

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА
на тему: «**КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ОБЛАСТЕЙ,
ЯКІ ОБМЕЖЕНІ ДЕКІЛЬКОМА КОЛАМИ**»

Виконав: студент 2 курсу, групи 8.1119-з
спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми математика
(назва освітньої програми)
Г. А. Єсаян
(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної
математики, доцент, к.т.н. Тітова О. О.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент завідувач кафедри програмної інженерії,
доцент, к.ф.-м.н. Лісняк А. О
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя
2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика
(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної математики,
д.т.н., доцент
Гребенюк С.М.
(підпис)

« 25 » 05 2020 р.

З А В Д А Н Н Я
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ

Єсаяну Геворгу Артуровичу
(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи «Конформні відображення областей, які обмежені декількома колами»

керівник роботи Тітова Ольга Олександрівна, к.т.н., доцент
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 20 » 05 2020 року № 577-с

2. Строк подання студентом роботи 25.11.2020

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік питань до розробки.
3. Основна література.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Огляд літератури стосовно конформних відображень.
2. Конформні відображення, побудовані за допомогою функцій однієї змінної.
3. Многозв'язні області.
4. Побудова конформних відображень областей, які обмежені декількома колами.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
Зображення побудованих конформних відображень

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	04.09.2020	
2.	Збір вихідних даних.	11.09.2020	
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	18.09.2020	
4.	Розробка першого та другого розділу.	02.10.2020	
5.	Розробка третього та четвертого розділу.	23.10.2020	
6.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	27.11.2020	
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	10.12.2020	

Студент _____
(підпис)

Г. А. Єсаян _____
(ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____
(підпис)

О. О. Тітова _____
(ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____
(підпис)

О. Г. Спиця _____
(ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Конформні відображення областей, які обмежені декількома колами»: 51 с., 17 рис., 12 джерел.

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА, КОНФОРМНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ, МНОГОЗВ'ЯЗНА ОБЛАСТЬ, ФУНКЦІЯ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ, КОЛО, КРУГ, КІЛЬЦЕ.

Об'єкт дослідження – конформні відображення областей, обмежених колами.

Предмет дослідження – основні методи побудови конформних відображень однозв'язних та многозв'язних областей, особливості побудови таких відображень.

Мета роботи: побудувати конформні відображення областей, обмежених колами за допомогою елементарних функцій.

Метод дослідження: аналітичний.

У кваліфікаційній роботі розглянуто деякі розділи теорії конформних відображень, зокрема, теорія аналітичних функцій, наведено основні властивості лінійних, дробово-лінійних та інших елементарних функцій. Досліджено відображення, які побудовано за допомогою цих функцій. Особливу увагу приділено теорії многозв'язних областей, побудовано і досліджено відображення областей, обмежених декількома колами. Наведено приклади застосування таких відображень.

SUMMARY

Master`s Qualification Thesis «Conformal Mappings of Domains Bounded by Several Circles»: 51 pages, 17 figures, 12 references.

FUNCTION OF COMPLEX VARIABLE, CONFORMAL MAPPINGS, MULTICONNECTED DOMAINS, COMPLEX NUMBERS, CIRCULAR CURVE, CIRCLE, RING.

The object of the study is the conformal mapping of the domains bounded by several circles.

The subject of the study is the basic methods of constructing conformal mappings of one and multiconnected domains, the peculiarities of constructing such mappings.

The aim of the study is construct conformal mapping of some domains bounded by several circles with the help of elementary functions.

The method of research is analytical.

In the Master`s Qualification Thesis some sections of the theory of conformal mappings are considered, in particular, the theory of analytic functions, the main properties of linear, fractional-linear and other elementary functions are given. The mapping that was constructed using these functions is investigated. Particular attention is paid to the theory of multiconnected domains, the mappings of domains bounded by several circles are constructed and investigated. Examples of the use of such mappings are given.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	2
Реферат.....	4
Summary.....	5
Вступ.....	7
1 Огляд літератури стосовно конформних відображень.....	9
2 Конформні відображення, однозв'язних областей.....	11
2.1 Поняття і властивості конформного відображення.....	11
2.2 Лінійна функція.....	15
2.3 Симетрія та інверсія	16
2.4 Дробово-лінійне відображення.....	18
2.5 Відображення за допомогою функції $w = Ln z$	22
2.6. Функція Жуковського.....	23
3 Многозв'язні області.....	27
4 Побудова конформних відображень областей, обмежених декількома колами	34
4.1 Конформні відображення кільця.....	34
4.2 Конформне відображення круга з виколотою точкою.....	41
4.3 Відображення більш складних областей.....	42
4.4 Застосування конформних відображень многозв'язних областей.....	46
Висновки.....	49
Перелік посилань.....	50

ВСТУП

При моделюванні багатьох природничих процесів досить часто ми маємо справу зі складними областями, які є перетинами тих чи інших конструкцій. Проводити дослідження на таких областях складно, оскільки їх границя є перетином непростих кривих, тому математики, намагаючись спростити задачу, будують відображення цих складних областей на більш прості, які обмежені, наприклад, колами та прямими, на яких дослідження виявляється більш простим. Такі відображення мають певні властивості.

Наприклад, однією з основних властивостей таких найпростіших геометричних перетворень, як перетворення подібності, паралельне перенесення, осьова та центральна симетрії, обертання та гомотетія, є збереження форми тіл та фігур і, як наслідок, - збереження кутів між гладкими кривими. Подібною властивістю володіють також багато інших перетворень, але з різницею в тому, що властивість збереження форми застосовується не до всього тіла або фігури, а лише до невеликих їхніх частин. Вважається, що при цих перетвореннях площини виконується властивість збереження кутів між кривими. Ці перетворення утворюють клас так званих конформних відображень [3, 6, 11].

Конформні відображення часто зустрічаються в математичній фізиці і в технічних розрахунках плоских гармонічних векторних полів різної фізичної природи (наприклад, при обробці металів тиском, в задачах обтікання різних об'єктів, в теорії хвиль) [3].

При дослідженні тих чи інших фізичних процесів іноді виявляється недостатнім використання конформних відображень простих однозв'язних областей, тому дану роботу присвячено побудові також конформних відображень деяких складних многозв'язних областей, обмежених декількома колами.

Побудова конформних відображень довільних областей займає певне місце в комплексному аналізі. Результати, отримані при побудові конформних відображень, і наведені в даній роботі, можна застосувати в багатьох прикладних дослідженнях в математиці, фізиці, технічних розрахунках. Тому, проведені в кваліфікаційній роботі розрахунки є важливими як із практичної, так і з теоретичної точки зору. Ці факти, очевидно, підтверджують актуальність обраної теми магістерської роботи.

Основною метою та завданнями проведеного дослідження було вивчити та застосувати теорію конформних відображень, побудувати конформні відображення однозв'язних та многозв'язних областей, які обмежені декількома колами.

Робота складається з чотирьох розділів. У першому розділі роботи розглянуто та проаналізовано основну літературу стосовно теорії конформних відображень.

У другому розділі роботи розглянуто основні означення та принципи теорії конформних відображень, наведено основні теоретичні відомості стосовно теорії конформних відображень, побудовано відображення однозв'язних областей, обмежених колами.

Третій розділ роботи присвячено основним поняттям, означенням та властивостям многозв'язних областей. Наведено основні многозв'язні області на комплексній площині, основну увагу приділено скінченнозв'язним областям, які обмежені колами.

У четвертому розділі наведено приклади побудови конформних відображень многозв'язних областей, обмежених декількома колами за допомогою розглянутих аналітичних методів та елементарних функцій.

1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ СТОСОВНО КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Застосування методів теорії функцій комплексної змінної в багатьох випадках спрощує розв'язання математичних задач, тому теорії цих функцій присвячено велику кількість досліджень математиків. Відомі класичні підручники, монографії та інші наукові роботи [1, 2, 7-12].

Метод конформних відображень являє собою один із методів теорії функцій комплексної змінної. Цей метод не є новим. Термін конформне відображення з'явився вперше в роботі Ф.І. Шуберта, яку було присвячено картографії (1788-1789р.). Також окремо від нього цей термін ввів Гаус (1843р.) [2]. Лагранж побудував теорію конформних відображень поверхонь обертання на площину (1779р.), але лише згодом Гаус оприлюднив загальну теорію конформних відображень, спираючись на теорію функцій комплексної змінної (1822р.) [8].

Значну роль в історії конформних відображень відіграв Ріман: він за допомогою методів фізики довів теорему про те, що всі однозв'язні області розширеної комплексної площини з непустими границями конформно еквівалентні, тобто кожна із областей такого типу може бути взаємно однозначно та конформно відображена на будь-яку область такого ж типу (1851р.). Математичне доведення і обґрунтування теореми Рімана дали в 1900 р. Д. Гільберт, А. Пункаре, К. Каратеодорі. Значна роль Рімана в розробці методів конформних відображень, привернув загальну увагу до методів теорії функцій комплексної змінної його геометричний підхід, а також побудова ріманових поверхонь [10].

Теорія конформних відображень достатньо активно розвивалась в 20 столітті. Зокрема, Лаврентьев М.А. в 1928-1935 р. дослідив топологічні властивості конформних відображень і виділив клас відображень, які є топологічно еквівалентними до конформних. Він дослідив і обґрунтував варіаційні методи теорії конформних відображень. В 1938р. за допомогою цих

варіаційних методів Лаврентьев М.А. отримав суттєві результати з теорії хвиль [9].

Відомий математик Келдиш М.В. в 1939 р. в статті «Конформные отображения многосвязных областей на канонические области» дав важливий матеріал з актуальних питань того часу в теорії функцій комплексної змінної [5]. Тому певні дослідження складних процесів можна проводити на достатньо простих областях, що привертає увагу вчених і в наш час. Зокрема, можна розглядати області, обмежені колами та прямими, якщо знати, як на них перетворити інші області.

Євграфов М.А. у своїх дослідженнях аналітичних функцій показав, що будь-яку функцію комплексної змінної можна розглядати як відображення однієї комплексної площини в іншу [2]. Тому дослідження і використання аналітичних функцій є важливою задачею.

Так вже понад два століття продовжується розвиток й використання методу конформних відображень, що доводить актуальність даного методу, зацікавленість ним при розв'язанні задач.

Метою даної роботи є вивчення та дослідження методу конформних відображень для перетворення як однозв'язних, так і многузв'язних областей, які обмежені декількома колами.

2 КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ОДНОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЕЙ

2.1 Поняття і властивості конформного відображення

Нагадаємо деякі означення, теореми та методи теорії функцій комплексної змінної, які будуть використані у побудові відображень.

Нехай задано неперервне та взаємно-однозначне відображення області D комплексної площини змінної z на деяку область D^* комплексної площини змінної w у вигляді [9, 11]:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (2.1)$$

Будемо вважати, що функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ диференційовані в області D . Зафіксуємо довільну точку $z_0 = x_0 + iy_0$ із D та в околі цієї точки замінимо прирости функцій u та v на диференціали цих функцій. За означенням диференціалу приріст можна записати у вигляді

$$\begin{cases} u - u_0 = \frac{du}{dx}\Big|_{z_0} \cdot (x - x_0) + \frac{du}{dy}\Big|_{z_0} \cdot (y - y_0) + \eta_1 \Delta r, \\ v - v_0 = \frac{dv}{dx}\Big|_{z_0} \cdot (x - x_0) + \frac{dv}{dy}\Big|_{z_0} \cdot (y - y_0) + \eta_2 \Delta r, \end{cases} \quad (2.2)$$

де похідні обчислюємо в точці z_0 , $\Delta r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, а величини η_1 і η_2 прямують до нуля при $\Delta r \rightarrow 0$.

Заміна приростів диференціалами зводиться до знехтування у співвідношеннях (2.2) доданками $\eta_1 \Delta r$ та $\eta_2 \Delta r$, які є малими більш високого порядку малості, ніж інші доданки цих формул (також, передбачається, що вирази $(\frac{du}{dx}\Big|_{z_0})^2 + (\frac{du}{dy}\Big|_{z_0})^2$ та $(\frac{dv}{dx}\Big|_{z_0})^2 + (\frac{dv}{dy}\Big|_{z_0})^2$ відмінні від нуля).

