місце незалежно від вибору початкового наближення  $(x_{1i}^{(0)}, x_{2i}^{(0)}, \dots, x_{3li}^{(0)})$  в  $3l$ -вимірному евклідовому просторі  $R^{3l}$  [28] за умови, що матриця  $A_0$  є симетричною і позитивно певною, а що входить в співвідношення (2.25) константа  $E$  задовольняє нерівності:

$$0 < E < \frac{1}{\max_{1 \leq i \leq 3l} \left( \sum_{j=1}^{3l} |a_{ij}| \right)}. \quad (2.26)$$

Цей факт можна довести за допомогою принципу стискаючих відображень [28].

**Теорема.** Якщо квадратна числова матриця  $A_0 = \{a_{ij}\}_{i,j=\overline{1,3l}}$  є симетричною і позитивно визначеною, то для будь-якого вектора  $b = (b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{3li}) \in R^{3l}$  і для будь-яких невід'ємних чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$  система рівнянь (2.23) має в просторі  $R^{3l}$  єдине рішення, причому ітераційний процес (2.25) при виконанні нерівностей (2.26) сходиться до цього рішення незалежно від вибору початкового вектора  $(x_{1i}^{(0)}, x_{2i}^{(0)}, \dots, x_{3li}^{(0)})$  в  $R^{3l}$ .

**Доведення.** Ввівши позначення  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{3l}), b = (b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{3li})$ , запишемо систему рівнянь (2.23) в матрично-векторній формі:

$$x = F(x - E \cdot (A_0 \cdot x - b)), \quad (2.27)$$

де нелінійний оператор  $F: R^{3l} \rightarrow R^{3l}$  заданий співвідношеннями:

$$\begin{cases} \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{3l}), \tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_{3l}) \in R^{3l}; \\ \tilde{y} = F(\tilde{x}); \\ \tilde{y}_{3k-2} = h(\tilde{x}_{3k-2}), \tilde{y}_{3k-1} = q(\tilde{x}_{3k-1}, \tilde{x}_{3k}, \alpha_k), \\ \tilde{y}_{3k} = q(\tilde{x}_{3k}, \tilde{x}_{3k-1}, \alpha_k) \forall k = \overline{1, l}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Будемо вважати, що константа  $E$  в рівнянні (2.27) задовольняє нерівностям (2.26).

З очевидних нерівностей: [20]

$$\begin{cases} (h(y_1) - h(y_2))^2 \leq (y_1 - y_2)^2, \\ (q(y_1, z_1, \gamma) - q(y_2, z_2, \gamma))^2 + (q(z_1, y_1, \gamma) - q(z_2, y_2, \gamma))^2 \leq \\ \leq (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2, \end{cases} \quad (2.29)$$

справедливих для будь-яких дійсних чисел  $y_1, y_2, z_1, z_2$  і для будь-якого невід'ємного числа  $\gamma$ , слідує нерозтягуваність оператора  $F: R^{3l} \rightarrow R^{3l}$  вигляду (2.29).

Дійсно, для будь-яких векторів  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{3l}), \tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_{3l})$  простору  $R^{3l}$  справедливі оцінки:

$$\begin{aligned} \|F(\tilde{x}) - F(\tilde{y})\|^2 &= \sum_{k=1}^l [(h(\tilde{x}_{3k-2}) - h(\tilde{y}_{3k-2}))^2 \\ &+ (q(\tilde{x}_{3k-1}, \tilde{x}_{3k}, \alpha_k) - q(\tilde{y}_{3k-1}, \tilde{y}_{3k}, \alpha_k))^2 + (q(\tilde{x}_{3k}, \tilde{x}_{3k-1}, \alpha_k) - q(\tilde{y}_{3k}, \tilde{y}_{3k-1}, \alpha_k))^2] \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^l [(\tilde{x}_{3k-2} - \tilde{y}_{3k-2})^2 + (\tilde{x}_{3k-1} - \tilde{y}_{3k-1})^2 + (\tilde{x}_{3k} - \tilde{y}_{3k})^2] = \sum_{j=1}^{3l} (\tilde{x}_j - \tilde{y}_j)^2 = \|\tilde{x} - \tilde{y}\|^2, \end{aligned}$$

які означають нерозтягуваність оператора  $F: R^{3l} \rightarrow R^{3l}$  вигляду (2.28).

У цих оцінках, отриманих з урахуванням нерівностей (2.29), символом  $\|x\|$  позначена евклідова норма вектора  $x \in R^{3l}$ .

Для оператора  $\tilde{F}: R^{3l} \rightarrow R^{3l}$ , стоїть в правій частині рівняння (2.27), і для будь-яких довільних елементів  $x, y \in R^{3l}$  тепер можна отримати оцінки:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{F}(x) - \tilde{F}(y)\| &= \|F(x - E \cdot (A_0 \cdot x - b)) - F(y - E \cdot (A_0 \cdot y - b))\| \leq \\
&\leq \|x - E \cdot (A_0 \cdot x - b) - y + E \cdot (A_0 \cdot y - b)\| = \\
&= \|(x - y) - E \cdot A_0 \cdot (x - y)\| = \|(I - E \cdot A_0) \cdot (x - y)\| \leq \\
&\leq \|I - E \cdot A_0\|_* \cdot \|x - y\|,
\end{aligned}$$

в яких  $I$  – є діагональна квадратна числова матриця  $3l$ -го порядку з одиницями на головній діагоналі, а символ  $\|B\|_*$  позначає спектральну норму [30] матриці  $B$  (матричну норму, узгоджену з евклідової векторної нормою).

Таким чином, доведено нерівність:

$$\|\tilde{F}(x) - \tilde{F}(y)\| \leq \|I - E \cdot A_0\|_* \cdot \|x - y\| \quad \forall x, y \in R^{3l}. \quad (2.30)$$

З симетричності і позитивної визначеності матриці  $A_0$  впливає очевидна нерівність [30]:

$$(A_0 \cdot x, x) \geq \alpha \cdot (x, x) \quad \forall x \in R^{3l}, \quad (2.31)$$

в якому  $\alpha$  є найменше власне значення матриці  $A_0$ , а символ  $(x, y)$  позначає скалярний добуток векторів  $x, y \in R^{3l}$ .

