МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра фундаментальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ФІЛЬТРІВ ПРИ АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ»**

Виконала : студентка 2 курсу, групи 8.1119-з

спеціальності 111 математика

(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми математика

(назва освітньої програми)

К. О. Тарасова

(ініціали та прізвище)

Керівник завідувач кафедри фундаментальної математики, доцент, д.т.н. Гребенюк С. М.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент декан математичного факультету, професор, д.т.н. Гоменюк С. І.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя

2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної математики,
д.т.н., доцент
_______________ Гребенюк С.М.
(підпис)

« 22 » травня 2020 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Тарасовій Катерині Олексіївні
(прізвище, ім’я та по батькові)

1. Тема роботи Застосування лінійних фільтрів при апроксимації функції двох змінних

керівник роботи Гребенюк Сергій Миколайович, д.т.н., доцент
(прізвище, ім’я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 20 » травня 2020 року № 577-с

2. Строк подання студентом роботи ____________

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.
3. Перелік задач до розв’язання

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Постановка задачі.
2. Основні теоретичні відомості.
3. Лінійні фільтри та їх застосування при апроксимації функції двох змінних

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов’язкових креслень)
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання ____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	04.06.2020	
2.	Збір вихідних даних.	02.07.2020	
3.	Обробка методичних та теоретичних	12.08.2020	
	джерел.		
4.	Розробка першого розділу.	27.09.2020	
5.	Розробка другого розділу.	26.10.2020	
6.	Оформлення та нормоконтроль	24.11.20	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	11.12.2020	

Студент ________________ К. О. Тарасова
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ________________ С. М. Гребенюк
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ________________ О. Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Застосування лінійних фільтрів при апроксимації функції двох змінних»: 47 с., 5 рис., 12 табл., 11 джерел.

АПРОКСИМАЦІЯ, ІНТЕРПОЛЯЦІЯ, ЛІНІЙНИЙ ФІЛЬТР, МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ, ФУНКЦІЯ ДВОХ ЗМІННИХ

Об’єкт дослідження – лінійні фільтри.

Мета роботи: застосувати лінійні фільтри при апроксимації функції двох змінних .

Метод дослідження – аналітичний, чисельний.

Кваліфікаційну роботу присвячено застосуванню лінійних фільтрів при апроксимації функції двох змінних. У роботі розглянуто проблему згладжування числових даних при апроксимації функцій, яка має актуальне значення, особливо для функцій, що отримані в результаті експериментів або спостережень.

Надано основні теоретичні відомості про апроксимацію функцій, для згладжування функцій використовувалися лінійні фільтри. Описано їх застосування при корегуванні числових даних для одновимірних функцій. На основі методу найменших квадратів знайдено основні співвідношення для лінійного фільтру у випадку дослідження таблично заданої функції двох незалежних змінних.

Отримані співвідношення для лінійного фільтру використано до згладжування таблично заданих функцій двох змінних та подальшої апроксимації згладжених функцій методом найменших квадратів.

SUMMARY

Master’s Qualification Thesis "Application of linear filters in the approximation of the function of two variables": 47 pages, 5 figures, 12 tables, 11 references.

APPROXIMATION, INTERPOLATION, LINEAR FILTER, LESS SQUARES METHOD, MEASUREMENT OF APPROXIMATION, MEASURE OF CHEBYSHEV.

The object of research is linear filters.

Purpose: to apply linear filters when approximating two variables.

The research method is analytical, numerical.

Qualification work is devoted to the use of linear filters in approximating the function of two variables. The paper considers the problem of smoothing numerical data in the approximation of functions, which is relevant, especially for functions obtained as a result of experiments or observations.

The basic theoretical information on approximation of functions is given, linear filters were used for smoothing of functions. Their application in the correction of numerical data for one-dimensional functions is described. Based on the least squares method, the basic relations for the linear filter are found in the case of studying a tabular function of two independent variables.

The obtained relations for the linear filter were used to smooth the tabular functions of the two variables and then approximate the smoothed functions by the method of least squares.

ЗМІСТ

ВСТУП

У світі, що нас оточує, все взаємно пов'язане. Саме тому задачі, які зустрічаються найчастіше, це задачі пошуку залежності між різними величинами, що дозволяє по значенню однієї величин визначити значення іншої.

Наближене відновлення функції – важлива задача, яка використовується в багатьох розділах математики при розв'язуванні різноманітних математичних, фізичних, інженерних та інших задач. У математичній сфері більш широко використовується термін «апроксимація функцій».