Геометрично можна вважати [11], що ця заміна рівносильна заміні відображення (2.2) наступним відображенням:

$$\begin{cases} u - u_0 = \frac{du}{dx}\Big|_{z_0} \cdot (x - x_0) + \frac{du}{dy}\Big|_{z_0} \cdot (y - y_0), \\ v - v_0 = \frac{dv}{dx}\Big|_{z_0} \cdot (x - x_0) + \frac{dv}{dy}\Big|_{z_0} \cdot (y - y_0), \end{cases} \quad (2.3)$$

яке називають лінійною частиною відображення (2.1).

Відображення (2.3) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} u = ax + by + l, \\ v = cx + dy + m, \end{cases} \quad (2.4)$$

де коефіцієнти

$$\begin{aligned} a &= \frac{du}{dx}\Big|_{z_0}, \quad b = \frac{du}{dy}\Big|_{z_0}, \quad c = \frac{dv}{dx}\Big|_{z_0}, \quad d = \frac{dv}{dy}\Big|_{z_0}, \\ l &= u_0 - \frac{du}{dx}\Big|_{z_0} \cdot x_0 - \frac{du}{dy}\Big|_{z_0} \cdot y_0, \quad m = v_0 - \frac{dv}{dx}\Big|_{z_0} \cdot x_0 - \frac{dv}{dy}\Big|_{z_0} \cdot y_0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

не залежать від x та y . Це відображення є лінійним перетворенням площини (x, y) . Будемо використовувати наступні означення стосовно перетворень [9].

Означення 2.1 Лінійні перетворення, які володіють властивістю збереження подібності фігур називають ортогональними. Умови $bd + ac = 0$, $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ є умовами ортогональності для перетворення (2.4).

Означення 2.2 Умови $a = d$, $b = -c$ виділяють ортогональні перетворення, що зберігають орієнтацію, а умови $a = -d$, $b = c$ – ортогональні перетворення, що її змінюють.

Із означення випливають дві основні властивості конформних відображень:

а) конформне відображення відображає нескінченно малі кола в кола з точністю до нескінченно малих величин вищих порядків (кругова властивість);

б) конформне відображення не змінює кути між кривими в точках їх перетину (властивість збереження кутів).

Перша властивість означає, що при малих радіусах коло $|z - z_0| = r$ переходить в таку криву, що відстань будь якої її точки від кола $|w - w_0| = \rho$ при розглянутому відображенні є нескінченно малою величиною відносно r . Друга властивість означає, що кут в точці z_0 між будь-якими кривими γ_1 та γ_2 дорівнює куту в точці w_0 між образами цих кривих Γ_1 та Γ_2 . Під кутом між кривими розуміють кут між їх дотичними (рис. 2.1).

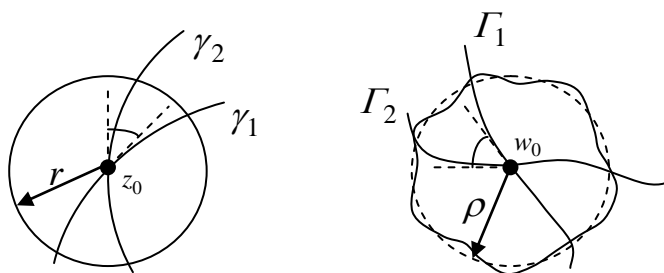


Рисунок 2.1 – Кути між кривими при перетворенні

Ми можемо записати умови конформності відображення (2.1) у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.6)$$

де

$$\Delta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{z_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{z_0} \right)^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0. \quad (2.7)$$

Зауважимо, що умови конформності співпадають з умовами Коші-Рімана, а нерівність (2.7) показує, що похідна повинна не дорівнювати нулю скрізь. Перетворимо похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \sqrt{\Delta} \cos \alpha, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \sqrt{\Delta} \sin \alpha, \quad (2.8)$$

звідки маємо геометричну інтерпретацію для похідної функції комплексної змінної:

$$|f'(z_0)| = \sqrt{\Delta}, \quad \arg f'(z_0) = \alpha. \quad (2.9)$$

Таким чином, модуль і аргумент похідної $f'(z)$ будуть відповідно коефіцієнтом розтягнення і кутом повороту головної лінійної частини відображення $w = f(z)$ в точці z_0 . При $|f'(z_0)| > 1$ має місце розтягнення, а при $|f'(z_0)| < 1$ слід розглядати стискання.

Отже, згідно з [7], можна сформулювати наступний висновок: для того, щоб функція (2.1) реалізовувала деяке конформне відображення області D , необхідно і достатньо, щоб в цій області вона була однолистою, аналітичною, та щоб у неї скрізь в області D існувала похідна $f'(z) \neq 0$.

Наведемо далі основні властивості конформних відображень. Розглянемо локальні властивості конформного відображення $w = f(z)$ в околі скінченної точки z_0 , в якій функція $f(z)$ регулярна, тобто наступні властивості:

Властивість 2.1 (Постійність розтягнень). Лінійне розтягнення в точці z_0 однакове для всіх кривих, які проходять через цю точку, та дорівнює $|f'(z_0)|$.

Властивість 2.2 (Збереження кутів). Всі криві в точці z_0 обертаються на однаковий кут, який дорівнює $\arg f'(z_0)$.

Властивість 2.3 (Обернене відображення). Обернене до конформного відображення, також є конформним.

Властивість 2.4 Суперпозиція двох конформних відображень також є конформним відображенням.

Введемо далі поняття кута між кривими і в нескінченно віддаленій точці.

Означення 2.4 Кутом між кривими γ_1 та γ_2 , які проходять через точку $z = \infty$, називають кут між образами цих кривих при відображенні $w = \frac{1}{z}$ в точці $w = 0$ [8]. Це відображення $w = \frac{1}{z}$ більш детально роздивимось далі.

Має місце також наступна властивість.

Властивість 2.5 При конформному відображенні області D розширеної комплексної площини зберігаються кути між кривими в кожній точці цієї області.

Далі наведемо основну теорему для конформних відображень однозв'язних областей [3]. Вона допоможе нам будувати відображення.

Теорема 2.1 (Теорема Рімана). Нехай D – однозв'язна область розширеної комплексної площини, границя якої складається більш ніж з однієї точки. Тоді виконується таке:

а) існує функція $w = f(z)$, яка конформно відображає область D на коло $|w| < 1$;

б) ця функція єдина, якщо виконано умову

$$f(z_0) = w_0, \arg f'(z_0) = a. \quad (2.10)$$

Тут z_0 , w_0 – задані точки ($z_0 \in D$, $|w| < 1$), a – задане дійсне число.

Далі наведемо основні властивості деяких елементарних функцій, які будуть використані при побудові конкретних конформних відображень.

2.2 Лінійна функція

Розглянемо найпростішу функцію, яка задає конформне відображення точок комплексної площини на іншу комплексну площину. Лінійну функцію визначають у вигляді: $w = az + b$, де a і b – деякі комплексні числа ($a \neq 0$)

[11]. Ця функція здійснює конформне відображення всієї площини z на всю площину w , оскільки при будь-якому z маємо її похідну $w' = a \neq 0$.

Наведемо деякі частинні випадки цієї функції.

Функція $w = z + b$ здійснює відоме з шкільної математики перетворення паралельного переносу.

Функція $w = e^{i\alpha}z$, де $\alpha \in R$, здійснює перетворення повороту на кут α навколо початку координат.

Функція $w = rz$ задає перетворення подібності з коефіцієнтом $|r|$ з центром подібності в початку координат.

Таким чином маємо, що загальний випадок лінійного відображення $w = az + b$, де $a = re^{i\alpha}$, буде послідовним застосуванням таких перетворень:

- а) повороту відносно початку координат на кут α ;
- б) перетворення подібності з центром подібності на початку координат і коефіцієнтом подібності, рівним r ;
- в) паралельного перенесення за допомогою вектора, відповідного комплексному числу b .

Відмітимо, що лінійне перетворення залишає нерухомими (переходять самі на себе) дві точки $z_1 = \infty$ і $z_2 = \frac{b}{1-a}$. При $a = 1$ отримуємо $z_2 = \infty$, тобто у цьому випадку обидві нерухомі точки співпадають. Таким чином, лінійне перетворення дозволяє пропорційно, наприклад, збільшувати радіуси кіл, паралельно їх переносити, що буде використано далі в роботі.

2.3 Симетрія та інверсія

Розглянемо далі функцію наступного виду:

$$w = \frac{1}{z}. \quad (2.11)$$

Відомо, що дві точки M і M' називають симетричними відносно кола Γ , якщо [8, 11]:

- а) вони знаходяться на одному промені, який виходить з центра кола;
- б) добуток їх відстаней від центра кола співпадає з квадратом радіуса кола: $OM \cdot OM' = R^2$ (рис. 2.2).

Очевидно, що точки кола симетричні самим собі, а сам центр кола симетричний нескінченно віддаленій точці. При перетворенні $w = \frac{1}{z}$ маємо два симетричних відображення: відносно одиничного кола і відносно дійсної вісі (рис. 2.3), і називають це перетворення інверсією [11].

Інверсія є конформним перетворенням і таким, що змінює орієнтацію, (такі відображення називають конформними відображеннями другого роду). Воно визначене на всій розширеній комплексній площині, причому точці $z = 0$ відповідає точка $w = \infty$, а точці $z = \infty$ відповідає точка $w = 0$.

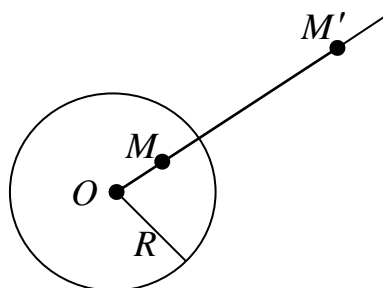


Рисунок 2.2 – Симетрія відносно кола

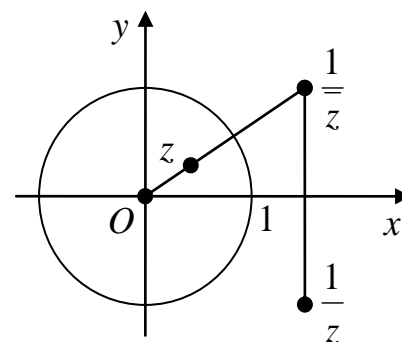


Рисунок 2.3 – Інверсія

Важливим у подальшій роботі буде той факт, що перетворення інверсії буде кола (а також прями) переводити в кола або прями. Нерухомими точками цього перетворення є точки $z = 1$ та $z = -1$. Таким чином, інверсією застосуємо при відображенні кіл на площині.

2.4 Дробово-лінійне відображення

Комбінацією лінійного відображення та інверсії можна вважати дробово-лінійне відображення, про яке слід розказати більш детально, оскільки саме його найчастіше застосовують при побудові відображень кіл.

Означення 2.5 Дробово-лінійною функцією називають функцію наступного виду [11]:

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ де } a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0. \quad (2.12)$$

Якщо $c = 0$, то дробово-лінійна функція є лінійною функцією, властивості якої розглянуто раніше в підрозділі 2.2.

Функцію (2.12) не визначено лише в точці $z = -\frac{d}{c}$. Зазвичай вважають, що дробово-лінійна функція (2.12) переводить точку $z = -\frac{d}{c}$ в точку $w = \infty$, а точку $z = \infty$ в точку $w = \frac{a}{c}$, (очевидно, що $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}$). Довизначена таким чином дробово-лінійна функція (2.12) відображає \bar{C} в \bar{C} .

Обчислимо похідну функції (2.12):

$$f' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}. \quad (2.13)$$

Ця похідна визначена скрізь при $z \neq -\frac{d}{c}$, тобто функція (2.12) аналітична на всій комплексній площині крім точки $z = -\frac{d}{c}$, де вона має простий полюс. Рівняння (2.12) можна єдиним чином розв'язати відносно z :

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a}, \quad (2.14)$$

причому функція (2.14) також визначена на всій площині w (її значення в точці $w = \frac{a}{c}$ вважається рівним ∞ , а в точці $w = \infty$ рівним $-\frac{d}{c}$). Маємо, що дробово-лінійна функція виконує однолисте відображення розширеної комплексної площини змінної z на розширену комплексну площину змінної w . Зауважимо, що дробово-лінійна функція – це єдина функція, яка має таку властивість [9]. Тобто відображення дробово-лінійною функцією (2.12) є гомеоморфізмом (неперервним, взаємно-однозначним відображенням) розширеної комплексної площини на себе. Відображення дробово-лінійною функцією (2.12), очевидно, є конформним відображенням.