Крім того, з очевидної оцінки [30]:

$$\|A_0\|_* \leq \max_{1 \leq i \leq 3l} \left( \sum_{j=1}^{3l} |a_{ij}| \right)$$

і нерівностей (2.26) впливає, що симетрична матриця  $(I - E \cdot A_0)$  є невід'ємною визначеною [30].

Оцінюючи спектральну норму такої матриці з урахуванням умов (2.31), отримаємо співвідношення [20]:

$$\begin{aligned} \|I - E \cdot A_0\|_* &= \sup_{\|z\|=1} (z - E \cdot A_0 \cdot z, z) = \sup_{\|z\|=1} [(z, z) - E \cdot (A_0 \cdot z, z)] = \\ &= \sup_{\|z\|=1} (1 - E \cdot (A_0 \cdot z, z)) \leq \sup_{\|z\|=1} (1 - E \cdot \alpha) = 1 - E \cdot \alpha < 1. \end{aligned}$$

З цих співвідношень і нерівності (2.30) випливає нерівність:

$$\|\tilde{F}(x) - \tilde{F}(y)\| \leq (1 - E \cdot \alpha) \cdot \|x - y\|,$$

яке можна довести для будь-яких векторів  $x, y$  просторі  $R^{3l}$ .

Таким чином, оператор  $\tilde{F}: R^{3l} \rightarrow R^{3l}$ , що стоїть в правій частині рівняння (2.27), є оператором стиску. Тоді, згідно з принципом стискають відображень [28], рівняння (2.27), а, отже, і система рівнянь (2.23), має в просторі  $R^{3l}$  єдине рішення і ітераційний процес (2.25) сходиться до цього рішення незалежно від вибору початкового вектора, якщо входить в (2.25) константа  $E$  задовольняє нерівностям (2.26).

Теорема доведена.

### 3 ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Для перевірки коректності викладеного алгоритму розглядалась задача про контакт циліндричного штампа та пружного півпростору. Контактна взаємодія проходила за два етапи навантаження штампа. На першому етапі штамп вдавлювався в півпростір нормальною силою на величину заглиблення  $\Delta_z$ . На другому етапі відбувався дотичний зсув вдавненого у півпростір штампу на величину переміщення  $\Delta_x$  вздовж осі  $Ox$  (рис. 3.1).

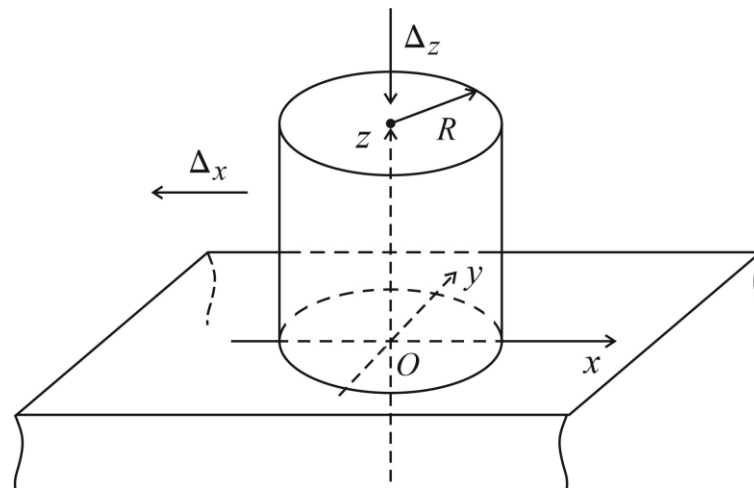


Рисунок 3.1 – Контакт циліндричного штампа та пружного півпростору

Для чисельних розрахунків використовувалися наступні вихідні дані: радіус штампа  $r = 5$  мм; модуль Юнга півпростору  $E = 210000$  МПа; коефіцієнт Пуассона півпростору  $\nu = 0,3$ ; коефіцієнт тертя  $\mu = 0,25$ ; величина нормального заглиблення штампа  $\Delta_1 = 0,04$  мм. Для обчислень була вибрана поверхнева сітка, яка складалася з  $41 \times 41 = 1681$  рівних граничних елементів зі стороною  $0,025$  мм.

Числовий аналіз був присвячений дослідженню еволюції параметрів контакту при поступовому збільшенні діючих на штамп зсувних зусиль.

Розрахунки були проведені для наступних значень величини дотичного зсуву  $\Delta_2$ :  $0,002$ ;  $0,004$ ;  $0,006$ ;  $0,008$ ;  $0,010$ ;  $0,012$ ;  $0,014$ ;  $0,016$ ;  $0,018$ ;  $0,02$ .



На рис. 3.1 показано розподіли дотичних контактних напружень, що діють на підошву штампа в точках сітки, розташованих на осі  $Ox$ , при різних поступово зростаючих значеннях величини дотичного зсуву  $\Delta_2$ .

