МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра фундаментальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему «ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ СТИСКУЮЧИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ»

Виконав : студент 2 курсу, групи 8.1119-з

спеціальності 111 математика

(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми математика

(назва освітньої програми)

М. В. Зубко

(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Красікова І.В.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Стєганцева П. Г.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя

2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Освітній рівень магістр

Спеціальність 111 математика
(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
фундаментальної математики,
д.т.н., доцент
______________ Гребенюк С.М.
(підпис)

« 22 » травня 2020 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ

Зубко Миколі Валерійовичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Застосування принципу стискуючих відображень до розв'язання рівнянь та їх систем

керівник роботи Красікова Ірина Володимирівна, к.ф.-м.н.,доцент
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від «22» вересня 2020 р. № 1415-с

2. Строк подання студентом роботи 01.12.2020

3. Вихідні дані до роботи
   1. Перелік питань, які потрібно розглянути.
   2. Задачі для розв'язання.
   3. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
   1. Принцип стискуючих відображень
   2. Розв'язання рівнянь із застосуванням принципу стискуючих відображень
   3. Розв'язання систем рівнянь із застосуванням принципу стискуючих відображень

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
   Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання ______________________________

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	25.09.2020	
2.	Збір вихідних даних.	26.09.2020	
3.	Обробка методичних та теоритичних	01.10.2020	
	джерел.		
4.	Розробка першого і другого розділу.	15.10.2020	
5.	Розробка третього розділу.	07.11.2020	
6.	Попередній захист роботи	27.11.2020	
7.	Оформлення і нормоконтроль		
	кваліфікаційної роботи.	07.12.2020	
8.	Захист кваліфікаційної роботи.	10.12.2020	

Студент ______________ М. В. Зубко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ______________ І. В. Красікова
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено
Нормоконтролер ______________ О. Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра: «Застосування принципу стискуючих відображень до розв'язання рівнянь та їх систем»: 59 с., 25 рис., 13 джерел.

МЕТОД ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ, МЕТРИКА, МЕТРИЧНИЙ ПРОСТІР, РІВНЯННЯ, СИСТЕМА РІВНЯНЬ, СТИСКУЮЧЕ ВІДОБРАЖЕННЯ.

Об'єкт дослідження – принцип стискуючих відображень.

Мета роботи: встановити максимально зручні умови стискання різноманітних класів відображень, які дозволяють обгрунтовати застосування методу послідовних наближень до пошуку наближеного розв'язку.

Метод дослідження: аналітичний.

Кваліфікаційна робота присвячена застосуванню принципу стискуючих відображень до розв'язання алгебраїчних, інтегральних рівнянь та систем лінійних та нелінійних рівнянь. Наближені чисельні обчислення виконувалися за допомогою програми Python версії 3.9.0.

Результати роботи можуть біти застосовані при вивченні курсу функціонального аналізу, лінійної алгебри, диференціальних та інтегральних рівнянь, а також на факультативах з математики у старших класах загальноосвітніх шкіл.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis "Application of the principle of compressive mappings to the solution of equations and their systems": 59 pages, 25 figures, 13 references.

SEQUENTIAL APPROXIMATION METHOD, METRIC, METRIC SPACE, EQUATION, SYSTEM OF EQUATIONS, COMPRESSIVE MAPPING.

The object of research is the principle of compressive mappings.

Purpose: to establish the most convenient conditions for compression of various classes of mappings, which allow to justify the application of the method of successive approximations to the search for an approximate solution.

Research method: analytical.

The qualification work is devoted to the application of the principle of compressive mappings to the solution of algebraic, integral equations and systems of linear and nonlinear equations. Approximate numerical calculations were performed using Python version 3.9.0.

The results of the work can be used in the study of the course of functional analysis, linear algebra, differential and integral equations, as well as in electives in mathematics in senior classes of secondary schools.

ЗМІСТ

ВСТУП

Яку б галузь застосування математики не вибрати, найчастіше для отримання розв'язку деякої задачі потрібно розв'язати рівняння або систему рівнянь. Але інколи це буває досить складною задачею, оскільки навіть питання про існування чи єдиність розвязку є неочевидним. Ряд питань, пов'язаних з існуванням та єдиністю розв'язків різних класів рівнянь (диференціальних рівнянь, інтегральних, систем лінійних алгебраїчних рівнянь, систем нелінійних рівнянь), можна сформулювати як питання про існування нерухомої точки деякого відображення, заданого у деякому метричному просторі. Серед різних критеріїв існування і єдиності нерухомої точки одним із найпростіших і одночасно найважливіших є принцип стискуючих відображень, відомий ще як теорема Банаха про нерухому точку.

Цей принцип вперше був сформульований польським математикм С. Банахом у 1922 році. Ця теорема не лише дає достатню умову існування та єдиності нерухомою точки стискуючого відображення у повному метричному просторі, але й є теоретичною основою методу послідовних наближень (методу ітерацій), який широко застосовується для наближеного розв'язування диференціальних, інтегральних та алгебраїчних рівнянь. Він не лише стверджує факт існування і єдиності нерухомої точки у кожного стискуючого відображення у повному метричному просторі, а й дає конструктивний метод знаходження цієї точки як границі послідовних наближень.

Кваліфікаційна робота присвячена застосуванню цього принципу до розв'язання алгебраїчних, інтегральних рівнянь та систем лінійних та нелінійних рівнянь. В роботі ставилася задача встановити максимально зручні умови стискання різноманітних класів відображень, які дозволяють обгрунтовати застосування методу послідовних наближень до пошуку наближеного розвязку.

1 ПРИНЦИП СТИСКУЮЧИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

1.1 Метричні простори та їх основні властивості

У математиці відстань на множині – це функція, задана на декартовому квадраті множини. Якщо узагальнити це поняття, ми прийдемо до означення метрики.

Означення 1.1 Нехай X – довільна множина. Метрикою на множині X називається дійсна невід'ємна функція $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$, для якої виконуються наступні аксіоми:

а) аксіома тотожності (1.1)

$$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y; \tag{1.1}$$

б) аксіома симетрії (1.2)

$$\forall x, y \in X \; \rho(x, y) = \rho(y, x); \tag{1.2}$$

в) аксіома трикутника (1.3)

$$\forall x, y, z \in X \; \rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y). \tag{1.3}$$

Означення 1.2 Метричним простором називається множина X із заданою на ній метрикою.

Тобто метричним простором виступає пара (X, ρ), оскільки на одній і тій самій множини метрика може задана різними способами. Множина X, на якій задається метрика, може бути довільною, а метрика є функція, яка приймає дійсні невід'ємні значення.

Означення 1.3 Довільна підмножина Y метричного простору X, що розглядається з тією ж метрикою, що і в X, також утворює метричний простір, який називається підпростором простору X.

Приклади метричних просторів:

Простір дійсних чисел $\mathbb{R}$. Метрика на прямій задається формулою

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Арифметичний m-вимірний простір $\mathbb{R}_p^m$, $1 \leq p < \infty$. Елементами цього простору є -вимірні вектори з дійсними координатами:

$$\mathbb{R}_p^m = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \colon \forall i = \overline{1, m}\; x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Метрика задається в залежності від параметра ρ:

$$\text{при } 1 \leq p < \infty\ \rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p},$$
$$\text{при } p = \infty\ \ \rho(x, y) = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - y_i|.$$

Простір $C[a, b]$. Елементами цього простору є неперервні на відрізку $[a, b]$ функції $x(t)$, а метрика задається формулою

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|.$$

Простір $l_p, 1 \leq p < \infty$, елементами якого є числові послідовності $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, які задовольняють умові $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^\rho < \infty$, а метрика задається формулою

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^\rho\right)^{1/\rho}.$$

Існування метрики у метричному просторі дає нам можливість сформулювати дуже важливе поняття збіжності.

Означення 1.4 Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ елементів метричного простору X *збігається* до елемента $x_0 \in X$, якщо $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_0) = 0$, тобто якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0\ \rho(x_n, x_0) < \varepsilon$. При цьому елемент x_0 називається *границею послідовності* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Позначається цей факт таким чином: $\lim_{n} x_n = x_0$. Збіжна послідовність необхідно є обмеженою та має тільки одну границю.

Означення 1.5 Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ точок метричного простору X називається фундаментальною, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Між поняттями фундаментальності та збіжності послідовності існує зв'язок [11].

Твердження 1.1 Будь-яка фундаментальна послідовність є обмеженою.

Твердження 1.2 Будь-яка збіжна послідовність є фундаментальною.

В загальному випадку обернене твердження не є вірним. Але якщо обернене твердження має місце в метричному просторі X, тоді такий простір називається повним.

Означення 1.6 Повний простір – це метричний простір, в якому збігається будь-яка фундаментальна послідовність.

Приклади 1-4, розглянуті вище, є прикладами повних метричних просторів.

Поняття повноти пов'язане ще з однією важливою властивістю множин – замкненістю. Наведемо потрібні означення.

Означення 1.7 Точка $x_0 \in X$ називається точкою дотикання множини M в метричному просторі X, якщо в будь-якому околі цієї точки міститься принаймні один елемент множини M.

Означення збіжності послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ до елемента x_0 означає, що в будь-якому околі елемента x_0 містяться всі члени послідовності, починаючи з деякого номера, тобто точка x_0 є точкою дотикання послідовності. Наступна теорема, встановлює зв'язок між поняттями границі та точки дотикання.

Теорема 1.1 (критерій точки дотикання) Точка x_0 є точкою дотикання множини M тоді та тільки тоді, коли існує послідовність елементів множини M, яка збігається до x_0.

Означення 1.8 Множина точок дотикання множини M називається *замиканням* цієї множини і позначається $\overline{M}$.

Означення 1.9 Множина M називається *замкненою*, якщо вона збігається зі своїм замиканням: $\overline{M} = M$.

Оскільки завжди $\overline{M} \supset M$, множину можна називати замкненою, якщо вона містить всі свої точки дотикання.

Прикладами замкнених множин на числовій прямій будуть точка, відрізок, множина цілих чисел, сама числова пряма.

Наведемо корисний критерій повноти в метричному просторі.

Твердження 1.3 Підмножина повного метричного простору є повним метричним простором тоді та тільки тоді, коли вона замкнена.

Доведення. Нехай (X, ρ) — повний метричний простір та $M \subset X$. Необхідність. Нехай x_0 — точка дотикання множини M, тобто, згідно з критерієм точки дотикання, існує така послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$, яка збігається до x_0 в X. Отже, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є збіжною, а значить, фундаментальною в X (і в M). Оскільки M — повний простір, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається в цьому просторі, а оскільки збіжна послідовність може мати лише одну границю, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$збігається в M саме до x_0, тобто $x_0 \in M$ і множина M є замкненою.

Достатність. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ — довільна фундаментальна послідовність. Оскільки $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ і простір X — повний, ця послідовність збігається за метрикою у просторі X, тобто існує такий $x_0 \in X$, що $\rho(x_n, x_0) \to 0$. Останній факт означає, що точка x_0 є точкою дотикання множини M, а оскільки M є замкненою множиною, то $x_0 \in M$. Отже, у множині M збігається довільна фундаментальна послідовність, значить, M є повним метричним простором.

З цього твердження випливає, наприклад, що на числовій прямій $\mathbb{R}$ повними просторами будуть будь-який відрізок, замкнена півпряма, множина цілих чисел $\mathbb{Z}$. А множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$, інтервал – це приклади неповних метричних просторів.

З поняттям збіжності, в свою чергу, безпосередньо пов’язане поняття неперевності. Зокрема, ми будемо досліджувати неперервні відображення у метричному просторі. Нехай X, Y – довільні метричні простори з відповідними метриками на них, та $f: (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ – відображення.

Означення 1.10 Відображення $f: (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо

$$\forall \ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f): x_n \to x_0 \ \Rightarrow \ f(x_n) \to f(x_0).$$

Відображення, неперервне в кожній точці метричного простору, називається неперервним на цьому просторі.

1.2 Стискуючі відображення та принцип стискуючих відображень

При розв’язанні деяких задач важливим є питання про існування та єдиність розв’язку того чи іншого рівняння. Це питання інколи можна сформулювати як питання існування нерухомої точки деякого відображення. Одним з найпростіших і, одночасно, найважливіших критеріїв існування нерухомої точки є принцип стискуючих відображень, відоми ще як теорема Банаха про нерухому точку.