Функція, яка обернена до дробово-лінійної, також є дробово-лінійною, це підтверджує формула (2.14). Легко показати, що функція, складена із дробово-лінійних функцій також є дробово-лінійною.

Наведемо далі деякі геометричні властивості дробово-лінійної функції. Запишемо функцію (2.12) у вигляді:

$$w = f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2(z+\frac{d}{c})}, \text{ або } w = A + \frac{B}{z-D}, \quad (2.15)$$

Тоді це відображення є складним і складається із трьох наступних перетворень:

- а) $z_1 = z - D$, яке задає зсув (лінійна функція);
- б) $z_2 = \frac{1}{z_1}$, яке є інверсією;
- в) $w = A + Bz_2$, яке задає зсув, поворот і розтягнення (лінійна функція).

При побудові конкретних відображень будемо використовувати основні властивості дробово-лінійних відображень. Доведення цих властивостей можна знайти в підручнику [9]:

а) групова властивість. Сукупність усіх дробово-лінійних функцій утворює неабелеву групу, при цьому груповою операцією вважають суперпозицію дробово-лінійних функцій;

б) кругова властивість. Дробово-лінійне відображення перетворює коло в коло.

Наведемо формули, за допомогою яких можна знаходити образи прямих та кіл при відображенні (2.12):

а) прямим $Re(\lambda z) = a$, що не проходять через точку $z = -\frac{d}{c}$, відповідають кола $|w - w_0| = p$, де

$$w_0 = \frac{2a\alpha\bar{c} + a\bar{d}\bar{\lambda} + b\bar{c}\lambda}{2\alpha|c|^2 + 2Re(c\bar{d}\bar{\lambda})}, \quad p = \left| \frac{a}{c} - w_0 \right| = \left| \frac{(ad-bc)\lambda}{2\alpha|c|^2 + 2Re(c\bar{d}\bar{\lambda})} \right|; \quad (2.16)$$

б) прямим $Re(\lambda z) = -Re\left(\lambda \frac{d}{c}\right)$, що проходять через точку $z = -\frac{d}{c}$, відповідають прямі

$$Re\left(\frac{ad-bc}{c^2} \lambda \bar{w}\right) = Re\left(\frac{ad-bc}{c^2} \cdot \frac{\lambda \bar{d}}{\bar{c}}\right); \quad (2.17)$$

в) колам $|z - z_0| = r$, які не проходять через точку $z = -\frac{d}{c}$, відповідають кола $|w - w_0| = p$, де

$$w_0 = \frac{(az_0 + b)(\bar{c}\bar{z}_0 + \bar{d}) - a\bar{c}r^2}{|cz_0 + d|^2 - |c|^2r^2}, \quad p = \frac{r|ad-bc|}{||cz_0 + d|^2 - |c|^2r^2|}; \quad (2.18)$$

Таким чином, області, обмежені колом переходять в області, обмежені іншим колом. Саме це ми використаємо при побудові образів границь областей у прикладах четвертого розділу.

г) колам виду $|z - z_0| = \left|z_0 + \frac{d}{c}\right|$ відповідають такі прямі

$$Re\left(\frac{ad-bc}{c(cz_0 + d)} \bar{w}\right) = \frac{|ad-bc|^2 + 2Re(c(az_0 + b)(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c}))}{2|c(cz_0 + d)|^2}; \quad (2.19)$$

1) властивість симетрії. Точки, симетричні відносно кола, відображаються дробово-лінійною функцією в точки, які будуть симетричні відносно зображення цього кола.

2) частинні випадки. Слід з'ясувати питання про умови, які визначають дробово-лінійне відображення. З формули (2.12) маємо, що такі відображення задають коефіцієнти a, b, c і d . Можна довести, що дробово-лінійне відображення фактично залежить від трьох комплексних або шести дійсних параметрів, які визначаються коефіцієнтами. Тобто, дробово-лінійне відображення визначається умовами, які приводять до шести співвідношень між дійсними та уявними частинами коефіцієнтів. Наведемо далі деякі такі відображення:

а) існує єдина дробово-лінійна функція, яка три різні точки z_1, z_2, z_3 площини z переводить у три різні точки w_1, w_2, w_3 площини w . Така функція має вигляд:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}. \quad (2.20)$$

Якщо одна з точок z_k або $w_k, k = 1, 2, 3$ є нескінченно віддаленою точкою, то в формулі (2.20) слід замінити на одиниці усі різниці, які включають цю точку;

б) довільний круг площини z за допомогою дробово-лінійної функції можна перетворити в довільний круг площини w . Для побудови такого відображення можна вибрати 3 точки на колі в площині z і відповідно 3 точки на колі в площині w і скористатись формулою (2.20).

Легко, наприклад, знайти відображення одиничного круга $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ при $w = \frac{3-2z}{4z+8}$. За формулами (2.18) маємо, що $w_0 = \frac{2}{3}, p = \frac{7}{12}$. Таким чином, образом однозв'язної області, яка обмежена колом буде також однозв'язна область, обмежена колом, а саме круг $K_1 = \{w \in \mathbb{C} : |w - \frac{2}{3}| < \frac{7}{12}\}$.

2.5 Відображення за допомогою функції $w = Ln z$

Оскільки процес побудови відображень творчий, то наведемо ще декілька відомих функцій.

Означення 2.6 Показникову функцію $w = e^z$ визначають наступним чином [7, 8]:

$$w = e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (2.21)$$

Ця функція має властивості:

а) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, де z_1 і $z_2 \in C$.

б) $e^{z+2\pi ki} = e^z$, $k \in Z$, тобто e^z є періодичною з періодом $2\pi ki$.

Функція $w = e^z$ є продовженням у комплексну площину C дійсної функції e^x , яку визначено на R .

Показникова функція здійснює конформне відображення в усіх точках комплексної площини, вона не є однолистою, оскільки кожен смугу

$$\{z: \alpha < Im z < \alpha + 2\pi\}, \alpha \in R \quad (2.22)$$

взаємно однозначно (однолисто) відображає на комплексну площину C з розрізом уздовж променя, який проходить під кутом α і виходить з точки $w = 0$. Смуга (2.22) є областю однолистості показникової функції, а комплексну площину можна розбити на зчисленну кількість таких областей однолистості. Маємо, що при відображенні показниковою функцією комплексна площина «накриває» сама себе зчисленну кількість разів.

Кожна точка $w \in C$, крім $w = 0$, при відображенні $w = f(z) = e^z$ має зчисленну кількість різних праобразів, які визначають формулою:

$$z = Ln w = \ln|w| + iArgw = \ln|w| + i \arg w + 2k\pi i, k \in Z. \quad (2.23)$$

Для логарифмів справедливі формули при $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$: $\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln} z_1 + \text{Ln} z_2$, $\text{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Ln} z_1 - \text{Ln} z_2$. Головним значенням $\text{Ln } w$ називають те значення, яке отримуємо при значенні $k = 0$, його позначають $\ln w$, тобто $\ln w = \ln|w| + i \arg w$ [11].

Для показникової функції визначене обернене перетворення логарифму $z = \text{Ln } w$ [6]. При цьому показникову функцію $w = f(z) = e^z$ розглядають на множині $D_k = \{z \in \mathbb{C} : 2\pi k \leq \text{Im } z < 2\pi(k + 1)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, кожен з яких показникова функція відображає однолисто на комплексну площину \mathbb{C} . Очевидно, $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} D_k = \mathbb{C}$. Кожну з областей $\{z \in \mathbb{C} : 2\pi k < \text{Im } z < 2\pi(k + 1)\}$, $k \in \mathbb{Z}$ (стандартних областей однолистості) показникова функція взаємно однозначно відображає на площину \mathbb{C} з розрізом уздовж променя, що виходить з точки $w = 0$ і проходить під кутом 0 .

Означення 2.7 На комплексній площині розглядають зчисленну кількість різних однозначних функцій, які в сукупності називають многозначним відображенням логарифма і позначають $z = \text{Ln } w$. Відповідні однозначні функції, які визначають співвідношеннями (2.23), яких зчисленна кількість, називають гілками однозначності відображення $z = \text{Ln } w$.

При відображенні $z = \text{Ln } w$ точки $w = 0$ та $w = \infty$ є логарифмічними точками розгалуження.

2.6 Функція Жуковського

Іноді потрібно перетворити області складного виду на елементарні, оскільки на елементарних областях прикладні задачі фізики, механіки тощо розв'язувати набагато простіше. Саме це надихало вчених математиків будувати нові функції для таких перетворень. Функція Жуковського теж створена видатним вченим для розв'язку певних задач.

Означення 2.8 Функцію виду

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right); z \in C \setminus \{0\} \quad (2.24)$$

називають функцією Жуковського. Функція Жуковського визначена та аналітична в усіх точках комплексної площини, крім $z = 0$, де вона має простий полюс [7-9, 11].

Обчислимо похідну цієї функції:

$$w' = f'(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right), z \in C \setminus \{0\}. \quad (2.25)$$

Похідна $f'(z) \neq 0$ при $z \neq \pm 1$. Довизначимо функцію Жуковського в точках $z = 0$ та $z = \infty$ граничним значенням ∞ . Функцію Жуковського можна записати як композицію дробово-лінійних функцій та степеневі функції, а саме:

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1 + \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2}{1 - \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2}.$$

Тоді за властивостями дробово-лінійної функції та степеневі функції [11] очевидно маємо, що довизначена в розширеній комплексній площині функція Жуковського здійснює конформне відображення в усіх точках \bar{C} , окрім точок $z = \pm 1$.

Ця функція $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, $z \in C \setminus \{0\}$ не є однолистою. Області однолистості не можуть містити точки $\{z_1, z_2\} \subset C \setminus \{0\}$, $z_1 \neq z_2$, які задовольняють умову $z_1 z_2 = 1$. Зазвичай комплексну площину стандартно розбивають двома стандартними наборами областей однолистості.

Функція Жуковського кожену область, обмежену колом

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad D_2 = \{z \in \bar{\mathbb{C}} : |z| > 1\} \quad (2.26)$$

взаємно-однозначно (однолисто) відображає на розширену комплексну площину $\bar{\mathbb{C}}$ з розрізом уздовж відрізка дійсної осі $[-1, 1]$. Тобто області (2.26) є областями однолистості функції Жуковського. Це можна використовувати у прикладах.

Відображення функцією Жуковського має також цікаві геометричні властивості [9]:

а) кола $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$, $0 < R < +\infty$, $R \neq 1$ функція Жуковського відображає в точки еліпса $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$, де $a = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right) > 0$, $b = \pm \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right) > 0$, з фокусами в точках ± 1 , причому напрямком обходу по колу та по відповідному еліпсу однаковий у випадку $R > 1$ та протилежний у випадку $0 < R < 1$. Ми використаємо це у розв'язанні задач.

Зауважимо також, що коло $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ функція Жуковського відображає в точки відрізка дійсної вісі $[-1, 1]$, який обходять в одному та протилежному напрямку.

б) промені $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \varphi\}$, $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ функція Жуковського відображає в точки відповідної гілки гіперболи $\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1$ з фокусами в точках ± 1 .

Промені $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \varphi\}$, $\varphi = \frac{\pi(2k+1)}{2}, k \in \mathbb{Z}$ функція Жуковського відображає в точки уявної вісі, а промені $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \varphi\}$, $\varphi = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ та $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \varphi\}$, $\varphi = \pi(2k+1), k \in \mathbb{Z}$ функція Жуковського відображає в точки дійсної вісі $[1, +\infty]$ та $[-\infty, -1]$ відповідно, які обходять в одному та протилежному напрямку.

Для визначення оберненого до функції Жуковського відображення, потрібно змінну z знайти із рівняння $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Одержимо таку функцію:

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1}, \quad (2.27)$$

яку визначають двома гілками однозначності відповідно до гілок однозначності кореня.