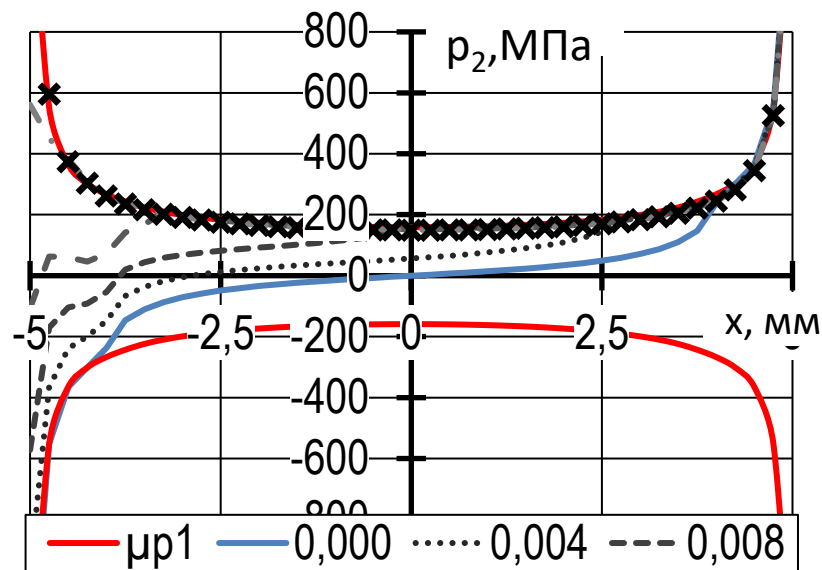


Рисунок 3.2 – Розподіли контактних напружень

Тут червоні лінії схожі за формою на гіперболу відповідають розподілам величини  $\mu p_1$  та  $-\mu p_1$ , де  $p_1$  – контактний тиск, що діє на основу штампа при його нормальному вдавлюванні у півпростір на величину  $\Delta_1 = 0,04$  мм.

Результати свідчать, що на етапі нормального навантаження графік розподілу дотичних напружень є центрально-симетричним і має вертикальні асимптоти на межі штампу (суцільна синя лінія на рис. 3.1). На другому етапі навантаження, при поступовому збільшенні зсувних зусиль, графіки дотичних напружень втрачають центральну симетрію і частково зміщується у напрямі зростаючого дотичного зсуву, причому частини усіх графіків практично співпадають з графіком  $\mu p_1$ , це означає, що ці частини відповідають зоні проковзування де  $|p_2| = \mu p_1$ . Зломи графіків дотичних напружень, що розташовані на лінії  $\mu p_1$ , відповідають точкам на межі зони проковзування і зони зчеплення. Ділянки графіків, що розташовані між графіками  $-\mu p_1$  і  $\mu p_1$  відповідають зоні зчеплення де  $|p_2| < \mu p_1$ . При значеннях дотичного зсуву  $\Delta_2$  більш ніж 0,018 мм всі графіки дотичних напружень практично співпадають з

графіком  $\mu p_1$ . Це свідчить, що при  $\Delta_2 > 0,018$  мм має місце повне проковзування штампа.

В табл. 3.1 представлені сумарні значення нормальної сили  $P$  та дотичної сили  $Q$ , що діють на підшву штампа при різних значеннях  $\Delta_2$ . Величина похибки  $\varepsilon$  (п'ятий рядок таб. 3.1) обчислювалась за формулою:

$$\varepsilon = \frac{|Q - \mu P|}{\mu P} \cdot 100\%.$$

Таблиця 3.1 – Залежність нормальної і дотичної сили від дотичного зсуву

$\Delta_2$ , мм	0,002	0,004	0,006	0,008	0,01	0,012	0,014	0,016	0,018	0,02
$P$ , Н	94144	94030	93876	93677	93439	93177	92914	92677	92529	92457
$Q$ , Н	3675	7228	10591	13674	16382	18653	20490	21844	22456	22639
$P\mu$ , Н	23536	23507	23469	23419	23360	23294	23228	23169	23132	23114
$\varepsilon$ , %	21,1	17,3	13,7	10,3	7,4	4,9	2,9	1,4	0,7	0,5

Як видно з даних, наведених у таб 3.1, при збільшенні дотичного зсуву штампа нормальна сила несуттєво зменшується, а дотична сила зростає, причому її відхилення від величини  $\mu P$  зменшується і стає несуттєвим при значеннях  $\Delta_2 \geq 0,018$ . Це підтверджує той факт, що при  $\Delta_2 \geq 0,018$  починається повне проковзування штампа по межі півпростору.

На рис 3.4 представлено конфігурацію зони зчеплення та проковзування при дії на штамп тільки нормального навантаження.

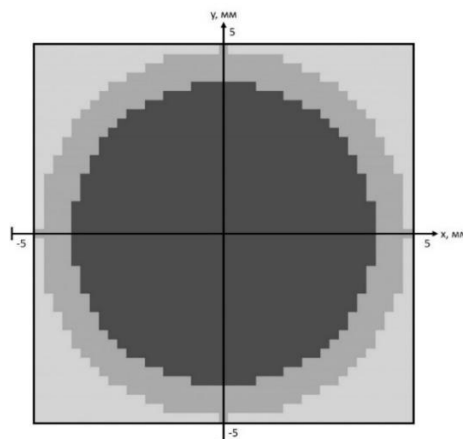


Рисунок 3.4 – Зона зчеплення та проковзування під дією нормальної сили

Як можна побачити на рис. 3.4 при нормальному вдавлюванні штампа, зона зчеплення утворює кругову область в центрі, а зона проковзування утворює кільцеву область біля краю штампа.

На рис. 3.5 представлено конфігурації зон зчеплення та проковзування при значеннях дотичного зсуву  $\Delta 2 = 0,004; 0,008; 0,012; 0,014$ .