Означення 1.11 Нехай X – метричний простір. Відображення $\rho: X \to X$ називається стискуючим, якщо

$$\exists \alpha \in (0;1): \forall x, y \in X \qquad \rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y).$$

Доведемо просту, але важливу властивість стискуючих відображень.

Твердження 1.4 Будь-яке стискуюче відображення є неперервним.

Дійсно, якщо довільна послідовність $\{\mathrm{x_n}\}_{\mathrm{n=1}}^{\infty}$ збігається до точки $x_0 \in X$, тобто $\rho(x_n, x_0) \to 0$, тоді з умови стислості $\rho(Ax_n, Ax_0) \le \alpha\rho(x_n, x_0)$ випливає, що $\rho(Ax_n, Ax_0) \to 0$, тобто $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до Ax_0.

Означення 1.12 Точка x називається нерухомою точкою відображення A, якщо $Ax = x$.

Іншими словами, нерухомі точки відображення – це розв'язки рівняння $Ax = x$. Наприклад, нерухомими точками функції $y = x^2$ є числа 0 та 1.

Основну теорему – принцип стискуючих відображень – наведемо з доведенням [11].

Теорема 1.2 Будь-яке стискуюче відображення, визначене у повному метричному просторі, має в цьому просторі єдину нерухому точку.

Доведення. Доведемо існування нерухомої точки. Нехай x_0 – довільна точка у повному метричному просторі X, A – стискуюче відображення у цьому просторі. Побудуємо послідовність за таким правилом: $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1 = A^2x_0, \ldots,$ $x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0, \ldots$. Покажемо, що побудована таким чином послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною (для визначеності вважаємо, що $m \ge n$):

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(Ax_{n-1}, Ax_{m-1}) \le \alpha\rho(x_{n-1}, x_{m-1}) \le \cdots \le \alpha^n\rho(x_0, x_{m-n}) \le$$
$$\le \alpha^n\big(\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \cdots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\big) \le$$
$$\le \alpha^n\big(\rho(x_0, x_1) + \rho(Ax_0, Ax_1) + \cdots + \rho(Ax_{m-n-2}, Ax_{m-n-1})\big) \le$$
$$\le \alpha^n\big(\rho(x_0, x_1) + \alpha\rho(x_0, x_1) + \cdots + \alpha^{m-n-1}\rho(x_0, x_1)\big) \le$$

$$\leq \alpha^n(\rho(x_0,x_1)+\alpha\rho(x_0,x_1)+\cdots+\alpha^{m-n-1}\rho(x_0,x_1)+\cdots)\leq$$
$$\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0,x_1).$$

Оскільки $\alpha \in (0;1)$, величина $\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0,x_1)$ може бути як завгодно малою при достатньо великих номерах n. Отже, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною, тобто збігається у просторі X, оскільки цей простір є повним.

Позначимо границю послідовності: $\bar{x} = \lim\limits_{n} x_n$. Оскільки стискуюче відображення є неперервним,

$$A\bar{x} = A\lim_{n} x_n = \lim_{n} Ax_n = \lim_{n} x_{n+1} = \bar{x}.$$

Це означає, що $\bar{x}$ є нерухомою точкою відображення A.

Єдність нерухомої точки доведемо від супротивного. Припустимо, що нерухомих точок дві, тобто що $A\bar{x}=\bar{x}, A\bar{y}=\bar{y}$. Тоді нерівність в означенні стискуючого відображення приймає вигляд: $\rho(\bar{x},\bar{y}) \leq \alpha\rho(\bar{x},\bar{y})$. Але оскільки $\alpha < 1$, це можливо лише за умови $\rho(\bar{x},\bar{y})=0$, тобто $\bar{x}=\bar{y}$. Наше припущення про існування двох нерухомих точок не є вірним.

Зауважимо, що при доведенні теореми не лише показано, що нерухома точка існує, а й наведено метод, який дозволяє її знайти. Цей метод носить назву методу послідовних наближень та полягає в тому, що будується рекурентна послідовність $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1 = A^2x_0,\ldots,$ $x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0,\ldots,$ де x_0 – довільний елемент простору X. Ця послідовність збігається до нерухомої точки відображення. Отже, вибираючи члени послідовності з досить великими номерами, ми отримуємо наближене значення нерухомої точки з певною похибкою.

Оцінимо похибку наближення x елементами послідовності x_n:

$$\rho(x_n,\bar{x}) = \rho(Ax_{n-1},A\bar{x}) \leq \alpha\rho(x_{n-1},\bar{x}) =$$

$$= \alpha\rho(Ax_{n-2}, A\bar{x}) \le \alpha^2\rho(x_{n-2}, \bar{x}) \le \cdots \le \alpha^n\rho(x_0, \bar{x}). \quad (1.4)$$

З отриманої оцінки випливає, що чим ближче до нерухомої точки буде обрано початкове наближення x_0, тим швидше ми отримаємо наближення x_n з потрібною точністю. Швидкість наближення не більше швидкості збіжності геометричної прогресії. Але навіть якщо вибір початкового наближення буде невдалим, потрібне наближення обов'язково буде знайдено за більшу кількість кроків n.

Зробимо ще одну оцінку. Оскільки

$$\rho(x_1, \bar{x}) = \rho(Ax_0, A\bar{x}) \le \alpha\rho(x_0, \bar{x}),$$

Тоді

$$\rho(x_0, \bar{x}) \le \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, \bar{x}) \le \rho(x_0, x_1) + \alpha\rho(x_0, \bar{x})$$

або

$$\rho(x_0, \bar{x}) \le \frac{\rho(x_0, x_1)}{1 - \alpha}.$$

Підставимо цю нерівність в нерівність (1.4) та отримаємо оцінку похибки відхилення наближеного значення від нерухомої точки:

$$\rho(x_n, \bar{x}) \le \frac{\alpha^n\rho(x_0, x_1)}{1-\alpha}.$$

2 РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ПРИНЦИПУ СТИСКУЮЧИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Принцип стискуючих відображень застосовується для знаходження коренів операторних рівнянь в повних метричних просторах. В роботі ми застосовуємо цей принцип до розв'язання різноманітних рівнянь та їх систем. Цей розділ присвячено розв'язанню рівнянь.

При розв'язанні задач обов'язково потрібно обґрунтувати можливість застосування принципу стискуючих відображень, а вже після цього реалізовувати метод послідовних наближень для знаходження чисельного розв'язку рівняння. Цей метод будемо реалізовувати за допомогою програми Python версії 3.9.0.

2.1 Розв'язання рівнянь вигляду $f(x) = x$

Для застосування принципу стискуючих відображень для розв'язання рівнянь $f(x) = x$ потрібно визначити повний простір, на якому цей принцип застосовується. На числовій прямій це може бути, наприклад, деякий відрізок, замкнена півпряма або навість вся числова пряма. Усі ці множини є замкненими, отже, утворюють повний метричний простір. Потрібно лише переконатися, що функція f здійснює відображення цього простору в себе та є на цьому просторі стискуючим відображенням.

Якщо нескладно побудувати графік функції $y = f(x)$, тоді будують також пряму $y = x$. Якщо ці графіки перетинаються, рівняння $x = f(x)$ має корінь, причому можна приблизно оцінити, де сами на числовій прямій цей корінь розташований, щоб вибрати початкове наближення неподалік нього та пришвидшити процес отримання потрібного наближеного розв'язку.

Якщо графік функції побудувати не дуже просто, можна користуватися наступною властивістю неперервної функції [7].

Теорема 2.1 Нехай функція $\varphi(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ та її значення $\varphi(a), \varphi(b)$ мають різні знаки. Тоді на інтервалі $(a;b)$ є така точка c, значення функції в якій дорівнює нулю.

Якщо застосувати цю теорему до функції $\varphi(x) = x - f(x)$ на $[a;b]$, тоді з того, що $\varphi(a), \varphi(b)$ – числа різних знаків випливає, що на інтервалі $(a;b)$ існує корінь рівняння $\varphi(x) = 0$ або $x = f(x)$.

Застосуємо наведені результати до розв’язання рівнянь. Спочатку розглянемо степеневі рівняння. Для того, щоб застосувати принцип стискуючих відображень, важливо записати рівняння у такому вигляді, який дасть можливість це зробити.

Приклад 2.1 Розв’язати рівняння

$$\frac{1}{a^2 + x^2} = x, a > 1.$$

Розглянемо допоміжну функцію $y = \frac{1}{a^2+x^2}$ та побудуємо графіки функцій $y = \frac{1}{a^2+x^2}$ та $y = x$ (рис. 2.1).

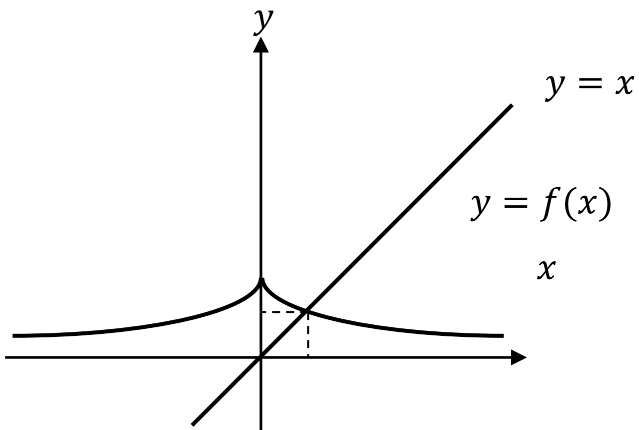


Рисунок 2.1 – Графіки функцій з прикладу 2.1

З рисунка 2.1 видно, що графіки функцій перетинаються у першому квадранті. Розглянемо метричний простір $X = [0, +\infty)$, який є повним як замкнена підмножина числової прямої (повного простору). Покажемо, що функція $y = \frac{1}{a^2+x^2}$ відображає простір $X = [0, +\infty)$ в себе.

Нехай $x \in [0;\ +\infty)$, тобто $x \geq 0$. Тоді $x^2 + a^2 \geq a^2$, $0 < \frac{1}{a^2+x^2} \leq \frac{1}{a^2}$. Отже, $f(x) \in \left(0; \frac{1}{a^2}\right] \subset [0;\ +\infty)$.

Перевіримо умову стискання. Для будь-яких x_1 та x_2 з $X = [0, +\infty)$ маємо

$$\rho\big(f(x_2), f(x_1)\big) = |f(x_2) - f(x_1)| = \left|\frac{1}{a^2 + x_2^2} - \frac{1}{a^2 + x_1^2}\right| =$$
$$= \frac{|x_1^2 - x_2^2|}{(a^2 + x_2^2)(a^2 + x_1^2)} = \frac{|x_1 + x_2|}{(a^2 + x_2^2)(a^2 + x_1^2)}|x_2 - x_1| =$$
$$= \frac{|x_1 + x_2|}{(a^2 + x_2^2)(a^2 + x_1^2)}\rho(x_2, x_1).$$

Оцінимо $\frac{|x_1+x_2|}{(a^2+x_2^2)(a^2+x_1^2)}$. З нерівності між середнім арифметичним та середнім геометричним випливає, що

$$|x| = \frac{1}{a}\sqrt{a^2x^2} \leq \frac{a^2 + x^2}{2a},$$

тому

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \leq \frac{(a^2 + x_1^2) + (a^2 + x_2^2)}{2a} =$$
$$= a + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2a} \leq a + \frac{x_1^2 + x_2^2}{a} + \frac{x_1^2x_2^2}{a^3} = \frac{a^4 + a^2(x_1^2 + x_2^2) + x_1^2x_2^2}{a^3} =$$
$$= \frac{1}{a^3}(a^2 + x_1^2)(a^2 + x_2^2).$$

Тоді

$$\frac{|x_1 + x_2|}{(a^2 + x_2^2)(a^2 + x_1^2)} \le \frac{(a^2 + x_1^2)(a^2 + x_2^2)}{a^3(a^2 + x_2^2)(a^2 + x_1^2)} = \frac{1}{a^3} < 1,$$

$$\rho\big(f(x_2), f(x_1)\big) \le \frac{1}{a^3}\rho(x_2, x_1).$$

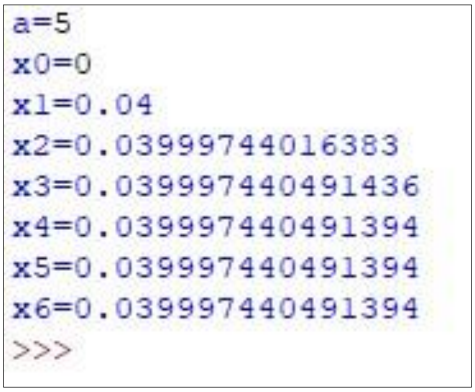
Це означає, що відображення $f(x)$ є стискуючим на $X = [0, +\infty)$, тобто рівняння $\frac{1}{a^2+x^2} = x$ можна розв’язувати методом послідовних наближень, вибираючи в якості початкового наближення $x_0 = 0$.