Отже, у розділі ми розглянули функції, задані на комплексній площині, які використаємо далі в роботі при побудові складних відображень. Також ми навели основні формули для побудови відображень кіл та прості приклади побудови відображень однозв'язних областей за допомогою цих функцій.

3 МНОГОЗВ'ЯЗНІ ОБЛАСТІ

З дійсного аналізу відомо [4], що множину називають зв'язною, якщо будь-які дві її точки можна поєднати неперервною кривою, всі точки якої належать даній множині. Відкриту зв'язну множину називають областю. Якщо до області приєднати її границю, то одержимо замкнуту область. Однозв'язною називають область, будь-яку точку якої можна оточити замкнутою кривою, яку можна зтягнути в цю точку.

Многозв'язна область – це така область, яка не є однозв'язною. Це означає, що в многозв'язній області існує принаймні одна замкнута крива, яку не можна зтягнути в точку таким чином, щоб при зтягуванні ця крива теж належала цій області. Найпростішим прикладом такої многозв'язної області може бути кільце $r \leq |z| \leq R$ (рис. 3.1) або круг з виколотою точкою $0 < |z - z_0| \leq R$ (рис. 3.2), або круг з внутрішнім розрізом (рис. 3.3)

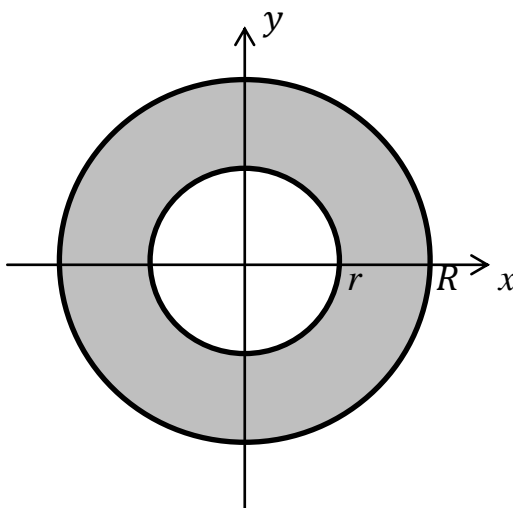


Рисунок 3.1 – Кільце на комплексній площині

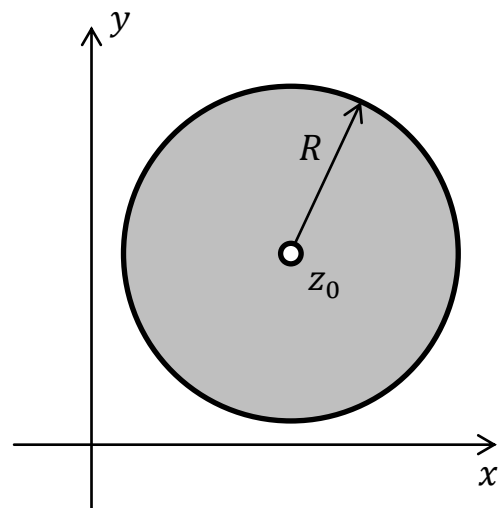


Рисунок 3.2 – Круг з виколотою точкою

В 1851 році Ріманом було поставлене питання про можливість взаємно однозначного та конформного відображення довільної однозв'язної області на іншу однозв'язну область. Ріман показав, що ця проблема має фундаментальне

значення для теорії функцій. Ідеї Рімана почали розвиток в цілому ряді робіт з геометричної теорії функцій. Основною теоремою в цьому крузі ідей є наступна:

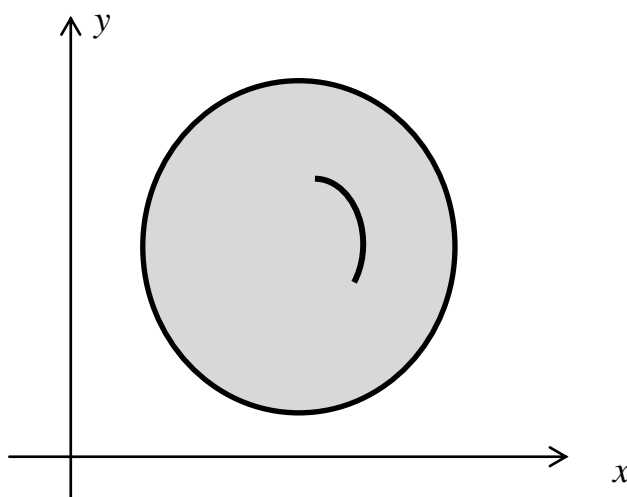


Рисунок 3.3 – Круг з внутрішнім розрізом

Будь-яка однозв'язна область може бути відображеною конформно на круг або на всю площину з однією виколотою точкою. Вказане відображення є єдиним, якщо задана точка області, яка відповідає центру круга (або початку координат – у випадку області з виколотою точкою), та деякий напрям, який виходить з цієї точки, відповідний до заданого напрямку, який виходить із центра круга.

Для конформних відображень однозв'язних областей відома теорема Рімана, наведена в другому розділі роботи. Зауважимо, що Ріманом були запропоновані ідеї щодо доведення цієї теореми, однак остаточного доведення він не отримав. Після праць Рімана варто відзначити роботи Неймана та Шварца в цьому напрямку. Остаточне доведення вказаної вище теореми отримав Каратеодорі.

Так, як і при конформному відображенні однозв'язної області основну роль має теорема про можливість конформного відображення однозв'язної області на круг, так і при вивченні конформних відображень многозв'язних областей важливу роль має питання про можливість відображення многозв'язної області на ряд певних канонічних областей. Перша теорема

такого типу була запропонована Гільбертом, який показав, що довільна скінченнозв'язна область може бути відображеною на область, отриману шляхом викиданням із площини скінченного числа прямолінійних відрізків, паралельних заданому напрямку [5].

Цікаво відмітити, що в цей час як подальші роботи, пов'язані з доведенням існування конформного відображення однозв'язної області на круг, за методами відхилились від праці Рімана, доведення вказаної загальної теореми Гільберта є прямим продовженням ідей Рімана. За основу цього доведення Гільбертом був покладений видозмінений принцип Діріхле.

Також відомо, що Кьобе довів серію інших цікавих теорем про відображення многозв'язної області на канонічні області, отримані вилученням із площини дуг кривих, що належать до різних простих груп [5].

Саме Кьобе вказав надзвичайно цікаве узагальнення основної теореми Рімана. Саме ним була доведена теорема: «Будь-яка скінченнозв'язна область може бути відображеною конформно на область, отриману викиданням з площини скінченної кількості кругів».

Друге чудове узагальнення теореми Рімана було отримано порівняно нещодавно Валле Пуссеном [5].

Нажаль для конформних відображень многозв'язних областей немає таких простих формул і функцій, як для однозв'язних областей. Оскільки характер зв'язності при конформному відображенні зберігається, то відображати одну в одну можна лише області однакового порядку зв'язності; проте ця умова ще не гарантує існування такого відображення. Більш того, кожна многозв'язна область характеризується деякою сукупністю конформних інваріантів. Дві області відображаються одна на одну тільки тоді, коли їх інваріанти співпадають.

Відомо, що всі однозв'язні області відображаються в основному на одну канонічну область – одиничний круг. Навідміну від цього многозв'язним областям відповідає сімейство канонічних областей, які мають однаковий

порядок зв'язності, але розрізняються деякими геометричними параметрами. Такі канонічні області зустрічаються при розв'язанні певних крайових задач.

Певний шлях поширення теореми Рімана для однозв'язних областей на многозв'язні області полягає у тому, що многозв'язну область G перетворюють в однозв'язну, розглядаючи її не на площині, а на нескінченнолистій рімановій поверхні \tilde{F}_G . Цю поверхню, називають універсальною поверхнею накладання області G або універсальною закриваючою. Вона повинна володіти наступними властивостями. Нехай C – замкнута крива в G . Проектуючи цю криву на \tilde{F}_G , отримуємо там нескінченну множину кривих $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots$, по одній на кожному листі. Ці криві повинні бути замкнутими на \tilde{F}_G (тобто початок і кінець кожної з них повинні лежати на одному листі) тоді і тільки тоді, коли C можна стягнути в точку в області G . Таку поверхню завжди можна побудувати; проєкція G на цю поверхню – позначимо її \tilde{G} – утворює зв'язну область на \tilde{F}_G , при чому кожній точці G відповідає нескінченне множина точок на \tilde{G} . Область \tilde{G} однозв'язна, так як кожна замкнута крива в \tilde{G} може бути стягнута в точку, й тому (за виключенням деяких несуттєво окремих випадків) її можна, згідно теореми Рімана, відобразити конформно на одиничне коло.

Розглянемо далі основні класи скінченнозв'язних областей.

У випадку $n = 1$, як вказано вище, дві довільні але вироджені області можуть бути відображені одне на одну, причому відображення залежить від трьох довільних параметрів. При $n = 2$ сукупність областей розбивається на нескінченну множину класів, залежних від одного параметру; області, що належать до різних класів, не можуть бути відображені одна на одну; для двох областей, що належать до одного класу, існує два однопараметрових сімейства відображень одне на одне.

Розглянемо випадок $n > 2$. Довільна n – зв'язна область може бути відображена конформно на область, обмежену системою кругів, тому питання про можливість відобразити область D_1 на D_2 зводиться до питання про можливість відображення одне на одну двох кругових областей Δ_1, Δ_2 . Будь-

яке відображення кругової області на іншу кругову область дробово-лінійне, тому клас кругових областей Δ , що відображаються на деяку кругову область Δ_0 , залежить від шести дійсних параметрів. З іншого боку, скупчення усіх n – зв’язних кругових областей залежить від $3n$ параметрів. Отже всі кругові області розбиваються на залежні від $3n - 6$ параметрів множини класів областей, що відображені одні на одні.

Множина всіх n – зв’язних областей Δ розбивається на класи, скупчення яких залежить від $3n - 6$ параметрів. Ці класи мають наступні умови: для того щоб існувало конформне відображення області Δ_1 на Δ_2 , необхідно та достатньо, щоб області Δ_1, Δ_2 належали до одного класу.

Наведемо далі основні твердження стосовно відображень многозв’язних областей. Відомо [5], що:

- відображення однієї многозв’язної області на іншу з заданою відповідністю граничних континуумів єдине.
- відображення однієї n – зв’язної області на іншу, взагалі кажучи, визначено єдиним чином.
- число конформних відображень однієї n – зв’язної області на іншу не може перевищувати $n(n - 1)(n - 2)$.
- будь-яку двозв’язну область можна відобразити на кільце, обмежене двома концентричними колами. При цьому існує не більше одного відображення двозв’язної області D на кільце при умові, що задана точка границі кільця відповідає заданій точці границі області D .
- в області існує єдина функція, яка відображає її на область, яка є зовнішністю скінченної кількості кругів, ця функція має вигляд на нескінченності:

$$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} + \dots .$$

- будь-яке перетворення області, обмеженої кругами, на іншу подібну область може бути реалізоване дробово-лінійною функцією.

У наступному розділі роботи будуть розглянуті та побудовані конформні відображення саме багатозв'язних областей, обмежених декількома колами.

Наведемо приклади областей, обмежених колами.