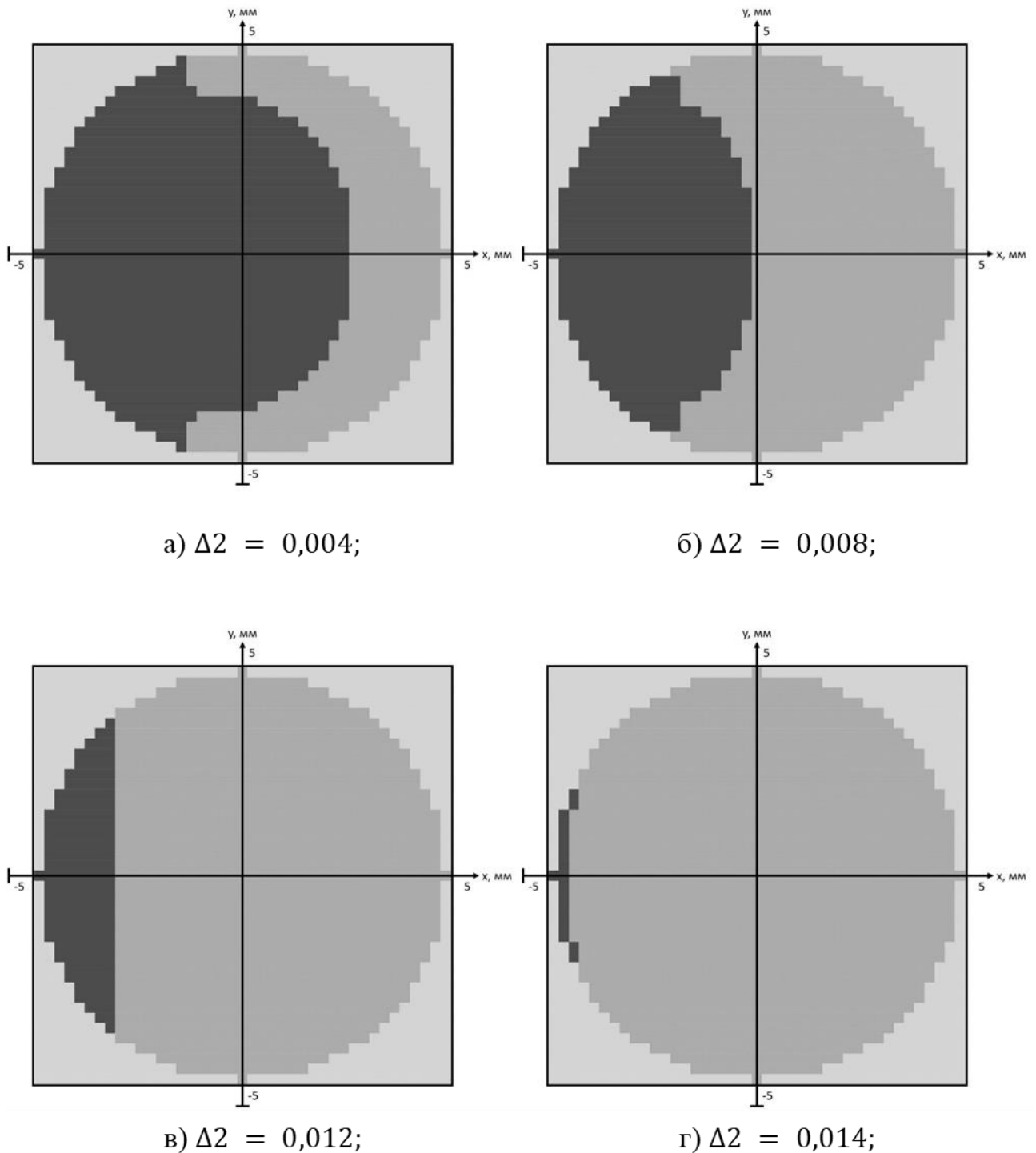


Рисунок 3.5 – Зона зчеплення та проковзування під дією нормальної та дотичної сил

Як видно з цих малюнків центральна симетрія зон втрачається. Зона зчеплення зміщується у в напрямку дотичного зсуву штампа і відразу прилягає до його межі. З протилежної сторони зона проковзування набуває форми, яка нагадує півмісяць, що збільшується зі збільшенням дотичного зсуву. При цьому, площа зони зчеплення поступово зменшується.

На рис 3.6 представлено конфігурацію зони зчеплення та проковзування при значенні дотичного зсуву  $\Delta_2 = 0,020$ .

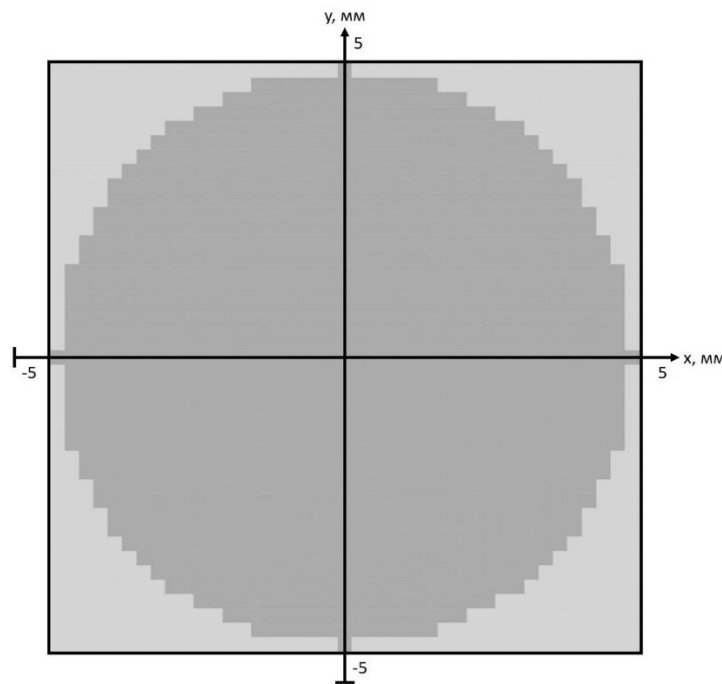


Рисунок 3.6 – Зона зчеплення та проковзування під дією нормальної та дотичної сил

Як видно з цього рисунку, при такому значенні дотичного зсуву  $\Delta_2$ , зона зчеплення зникає і залишається тільки зона проковзування на всій підшві штампа. Дані, представлені на рис 3.6, підтверджують встановлений раніше факт про те, що при  $\Delta_2 \geq 0,018$  починається повне проковзування штампа по межі півпростору.

## ВИСНОВКИ

В ході роботи було проаналізовано теорію контактної взаємодії пружних тіл, на основі якої сформульовано просторову задачу про фрикційний контакт пружних тіл під дією нормального і дотичного навантаження, а також визначено крайові умови контактної взаємодії незалежно від конфігурації зон зчеплення та проковзування на поверхні контакта. Для розв'язку поставленої задачі, її було зведено до системи нелінійних інтегральних рівнянь. Розроблено алгоритм чисельного розв'язку отриманих рівнянь. За допомогою представленого алгоритму отримано новий чисельний розв'язок задачі про контакт зі зчепленням і проковзуванням жорсткого циліндричного штампа з плоскою підшоною і пружного півпростору при нормальному і дотичному навантаженні штампа. Проаналізовано контактні напруження та конфігурацію зон зчеплення при поступовому збільшенні дотичного навантаження, а також умови початку повного проковзування штампа. Виконаний аналіз отриманих результатів свідчить про їх коректність. Отримані результати можуть бути використані в подальших дослідженнях просторових задач контактної механіки.