Напишемо програму для чисельного розв’язання рівняння методом послідовних наближень (див. рис. 2.2). Програма знайшла наближений розв’язок на 4 кроці $x_4 = 0{,}039997440491394$ (див. рис. 2.3).

File Edit Format Run Options Window Help

```
i=int (0)
x=int
a=int (input ("a="))
h=int (input ("x0="))
while i<1000:
    i=i+1
    x=1/((a**2)+(h**2))
    x= float('{:.15f}'.format(x))
    print ("x"+str(i)+"="+str(x))
    if str(x)==str(h):
        break
    g=x
    i=i+1
    x=1/((a**2)+(g**2))
    x= float('{:.15f}'.format(x))
    print ("x"+str(i)+"="+str(x))
    h=x
    if str(x)==str(g):
        break
```

Рисунок 2.2 – Скріншот коду програми для розв’язання прикладу 2.1



```
a=5
x0=0
x1=0.04
x2=0.03999744016383
x3=0.039997440491436
x4=0.039997440491394
x5=0.039997440491394
x6=0.039997440491394
>>>
```

Рисунок 2.3 – Скріншот розв’язання прикладу 2.1

Зауважимо, що задане рівняння можна переписати у вигляді $x^3 + a^2x - 1 = 0$. Тоді приклад 2.1 можна сформулювати у вигляди наступного твердження

Твердження 2.1 Рівняння $x^3 + a^2x - 1 = 0$ має єдиний дійсний корінь, який може буде знайдено як границю послідовності $x_n = f(x_{n-1}) = \frac{d}{a^2+x_{n-1}^2}$ при $n \to \infty$.

Зауважимо, що важливо записати рівняння саме в тому вигляді, який дає можливість застосувати принцип стискуючих відображень. Розглянемо рівняння $x^3 - a^2x - 1 = 0$, $a > 1$ схоже на попереднє. Але подання цього рівняння у вигляді $x = \frac{1}{a^2-x^2}$ приводить до функції, яка визначена не на всій додатній півпрямій. Якщо ж рівняння подати у вигляді $x = \frac{1}{a^2}(x^3 - 1)$, тоді функція $f(x) = (x^3 - 1)/a^2$ не буде стискуючим відображенням, оскільки, наприклад, півпряма $[0; +\infty)$ переходить у $\left[-\frac{1}{a^2}; +\infty\right)$, тобто не в себе. Отже, такий вигляд рівняння нас не задовольнить також.

Запишемо тепер рівняння у вигляді $x = \sqrt[3]{a^2x + 1}$. Покажемо, що функція $f(x) = \sqrt[3]{a^2x + 1}$ здійснює стискуюче відображення півпрямої $[0; +\infty)$. Нехай $x \in [0;\ +\infty)$, тобто $x \geq 0$. Тоді $\sqrt[3]{a^2x + 1} \geq 1$, тобто $f(x) \in [1;\ +\infty) \subset [0;\ +\infty)$.

Нехай тепер $x_1, x_2 \geq 0$, тоді

$$\rho\big(f(x_2), f(x_1)\big) = |f(x_2) - f(x_1)| = \left|\sqrt[3]{a^2x_2 + 1} - \sqrt[3]{a^2x_1 + 1}\right| =$$

$$= \left|\frac{x_2 - x_1}{\sqrt[3]{(a^2x_2 + 1)^2} + \sqrt[3]{(a^2x_1 + 1)(a^2x_2 + 1)} + \sqrt[3]{(a^2x_1 + 1)^2}}\right| =$$

$$= \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt[3]{(a^2x_2 + 1)^2} + \sqrt[3]{(a^2x_1 + 1)(a^2x_2 + 1)} + \sqrt[3]{(a^2x_1 + 1)^2}} \le \frac{\rho(x_2, x_1)}{3}.$$

Отже, функція $f(x) = \sqrt[3]{a^2x + 1}$ є стискуючим відображенням на множині $[0; +\infty)$. Це означає, що рівняння $x = \sqrt[3]{a^2x + 1}$ має на $[0; +\infty)$ єдиний корінь, який можна знайти методом послідовних наближень. Використаємо програму Python для знаходження наближених розв'язків рівняння (рисунок 2.4)

Нижче наведено приклад розв'язання такого рівняння при $a = 1$. За 9 ітерацій отримано наближений корінь $x = 1{,}32472$ з точністю $\rho(x_9, \bar{x}) \le \frac{\frac{1}{3^9}\rho(x_0, x_1)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3^8} = 0{,}00007$ (рисунок 2.5).

```
File  Edit  Format  Run  Options  Window  Help
i=int (0)
x=int
a=int (input ("a="))
h=int (input ("x0="))
while i<100:
    i=i+1
    x=((a**2)*(h)+1)**(1/3)
    x= float('{:.5f}'.format(x))
    print ("x"+str(i)+"="+str(x))
    if str(x)==str(h):
        break
    g=x
    i=i+1
    x=((a**2)*(g)+1)**(1/3)
    x= float('{:.5f}'.format(x))
    print ("x"+str(i)+"="+str(x))
    h=x
    if str(x)==str(g):
        break
```

Рисунок 2.4 – Скріншот коду програми для розв'язання прикладу 2.2

```
a=1
x0=0
x1=1.0
x2=1.25992
x3=1.31229
x4=1.32235
x5=1.32427
x6=1.32463
x7=1.3247
x8=1.32471
x9=1.32472
x10=1.32472
>>>
```

Рисунок 2.5– Скріншот розв’язання прикладу 2.2

Цей результат також наведемо у вигляді твердження.

Твердження 2.2 Рівняння $x^3 - c^2x - 1 = 0$ має єдиний дійсний корінь на $[0; +\infty)$, який може буде знайдено як границю послідовності $x_n = f(x_{n-1}) = \sqrt[3]{a^2x + 1}$ при $n \to \infty$.

Наведені приклади показують, що, по-перше, для розв’язання рівняння його потрібно записати у вигляді, який дозволить застосувати принцип стискуючих відображень, і, по-друге, перевірка умови стискання за означенням не завжди зручна, бо вимагає застосування додаткових нерівностей. Тому розглянемо ще одну умову стискання, яка використовує поняття диференційовності функції.

Нагадаємо, що якщо деяка функція має похідну в точці, говорять, що функція диференційовна в цій точці. Відповідно, якщо функція має похідну у будь-якій точці інтервалу, говорять, що вона диференційовна на інтервалі. Властивості диференційовних функцій докладно вивчаються у курсі математичного аналізу. Наведемо лише одну теорему, яка нам стане в нагоді.

Теорема 2.2 теорема Ланранжа [7] Якщо функція $y = f(x)$ неперервна ні відрізку $[a; b]$ та диференційовна на інтервалі $(a; b)$, тоді існує така точка $\xi \in (a; b)$, що $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

За допомогою цієї теореми легко довести наступну достатню умову стискуючого відображення на відрізку $[a; b]$.

Теорема 2.3 Нехай неперервна на відрізку $[a; b]$ функція $y = f(x)$ відображає цей відрізок в себе. Якщо $f(x)$ диференційовна на $[a; b]$ та $\sup\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)| = \alpha < 1$, тоді f є стискуючим відображенням на $[a; b]$.

Доведення. Нехай x_1, x_2 – довільні точки відрізка $[a, b]$. Тоді з теореми Лагранжа випливає, що між цими точками існує точка ξ, що виконується рівність $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2)$. Оскільки за умовою існує $\sup\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)| = \alpha < 1$, отримаємо оцінку:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)(x_1 - x_2)| \leq \alpha|x_1 - x_2|$$

або

$$\rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) \leq \alpha\rho(x_1, x_2),$$

тобто функція f є стискуючим відображенням.

Якщо в цьому твердженні замість відрізка $[a, b]$ розглядати півпряму $[a\,; +\infty)$ або навіть пряму $(-\infty; +\infty)$, воно залишається вірним. Як правило, перевіряти умову стискання за допомогою похідної простіше, ніж безпосередньо за означенням. Відповідно, виконання умов теореми 2.3 дає можливість знаходити корінь рівняння $x = f(x)$ методом послідовних наближень.

Наведемо геометричний зміст цієї теореми. Оскільки значення похідної в точці дорівнює тангенсу кута між дотичною до кривої $y = f(x)$ та додатним напрямком осі абсцис, зрозуміло, що умова $\sup\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)| = \alpha < 1$ при всіх $x \in (a; b)$ означає, що цей кут є меншим за 45^0.

На рисунках 2.6 та 2.7 зображений хід послідовних наближень у випадку $0 < f'(x) < 1$ і у випадку $-1 < f'(x) < 0$.

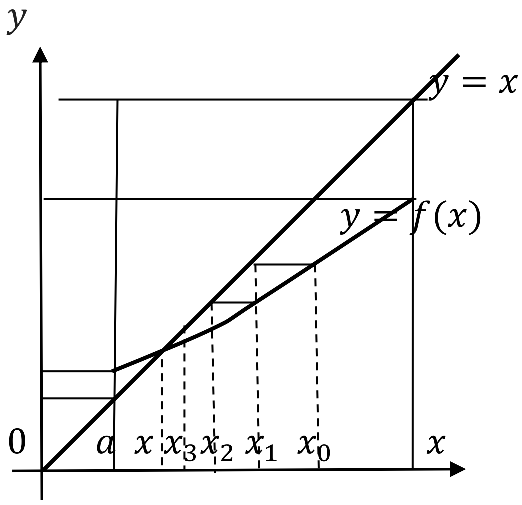


Рисунок 2.6 – Послідовні наближення у випадку зростаючої функції

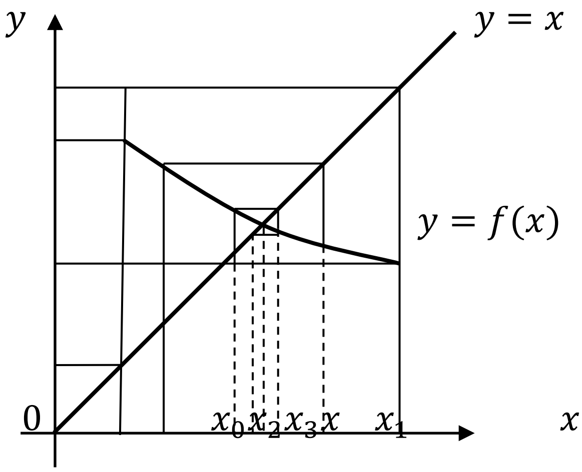


Рисунок 2.7 – Послідовні наближення у випадку спадної функції

Приклад 2.3 Розв'язати рівняння $x^2 = \sin x$.

Зрозуміло, що одним коренем рівняння буде $x = 0$. Але з графічних міркувань випливає, що є ще один корінь при $x > 0$. Знайдемо його.

Перепишемо рівняння у вигляді

$$x = \frac{\sin x}{x}.$$

Розглянемо $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ при додатних x. Утворимо функцію $\varphi(x) = x - \frac{\sin x}{x}$. Оскільки $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 2\sin\frac{1}{2} = -0{,}4589 < 0$, а $\varphi(1) = 1 - \sin 1 = 0{,}1585 > 0$, на $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ існує корінь рівняння $\varphi(x) = 0$ або $x = \frac{\sin x}{x}$.

Покажемо, що $f(x)$ відображає відрізок $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ в себе.