Приклад 3.1 Зовнішність двох кіл (рис. 3.4)

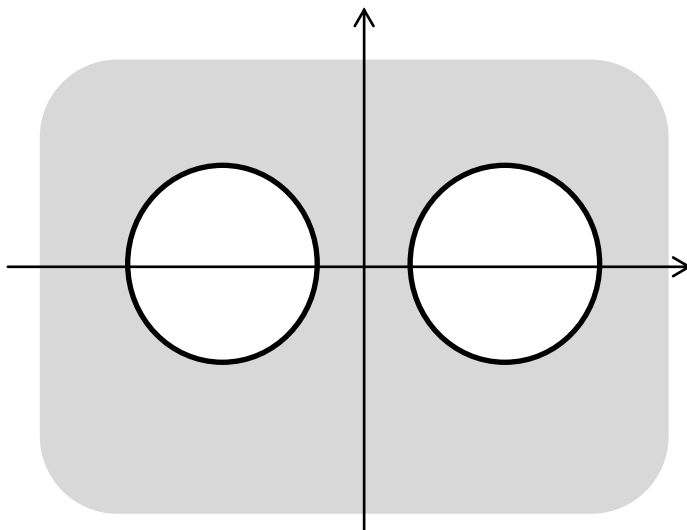


Рисунок 3.4 – Зовнішність двох кіл

Приклад 3.2 Зовнішність n кіл (рис. 3.5)

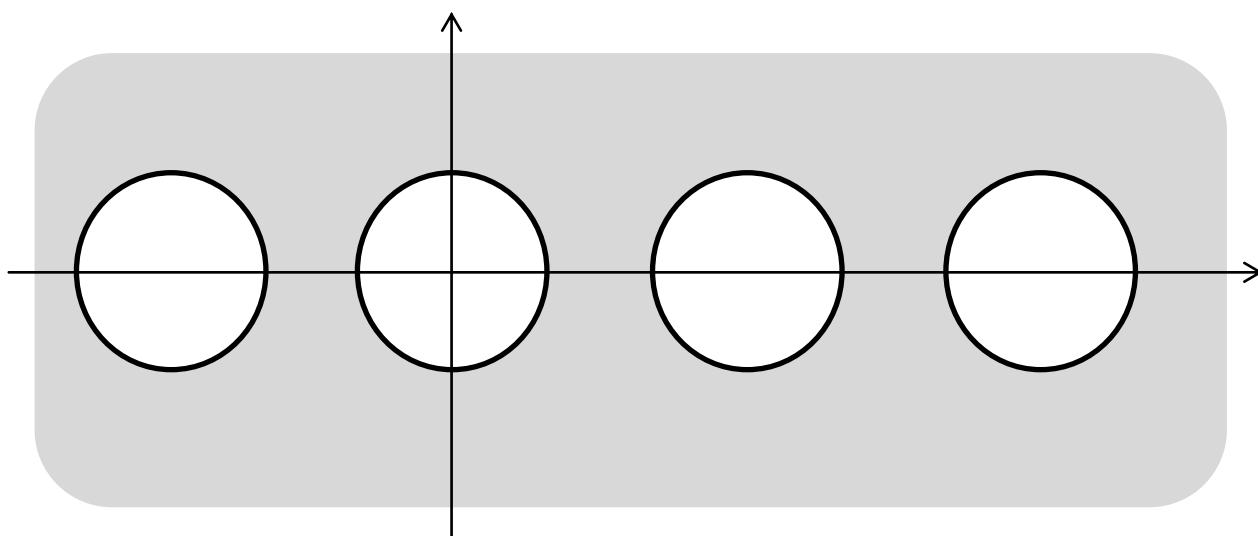


Рисунок 3.5 – Зовнішність n кіл

Приклад 3.3 Смуга з «пустими» кругами (рис. 3.6)

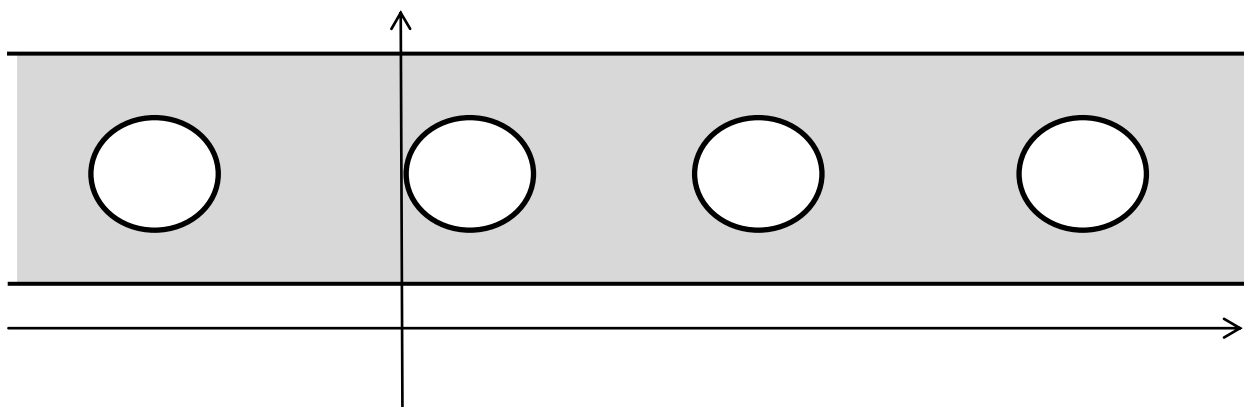


Рисунок 3.6 – Смуга з «пустими» кругами

Приклад 3.4 Декілька кільцевих областей (рис. 3.7)

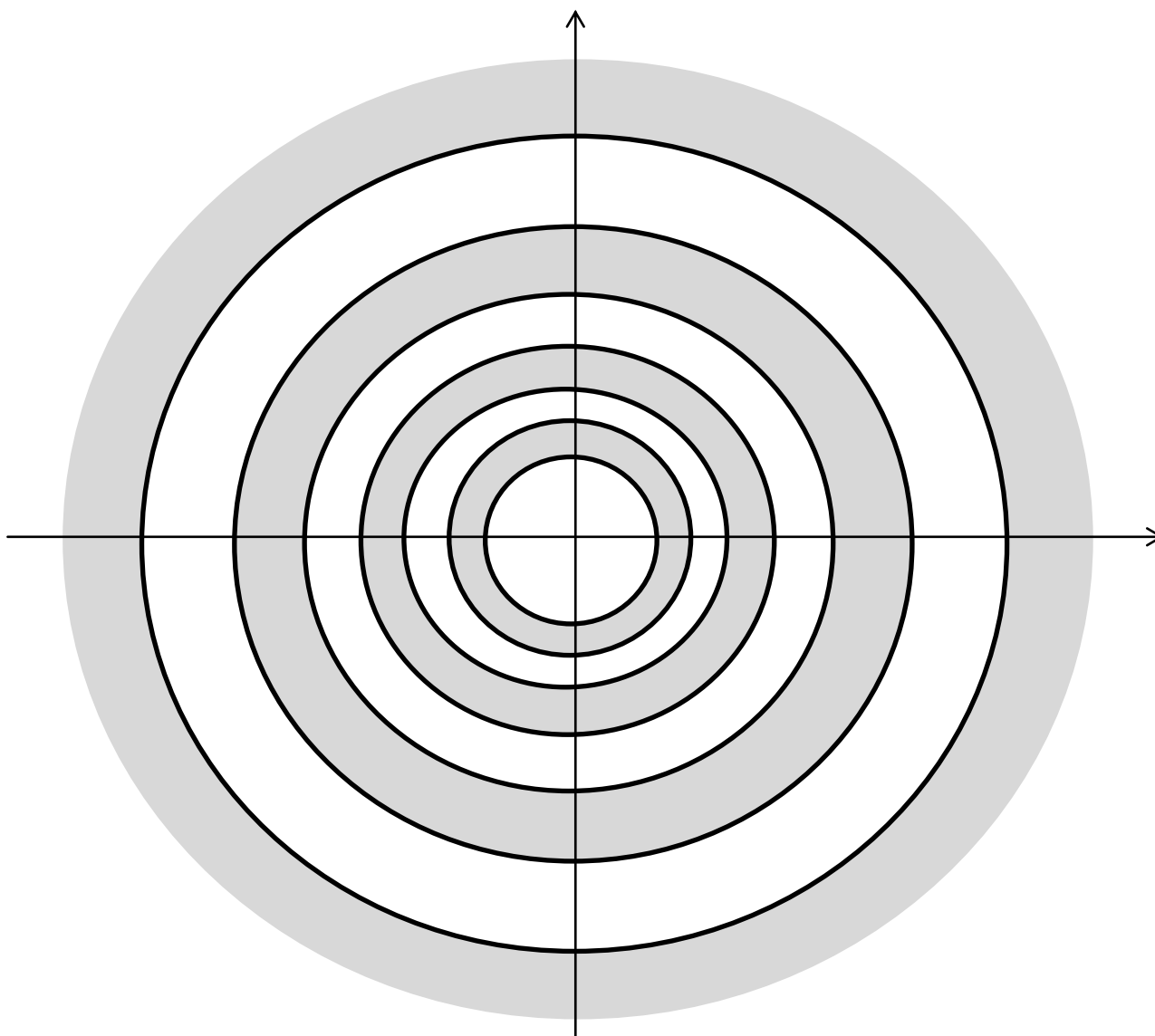


Рисунок 3.7 – Декілька кільцевих областей

4 ПОБУДОВА КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ДЕЯКИХ ОБЛАСТЕЙ, ОБМЕЖЕНИХ КОЛАМИ

4.1 Конформні відображення кільця

Наведемо приклади конформних відображень кільця, тобто області, обмеженої колами.

Приклад 4.1 З'ясуємо, що може бути образом кільця, наприклад, при дробово-лінійному відображенні. Знайдемо в що відображається кільце $K = \{z \in \mathbb{C}: 1 < |z| < 2\}$ функцією $w = \frac{z}{z-1}$?

Точці $z = 1$ відповідає точка $w = \infty$, отже, коло

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$$

переходить в пряму, ортогональну дійсній вісі (при даному відображенні дійсна вісь переходить в дійсну вісь). Точці $z = 1$ відповідає точка $w = \frac{1}{2}$.

Таким чином, коло γ_1 відображається на пряму, рівняння якої $u = \frac{1}{2}$.

Образом кола

$$\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 2\}$$

буде деяке коло в площині w з центром на дійсній вісі. Його рівняння запишемо у вигляді

$$(u - a)^2 + v^2 = R^2.$$

Образи точок $z_1 = -2$ й $z_2 = 2$ належать йому. Точкам z_1 і z_2 відповідають точки $w_1 = \frac{2}{3}$ і $w = 2$. Для визначення параметрів a і R отримаємо систему

двох рівнянь з двома невідомими $\left(\frac{2}{3} - a\right)^2 = R^2$ й $(2 - a)^2 = R^2$. Розв'язавши цю систему, маємо: $a = \frac{4}{3}$, $R = \frac{2}{3}$. Коло γ_2 відображається на коло $\Gamma = \{w \in \mathbb{C}: \left|w - \frac{4}{3}\right| = \frac{2}{3}\}$. Кільце K відображається на двозв'язну область, границя якої складається з прямої, рівняння якої $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}$, і кола Γ (рис. 4.1).

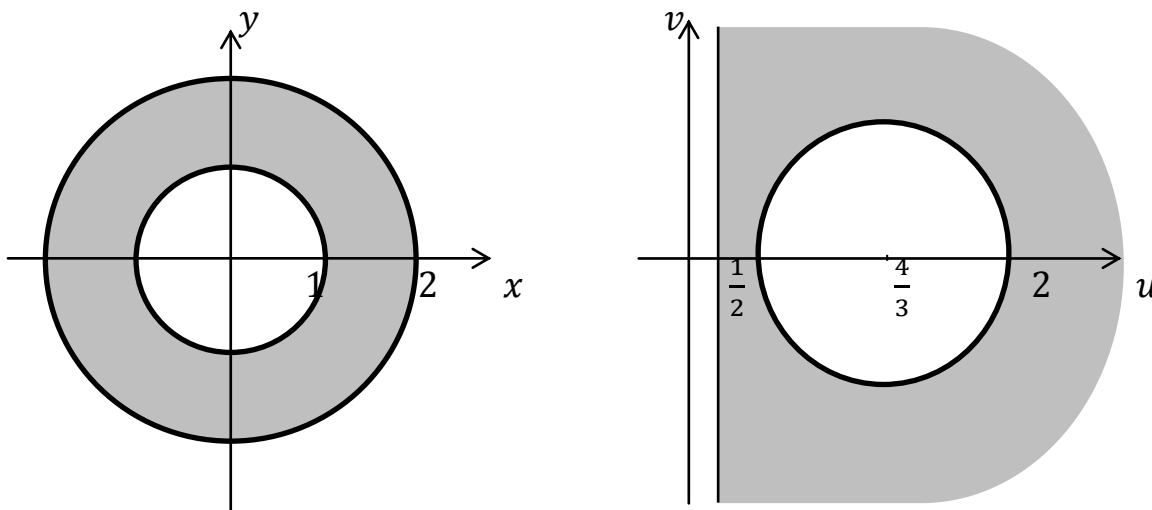


Рисунок 4.1 – Кільце та його відображення на двозв'язну область

Приклад 4.2 Відобразити кільце $K = \{z \in \mathbb{C}: 2 < |z| < 5\}$ на кільце $K_1 = \{w \in \mathbb{C}: 4 < |w| < 10\}$ так, щоб $w(5) = -4$.