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Cattaneo C. Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli stozzi. *Rend. Dell'Accademia nazionale dei Lincei*. 1938. Vol. 27, Ser. 6. P. 342–348, 434–436, 474–478.
2. de Pater A.D. On the reciprocal pressure between two elastic bodies in contact. In: *Rolling Contact Phenomena*, ed. Bidwell.-New York: Elsevier, 1964.
3. Goodman L. E. Contact Stress analysis of normally loaded, rough spheres. *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.* 1962, 29. P. 515.
4. Johnson K. L., O'Connor J. J., Woodward A. C. The effect of indenter elasticity on the Hertzian fracture of brittle materials. *Proc. Roy. Soc.*, 1973, A334. P. 95.
5. Johnson K. L. Energy dissipation at spherical surfaces in contact transmitting oscillating forces. *Journal of Mechanical Engineering Science*. 1961. 3(4), 362–368.
6. Kalker J. J. A survey of the mechanics of contact between solid bodies. *ZAMM*. 1977. B. 57, H. 5. P. T3–T17.
7. Love A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed. Cambridge: University Press, 1952.
8. Mindlin R. D., Deresiewicz H. Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *J. Applied Mech.* 1953. 20. P. 327–344.
9. Mindlin R. D. Compliance of elastic bodies in contact. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1949. Vol. 16. №3. P. 259–268.
10. Noble B., Spence D. A. Formulation of Two-dimensional and Axisymmetric Boundary Value Problems. University of Wisconsin Math. Res. Centre Report TR 1089, 1971.
11. Ostryk V. I., Ulitko A. F. Axially symmetric contact of two elastic bodies with friction and adhesion. *Materials Science*. 2013. Vol. 48. №. 4. C. 444–455.
12. Sneddon I. N. *Fourier Transforms*. New York, Toronto, London: McGraw-Hill, 1951.

13. Spence D. A. Self-similar solutions to adhesive contact problems with incremental loading. *Proc. Roy. Soc.*, 1968, A305, P. 55.
14. Spence D. A. The Hertz contact problem with finite friction. *J. Elasticity*. 1975. 5. P. 297.
15. Spence D. The Hertz contact problem with finite friction. *Journal of elasticity*. 1975. Vol. 5 (3). P. 297–319.
16. Turner J. R. The frictional unloading problem on linear elastic halfspace. *J. Inst. Math, and its Appl.*, 1979, 24, P. 439.
17. Turner J. R. The frictional unloading problem on linear elastic half-space. *J. Inst. Math. and its Appl.* 1979. Vol. 24. P. 439–469.
18. Tyler J. C., Burton R. A., Ku P. A. Contact fatigue under oscillatory normal load. *ASLE TRANSACTIONS*. 1963. 6(4), P. 255-269.
19. Александров А. И. Решение задач о контакте упругих тел с использованием нелинейных интегральных уравнений. *Доп. Національної академії наук України*. 2012. № 11. С. 47–52.
20. Александров А.И. Решение задач контактного взаимодействия упругих тел с использованием нелинейных операторных уравнений. Днепропетровск, 1989. 74 с.
21. Александров А. И. Метод решения пространственной контактной задачи о взаимодействии двух упругих тел при наличии трения между ними. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2013. Т. 56, № 3. с. 29–42.
22. Александров А. И., Стреляев Ю.М. Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для контактных задач теории упругости. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2014. №. 3 (7). с. 36–40.
23. Александров В. М., Пожарский Д. А. Трёхмерные контактные задачи при учёте трения и нелинейной шероховатости. *Прикладная математика и механика*. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 516–527.
24. Галанов Б. А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта. *Прикладная математика и механика*. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 827–835.

25. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. Гостехтеоретиздат, 1945, 1953, 264 с.
26. Галин Л. А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. *Прикладная математика и механика*. 1945. Т. 9. Вып. 5. С. 413–424.
27. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. Мир, 1989. 510с.
28. Канторович Л.В. Функциональный анализ. Наука, 1984. 752 с.
29. Кравчук А. С. Вариационный метод в контактных задачах. Состояние проблемы, направления развития. *Прикладная математика и механика*. 2009. Вып. 73, № 3. С. 492–502.
30. Ланкастер П. Теория матриц. Москва : Наука, 1978. 280 с.
31. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Москва : Гостех- издат, 1955, 492 с.
32. Моссаковский В. И. Сжатие упругих тел в условиях сцепления (осесимметричный случай). *Прикладная математика и механика*. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 418–427.
33. Острик В. И. Осесимметричный контакт штампа полиномиального профиля с упругим полупространством при наличии трения и сцепления. *Прикладная математика и механика*. 2013. Т. 77. № 4. С. 605–619.
34. Ростовцев Н. А. Комплексные функции напряжений в осесимметричной контактной задаче теории упругости. *Прикладная математика и механика*. 1953. Т. 17. С. 611–614.
35. Стреляев Ю. М. Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для решения квазистатической контактной задачи о взаимодействии упругих тел при наличии кулонова трения. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки*. 2016. Т. 20. № 2. С. 306–327.
36. Стреляев Ю. М. Решение квазистатической контактной задачи теории упругости с учетом трения. *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. 2014. № 2. С. 161–172.