Оскільки $f'(x) = \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2} < 0$ на $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, функція $f(x)$ спадає на цьому відрізку, тобто відрізок $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ переходить у відрізок $\left[f(1); f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = [0{,}8415; 0{,}9589] \subset \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Покажемо, що це відображення є стискуючим:

$$f' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2} =$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})\right) \cdot x}{x^2} -$$

$$- \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2})\right)}{x^2} =$$

$$= \frac{x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2})}{x^2} -$$

$$- \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2})}{x^2} =$$

$$= -\frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n)!} + \frac{x}{3!} - \frac{x^3}{5!} + \ldots - \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n}) =$$

$$= -\frac{1}{3}x + \frac{4}{5!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n 2n}{(2n+1)!}x^{2n-1} + \mathrm{o}(x^{2n});$$

$$|f'(x)| = \frac{1}{3}x - \frac{4}{5!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n 2n}{(2n+1)!}x^{2n-1} + \mathrm{o}(x^{2n}) < \frac{1}{3}.$$

Отже, $|f(x_1)-f(x_2)| \le \frac{1}{3}|x_1-x_2| \;\; \forall x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{2};1\right]$. Це означає, що умова стискання для функції $f(x)$ виконується та рівняння $\frac{\sin x}{x} = x$ має єдиний корінь на $\left[\frac{1}{2};1\right]$. Використовуючи програмний код з рис. 2.8, знайдемо його, вибираючи $x_0 = 1$. З рис. 2.9 видно, що наближений корінь дорівнює $x = 0{,}87673$ та його одержано за 8 ітерацій з точністю

$$\rho(x_8, \bar{x}) \le \frac{\alpha^8 \rho(x_0, x_1)}{1-\alpha} = \frac{\frac{1}{3^8}(1-\sin 1)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1-\sin 1}{2\cdot 3^7} < \frac{1}{2\cdot 3^7} = 0{,}00023.$$

```
File  Edit  Format  Run  Options  Window  Help
import math
i=int (0)
x=int
p=int
h=int (input ("x0="))
while i<1000:
    i=i+1
    x=((math.sin(h))/(h))
    x= float('{:.5f}'.format(x))
    print ("x"+str(i)+"="+str(x))
    if str(x)==str(h):
        break
    g=x
    i=i+1
    x=((math.sin(g))/(g))
    x= float('{:.5f}'.format(x))
    print ("x"+str(i)+"="+str(x))
    h=x
    if str(g)==str(x):
        break
p=1/(2*(3**((i)-2)))
p= float('{:.5f}'.format(p))
print ("точність наближення <= "+str(p))
```

Рисунок 2.8 – Скріншот коду програми для розв’язання прикладу 2.3

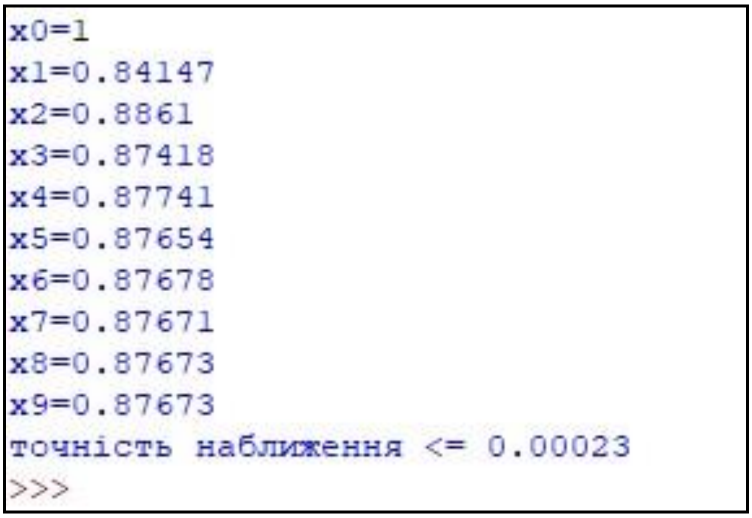


Рисунок 2.9 – Скріншот розв’язання прикладу 2.3

Приклад 2.4 Розв’язати рівняння $e^{-\frac{x}{2}} = x$.

Розглянемо функцію $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$. На $X = [0; +\infty)$ функція f спадає, отже, X переходить у $(0; 1] \subset X$. Оскільки

$$|f'(x)| = \left|-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right| = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, \quad \sup_{x\in[0;+\infty)} |f'(x)| = \frac{1}{2} < 1,$$

тоді f – стискання на X.

Отже, існує єдиний корінь рівняння $e^{-\frac{x}{2}} = x$ на $[0; +\infty)$. Знову застосуємо метод послідовних наближень, обираючи $x_0 = 0$. Отримаємо за 11 ітерацій наближений розв’язок $x = 0{,}70347$ (див. рис. 2.11) з похибкою

$$\rho(x_{11}, \bar{x}) \le \frac{\alpha^{11}\rho(x_0, x_1)}{1-\alpha} = \frac{\frac{1}{2^{11}}e^{-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{0{,}6065}{2^{10}} = 0{,}0006.$$

Код програми який використали для знаходження даного розв’язку зображено на рисунку 2.10.

```
File   Edit   Format   Run   Options   Window   Help
import math
i=int (0)
x=int
h=int (input ("x0="))
while i<50:
    i=i+1
    x=math.exp((h)/(-2))
    x= float('{:.5f}'.format(x))
    print ("x"+str(i)+"="+str(x))
    if str(x)==str(h):
        break
    g=x
    i=i+1
    x=math.exp((g)/(-2))
    x= float('{:.5f}'.format(x))
    print ("x"+str(i)+"="+str(x))
    h=x
    if str(g)==str(x):
        break
p=0.6065/(2**((i)-2))
p= float('{:.4f}'.format(p))
print ("точність наближення <= "+str(p))
```

Рисунок 2.10 – Скріншот коду програми для розв'язання прикладу 2.4

```
x0=0
x1=1.0
x2=0.60653
x3=0.7384
x4=0.69129
x5=0.70776
x6=0.70196
x7=0.704
x8=0.70328
x9=0.70353
x10=0.70345
x11=0.70347
x12=0.70347
точність наближення <= 0.0006
>>>
```

Рисунок 2.11 – Скріншот розв'язання прикладу 2.4

Приклад 2.5 Розв’язати рівняння $\ln^2 x + x - 2 = 0$.

Подамо рівняння у потрібному вигляді: $x = 2 - \ln^2 x$. Уведемо допоміжну функцію $\varphi(x) = x - (2 - \ln^2 x)$. Оскільки

$$\varphi(1) = 1 - (2 - \ln^2 1) = -1 < 0, \varphi(2) = 2 - (2 - \ln^2 2) = \ln^2 2 > 0,$$

на $[1;2]$ існує корінь рівняння $\varphi(x) = 0$ або $x = 2 - \ln^2 x$.

Покажемо, що функція $f(x) = 2 - \ln^2 x$ переводить відрізок $[1,2]$ в себе. Оскільки f спадає на цьому відрізку, відрізок переходить в $[f(2); f(1)] = [2 - \ln^2 2; 2] = [1{,}5195; 2] \subset [1; 2]$.

Перевіримо умову стискання:

$$|f'(x)| = \left|-2\ln x \cdot \frac{1}{x}\right| = \frac{2\ln x}{x}.$$

Для знаходження найбільшого значення похідної на $[1,2]$ знайдемо другу похідну:

$$\left(\frac{2\ln x}{x}\right)' = 2\frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2} > 0.$$

Отже, перша похідна є функцією зростаючою на $[1,2]$, тоді

$$\sup_{x\in[1,2]} |f'(x)| = |f'(2)| = \frac{2\ln 2}{2} = \ln 2 < 1,$$

тобто f – стискуюче відображення та має на $[1,2]$ єдину нерухому точку, яку знайдемо методом послідовних наближень, обираючи $x_0 = 2$. Для цього напишемо програму в середовищі Pyrhon (рис. 2.12).

File Edit Format Run Options Window Help

```
import math
i=int (0)
x=int
p=int
h=int (input ("x0="))
while i<26:
    i=i+1
    x=2-((math.log(h))**2)
    x= float('{:.5f}'.format(x))
    print ("x"+str(i)+"="+str(x))
    if str(x)==str(h):
        break
    g=x
    i=i+1
    x=2-((math.log(g))**2)
    x= float('{:.5f}'.format(x))
    print ("x"+str(i)+"="+str(x))
    h=x
    if str(g)==str(x):
        break
p=((math.log(2))**((i)+1))/(1-(math.log(2)))
p= float('{:.5f}'.format(p))
print ("похибка наближення <= "+str(p))
```

Рисунок 2.12 – Скріншот коду програми для розв’язання прикладу 2.5

```
x0=2
x1=1.51955
x2=1.82493
x3=1.63815
x4=1.75639
x5=1.68274
x6=1.72916
x7=1.7001
x8=1.71837
x9=1.70691
x10=1.71411
x11=1.70959
x12=1.71243
x13=1.71065
x14=1.71177
x15=1.71106
x16=1.71151
x17=1.71123
x18=1.7114
x19=1.7113
x20=1.71136
x21=1.71132
x22=1.71135
x23=1.71133
x24=1.71134
x25=1.71133
x26=1.71134
похибка наближення <= 0.00016
>>>
```

Рисунок 2.13 – Скріншот розв’язання прикладу 2.5

На 25 кроці (рис.2.13) отримуємо наближене значення кореня: $x = 1{,}71133$ з похибкою

$$\rho(x_{25}, \bar{x}) \le \frac{(\ln 2)^{25}\rho(x_0, x_1)}{1 - \ln 2} = \frac{(\ln 2)^{25}|2 - \ln^2 2 - 2|}{1 - \ln 2} = \frac{(\ln 2)^{25} \ln^2 2}{1 - \ln 2} =$$

$$= \frac{(\ln 2)^{27}}{1 - \ln 2} = 0{,}00016.$$

2.2 Розв'язання рівнянь вигляду $F(x) = 0$

Зрозуміло, що не кожне рівняння можна подати у вигляді $f(x) = x$, щоб скористатися результатами п. 2.1. Але принцип стискуючих відображень можна застосовувати й до рівнянь біль загального вигляду. Розглянемо рівняння $F(x) = 0$, де F – неперервна функція.

Якщо $F(a) < 0$ та $F(b) > 0$, тоді зрозуміло, що на відрізку $[a; b]$ це рівняння має корінь. Наведемо умови, за яких це рівняння може бути розв'язане за допомогою принципу стискуючих відображень.

Твердження 2.3 Якщо $F(x)$ диференційовна на $[a; b]$, причому існують такі константи K_1, K_2 , що при всіх $x \in [a; b]$ $0 < K_1 \le F'(x) \le K_2$, $F(a)F(b) < 0$, тоді рівняння $F(x) = 0$ має єдиний розв'язок на $[a; b]$, який можна знайти методом послідовних наближень.

Доведення. Оскільки на кінцях відрізка $[a; b]$ функція набуває різних знаків, на цьому відрізку є точка, в якій $F(x) = 0$. Оскільки похідна функції додатна на $[a; b]$, функція зростає на цьому відрізку, отже, точка, в якій функція дорівнює нулю, єдина. Тобто рівняння $F(x) = 0$ має єдиний корінь на $F(x) = 0$.

Розглянемо допоміжну функцію $f(x) = x - \lambda F(x)$, де λ – деяка додатна ненульова константа. Зрозуміло що рівняння $F(x) = 0$ та $f(x) = x$ – рівносильні, тобто мають однакові корені. Отже, задача знаходження коренів рівняння $F(x) = 0$ зводиться до задачі знаходження нерухомих точок відображення $f(x)$. Якщо показати, що на відрізку $[a; b]$ це відображення є стискуючим, для знаходження єдиного кореня рівняння $f(x) = x$ (а, значить, і $F(x) = 0$) можна застосувати метод послідовних наближень.

Спочатку покажемо, що функція f відображає відрізок $[a; b]$ в себе. Дійсно, $f(a) = a - \lambda F(a), f(b) = b - \lambda F(b)$. Враховуючи, що функція F зростає на $[a; b]$ та приймає на кінцях відрізка значення різних знаків, $F(a) < 0, F(b) > 0$, за вибором $\lambda > 0$, отже $f(a) = a - \lambda F(a) > a, f(b) = b - \lambda F(b) < b$.

Перевіримо тепер умову стискання. Оскільки функція $F(x)$ має похідну на $[a; b]$, причому існують такі константи K_1, K_2 , що $0 < K_1 \le F'(x) \le K_2$ при всіх $x \in [a; b]$, оцінимо похідну функції $f(x)$. Враховуючи, що $f'(x) = 1 - \lambda F'(x)$, отримаємо оцінку: $1 - \lambda K_2 \le f'(x) \le 1 - \lambda K_1$.