Скористаємося теоремою: для того щоб існувало конформне відображення кільця $K' = \{z \in \mathbb{C}: r_1 < |z| < r_2\}$ на кільце $K'' = \{w \in \mathbb{C}: R_1 < |w| < R_2\}$, необхідно й достатньо виконання умови $\frac{R_2}{R_1} = \frac{r_2}{r_1}$. При цьому функція, що відображає може бути тільки двох видів:

$$w = az \text{ або } w = \frac{a}{z}, a \in \mathbb{C}.$$

Відображення однозначно визначається заданням однієї пари відповідних одна одній граничних точок.

Очевидно, що у даному випадку функція, що відображає має вигляд $w = \frac{a}{z}$, оскільки за умовою внутрішність кола кільця K повинна перейти у зовнішність кола кільця K_1 . З відповідності точок знаходимо: $-4 = \frac{a}{5}$, $a = -20$. Отже, маємо функцію

$$w = -\frac{20}{z}.$$

Приклад 4.3 Відобразимо кільце $\tilde{K} = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 2i| < 2\}$ на кільце $\tilde{K}_1 = \{w \in \mathbb{C} : 2 < |w - 3 + 2i| < 4\}$ так, щоб $w(0) = -1 - 2i$.

Вважаємо $w_1 = z - 2i$, $w_2 = w - 3 + 2i$. Тоді $1 < |w_1| < 2$ і $2 < |w_2| < 4$. Задачу зводимо до відображення одного концентричного кільця на інше, причому $\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$. Тут зовнішність кола одного кільця переходить в зовнішність кола іншого кільця, тому $w_2 = aw_1$, тобто $w - 3 + 2i = a(z - 2i)$. Сталу a знаходимо з умови $-4 = -2ia$, звідки $a = -2i$. Остаточоно отримуємо:

$$\begin{aligned} w &= 3 - 2i - 2i(z - 2i) = 3 - 2i - 2iz - 4 = -2iz - 1 - 2i = \\ &= -(2iz + 1 + 2i). \end{aligned}$$

Приклад 4.4 Розглянемо відображення кільця $r < |z| < R$ функцією $w = \operatorname{Ln} z$, аналітичною в цьому кільці.

Зауважимо перед усім, що функція $\operatorname{Ln} z$ однолиста в кільці, оскільки вона має обернену функцію $z = e^w$, яка є голоморфною у всій площині. Таким чином, відображення $w = \operatorname{Ln} z$ є конформним відображенням, та потрібно знайти лише образ кільця.

Проведемо в кільце розріз $(-R, -r)$. В розрізаному кільці функція $\operatorname{Ln} z$ допускає виділення голоморфної гілки. Подивимось, куди відображає розрізане кільце кожен з голоморфних гілок $\operatorname{Ln} z$. Згадуючи відображення

елементарними функціями, бачимо, що образом розрізаного кільця є прямокутник

$$\ln r < \operatorname{Re} w < \ln R, \quad -\pi + 2\pi k < \operatorname{Im} w < \pi + 2\pi k,$$

де ціле число k визначається вибором голоморфної гілки $\operatorname{Ln} z$. В сукупності всі ці прямокутники з доданими образами розрізу утворюють полосу $\ln r < \operatorname{Re} w < \ln R$, яка і є образом кільця при відображенні $w = \operatorname{Ln} z$.

Зауважимо, що конформним відображенням двозв'язної області – кільця – виявилась однозв'язна область – полоса. Це виявилось можливим завдяки тому, що конформне відображення аналітичною функцією не є взаємно-однозначним відображенням. Наше конформне відображення можна розглядати як взаємно-однозначне відображення на полосу частини ріманової поверхні логарифма, що лежить над кільцем, а це – однозв'язна область.

Приклад 4.5 Відобразимо на вертикальну смугу $D = \{w \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} w < 1\}$ півплощину $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ з викинутим кругом $K = \{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{d}{2}\right| \leq \frac{d}{2}\}$ (рис. 4.2).

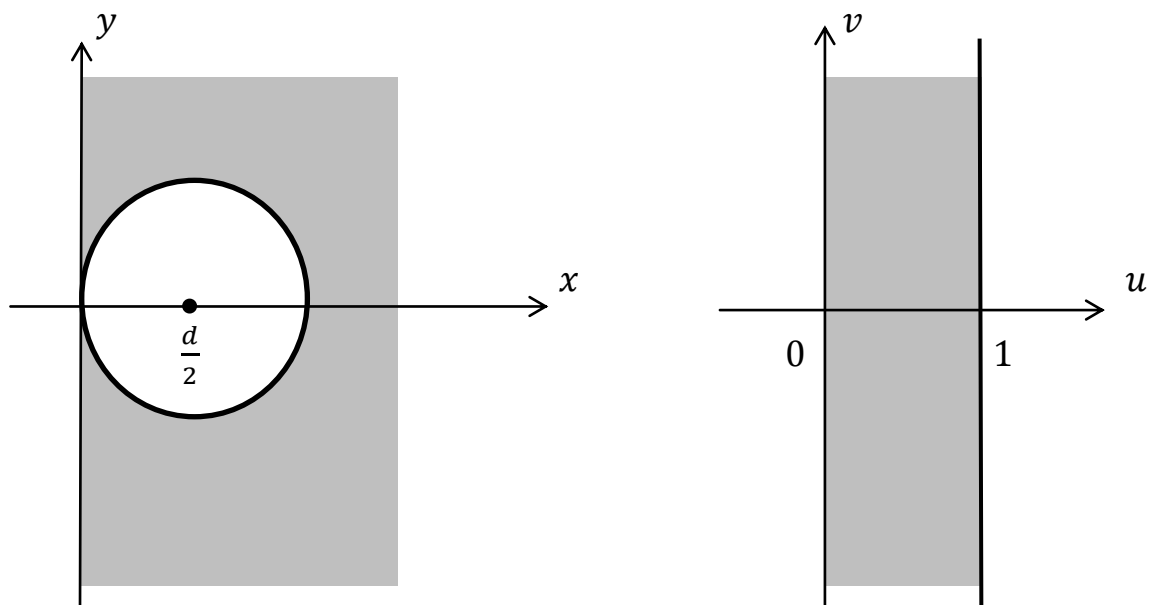


Рисунок 4.2 – Півплощина з викинутим кругом та вертикальна смуга

Функція $w_1 = \frac{1}{z}$ відображає множину $P \setminus K$ на смугу $G = \{w_1 \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} w_1 < \frac{1}{d}\}$, а відображення $w_2 = dw_1 = \frac{d}{z}$ відображає смугу G в смугу $G' = \{w_2 \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} w_2 < 1\}$. Згідно до розв'язання попередніх задач, загальний вигляд шуканого перетворення визначимо функцією $w = w_2 + ih = \frac{d}{z} + ih$, або $w = -w_2 + 1 + ih = -\frac{d}{z} + 1 + ih$, де h будь-яке дійсне число.

Приклад 4.6 Відобразимо на вертикальну смугу $D = \{w \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} w < 1\}$ двокутник, утворений між колами:

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{d_1}{2}\right| = \frac{d_1}{2}, \gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{d_2}{2}\right| = \frac{d_2}{2}, (d_1 < d_2);$$

Функція $w_1 = \frac{1}{z}$ відображає двокутник на смугу $D_1 = \{w_1 \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{d_2} < \operatorname{Re} w_1 < \frac{1}{d_1}\}$. Ширина смуги дорівнює $\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} = \frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2}$.

Функція $w_2 = \frac{d_1 d_2}{d_2 - d_1} \left(w_1 - \frac{1}{d_2}\right)$ відображає смугу D_1 на смугу $D_2 = \{w_2 \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} w_2 < 1\}$, а відображення $w = w_2 + ih$, або відображення $w = -w_2 + 1 + ih, h \in \mathbb{R}$, відображає смугу D_2 саме в себе, тобто в смугу D .

Остаточно маємо, що $w = \frac{d_1}{d_2 - d_1} \left(\frac{d_2}{z} - 1\right) + ih$, $w = \frac{d_1}{d_1 - d_2} \left(\frac{d_2}{z} - 1\right) + 1 + ih$, де

$h \in \mathbb{R}$ – довільне (рис. 4.3).

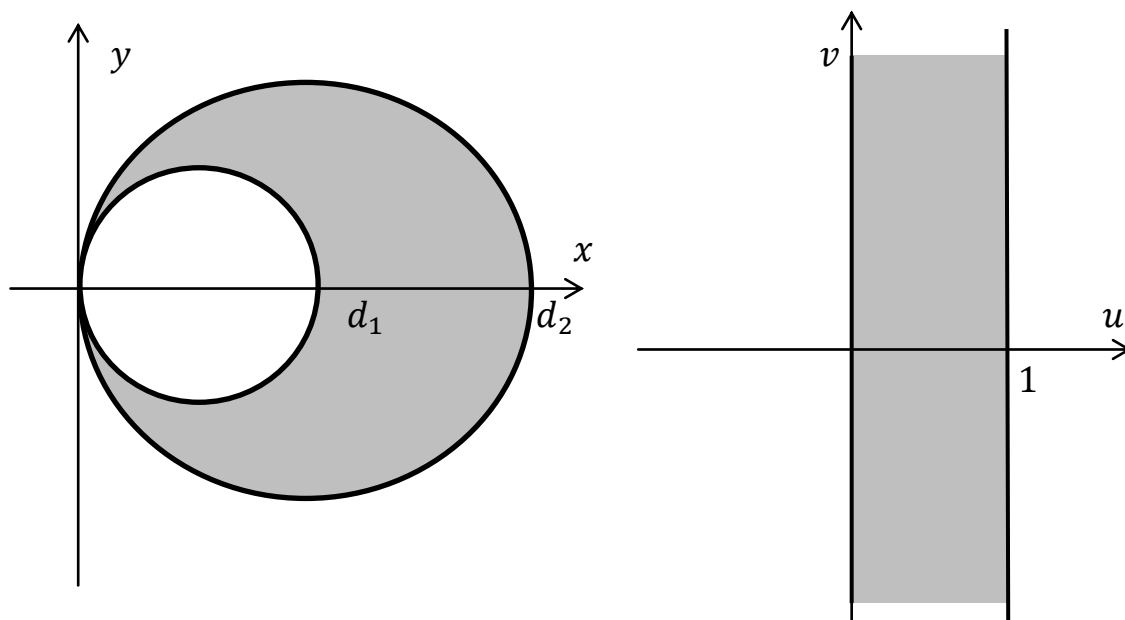


Рисунок 4.3 – Двокутник, утворений між колами та вертикальна смуга

Приклад 4.7 Відобразимо на вертикальну смугу $D = \{w \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} w < 1\}$ зовнішність кіл $K_1 = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z + \frac{d_1}{2}\right| \leq \frac{d_1}{2}\right\}$, $K_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{d_2}{2}\right| \leq \frac{d_2}{2}\right\}$ так, щоб $w(d_2) = 0$ (рис. 4.4).