## ДОДАТОК А

**Fortran програма для чисельного розв'язання контактної задачі**

```

DIMENSION X(22000),X1(22000),U(22000),D1(300),D2(300),D3(300),
      *TM(300),V(22000)
NNX=41 !Число узлов по оси x (макс 85)
      NNY=41 !Число узлов по оси y (макс 85)
      NN=NNX*NNY !Число граничных элементов
      NSX=(NNY-1)/2+1 ! Номер линии сетки оси x
      NSY=(NNX-1)/2+1 ! Номер линии сетки оси y
      KSTEP=1 !Число шагов нагружения
      !LSTEP=KSTEP
      NSTEP=2*KSTEP
      DISN=0.04 !Нормальное смещение
      DIST=0.03 !Касательное смещение
      STDX=0.25 !Шаг сетки по X
      STDY=0.25 !Шаг сетки по Y
      !Упругие постоянные
      E1=210000.
      !E2=10.**30
      ru1=0.3
      !ru2=0.5
      !коэффициент трения
      tr=0.25
      TF=0. !конечная температура
      !=====
      !Законы нагружения
      !Простое (пропорциональное)
      !DO 2 I=1,NSTEP !нормальное вдавливание
      !D1(I)=DISN*I/NSTEP
      !D3(I)=DIST*I/NSTEP
      ! D2(I)=0.
      !Последовательное
      DO 2 I=1,KSTEP !нормальное вдавливание

```

```

D1(I)=DISN*I/KSTEP
      D2(I)=0.
D3(I)=0.
      TM(I)=0.
      !Нагревание
      D1(KSTEP+I)=DISN
D3(KSTEP+I)= DIST*I/KSTEP
D2(KSTEP+I)=0.
      TM(KSTEP+I)= TF*I/KSTEP
      !Охлаждение
      !D1(2*KSTEP+I)=DISN
!D3(2*KSTEP+I)= 0.
!D2(2*KSTEP+I)=0.
      !TM(2*KSTEP+I)= TF-TF*I/KSTEP
2   CONTINUE
      !Разгрузка до 0.818*DISN за LSTEP шагов
      ! DO 20 I=1,LSTEP
! D1(KSTEP+I)=DISN-(1.- 0.818)*DISN*I/LSTEP
      ! D2(KSTEP+I)=0.
!D3(KSTEP+I)=0.
!20  CONTINUE
      ! =====
      CALL CONT3(D1,D2,D3,TM,NSTEP,pu1,E1,tr,
      *STDX,STDY,NN,NNX,NNY,NSX,NSY,X,X1,U,0.0001,V)
      STOP
      END
SUBROUTINE CONT3(D1,D2,D3,TM,K,PUPL,EPL,EM,DX,DY,N,N1,N2,
*KX,KY,X,X1,U,E1,V)
      DIMENSION D1(K),D2(K),D3(K),TM(K),X(3*N),X1(3*N),U(3*N),
      *A(22000,22000),P(N1),M(N1),SS12(3*N),SS13(3*N),Z(N),XX(3*N),
      *XY(3*N),V(3*N)
      !Описание входных параметроов:
      !1) D1,D2,D3 – массивы значений(в мм)пошаговых жестких смещений
      ! по осям z,x,y;
      !2) K – число шагов нагружения;
      !3) PUPL,PUMI – коэффициенты Пуассона нижнего, верхнего тел;
      !4) EPL,EMI – модули упругости (в МПа) нижнего, верхнего тел;

```

!5) EM – коэффициент трения;

!6) DX,DY – длины сторон(в мм)элементарного прямоугольника сетки;

!7) N – число узлов сетки  $N=N1*N2$

!8) N1,N2 – число линий сетки параллельных осям у,х;

!9) KX,KY – номера линий стеки, совпадающие с осями х,у;

!10) A,X,X1,U,P,M,SS12,SS13,Z – вспомогательные массивы;

!11) E1 – относительная погрешность(точность вычислений)