Для того, щоб функція f була стискуючим відображенням, достатньо вимагати, щоб існувало таке число K, щоб $|f'(x)| \le K < 1$. Покажемо, що число λ завжди можна підібрати так, щоб ця умова виконувалася:

$$|f'(x)| = |1 - \lambda F'(x)| \le \max\{|1 - \lambda K_2|, |1 - \lambda K_1|\} = K < 1.$$

Оскільки $-1 < 1 - \lambda K_i < 1,\ -2 < -\lambda K_i < 0,\ 0 < \lambda K_i < 2,\ i = 1,2$, для λ отримуємо оцінку $0 < \lambda < \frac{2}{K_i} \le \frac{2}{K_2}$. Отже, при $0 < \lambda < \frac{2}{K_2}$ $|f'(x)| \le K < 1$, тобто відображення f є стискуючим і можна знаходити корінь рівняння методом послідовних наближень.

Зауваження. В умові твердження 2.3 можна вимагати виконання умови $K_1 \le F'(x) \le K_2 < 0$, оскільки замість функції $F(x)$ можна розглядати функцію $-F(x)$.

Приклад 2.6 Розв'язати рівняння $e^x + \sin x - 2 = 0$. Розглянемо функцію $F(x) = e^x + \sin x - 2$. Зрозуміло, що $F(0) = e^0 - 2 = -2 < 0$, а $F(1) = e^1 + \sin 1 - 2 > 0$. Це означає, що на відрізку $[0; 1]$ буде існувати така точка x, в якій $F(x) = 0$, тобто буде існувати корінь рівняння, що розв’язується.

Оскільки $F'(x) = e^x + \cos x$, на $[0; 1]$ маємо оцінку $1 \leq F'(x) = e + 1 \leq 4$. Застосовуючи позначення з доведення твердження, $K_1 = 1, K_2 = 4$, $\lambda < \frac{2}{K_2} = \frac{1}{2}$. Отже, можна вибрати $\lambda = 0{,}2$ та розглядати допоміжну функцію $f(x) = x - 0{,}2(e^x + \sin x - 2)$, яка є стискуючим відображенням на $[0; 1]$. Її єдину нерухому мочку можна знайти методом послідовних наближень, вибираючи в якості першого наближення $x_1 = 0$. Тоді

$$x_n = f(x_{n-1}) = x_{n-1} - 0{,}2(e^{x_{n-1}} + \sin x_{n-1} - 2).$$

Чисельні обчислення проведемо у програмі Python 3.9.0 (рис.2.14):

File Edit Format Run Options Window Help

```
import math
i=int (1)
x=int
h=int (input ("x1="))
while i<26:
    i=i+1
    x=h-0.2*(math.exp(h)+math.sin(h)-2)
    x= float('{:.5f}'.format(x))
    print ("x"+str(i)+"="+str(x))
    if str(x)==str(h):
        break
    g=x
    i=i+1
    x=g-0.2*(math.exp(g)+math.sin(g)-2)
    x= float('{:.5f}'.format(x))
    print ("x"+str(i)+"="+str(x))
    h=x
    if str(g)==str(x):
        break
```

Рисунок 2.14 – Скріншот коду програми для розв’язання прикладу 2.6

```
x1=0
x2=0.2
x3=0.31599
x4=0.37952
x5=0.41311
x6=0.43052
x7=0.43944
x8=0.44399
x9=0.4463
x10=0.44747
x11=0.44806
x12=0.44836
x13=0.44851
x14=0.44859
x15=0.44863
x16=0.44865
x17=0.44866
x18=0.44867
x19=0.44867
>>> |
```

Рисунок 2.15 – Скріншот розв’язання прикладу 2.6

На 18 кроці отримано наближений корінь $x_{18} = 0{,}44867$ (рис.2.15).

Приклад 2.7 Розв’язати рівняння $\ln x = \cos x$.

Перепишемо рівняння у вигляді $-\cos x + \ln x = 0$ та розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = -\cos x + \ln x.$$

Зрозуміло, що

$$F(1) = -\cos 1 + \ln 1 = -\cos 1 < 0,$$
$$F(3) = -\cos 3 + \ln 3 > 0.$$

Це означає, що на відрізку $[1; 3]$ буде існувати така точка x, в якій $F(x) = 0$, тобто буде існувати корінь вихідного рівняння.

Оскільки $F'(x) = \sin x + \frac{1}{1+x}$, на $[1; 3]$ маємо оцінку:

$$\sin 3 \le \sin x \le \sin 1\,, 2 \le 1 + x \le 4, \qquad \frac{1}{4} \le \frac{1}{1+x} \le \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$\sin 3 + \frac{1}{4} \le F'(x) \le \sin 1 + \frac{1}{2} < \frac{3}{2}.$$

Обираючи в якості $k_2 = \frac{3}{2}$, виберемо $0 < \lambda < \frac{2}{k_2} = \frac{2}{1{,}5} = \frac{4}{3}$, наприклад, $\lambda = 1$. Тоді розглянемо допоміжну функцію $f(x) = x - 1 \cdot F(x) = x + \cos x - \ln x$, яка є стискуючим відображенням на $[1; 3]$. Її єдину нерухому мочку можна знайти методом послідовних наближень, вибираючи в якості першого наближення $x_1 = 1$. Тоді впишемо в программу для чисельного розв'язання (рис. 2.16) наступну формулу:

$$x_n = f(x_{n-1}) = x_{n-1} + \cos x_{n-1} - \ln x_{n-1}\,.$$

```
File  Edit  Format  Run  Options  Window  Help
import math
i=int (1)
x=int
h=int (input ("x1="))
while i<35:
    i=i+1
    x=h+math.cos(h)-math.log(h)
    x= float('{:.5f}'.format(x))
    print ("x"+str(i)+"="+str(x))
    if str(x)==str(h):
        break
    g=x
    i=i+1
    x=g+math.cos(g)-math.log(g)
    x= float('{:.5f}'.format(x))
    print ("x"+str(i)+"="+str(x))
    h=x
    if str(g)==str(x):
        break
```

Рисунок 2.16 – Скріншот коду програми для розв’язання прикладу 2.7

```
x1=1
x2=1.5403
x3=1.13881
x4=1.4275
x5=1.21438
x6=1.36906
x7=1.25531
x8=1.33821
x9=1.27737
x10=1.3218
x11=1.28924
x12=1.31304
x13=1.29561
x14=1.30835
x15=1.29903
x16=1.30585
x17=1.30085
x18=1.30451
x19=1.30183
x20=1.30379
x21=1.30236
x22=1.30341
x23=1.30264
x24=1.3032
x25=1.30279
x26=1.30309
x27=1.30287
x28=1.30303
x29=1.30292
x30=1.303
x31=1.30294
x32=1.30298
x33=1.30295
x34=1.30297
x35=1.30296
>>>
```

Рисунок 2.17 – Скріншот розв’язання прикладу 2.7

На 35 кроці отримано наближений розв’язок $x_{35} = 1{,}30296$ (рис. 2.17).

2.3 Застосування принципу стискуючих відображень до розв'язання інтегральних рівнянь

За допомогою принципу стискуючих відображень можна розв'язувати різні типи рівнянь. Покажемо, як цей принцип зпастосовується при розв'язанні лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.

Нагадаємо, що лінійним інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду називається рівняння вигляду

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt + \varphi(x),$$

де K (ядро) і φ – задані функції, f– шукана функція, а λ – довільній параметр.

Будемо розглядати випадок, коли функція $K(x,t)$ неперервна на квадраті $a \le x \le b,\ a \le t \le b$, а функція $\varphi(x)$ неперервна на відрізку $a \le x \le b$. Зауважимо, що з першої теореми Вейєрштрасса випливає, що функція $K(x,t)$ обмежена на квадраті $a \le x \le b$, $a \le t \le b$, тобто існує така додатна константа M, що при всіх $(x,t) \in [a,b] \times [a,b]$ $|K(x,t)| \le M$.

Розглянемо відображення $g = Af$ повного простору $C[a,b]$ в себе, що задається формулою

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dy + \varphi(x).$$

З'ясуємо, за яких умов це відображення буде стискуючим:

$$\rho(g_1, g_2) = \max_{x \in [a,b]} |g_1(x) - g_2(x)| =$$

$$= \max_{x \in [a,b]} \left| \lambda \int_a^b K(x,t) f_1(t) dt - \lambda \int_a^b K(x,t) f_2(t) dt \right| \le$$

$$\leq |\lambda| M(b-a) \max_{x\in[a,b]} |f_1(x) - f_2(x)| = |\lambda| M(b-a) \rho(f_1, f_2).$$

Отже, при $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ відображення A є стискуючим, тобто до знаходження його нерухомої очки можна застосувати принцип стискуючих відображень. Для будь якого λ з $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ рівняння Фредгольма має єдиний неперервний розв'язок. Послідовні наближення до цього розв'язку $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$ мають вигляд

$$f_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) f_{n-1}(t)dt + \varphi(x),$$

де в якості $f_0(x)$ можна взяти будь яку неперервну функцію.

Приклад 2.8 [5] За допомогою принципу стискуючих відображень розв'язати рівняння в просторі $C[0;1]$:

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x-t} \cdot f(t)dt + 1.$$

Розглянемо відображення $Af(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x-t} \cdot f(t)dt + 1$ простору $C[0;1]$ в себе окажемо, що воно є стискуючим.

$$\rho\big(Af_1(x), Af_2(x)\big) = \max_{x\in[0,1]} \left| \frac{e^x}{2}\left(\int_0^1 e^{-t} f_1(t)dt - \int_0^1 e^{-t} f_2(t)dt \right) \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\max_{x\in[0,1]} e^x \left| \int_0^1 e^{-t}(f_1(t) - f_2(t))\,dt \right| \leq \frac{e}{2}\max_{t\in[0,1]} \int_0^1 e^{-t}|f_1(t) - f_2(t)|dt \leq$$

$$= \frac{e}{2}\rho\big(f_1(t), f_2(t)\big) \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 e^{-t}dt = \frac{e}{2}\rho\big(f_1(t), f_2(t)\big) \cdot \frac{e^{-t}}{-1} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{e}{2}\rho\big(f_1(t), f_2(t)\big) \cdot \left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}(e-1)\rho\big(f_1(t), f_2(t)\big).$$

Оскільки $\frac{1}{2}(e-1) < 1$, то розглянуте відображення є стискуючим, отже, інтегральне рівняння має єдиний розв'язок у просторі $C[0;1]$, який можна знайти методом послідовних наближень.

Нехай $f_0(x) \equiv 1$, тоді

$$f_1(x) = \frac{e^x}{2}\int_0^1 e^{-t}\cdot 1dt + 1 = \frac{e^x}{2}\left(\frac{e^{-t}}{-1}\right)\Big|_0^1 + 1 = \frac{e^x(e-1)}{2e} + 1;$$

$$f_2(x) = \frac{e^x}{2}\int_0^1 e^{-t}\left(\frac{e^t(e-1)}{2e} + 1\right)dt + 1 = \frac{e^x}{2}\int_0^1 \left(\frac{e-1}{2e} + e^{-t}\right)dt + 1 =$$

$$= \frac{e^x}{2}\left(\frac{e-1}{2e}t - e^{-t}\right)\Big|_0^1 + 1 = \frac{e^x}{2}\left(\frac{e-1}{2e} - \frac{1}{e} + 1\right) + 1 =$$

$$= \frac{e^x}{2}\left(\frac{e-1}{2e} + \frac{e-1}{e}\right) + 1 = \frac{e^x}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{e-1}{e} + 1 = \frac{e^x}{2}\left(\frac{e-1}{e}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 1;$$

$$f_3(x) = \frac{e^x}{2}\int_0^1 e^{-t}\left(\frac{e^t}{2}\cdot\frac{e-1}{e}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 1\right)dt + 1 =$$

$$= \frac{e^x}{2}\int_0^1 \left(\frac{e-1}{2e}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + e^{-t}\right)dt + 1 = \frac{e^x}{2}\left(\frac{e-1}{2e}\left(1 + \frac{1}{2}\right)t - e^{-t}\right)\Big|_0^1 + 1 =$$

$$= \frac{e^x}{2}\left(\frac{e-1}{2e}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{e} + 1\right) + 1 = \frac{e^x}{2}\left(\frac{e-1}{2e}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{e-1}{e}\right) + 1 =$$

$$= \frac{e^x}{2}\cdot\frac{e-1}{e}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1\right) + 1 = \frac{e^x}{2}\cdot\frac{e-1}{e}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + 1; \ldots$$

$$f_n(x) = \frac{e^x}{2}\left(\frac{e-1}{e}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + 1 = \frac{e^x}{2}\cdot\frac{e-1}{e}\cdot\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} + 1 =$$

$$= e^x \left(\frac{e-1}{e}\right)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + 1.$$

Отже, розв’язком рівняння буде границя отриманої послідовності:

$$f(x) = \lim_n f_n(x) = \lim_n \left(e^x \left(\frac{e-1}{e}\right)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + 1\right) = e^x \frac{e-1}{e} + 1 =$$
$$= e^x \left(1 - \frac{1}{e}\right) + 1 = e^x - e^{x-1} + 1.$$

3 РОЗВ’ЯЗАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ПРИНЦИПУ СТИСКУЮЧИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

При розв’язанні багатьох задач приходиться розв’язувати системи лінійних та нелінійних рівнянь. Цей розділ присвячено тим системам, при розв’язанні яких можна застосовувати принцип стискуючих відображень. Враховуючи практичну значимість таких результатів, будемо розглядати системи за скінченною кількістю рівнянь та невідомих.