Маємо композицію таких відображень:

$$w_1 = \frac{1}{z}, \quad w_2 = w_1 - \frac{1}{d_2}, \quad w_3 = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} w_2,$$

Таким чином одержимо таку функцію:

$$w = -w_3 = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{d_2}\right) = \frac{d_1}{d_1 + d_2} \left(1 - \frac{d_2}{z}\right) = \frac{d_1}{z} \left(\frac{z - d_2}{d_1 + d_2}\right).$$

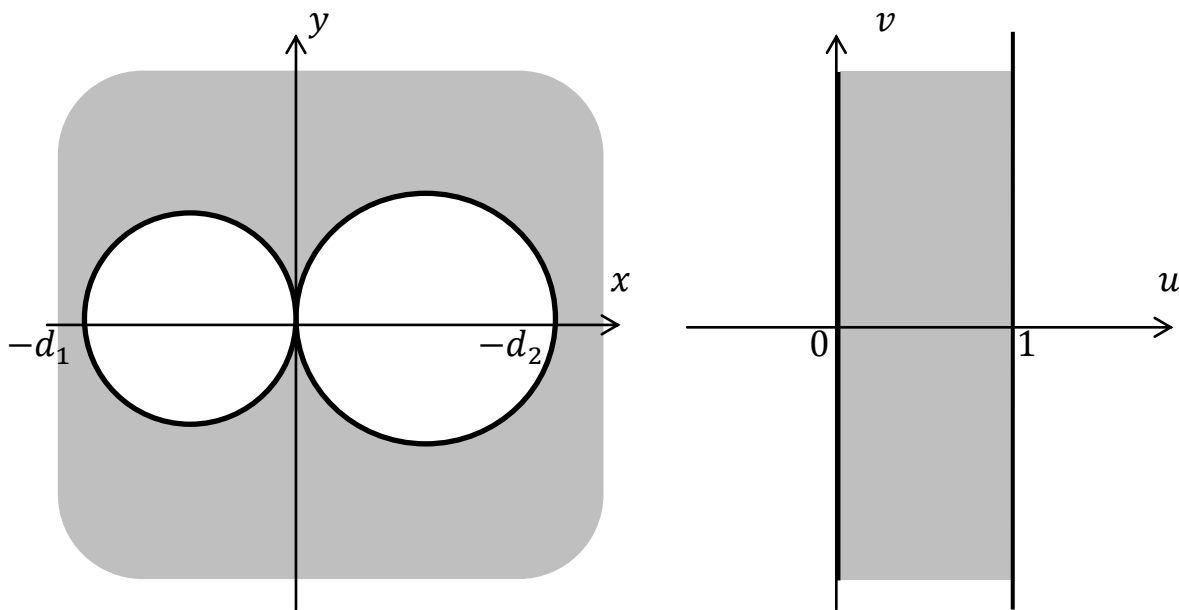


Рисунок 4.4 – Зовнішність кіл та їх відображення на вертикальну смугу

Приклад 4.8 Нехай потрібно ексцентричне кільце, обмежене колами $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| = 9\}$, $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 8| = 16\}$ відобразити на кільце $K' = \{w \in \mathbb{C} : p < |w| < 1\}$, а також знайти p .

Знаходимо точки a і a^* , що симетричні відносно γ_1 і γ_2 :

$$(3 - a)(3 - a^*) = 81,$$

$$(8 - a)(8 - a^*) = 256.$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо $a = 0$, $a^* = -24$. Далі можна розв'язувати задачу двома способами.

а) відображаємо $a = 0 \rightarrow w = 0$, $a^* = -24 \rightarrow w = \infty$. Тоді коло γ_2 перейде в коло $\gamma'_2 = \{\omega \in \mathbb{C}: |\omega| = 1\}$. Отже,

$$w = k \frac{z}{z + 24}.$$

Оскільки точка $z = 24 \in \gamma_2$ відображається на точку кола γ'_2 , то $1 = |k| \frac{24}{48}$, $|k| = 2$, $k = 2e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Функція $w = w(z)$ приймає вигляд

$$w = e^{i\theta} \frac{2z}{z+24}.$$

Оскільки точка $z = 12 \in \gamma_1$ відображається на точку кола радіуса p , то

$$p = \left| e^{i\theta} \frac{2 \cdot 12}{12+24} \right| = \frac{24}{36} = \frac{2}{3};$$

б) точку $a = 0$ відображаємо в $w = \infty$, а точку $a^* = -24$ – в $w = 0$. Тоді коло γ_1 перейде в коло γ' . Маємо

$$w = k \frac{z+24}{z}, \quad 1 = |k| \frac{36}{12}, \quad k = \frac{e^{i\theta}}{3}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Остаточо маємо

$$w = k \frac{z+24}{3z}, \quad p = \frac{24+24}{3 \cdot 24} = \frac{2}{3},$$

(точка $z = 24 \in \gamma_2$ відображається на точку кола радіуса p з центром $w = 0$) (рис. 4.5).

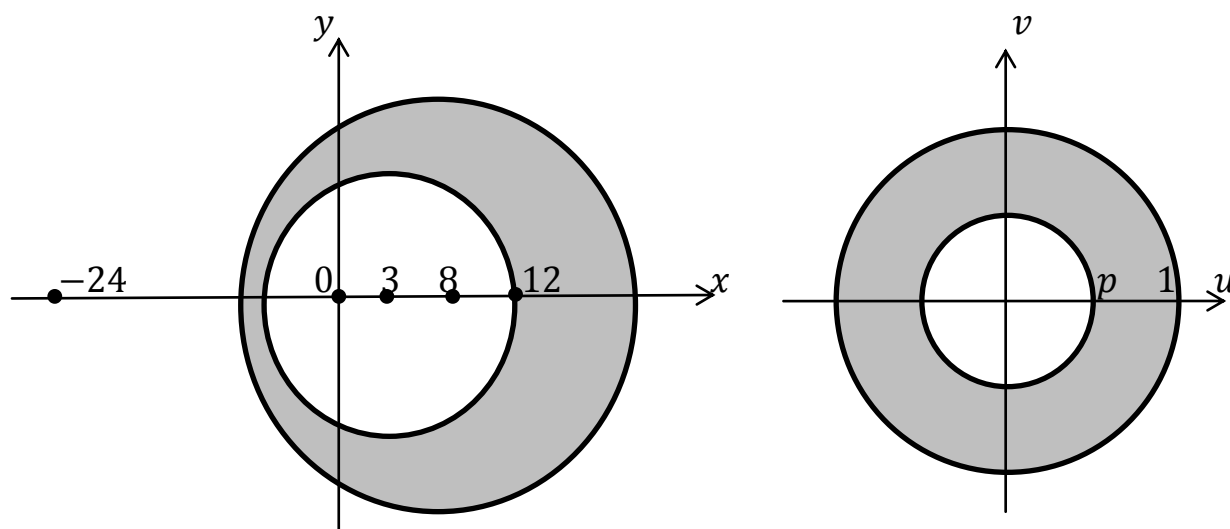


Рисунок 4.5 – Двоzv'язна область, обмежена ексцентричними колами, та її відображення

4.2 Конформне відображення круга з виколотою точкою

Аналогічно до попередніх прикладів розглянемо відображення областей, які мають виколоту точку.

Приклад 4.9 Розглянемо конформне відображення круга $|z| < 1$ з виколотою точкою $z = a$, $0 < |a| < 1$, на круг $|w| < 1$, що переводить точку $z = 0$ в точку $w = 0$.

Спочатку за допомогою дробово-лінійного відображення переведемо круг $|z| < 1$ з виколотою точкою $z = a$ в круг $|\zeta| < 1$ з виколотою точкою (з виколотим центром), тобто в кільце $0 < |\zeta| < 1$. Це виконується за допомогою функції $\zeta = \frac{a-z}{1-z\bar{a}}$.

Тепер скористаємося попередніми результатами та за допомогою функції $t = \text{Ln } \zeta$ конформно відобразимо кільце $0 < |\zeta| < 1$ на полосу, яка у розглянутому випадку вироджується в півплощину $\text{Re } t < 0$. З'ясуємо, куди

переходить в цій півплощині точка $z = 0$. Оскільки $t(z) = \operatorname{Ln} \frac{a-z}{1-z\bar{a}}$, то $t(0) = \operatorname{Ln} a$, причому для $\operatorname{Ln} a$ можна взяти будь-яке значення.

Щоб отримати шукане відображення, залишається перевести дробово-лінійним відображенням півплощину $\operatorname{Re} t < 0$ в круг $|w| < 1$, а точку $t = \operatorname{Ln} a$ в точку $w = 0$. Це робиться за допомогою функції $w = \frac{t-t(0)}{t+t(0)}$. Остаточне відображення має вид

$$w = w(z) = \frac{\operatorname{Ln} \frac{a-z}{1-z\bar{a}} - \operatorname{Ln} a}{\operatorname{Ln} \frac{a-z}{1-z\bar{a}} + \operatorname{Ln} a}.$$

На завершення знайдемо ще й $w'(0)$ для того елемента, що відображає функція $w(z)$, для якого $w(0) = 0$.

Маємо $w'(0) = \frac{1-|a|^2}{a} \cdot \frac{1}{2 \ln|a|}$. Не важко перевірити, що $|w'(0)| > 1$ ($0 < |a| < 1$).

4.3 Відображення більш складних областей

Розглянемо деякі відображення більш складних областей, обмежених колами.

Приклад 4.10 Півплощину $P = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ з викинутим кругом $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - h| < 1\}$, ($h > 1$) відобразимо на кільце $K' = \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < 2\}$. Знайдемо також величину параметра h (рис. 4.6).

Скористаємося розв'язками попередніх прикладів. Оскільки повинна виконуватися умова $|w| = 2$, то функцію можна записати у вигляді:

$$w = e^{i\theta} 2 \frac{z - \sqrt{h^2 - 1}}{z + \sqrt{h^2 - 1}}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

Нехай $p = 1, R = 1$, знаходимо:

$$1 = 2(h - \sqrt{h^2 - 1}), \quad h = \frac{5}{4}$$

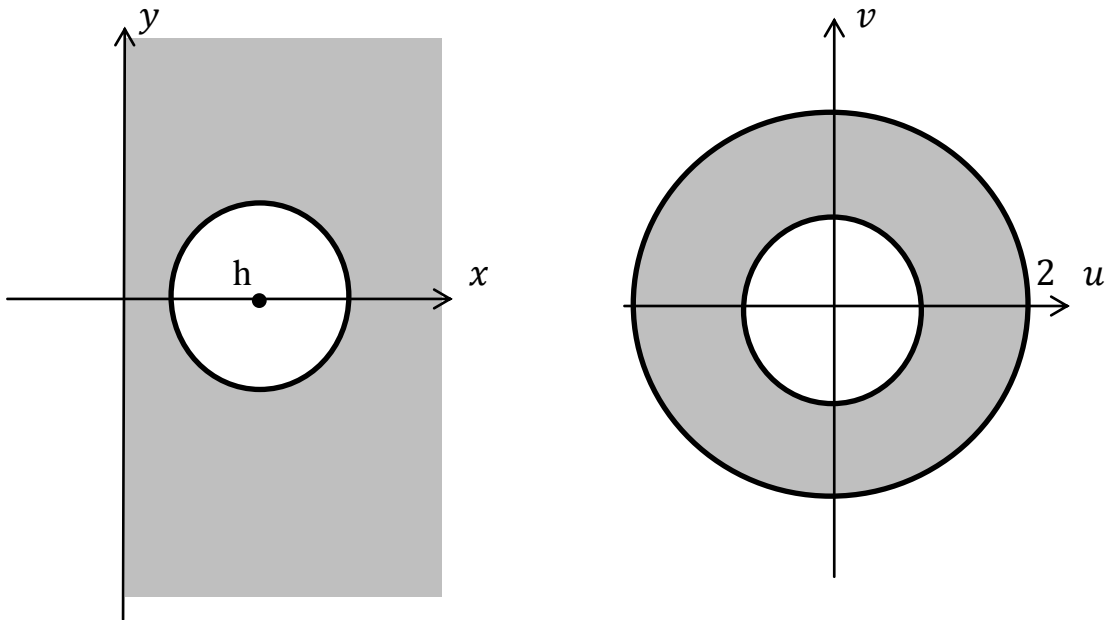


Рисунок 4.6 – Півплощина з викинутим кругом та кільце

(попередньо помноживши праву частину на 2, приймаючи до уваги (4.1)).

Підставимо в (4.1) $h = \frac{5}{4}$, остаточно отримаємо:

$$w = e^{i\theta} \cdot 2 \cdot \frac{4z - 3}{4z + 3}$$

Приклад 4.11 Півплощину $P = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ з викинутим кругом $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - h| < R\}$ ($h > R$) відобразимо на кільце $K' = \{w \in \mathbb{C} : p < |w| < 1\}$ так, щоб уявна вісь перейшла в коло $\gamma = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$. Знайдемо значення p (рис. 4.7).