!12) TM – массив пошагового изменения температуры

$N3=3*N$

!Координаты левого нижнего узла сетки

$X5=DX*(1-KY)$

$Y5=DY*(1-KX)$

! Упругие параметры

$Pi=ATAN(1.)*4.$

$C1=((1-PUPL**2)/(Pi*EPL))$

$C2=((1+PUPL)*(1-2*PUPL)/(2*Pi*EPL))$

$C3=(PUPL*(1+PUPL)/(Pi*EPL))$

$A1=C1*(2.*DX*ALOG(TAN(0.25*(Pi+2.*ATAN(DY/DX))))$

$*-2.*DY*ALOG(TAN(0.5*ATAN(DY/DX))))!+0.000000003$

$A2=C1*(2.*DX*ALOG(TAN(0.25*(Pi+2.*ATAN(DY/DX))))$

$*-2.*DY*ALOG(TAN(0.5*ATAN(DY/DX))))!+0.000000003$

$+C3*DY*ALOG((SQRT(DX**2+DY**2)+DX)/(SQRT(DX**2+DY**2)-DX))$

$A3=C1*(2.*DX*ALOG(TAN(0.25*(Pi+2.*ATAN(DY/DX))))$

$*-2.*DY*ALOG(TAN(0.5*ATAN(DY/DX))))$

$+C3*DX*ALOG((SQRT(DX**2+DY**2)+DY)/(SQRT(DX**2+DY**2)-DY))$

$!*+0.000000003$

DO 220 I=1,N2 !Формирование массива координат узлов

DO 220 J=1,N1

$I1=(I-1)*N1+J$

$X(I1)=X5+DX*(J-1)$

220  $X1(I1)=Y5+DY*(I-1)$

DO 250 I=1,N !Формирование матрицы податливости

DO 250 J=1,N

$R=SQRT((X(I)-X(J))**2+(X1(I)-X1(J))**2)$

$A(3*I-2,3*J-2)=A1$

$A(3*I-2,3*J-1)=0.$

$A(3*I-2,3*J)=0.$

```

A(3*I-1,3*J-2)=0.
  A(3*I-1,3*J-1)=A2
A(3*I-1,3*J)=0.
  A(3*I,3*J-2)=0.
A(3*I,3*J-1)=0.
  A(3*I,3*J)=A3
  IF(I.EQ.J)GO TO 250
A(3*I-2,3*J-2)=C1*DX*DY/R
A(3*I-2,3*J-1)=C2*(X(I)-X(J))*DX*DY/(R**2)
  A(3*I-2,3*J)=C2*(X1(I)-X1(J))*DX*DY/(R**2)
A(3*I-1,3*J-2)=-C2*(X(I)-X(J))*DX*DY/(R**2)
  A(3*I-1,3*J-1)=C1*DX*DY/R+(C3*DX*DY*((X(I)-X(J))**2))/(R**3)
A(3*I-1,3*J)=C3*(X(I)-X(J))*(X1(I)-X1(J))*DX*DY/(R**3)
  A(3*I,3*J-2)=-C2*(X1(I)-X1(J))*DX*DY/(R**2)
A(3*I,3*J-1)=C3*(X(I)-X(J))*(X1(I)-X1(J))*DX*DY/(R**3)
  A(3*I,3*J)=C1*DX*DY/R+(C3*DX*DY*((X1(I)-X1(J))**2))/(R**3)
250  CONTINUE
  DO 1 I=1,N !Начальный зазор между телами
  XX(I)=X(I)
  XY(I)=X1(I)
1    U(I)=FD(X(I),X1(I))
  DO 30 I=1,N3
SS12(I)=0.
SS13(I)=0.
  X(I)=0. !Очистка памяти массивов X(I) X1(I) для сохранения напряжений
30  X1(I)=0.
  DD2=0.
  DD3=0.
  TMM=0.
  DO 777 I20=1,K !Пошаговое нагружение
80  DO 40 I=1,N !Итерация процесса Зейделя
  I111=3*I-2
  I112=3*I-1
  I113=3*I
  S11=0.
  S12=0.
  S13=0.

```

```

      Z(I)=X(I111) !Сохранение предыдущих нормальных давлений
DO 60 J=1,N3
  IF(J.GT.I111) S11=S11+A(I111,J)*X(J)
  IF(J.GT.I112) S12=S12+A(I112,J)*X(J)
    IF(J.GT.I113) S13=S13+A(I113,J)*X(J)
    IF(J.LT.I111) S11=S11+A(I111,J)*X1(J)
  IF(J.LT.I112) S12=S12+A(I112,J)*X1(J)
    IF(J.LT.I113) S13=S13+A(I113,J)*X1(J)
60   CONTINUE

  GAM=- (S11-D1(I20)+U(I))/A(I111,I111)
  ALF=- (S12-D2(I20)+UT(XX(I),TM(I20))-UT(XX(I),TMM)+DD2-
*SS12(I112))/A(I112,I112)
    BET=- (S13-D3(I20)+UT(XY(I),TM(I20))-UT(XY(I),TMM)+DD3-
*SS13(I113))/A(I113,I113)
    S2=GAM
  S2=ABS(GAM)
  X1(I111)=0.5*(GAM+S2)
  Q1=SQRT(ALF**2+BET**2)
  Q2=EM*X(I111)
  X1(I112)=ALF
  X1(I113)=BET
  IF(Q1.GT.Q2)X1(I112)=EM*X(I111)*ALF/Q1
  IF(Q1.GT.Q2)X1(I113)=EM*X(I111)*BET/Q1
40  CONTINUE

  S=0.
    SM=0.
  DO 730 I=1,N3
    S=S+(X1(I)-X(I))**2
    SM=SM+X1(I)**2
    X(I)=X1(I)
730  CONTINUE

  S1=SQRT(S)/SQRT(SM) !Относительная погрешность итераций
  WRITE(6,120)S1
    IF(S1.GE.E1)GO TO 80 !Переход к следующей итерации
    !Поправки смещений для следующего шага нагружения
  DD2=D2(I20)
  DD3=D3(I20)

```

```

TMM=TM(I20)
!Поправки сумм для следующего шага нагружения
DO 776 I=1,N
  I112=3*I-1
    I113=3*I
  SS12(I112)=0.
  SS13(I113)=0.
    V(I112)=0.
    V(I113)=0.
DO 775 J=1,N3
  SS12(I112)=SS12(I112)+A(I112,J)*X(J)
  SS13(I113)=SS13(I113)+A(I113,J)*X(J)
    V(I112)=SS12(I112)+UT(XX(I),TM(I20))-D2(I20)
    V(I113)=SS13(I113)+UT(XY(I),TM(I20))-D3(I20)
775 CONTINUE
776 CONTINUE
  !Вывод на экран пошаговых смещений
  WRITE(6,520)D1(I20)
520  FORMAT(2X,24H NORMAL DISPLACEMENT= ,F12.6)
  WRITE(6,521)D2(I20)
521  FORMAT(2X,24H TANGEN_X DISPLACEMENT=,F12.6)
  WRITE(6,522)D3(I20)
522  FORMAT(2X,24H TANGEN_Y DISPLACEMENT=,F12.6)
  !Расчет и вывод суммарных сил
  SZ=0.
  SX=0.
  SY=0.
DO 300 I=1,N
  I1=3*I-2
  I2=3*I-1
  I3=3*I
  SZ=SZ+X1(I1)*DX*DY
  SX=SX+X1(I2)*DX*DY
300  SY=SY+X1(I3)*DX*DY
open(45, file = 'FORCES.txt')
  write(45, '(I4)')I20
  write(45, '(F12.6)') SZ, SX, SY

```

```

120    FORMAT(2X,19HRIGID DISPLACEMENT=,F12.6)
      WRITE(6,831)SZ
831    FORMAT(2X,8HZFORCE =,G12.5)
      WRITE(6,130)SX
130    FORMAT(2X,8HXFORCE =,G12.5)
      WRITE(6,830)SY
830    FORMAT(2X,8HYFORCE =,G12.5)
      WRITE(6,832)DX
832    FORMAT(2X,8HGRSTEP =,G12.5)
777   CONTINUE
      PAUSE
      !Вывод давлений в узлах
      WRITE(6,14)
14    FORMAT(2X,22HPRESSURE NORM ON AXI Z)
      J17=KX
      DO 23 J=1,J17
      DO 10 I=1,N1
10    P(I)=0.
      DO 11 I=1,N1
      I1=(KX-2+J)*3*N1+3*I-2
11    P(I)=X1(I1)
      open(45, file = 'P1onX.txt')
      write(45, '(I4)')J
      write(45, '(F12.6)')P
      WRITE(6,24)J
24    FORMAT(I4)
      WRITE(6,15)P
15    FORMAT(6F12.6)
23    CONTINUE
      PAUSE
      WRITE(6,140)
140   FORMAT(2X,22HPRESSURE KASX ON AX IX)
      J17=KX
      DO 230 J=1,J17
      DO 100 I=1,N1
100   P(I)=0.
      DO 110 I=1,N1