3.1 Умови стискання відображення у різних метричних просторах

Означення метрики та метричного простору було наведено у розділі 1. Зупинимося більш докладно на арифметичному m-вимірному просторі $\mathbb{R}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{m}}$, $1 \le p < \infty$. Елементами цього простору є m -вимірні вектори з дійсними координатами: $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Метрика задається в залежності від параметра p:

$$\text{при } 1 \le p < \infty \ \rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p},$$

$$\text{при } p = \infty \ \rho(x, y) = \max_{1 \le i \le m} |x_i - y_i|.$$

Різні форми запису метрики означають, що «відстань» можна задати у різний спосіб.

Якщо деяке відображення f задано на площині XOY, тобто кожній точці площини ставить у відповідність деяку іншу точку цієї ж площини, тоді координати цієї нової точки визначаються за допомогою двох функцій:

$f(\,x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$. Відповідно, у просторі відображення задається за допомогою трьох функцій: $f(\,x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$.

Враховуючи, що простори $\mathbb{R}_p^m$, $1 \le p < \infty$ є повними, в них має місце принцип стискуючих відображень. Але в якості повного простору можна вивирати не весь прості, а деяку його замкнену підмножину. Як і у випадку стискуючих відображень на прямій, нерухома точка наближається послідовністю точок $x_n = f(x_{n-1})$ при довільному виборі початкового наближення x_0.

Розгдянемо відображення скінченновимірного простору в себе, що задається системою m лінійних рівнянь з m невідомими:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m + b_1, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m + b_2, \\ \qquad \ldots, \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_m + b_m. \end{cases}$$

Цю систему можна записати у матричному вигляді $y = \bar{A}x + b$, де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), y = (y_1, y_2, \ldots, y_m), b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$, тобто відображення A визначається матрицею $\bar{A}$ та вектором b. З’ясуємо, за яких умов це відображення буде стискуючим. Враховуючи, що формулу відстані можна вибирати різним чином, умови стискання також будут різними. Розглянемо декілька випадків [11].

Простір $\mathbb{R}_1^m$, метрика в якому задається формулою $\rho(x,y) = \sum_{i=1}^m |x_i - y_i|$. Нехай $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*), x^{**} = (x_1^{**}, x_2^{**}, \ldots, x_m^{**}), y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*), y^{**} = (y_1^{**}, y_2^{**}, \ldots, y_m^{**}), y^* = \bar{A}x^* + b, y^{**} = \bar{A}x^{**} + b$, тоді

$$\rho(y^*, y^{**}) = \sum_{i=1}^m |y_i^* - y_i^{**}| = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^m a_{ij}(x_i^* - x_i^{**}) \right| \le \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{ij}||x_i^* - x_i^{**}| \le$$

$$\le \left(\max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right) \rho(x^*, x^{**}).$$

Отже, достатньою умовою стискання відображення у просторі $\mathbb{R}_1^m$ є

$$\max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| < 1. \qquad (3.1)$$

Ця умова означає, що максимальна сума модулів коефіцієнтів у кожному стовпчику має бути менше за одиницю.

Простір $\mathbb{R}_2^m$, метрика в якому задається формулою $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i - y_i)^2}$. Нехай $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*), x^{**} = (x_1^{**}, x_2^{**}, \dots, x_m^{**}), y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*), y^{**} = (y_1^{**}, y_2^{**}, \dots, y_m^{**}), y^* = \bar{A}x^* + b, y^{**} = \bar{A}x^{**} + b$, тоді

$$\rho(y^*, y^{**}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}((a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \dots + a_{im}x_m^*) + b_i - -(a_{i1}x_1^{**} + a_{i2}x_2^{**} + \dots + a_{im}x_m^{**}) - b_i)^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(a_{i1}(x_1^* - x_1^{**}) + a_{i2}(x_2^* - x_2^{**}) + \dots + a_{im}(x_m^* - x_m^{**})\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}(x_k^* - x_k^{**})\right)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}^2 \cdot \sum_{k=1}^{m}(x_k^* - x_k^{**})^2\right)} =$$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k^* - x_k^{**})^2 \cdot \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k^* - x_k^{**})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}^2} \cdot \rho(x^*, x^{**}).$$

Отже, достатньою умовою стискання відображення у просторі $\mathbb{R}_2^m$ є

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}^2 < 1. \tag{3.2}$$

Ця умова означає, що сума квадратів усіх коефіцієнтів має бути менше за одиницю.

Простір $\mathbb{R}_\infty^m$, метрика в якому задається формулою $\rho(x,y) = \max_{1\le i\le m} |x_i - y_i|$. Нехай знову $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*), x^{**} = (x_1^{**}, x_2^{**}, \dots, x_m^{**}), y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*), y^{**} = (y_1^{**}, y_2^{**}, \dots, y_m^{**}), y^* = \bar{A}x^* + b, y^{**} = \bar{A}x^{**} + b$, тоді

$$\rho(y^*, y^{**}) = \max_{1\le i\le m} |y_i^* - y_i^{**}| = \max_{1\le i\le m} \left| \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x_i^* - x_i^{**}) \right| \le$$

$$\le \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| |x_i^* - x_i^{**}| \le \left(\max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \right) \rho(x^*, x^{**}).$$

Отже, достатньою умовою стискання відображення у просторі $\mathbb{R}_\infty^m$ є

$$\max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| < 1. \tag{3.3}$$

Ця умова означає, що максимальна сума модулів коефіцієнтів у кожному рядку має бути менше за одиницю.

З отриманих результатів можна зробити висновок, що властивість стискання не залежить від вектора $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, а визначається лише матрицею $\bar{A}$. Крім того, можна отримувати різноманітні інші умови стискання відображення, що задається матрицею, в залежності від умови задачі. Це приходиться робити, наприклад, коли жодна з умов (3.1)-(3.3) не виконується.

3.2 Розв'язання систем лінійних рівнянь

Для того, щоб застосувати метод послідовних наближень, потрібно задану систему рівнянь записати у потрібному вигляді $x = \bar{A}x + b$ та шукати нерухому точку відображення $A\colon x \to \bar{A}x + b$. Систему можна переписати у вигляді $0 = \bar{A}x - x + b = (\bar{A} - E)x + b$, де E – одинична матриця, або у вигляді $(E - \bar{A})x = b$.

Якщо відображення буде стискуючим, існує єдина точка $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка є розв'язком системи, причому послідовні наближення до цього розв'язку мають вигляд: $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}\right)$, $x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}\right)$, …, $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\right)$, де

$$x_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_k^{(n-1)} + b_i,$$

а в якості $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$ можна взяти довільну точку з $\mathbb{R}_p^m$.

Приклад 3.1 Розглянемо систему

$$\begin{cases} 0{,}9x_1 - 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 - 0{,}3x_4 + 0{,}1x_5 = -2{,}3, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}8x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}4x_4 + 0{,}2x_5 = 1, \\ 0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}8x_3 - 0{,}1x_4 + 0{,}4x_5 = -3{,}5, \\ 0{,}1x_1 - 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 + x_4 + 0{,}1x_5 = -2{,}5, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 - 0{,}3x_4 + 0{,}8x_5 = 2{,}1. \end{cases}$$

Для цієї системи маємо вектор $b = (-2{,}3; 1; -3{,}5; -2{,}5; 2{,}1)$ та матрицю

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}1 & -0{,}4 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & -0{,}4 \\ -0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}2 & 0 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Умова (3.1) для цієї матриці виконуватися не буде, оскільки сума модулів елементів четвертого стовпчика дорівнює 1,1. Умова (3,3) також не виконується, оскільки сума модулів елементів другого рядка дорівнює 1. Перевіримо виконання умови (3.2):

$$\sum_{i,k=1}^{5} a_{ik}^2 = 11 \cdot 0{,}01 + 9 \cdot 0.04 + 2 \cdot 0{,}09 + 2 \cdot 0{,}16 = 0{,}97 < 1.$$

Це означає, що у просторі $\mathbb{R}_2^5$ відображення буде стискуючим та його нерухому точку (розв'язок заданої системи) можна знаходити методом послідовних наближень. В якості початкового наближення виберемо $x^{(0)} = (1, 1, 1, 1, 1)$ та побудуємо послідовність $x^{(1)} = \bar{A}x^{(0)} - b$, $x^{(2)} = \bar{A}x^{(1)} - b$,…, $x^{(n)} = \bar{A}x^{(n-1)} - b$:

$$x_1^{(n)} = 0{,}1x_1^{(n-1)} + 0{,}1x_2^{(n-1)} - 0{,}2x_3^{(n-1)} + 0{,}3x_4^{(n-1)} - 0{,}1x_5^{(n-1)} - 2{,}3,$$
$$x_2^{(n)} = -0{,}1x_1^{(n-1)} + 0{,}2x_2^{(n-1)} - 0{,}1x_3^{(n-1)} - 0{,}4x_4^{(n-1)} - 0{,}2x_5^{(n-1)} + 1,$$
$$x_3^{(n)} = -0{,}2x_1^{(n-1)} - 0{,}1x_2^{(n-1)} + 0{,}2x_3^{(n-1)} + 0{,}1x_4^{(n-1)} - 0{,}4x_5^{(n-1)} - 3{,}5,$$
$$x_4^{(n)} = -0{,}1x_1^{(n-1)} + 0{,}1x_2^{(n-1)} - 0{,}2x_3^{(n-1)} - 0{,}1x_5^{(n-1)} - 2{,}5,$$
$$x_5^{(n)} = -0{,}1x_1^{(n-1)} - 0{,}2x_2^{(n-1)} - 0{,}2x_3^{(n-1)} + 0{,}3x_4^{(n-1)} + 0{,}2x_5^{(n-1)} + 2{,}1.$$

Наближений розв'язок системи знайдемо за допомогою програми Python (рис. 3.1).