Знайдемо точки $\pm a$, симетричні одночасно відносно кола $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - h| = R\}$ і уявної осі. Вони задовольняють умові $(h - a)(h +$

$+a) = R^2$, тобто $h^2 - a^2 = R^2$, $a_{1,2} = \pm\sqrt{h^2 - R^2}$. Відображення w шукаємо у вигляді

$$w = e^{i\theta} \cdot \frac{z - \sqrt{h^2 - R^2}}{z + \sqrt{h^2 - R^2}}, \quad \theta \in R.$$

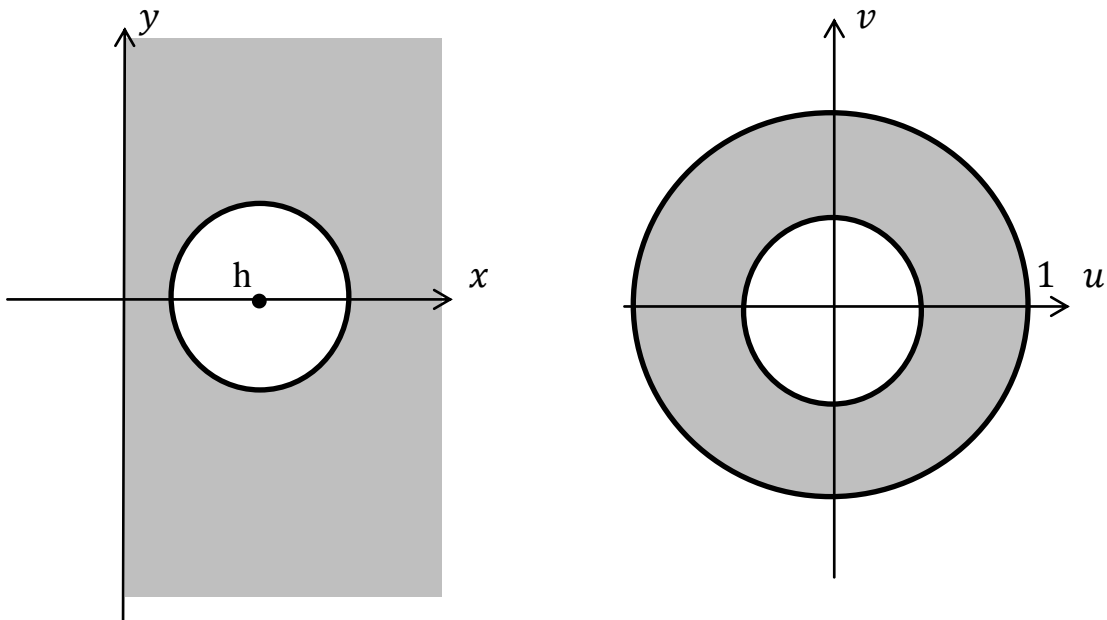


Рисунок 4.7- Півплощина з викинутим кругом та кільце

При $z = iy$ маємо

$$w = e^{i\theta} \frac{iy - \sqrt{h^2 - R^2}}{iy + \sqrt{h^2 - R^2}}, \quad |w| = |e^{i\theta}| \left| \frac{iy - \sqrt{h^2 - R^2}}{iy + \sqrt{h^2 - R^2}} \right| = 1.$$

Отже, уявна вісь відображається в коло γ . Оскільки точка $h + R$ належить колу K , та це коло переходить в коло радіуса p з центром в точці $w = 0$, то

$$p = \frac{h + R - \sqrt{h^2 - R^2}}{h + R + \sqrt{h^2 - R^2}} = \frac{\sqrt{h + R} - \sqrt{h - R}}{\sqrt{h + R} + \sqrt{h - R}} = \frac{h - \sqrt{h^2 - R^2}}{R} = \frac{h}{R} - \sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^2 - 1}.$$

Приклад 4.12 Відобразимо двозв'язну область, обмежену сфокусованими еліпсами

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2 + k^2} + \frac{y^2}{b^2 + k^2} = 1 \quad (a > 0),$$

на концентричне кругове кільце з центром в початку координат. А також знайдемо модуль даної двозв'язної області. Нагадаємо (з розділу 3), що кожна двозв'язна область, границі якої не вироджуються в точки, може бути конформно відображена на концентричне кільце з визначеним відношенням μ радіусів зовнішнього й внутрішнього кіл. При цьому число μ називають модулем двозв'язної області.

Застосуємо спочатку перетворення подібності $w_1 = \frac{z}{\sqrt{a^2 - b^2}}$. Воно перетворює заданий еліпс в еліпс з фокусами в точках ± 1 й півосями $\bar{a} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, $\bar{b} = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$. Далі слід використати складнішу функцію.

За допомогою функції, оберненої до функції Жуковського (підрозділ 2.6), відображаємо еліптичне кільце на кругове:

$$w_2 = w_1 + \sqrt{w_1 - 1} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left(z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)} \right).$$

У загальному випадку шукане відображення w має вигляд:

$$w = \alpha \left(z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)} \right), \quad \alpha \in \mathbb{C} - \text{довільна.}$$

При цьому модуль області дорівнює відношенню радіусів кіл концентричного кільця. В площині w_1 півосями є

$$\bar{a}_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \bar{a}_2 = \sqrt{\frac{a^2 + k^2}{a^2 - b^2}},$$

оскільки $\bar{a} = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right)$, то одержимо $r = \bar{a} \pm \sqrt{\bar{a}^2 - 1}$.

Таким чином маємо відношення:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \pm \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2} - 1}}{\sqrt{\frac{a^2 + k^2}{a^2 - b^2}} \pm \sqrt{\frac{a^2 + k^2}{a^2 - b^2} - 1}} = \frac{a \pm b}{\sqrt{a^2 + k^2} \pm \sqrt{b^2 + k^2}},$$

де $\mu = \frac{a-b}{\sqrt{a^2+k^2}-\sqrt{b^2+k^2}}$.

4.4 Застосування конформних відображень многозв'язних областей

Застосування відображень різноманітне. Наприклад, розглянемо поле двох різнойменно заряджених паралельних кругових циліндрів, які розташовані зовні одне одного.

Задача побудови такого поля зводиться до задачі побудови поля в зовнішності двох кіл C_1 і C_2 . Нехай a_1 і a_2 – центри цих кіл. Побудуємо на загальній до них дотичній b_1b_2 , як на діаметрі, півколо C^* . Точки z_1 і z_2 перетину C^* з лінією центрів a_1a_2 симетричні одночасно відносно обох даних кіл C_1 і C_2 . Насправді, коло C^* і пряма a_1a_2 ортогональні і до C_1 і до C_2 .

Якщо ми тепер дробово-лінійним відображенням перетворимо точки z_1 і z_2 в точки 0 і ∞ допоміжної площини w :

$$w = \frac{z-z_1}{z-z_2}, \quad (4.6)$$

то кола C_1 і C_2 перейдуть в кола C'_1 і C'_2 , для яких точки $w = 0$ та $w = \infty$ є симетричними. Звідси випливає, що кола C'_1 і C'_2 концентричні: їх центр співпадає з точкою $w = 0$. Комплексним потенціалом допоміжного поля згідно з $w = ki \operatorname{Ln} f(z)$ буде функція $w = ki \operatorname{Ln} w$, а для початкового поля – відповідно функція

$$w = ki \operatorname{Ln} \frac{z-z_1}{z-z_2}. \quad (4.7)$$

Змінюючи константу k , ми можемо домогтися заданої різниці потенціалів між C_1 і C_2 .

Комплексний потенціал (4.7) співпадає з комплексним потенціалом поля двох різнойменних точкових зарядів, якщо рахувати постійну $k = 2q$. Тому картина поля в зовнішності C_1 і C_2 співпадає з картиною поля. Кола C_1 і C_2 належать сімейству екіпотенційних ліній. З цього прикладу видно, що картина поля не змінюється (принаймні, в частині площини), якщо які-небудь з екіпотенційних ліній замінити провідниками. В цьому полягає так званий принцип затвердіння. В гідромеханіці згідно цього принципу можна замінити твердими стінками лінії струму рідини.

Також в якості застосування розглянемо приклад про поле двопровідної лінії. Поле двопровідної лінії є окремим випадком поля попередньої задачі. Абсциси x точок z_1 і z_2 , симетричних одночасно відносно обох кіл, визначаються з рівняння $(a+x)(a-x) = r^2$, звідки

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Звідси, формула $w = ki \operatorname{Ln} w$ набуває виду

$$w = ki \operatorname{Ln} \frac{z + \sqrt{a^2 - r^2}}{z - \sqrt{a^2 - r^2}}. \quad (4.8)$$

Запишемо умову того, що різниця потенціалів між C_1 і C_2 дорівнює V_0 . Для цього обчислимо різницю уявних частин (4.8) в точках $a - r$ і $a + r$:

$$V_0 = k \ln \left| \frac{a-r+\sqrt{a^2-r^2}}{a-r-\sqrt{a^2-r^2}} \right| - k \ln \left| \frac{a+r+\sqrt{a^2-r^2}}{a+r-\sqrt{a^2-r^2}} \right| = 2k \ln \frac{a+\sqrt{a^2-r^2}}{r}.$$

Ця формула дозволяє визначити k по заданій величині V_0 :

$$k = \frac{V_0}{2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{r}} \approx \frac{V_0}{2 \ln \frac{2a}{r}}$$

Зауважимо, що r мале в порівнянні з a .

Ми навели лише деякі приклади застосування відображень областей, обмежених колами, але можна їх застосовувати до широкого класу задач.

ВИСНОВКИ

Застосування елементів теорії конформного відображення, зокрема, конформних відображень як однозв'язних так і многозв'язних областей, обмежених колами займає певне місце в комплексному аналізі.

У процесі роботи над темою кваліфікаційної роботи були розширені і поглиблені знання з деяких розділів теорії конформних відображень, зокрема, теорії аналітичних функцій, наведені основні властивості лінійних, дробово-лінійних та інших елементарних функцій.

У роботі розглянуто класичні області, як частинний випадок многозв'язних областей. З'ясовано класи скінченнозв'язних областей, для яких можна побудувати конформні відображення. Побудовані конкретні конформні відображення областей, обмежених колами.

На прикладі розв'язання окремих задач теорії конформних відображень показано ефективність застосування конформних відображень до розв'язування прикладних задач.

Результати, отримані при побудові конформних відображень, і наведені в даній роботі, можна застосовувати в технічних розрахунках, фізиці, математиці.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Гребенюк С. М., Тітова О. О., Панасенко Є. В. Теорія функцій комплексної змінної: навчальний посібник для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки «Прикладна математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2015. 72 с.
2. Евграфов М. А. Аналитические функции. Москва : Наука, 1991. 448 с.
3. Иванов В. И., Попов В. Ю. Конформные отображения и их приложения. Москва : Едиториал УРСС, 2002. 324 с.
4. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Москва: Проспект, изд-во МГУ, 2007. 672 с.
5. Келдыш М. В. Конформные отображения многосвязных областей на канонические области. *УМН (Успехи математических наук)*. 1939. Вып. 6. С. 90–119.
6. Копенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. Москва : Изд-тво иностранной лит-ры, 1963. 390 с.
7. Краснов М. Л., Киселев Л. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного: задачи и примеры с подробными решениями. Москва : Наука, 2003. 208 с.
8. Краснов М. Л., Киселев Л. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Задачи и упражнения. Москва : Наука, 1981. 215 с.
9. Лаврентьев М. А., Шабат В. В. Методы теории функций комплексного переменного. Москва : Наука, 1973. 749 с.
10. Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Функция комплексного переменного с элементами операционного исчисления. Санкт-Петербург : Изд-во «Лань», 2002. 304 с.

11. Тітова О. О., Гребенюк С. М. Конформні відображення: навчальний посібник для здобувачів вищої степеня освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо професійної програми «Математика». Запоріжжя: ЗНУ, 2020. 80 с.

12. Фукс Б. А., Шабат Б. В. Функция комплексного переменного и некоторые их приложения. Москва : Наука 1964. 388 с.