```

```

        I1=(KX-2+J)*3*N1+3*I-1
110  P(I)=X1(I1)
        open(45, file = 'P2onX.txt')
        write(45, '(I4)')J
        write(45, '(F12.6)')P
        WRITE(6,240)J
240  FORMAT(I4)
        WRITE(6,150)P
150  FORMAT(6F12.6)
230  CONTINUE
        PAUSE
        !=====
        WRITE(6,141)
141  FORMAT(2X,22HPRESSURE KASY ON AX IX)
        J17=KX
        DO 231 J=1,J17
        DO 101 I=1,N1
101  P(I)=0.
        DO 111 I=1,N1
        I1=(KX-2+J)*3*N1+3*I
111  P(I)=X1(I1)
        open(45, file = 'P3onX.txt')
        write(45, '(I4)')J
        write(45, '(F12.6)')P
        WRITE(6,241)J
241  FORMAT(I4)
        WRITE(6,151)P
151  FORMAT(6F12.6)
231  CONTINUE
        PAUSE
        !=====
        WRITE(6,440)
440  FORMAT(2X,22HPRESSURE KASY ON AX IY)
        J17=KY
        DO 430 J=1,J17
        DO 400 I=1,N2
400  P(I)=0.

```



```

DO 410 I=1,N2
    I1=(KY-1+J)*3+3*N1*(I-1)
410  P(I)=X1(I1)
    open(45, file = 'P3onY.txt')
    write(45, '(I4)')J
    write(45, '(F12.6)')P
    WRITE(6,940)J
940  FORMAT(I4)
    WRITE(6,950)P
950  FORMAT(6F12.6)
430  CONTINUE
    PAUSE
    !=====
    WRITE(6,441)
441  FORMAT(2X,22HPRESSURE KASX ON AX IY)
    J17=KY
    DO 431 J=1,J17
    DO 401 I=1,N2
401  P(I)=0.
    DO 411 I=1,N2
    I1=(KY-1+J)*3+3*N1*(I-1)-1
411  P(I)=X1(I1)
    open(45, file = 'P2onY.txt')
    write(45, '(I4)')J
    write(45, '(F12.6)')P
    WRITE(6,941)J
941  FORMAT(I4)
    WRITE(6,951)P
951  FORMAT(6F12.6)
431  CONTINUE
    PAUSE
    !====displacement Vx on x
    WRITE(6,147)
147  FORMAT(2X,22HDISPLACE KASX ON AX IX)
    J17=KX
    DO 237 J=1,J17
    DO 107 I=1,N1

```

```

107   P(I)=0.
      DO 117 I=1,N1
          I1=(KX-2+J)*3*N1+3*I-1
117   P(I)=V(I1)
      open(45, file = 'V2onX.txt')
      write(45, '(I4)')J
      write(45, '(F12.6)')P
      WRITE(6,247)J
247   FORMAT(I4)
      WRITE(6,157)P
157   FORMAT(6F12.6)
237   CONTINUE
      PAUSE
      !====displacement Vy on x
      WRITE(6,148)
148   FORMAT(2X,22HDISPLACE KASY ON AX IX)
      J17=KX
      DO 238 J=1,J17
          DO 108 I=1,N1
108   P(I)=0.
      DO 118 I=1,N1
          I1=(KX-2+J)*3*N1+3*I
118   P(I)=V(I1)
      open(45, file = 'V3onX.txt')
      write(45, '(I4)')J
      write(45, '(F12.6)')P
      WRITE(6,248)J
248   FORMAT(I4)
      WRITE(6,158)P
158   FORMAT(6F12.6)
238   CONTINUE
      PAUSE
      !=====
      !=====
      !Построение зон контакта
      WRITE(6,160)
160   FORMAT(2X,14HCONTACT REGION)

```

```

      XMAX=X(1)
DO 450 I450=2,N3
  IF(X(I450).GT.XMAX)XMAX=X(I450)
450 CONTINUE
      WRITE(6,161)XMAX
161  FORMAT(2X,7HXMAX = ,F12.6)
      DEL1=1./1000.
      DO 170 I=1,N2
DO 190 J=1,N1
  J13=J+(I-1)*N1
  L41=3*J13-2
  L42=3*J13-1
  L43=3*J13
  Q3=ABS(SQRT(X1(L42)**2+X1(L43)**2)-EM*Z(J13))
  Q4=X1(L42)**2+X1(L43)**2+X1(L41)**2
      M(J)=2
  IF(Q3.LT.DEL1)M(J)=1
  IF(Q4.EQ.0.)M(J)=0
190 CONTINUE
  WRITE(6,240)I
  WRITE(6,200)M
200  FORMAT(102I1)
      open(45, file = 'Region.txt')
      write(45, '(102I1)' ) M
170 CONTINUE
RETURN
      END
FUNCTION FD(X,Y) !Функция задающая геометрию тел
      PS=0.
      R=5.
      R1=SQRT(X**2+Y**2)
      IF(R1.GT.R)PS=1000000.
      FD=PS
RETURN
      END
FUNCTION UT(X,T) !Функция задающая термоперемещения
      AA=0.000013 ! коэффициент теплового расширения

```

```
        UT=-AA*X*T
RETURN
END
!FUNCTION FD(X,Y)
!
!       !FD=300.-SQRT(300.**2-X**2-Y**2)
!RETURN
!END
!
```