File Edit Format Run Options Window Help

```
n=int (0)
x=int
a1=int (input ("1x0="))
a2=int (input ("2x0="))
a3=int (input ("3x0="))
a4=int (input ("4x0="))
a5=int (input ("5x0="))
print ("x0=("+str(a1)+","+str(a2)+","+str(a3)+","+str(a4)+","+str(a5)+")")
while n<100:
    n=n+1
    x1=0.1*(a1)+0.1*(a2)-0.2*(a3)+0.3*(a4)-0.1*(a5)-2.3
    x2=-0.1*(a1)+0.2*(a2)-0.1*(a3)-0.4*(a4)-0.2*(a5)+1
    x3=-0.2*(a1)-0.1*(a2)+0.2*(a3)+0.1*(a4)-0.4*(a5)-3.5
    x4=-0.1*(a1)+0.1*(a2)-0.2*(a3)-0.1*(a5)-2.5
    x5=-0.1*(a1)-0.2*(a2)-0.2*(a3)+0.3*(a4)+0.2*(a5)+2.1
    x1= float('{:.5f}'.format(x1))
    x2= float('{:.5f}'.format(x2))
    x3= float('{:.5f}'.format(x3))
    x4= float('{:.5f}'.format(x4))
    x5= float('{:.5f}'.format(x5))
```

```
    print ("x"+str(n)+"=("+str(x1)+","+str(x2)+","+str(x3)+","+str(x4)+","+str(x5)+")")
    if str(x1)==str(a1):
     if str(x2)==str(a2):
      if str(x3)==str(a3):
       if str(x4)==str(a4):
        if str(x5)==str(a5):
         break
    g1=x1
    g2=x2
    g3=x3
    g4=x4
    g5=x5
    n=n+1
    x1=0.1*(g1)+0.1*(g2)-0.2*(g3)+0.3*(g4)-0.1*(g5)-2.3
    x2=-0.1*(g1)+0.2*(g2)-0.1*(g3)-0.4*(g4)-0.2*(g5)+1
    x3=-0.2*(g1)-0.1*(g2)+0.2*(g3)+0.1*(g4)-0.4*(g5)-3.5
    x4=-0.1*(g1)+0.1*(g2)-0.2*(g3)-0.1*(g5)-2.5
    x5=-0.1*(g1)-0.2*(g2)-0.2*(g3)+0.3*(g4)+0.2*(g5)+2.1
    x1= float('{:.5f}'.format(x1))
    x2= float('{:.5f}'.format(x2))
    x3= float('{:.5f}'.format(x3))
    x4= float('{:.5f}'.format(x4))
    x5= float('{:.5f}'.format(x5))
    a1=x1
    a2=x2
    a3=x3
    a4=x4
    a5=x5
    print ("x"+str(n)+"=("+str(x1)+","+str(x2)+","+str(x3)+","+str(x4)+","+str(x5)+")")
    if str(g1)==str(a1):
     if str(g2)==str(a2):
      if str(g3)==str(a3):
       if str(g4)==str(a4):
        if str(g5)==str(a5):
         break
```

Рисунок 3.1 – Скріншот коду програми для розв’язання прикладу 3.1

Наближений розв'язок отримали на 22 кроці $x_1^{22} = -1{,}87673$; $x_2^{22} = = 2{,}00765$; $x_3^{22} = -6{,}0276$; $x_4^{22} = -1{,}25337$; $x_5^{22} = 3{,}38331$ (рис. 3.2).

```
x0=(1,1,1,1,1)
x1=(-2.1,0.4,-3.9,-2.8,2.1)
x2=(-2.74,2.38,-5.02,-1.68,2.59)
x3=(-2.095,2.406,-5.398,-1.243,2.916)
x4=(-1.8538,2.1445,-5.6919,-1.2619,3.1182)
x5=(-1.82294,2.06459,-5.85554,-1.27361,3.23993)
x6=(-1.8108,2.04222,-5.93631,-1.26413,3.30639)
x7=(-1.79947,2.02753,-5.97829,-1.25807,3.34194)
x8=(-1.79315,2.01812,-6.0011,-1.25584,3.36107)
x9=(-1.79014,2.01317,-6.01341,-1.25476,3.37137)
x10=(-1.78858,2.01062,-6.01999,-1.25412,3.37691)
```

```
x11=(-1.78772,2.00925,-6.02352,-1.25377,3.37988)
x12=(-1.78726,2.00851,-6.02541,-1.25359,3.38147)
x13=(-1.78702,2.00811,-6.02643,-1.25349,3.38232)
x14=(-1.78688,2.0079,-6.02697,-1.25343,3.38278)
x15=(-1.78681,2.00778,-6.02726,-1.25341,3.38303)
x16=(-1.78678,2.00772,-6.02742,-1.25339,3.38316)
x17=(-1.78675,2.00769,-6.0275,-1.25338,3.38323)
x18=(-1.78674,2.00767,-6.02755,-1.25338,3.38327)
x19=(-1.78674,2.00766,-6.02758,-1.25338,3.38329)
x20=(-1.78673,2.00766,-6.02759,-1.25337,3.3833)
x21=(-1.78673,2.00765,-6.02759,-1.25337,3.38331)
x22=(-1.78673,2.00765,-6.0276,-1.25337,3.38331)
x23=(-1.78673,2.00765,-6.0276,-1.25337,3.38331)
>>>
```

Рисунок 3.2 – Скріншот розв'язання прикладу 3.1

Запропонуємо ще один спосіб розв'язання таких систем. Нехай задано систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2, \\ \qquad \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_m = b_m. \end{cases}$$

Припустимо, що $\alpha_{ii} \neq 0$ та поділимо кожне рівняння системи на α_{ii}:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \cdots + \dfrac{a_{1m}}{a_{11}} x_m = \dfrac{b_1}{a_{11}}, \\ \dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1 + x_2 + \cdots + \dfrac{a_{2m}}{a_{22}} x_m = \dfrac{b_2}{a_{22}}, \\ \qquad\qquad \cdots, \\ \dfrac{a_{m1}}{a_{mm}} x_1 + \dfrac{a_{m2}}{a_{mm}} x_2 + \cdots + x_m = \dfrac{b_m}{a_{mm}}, \end{cases}$$

Уведемо позначення $\frac{b_i}{a_{ii}} = \beta_i$, $-\frac{a_{ik}}{a_{ii}} = \alpha_{ik}$ та перепишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{12} x_2 + \cdots + \alpha_{1m} x_m + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21} x_1 + \cdots + \alpha_{2m} x_m + \beta_2, \\ \qquad \cdots, \\ x_m = \alpha_{m1} x_1 + \cdots + \alpha_{m(m-1)} x_{m-1} + \beta_m, \end{cases}$$

Застосовуючи до цієї системи отримані вище достатні умови, отримаємо нові умови стискання відображення:

у просторі $\mathbb{R}_1^m$ –

$$\max_{1 \le j \le m} \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{m} \left|\alpha_{ij}\right| < 1; \tag{3.4}$$

у просторі $\mathbb{R}_2^m$ –

$$\sum_{\substack{i,k=1 \\ i \ne k}}^{m} \alpha_{ik}^2 < 1; \tag{3.5}$$

у просторі $\mathbb{R}_\infty^m$ –

$$\max_{1\le i\le m}\sum_{\substack{j=1\\ i\ne j}}^{m}\left|\alpha_{ij}\right| < 1. \qquad (3.6)$$

Повертаючись до початкових позначень, отримаємо остаточні достатні умови стискання, записані через недіагональні коефіцієнти:

у просторі $\mathbb{R}_1^m$ –

$$\max_{1\le j\le m}\sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{m}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1; \qquad (3.7)$$

у просторі $\mathbb{R}_2^m$ –

$$\sum_{\substack{i,k=1\\ i\ne k}}^{m}\left(\frac{a_{ik}}{a_{ii}}\right)^2 < 1; \qquad (3.8)$$

у просторі $\mathbb{R}_\infty^m$ –

$$\max_{1\le i\le m}\sum_{\substack{j=1\\ i\ne j}}^{m}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1. \qquad (3.9)$$

Приклад 3.2 Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x = 0{,}2y - 0{,}1z + 0{,}898, \\ y = 0{,}3x + 0{,}15z + 1{,}383, \\ z = 0{,}25x - 0{,}4y + 3{,}677. \end{cases}$$

В цій системі як раз діагональні коефіцієнти дорівнюють 1, тобто достатньо перевірити виконання, наприлад, умови (3.7):

$$\max_{1\le j\le 3}\sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{3}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| = \max_{1\le j\le 3}\sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{3}\left|a_{ij}\right| = \max_{1\le j\le 3}\{0{,}55; 0{,}55; 0{,}25\} = 0{,}55 < 1.$$

Це означає, що можна розв’язувати систему методом послідовних наближень, обираючи, наприклад, $\left(x^{(0)}; y^{(0)}; z^{(0)}\right) = (1, 1, 1)$, $x^{(n)} = 0{,}2y^{(n-1)} - 0{,}1z^{(n-1)} + 0{,}898$; $y^{(n)} = 0{,}3x^{(n-1)} + 0{,}15z^{(n-1)} + 1{,}383$; $z^{(n)} = 0{,}25x^{(n-1)} - 0{,}4y^{(n-1)} + 3{,}677$. Запишемо програмний код для розв’язання данної системи (рис. 3.3). При виконані программа знайшла наближений розв’язок на 12 кроці $x^{12} = 1{,}0208$; $y^{12} = 2{,}15007$; $z^{12} = 3{,}07217$ (рис. 3.4).

```
File  Edit  Format  Run  Options  Window  Help
n=int (0)
x=int
a1=int (input ("1x0="))
a2=int (input ("2x0="))
a3=int (input ("3x0="))
print ("(x0;y0;z0)=("+str(a1)+","+str(a2)+","+str(a3)+")")
while n<100:
    n=n+1
    x1=0.2*(a2)-0.1*(a3)+0.898
    x2=0.3*(a1)+0.15*(a3)+1.383
    x3=0.25*(a1)-0.4*(a2)+3.677
    x1= float('{:.5f}'.format(x1))
    x2= float('{:.5f}'.format(x2))
    x3= float('{:.5f}'.format(x3))
```

```
    print ("(x"+str(n)+";y"+str(n)+";z"+str(n)+")=("+str(x1)+","+str(x2)+","+str(x3)+")")
    if str(x1)==str(a1):
     if str(x2)==str(a2):
      if str(x3)==str(a3):
       break
    g1=x1
    g2=x2
    g3=x3
    n=n+1
    x1=0.2*(g2)-0.1*(g3)+0.898
    x2=0.3*(g1)+0.15*(g3)+1.383
    x3=0.25*(g1)-0.4*(g2)+3.677
    x1= float('{:.5f}'.format(x1))
    x2= float('{:.5f}'.format(x2))
    x3= float('{:.5f}'.format(x3))
    a1=x1
    a2=x2
    a3=x3
    print ("(x"+str(n)+";y"+str(n)+";z"+str(n)+")=("+str(x1)+","+str(x2)+","+str(x3)+")")
    if str(g1)==str(a1):
     if str(g2)==str(a2):
      if str(g3)==str(a3):
        break
```

Рисунок 3.3 – Скріншот коду програми для розв’язання прикладу 3.2

```
1x0=1
2x0=1
3x0=1
(x0;y0;z0)=(1,1,1)
(x1;y1;z1)=(0.998,1.833,3.527)
(x2;y2;z2)=(0.9119,2.21145,3.1933)
(x3;y3;z3)=(1.02096,2.13556,3.02039)
(x4;y4;z4)=(1.02307,2.14235,3.07802)
(x5;y5;z5)=(1.01867,2.15162,3.07583)
(x6;y6;z6)=(1.02074,2.14998,3.07102)
(x7;y7;z7)=(1.02089,2.14987,3.07219)
(x8;y8;z8)=(1.02076,2.1501,3.07227)
(x9;y9;z9)=(1.02079,2.15007,3.07215)
(x10;y10;z10)=(1.0208,2.15006,3.07217)
(x11;y11;z11)=(1.0208,2.15007,3.07218)
(x12;y12;z12)=(1.0208,2.15007,3.07217)
(x13;y13;z13)=(1.0208,2.15007,3.07217)
>>> |
```

Рисунок 3.4 – Скріншот розв’язання прикладу 3.2

Іноді доводиться попередньо перетворювати систему рівнянь, міняючи невідомі на пропорційні їм інші значення, або просто домножуючи усі рівняння системи на одне й те саме число, щоб отримати систему, для якої виконуються умови стискання. Всі отримані вище умови є достатніми умовами, але не є необхідними. Результат наближень не залежить від вибору початкового наближення. Тому, якщо в ході обчислень була помилка, то вона не знецінює наступних обчислень, а лише уповільнює досягнення кінцевого результату.

3.3 Розв’язання систем нелінійних рівнянь

Принцип стискуючих выдображень можна застосовувати також для систем нелінійних рівнянь. На відміну від систем лінійних рівнянь, складно знайти якісь загальні умови стискання, але їх можна знайти у кожній конкретній задачі. Наведемо декілька прикладів.

Приклад 3.3 Розв’язати систему $\begin{cases} x + 0{,}91 = \sqrt{x + 2y}, \\ y - 1 = \sqrt{y + x}. \end{cases}$

Розглянемо відображення площини в себе, що задається за правилом:

$$A:(x,y)\to\left(\sqrt{x+2y}-0{,}49;\sqrt{y+x}+1\right).$$

Покажемо, що це відображення переводить замкнену множину $D=\{(x,y): x\geq 1, y\geq 1\}$ в себе. Дійсно, якщо $x\geq 1, y\geq 1$, тоді $x+2y\geq 3$, $x+y\geq 2$, $\sqrt{x+2y}-0{,}49\geq\sqrt{3}-0{,}49\geq 1$, $\sqrt{x+y}+1\geq\sqrt{2}+1\geq 1$. Отже, задане відображення діє в повному метричному просторі D, який є підпростором $\mathbb{R}_1^2$.

Перевіримо умову стискання в просторі $\mathbb{R}_1^2$:

$$\rho\big(A(x_1,y_1),A(x_2,y_2)\big)=\left|\sqrt{x_1+2y_1}-0{,}49-\sqrt{x_2+2y_2}+0{,}49\right|+$$
$$+\left|\sqrt{x_1+y_1}+1-\sqrt{x_2+y_2}-1\right|=\left|\sqrt{x_1+2y_1}-\sqrt{x_2+2y_2}\right|+$$
$$+\left|\sqrt{x_1+y_1}-\sqrt{x_2+y_2}\right|=\frac{|x_1+2y_1-x_2-2y_2|}{\sqrt{x_1+2y_1}+\sqrt{x_2+2y_2}}+\frac{|x_1+y_1-x_2-y_2|}{\sqrt{x_1+y_1}+\sqrt{x_2+y_2}}\leq$$
$$\leq\frac{|x_1-x_2|+2|y_1-y_2|}{\sqrt{x_1+2y_1}+\sqrt{x_2+2y_2}}+\frac{|x_1-x_2|+|y_1-y_2|}{\sqrt{x_1+y_1}+\sqrt{x_2+y_2}}\leq$$
$$\leq\frac{2(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|)}{\sqrt{x_1+2y_1}+\sqrt{x_2+2y_2}}+\frac{|x_1-x_2|+|y_1-y_2|}{\sqrt{x_1+y_1}+\sqrt{x_2+y_2}}=$$
$$=\rho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)\left(\frac{2}{\sqrt{x_1+2y_1}+\sqrt{x_2+2y_2}}+\frac{1}{\sqrt{x_1+y_1}+\sqrt{x_2+y_2}}\right)\leq$$
$$\leq\rho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\leq 0{,}94\cdot\rho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big).$$

Отже, задане відображення є стискуючим на множині D, тобто має на цьому просторі єдину нерухому точку. Для її визначення виберемо початкове наближення $\left(x^{(0)};y^{(0)}\right)=(1;1)$ побудуємо послідовність наближень $\left(x^{(n)};y^{(n)}\right)=\left(\sqrt{x^{(n-1)}+2y^{(n-1)}}-0{,}49;\sqrt{y^{(n-1)}+x^{(n-1)}}+1\right)$ у програмі Python (рис. 3.5). Отримали наближений розв'язок на 16 кроці $x^{16}=2{,}59489$; $y^{16}=3{,}46084$ (рис. 3.6).

```
File  Edit  Format  Run  Options  Window  Help
n=int (0)
x=int
a1=int (input ("x0="))
a2=int (input ("y0="))
print ("(x0;y0)=("+str(a1)+","+str(a2)+")")
while n<100:
    n=n+1
    x1=((a1)+2*(a2))**(1/2)-0.49
    x2=((a2)+(a1))**(1/2)+1
    x1= float('{:.5f}'.format(x1))
    x2= float('{:.5f}'.format(x2))
    strout1="(x"+str(n)+";y"+str(n)+")=("+str(x1)+","+str(x2)+")"
    print (strout1)
    if str(x1)==str(a1):
     if str(x2)==str(a2):
       break
    g1=x1
    g2=x2
    n=n+1
```

```
    x1=((g1)+2*(g2))**(1/2)-0.49
    x2=((g2)+(g1))**(1/2)+1
    x1= float('{:.5f}'.format(x1))
    x2= float('{:.5f}'.format(x2))
    a1=x1
    a2=x2
    strout2="(x"+str(n)+";y"+str(n)+")=("+str(x1)+","+str(x2)+")"
    print (strout2)
    if str(g1)==str(a1):
     if str(g2)==str(a2):
         break
```

Рисунок 3.5 – Скріншот коду програми для розв’язання прикладу 3.3

```
x0=1
y0=1
(x0;y0)=(1,1)
(x1;y1)=(1.24205,2.41421)
(x2;y2)=(1.97383,2.91213)
(x3;y3)=(2.30251,3.21042)
(x4;y4)=(2.46353,3.34796)
(x5;y5)=(2.53646,3.4107)
(x6;y6)=(2.56906,3.43868)
(x7;y7)=(2.5835,3.45107)
(x8;y8)=(2.58988,3.45654)
(x9;y9)=(2.59269,3.45895)
(x10;y10)=(2.59392,3.46001)
(x11;y11)=(2.59447,3.46047)
(x12;y12)=(2.59471,3.46068)
(x13;y13)=(2.59481,3.46077)
(x14;y14)=(2.59486,3.46081)
(x15;y15)=(2.59488,3.46083)
(x16;y16)=(2.59489,3.46084)
(x17;y17)=(2.59489,3.46084)
>>>
```

Рисунок 3.6 – Скріншот розв’язання прикладу 3.3

Приклад 3.4 Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{5}\ \cos(2x + y) + 0{,}35, \\ y = -\frac{1}{4}\cos(2x - y) - 0{,}23. \end{cases}$$

Розглянемо відображення площини $\mathbb{R}_1^2$ в себе, яке задається правилом:

$$A: (x, y) = \left(-\frac{1}{5}\ \cos(2x + y) + 0{,}35\,; -\frac{1}{4}\cos(2x - y) - 0{,}23\right).$$

Покажемо, що це відображення є стискуючим:

$$\rho\big(A(x_1, y_1), A(x_2, y_2)\big) =$$

$$= \left|-\frac{1}{5}\ \cos(2x_1 + y_1) + 0{,}35 + \frac{1}{5}\ \cos(2x_2 + y_2) - 0{,}35\right| +$$

$$+ \left|-\frac{1}{4}\cos(2x_1 - y_1) - 0{,}23 + \frac{1}{4}\cos(2x_2 - y_2) + 0{,}23\right| =$$

$$= \frac{1}{5}\left|-2\sin\frac{2x_1 + y_1 - 2x_2 - y_2}{2}\sin\frac{2x_1 + y_1 + 2x_2 + y_2}{2}\right| +$$

$$+ \frac{1}{4}\left|-2\sin\frac{2x_1 - y_1 - 2x_2 + y_2}{2}\sin\frac{2x_1 - y_1 + 2x_2 - y_2}{2}\right| \le$$

$$\le \frac{2}{5}\left|\sin\frac{2x_1 + y_1 - 2x_2 - y_2}{2}\right| + \frac{1}{2}\left|\sin\frac{2x_1 - y_1 - 2x_2 + y_2}{2}\right| \le$$

$$\le \frac{2}{5}\left|\frac{2x_1 + y_1 - 2x_2 - y_2}{2}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{2x_1 - y_1 - 2x_2 + y_2}{2}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{5}(2|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) + \frac{1}{4}(2|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \le$$

$$\le \frac{2}{5}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) + \frac{1}{2}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) =$$

$$= 0{,}9 \cdot \rho\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big).$$

Отже, задане відображення є стискуючим на площині, тобто має єдину нерухому точку. Для її визначення виберемо початкове наближення $\left(x^{(0)}; y^{(0)}\right) = (0; 0)$ побудуємо послідовність наближень $\left(x^{(n)}; y^{(n)}\right) = \left(-\frac{1}{5}\cos\left(2x^{(n-1)} + y^{(n-1)}\right) + 0{,}35\,; -\frac{1}{4}\cos\left(2x^{(n-1)} - y^{(n-1)}\right) - 0{,}23\right)$.

Використаємо програму Pyrhon, запишемо формулу до коду (рис. 3.7).

File Edit Format Run Options Window Help

```
import math
n=int (0)
x=int
a1=int (input ("x0="))
a2=int (input ("y0="))
print ("(x0;y0)=("+str(a1)+","+str(a2)+")")
while n<10:
    n=n+1
    x1=(-1/5)*math.cos(2*(a1)+(a2))+0.35
    x2=(-1/4)*math.cos(2*(a1)-(a2))-0.23
    x1= float('{:.5f}'.format(x1))
    x2= float('{:.5f}'.format(x2))
    strout1="(x"+str(n)+";y"+str(n)+")=("+str(x1)+","+str(x2)+")"
    print (strout1)
    if str(x1)==str(a1):
     if str(x2)==str(a2):
       break
    g1=x1
    g2=x2
    n=n+1
    x1=(-1/5)*math.cos(2*(g1)+(g2))+0.35
    x2=(-1/4)*math.cos(2*(g1)-(g2))-0.23
    x1= float('{:.5f}'.format(x1))
    x2= float('{:.5f}'.format(x2))
    a1=x1
    a2=x2
    strout2="(x"+str(n)+";y"+str(n)+")=("+str(x1)+","+str(x2)+")"
    print (strout2)
    if str(g1)==str(a1):
     if str(g2)==str(a2):
        break
```

Рисунок 3.7 – Скріншот коду програми для розв’язання прикладу 3.4

На 10 кроці отримуємо наближені значеня коренів $(x^{10}; y^{10}) = (0{,}15133; -0{,}41787)$ (рис. 3.8).

```
x0=0
y0=0
(x0;y0)=(0,0)
(x1;y1)=(0.15,-0.48)
(x2;y2)=(0.15323,-0.40773)
(x3;y3)=(0.15102,-0.41891)
(x4;y4)=(0.15136,-0.41779)
(x5;y5)=(0.15132,-0.41787)
(x6;y6)=(0.15133,-0.41787)
(x7;y7)=(0.15133,-0.41786)
(x8;y8)=(0.15133,-0.41787)
(x9;y9)=(0.15133,-0.41786)
(x10;y10)=(0.15133,-0.41787)
>>>
```

Рисунок 3.8 – Скріншот розв’язання прикладу 3.4

ВИСНОВКИ

Кваліфікаційна робота присвячена принципу стискуючих відображень та його застосуванню до розв'язання конкретних типів задач. Метод послідовних наближень, який встановлюється цим принципом, застосовується при розв'язанні рівнянь у різних розділах математики, питання, що досліджувались у кваліфікаційній роботі, досить актуальні.

Перший розділ роботи присвячено основним поняттям з теорії метричних та просторів, відображень на цих просторах та самому принципу стискуючих відображень. Сам принцип наведено з доведенням, оскільки у доведенні міститься обґрунтування методу послідовних наближень нерухомої точки відображення. Отримані деякі оцінки точності наближень.

У другому розділі мова йде про застосування принципу стискуючих відображень до розв'язання рівнянь, зокрема, наведено приклади розв'язання деяких класів рівнянь. Особлива увага приділялася обґрунтуванню можливості застосування принципу. Наближені чисельні обчислення виконувалися за допомогою програми Python версії 3.9.0. Окремо було розглянуто застосування принципу до розв'язання деяких типів інтегральних рівнянь.

Третій розділ присвячено розв'язанню систем рівнянь – лінійних та нелінійних. Якщо питання про розв'язання систем лінійних рівнянь можна вважати більш простим (враховуючи існування великої кількості методів їх розв'язання), розв'язання нелінійних систем є більш цікавою задачею. В роботі розглядалися системи нелінійних рівнянь лише з двома змінними.

Результаті роботи можуть біти застосовані при вивченні курсу функціонального аналізу, лінійної алгебри, диференціальних та інтегральних рівнянь, а також на факультативах з математики у старших класах загальноосвітніх шкіл.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функціональний аналіз. Київ : Вища школа, 1990. 600 с.

2. Красікова І.В. Функціональний аналіз: навчальний посібник для студентів освітнього рівня «бакалавр» напрямів підготовки «Прикладна математика», «Математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2015. 104 с.

3. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2 ч.: навч. пос. для студ. ВПНЗ / Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Лященко М.Я. [та ін.]. Київ : Вища шк., 2003. Ч.2. 470 с.

4. Виленкин Н. Я. Метод последовательных приближений / Н.Я. Виленкин. Москва : Наука, 1968. 108 с.

5. Городецкий В. В., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П. Методы решения задач по функциональному анализу. Киев : Вища школа, 1990. 479с.

6. Данилов В. И. Лекции о неподвижных точках. Москва : Российская экономическая школа, 2006. 32 с.

7. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Москва : Наука, 1979. 720 с.

8. Кадец В. М. Курс функционального анализа: Учебное пособие для студентов мех. -мат. фак.-та. Харьков : ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. 607 с.

9. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. Москва : Наука, 1984. 752 с.

10. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. Москва : Мир, 1969. 447 с.

11. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализ. Москва : Наука, 1989. 624 с.

12. Шашкин Ю. А. Неподвижные точки. Москва : Наука, 1989. 80 с.

13. Шрейдер Ю. А. Что такое расстояние? Москва : Физматгиз, 1963. 76 с.