Апроксимація – метод наближення, при якому знаходяться додаткові значення функції, відмінні від вже відомих. Найбільш поширеною задачею апроксимації функцій є задача пошуку аналітичного виразу для функції, що представлена дискретними значеннями. Ці значення, отримуються у результаті експериментів, спостережень та інших досліджень і, як правило, представляють собою числові масиви великих розмірів. Отримані масиви незручні для подальшого застосування, особливо якщо їх використовують при побудові математичних моделей, дослідження яких потребує проведення математичних перетворень (диференціювання, інтегрування, побудови графічних залежностей тощо). Тому отримання аналітичних виразів значно спрощує використання таких функцій.

Іншою проблемою, що виникає при отриманні дискретних значень функції у результати експериментів та спостережень, є вплив випадкових факторів (вплив неврахованих факторів, похибки вимірювальних приладів, людський фактор тощо), які дещо викривляють отримані значення від залежностей, які підкорюються певним законам природи, суспільства тощо. Тому у деяких випадках нагальною задачею є попереднє корегування отриманих даних, що зменшує ступінь їх викривлення під впливом випадкових факторів і дозволяє при апроксимації отримувати залежності, що більше відповідають реальному стану речей.

Крім того при апроксимації функцій, іноді відбувається навпаки, для точних аналітичних представлень функції будуються їх наближені аналітичні представлення. Основною метою таких перетворень є пошук функцій із «гарними» властивостями. Тобто, інколи аналітичний вираз функції має громіздкий вид, що або не дозволяє отримати точний розв'язок задачі (наприклад, інтеграли, що не беруться), або час на розв'язання задачі перевищує допустимі межі. Заміна таких функцій на функцію з «гарними» властивостями дозволяє уникнути цією проблеми, хоча й за рахунок точності постановки вихідної задачі.

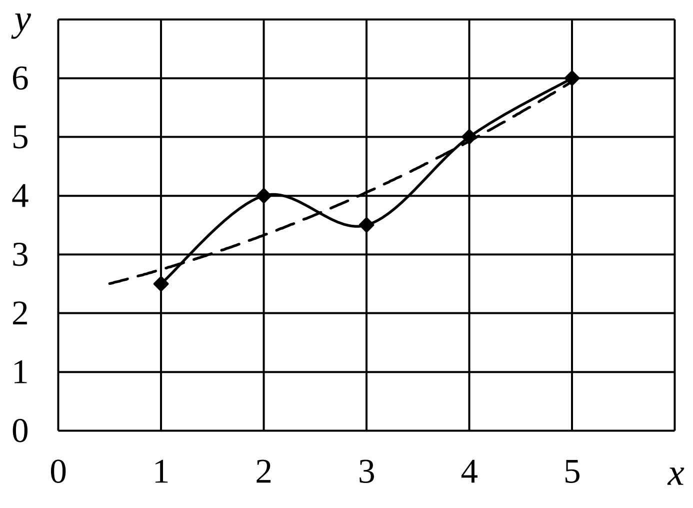
1 АНАЛІЗ ВИКОРИСТАННЯ ЛІНІЙНИХ ФІЛЬТРІВ ПРИ АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

1.1 Поняття апроксимації функції. що залежить від однієї змінної

Апроксимація – метод наближення, що полягає в заміні одних математичних об'єктів (даних) на інші, які є близькими до вихідних в певному сенсі.

При інтерполяції функція, , заданих їх дискретними значеннями таблично, інтерполяційна функція строго проходить через вузлові точки таблиці внаслідок того, що кількість коефіцієнтів в інтерполяційної функції дорівнює кількості табличних значень.

Апроксимація – метод наближення, при якому знаходяться додаткові значення, відмінні від табличних даних, наближена функція будується не на всіх табличних даних, а на меншій вибірці. В даному випадку функція, що апроксимує, буде проходити не через вузли, як у випадку інтерполяції, а між ними (рис. 1.1).



——— – інтерполяційна функція

– – – – – апроксимаційна функція

Рисунок 1.1 – Форма апроксимаційної функції

Інтерполяцією табличні дані описуються більш точно, ніж при апроксимації, але в ряді випадків при вирішенні практичних завдань застосовується останній метод:

– при значній кількості табличних даних (інтерполяційна функція буде громіздкою);

– коли вид функції визначено експериментальними точками та експеримент потрібно описати теоретичною залежністю;

– для згладжування згладжувати похибки експерименту (рис. 1.2). З рисунка видно, що значення y постійно збільшується при зростанні x, а розкид даних щодо апроксимуючої функції можна пояснити похибкою експерименту;

– інтерполяційною функцією неможливо описати табличні дані з декількома точками з однаковим значенням аргументу, в разі повторення експерименту при одних і тих же початкових умовах.

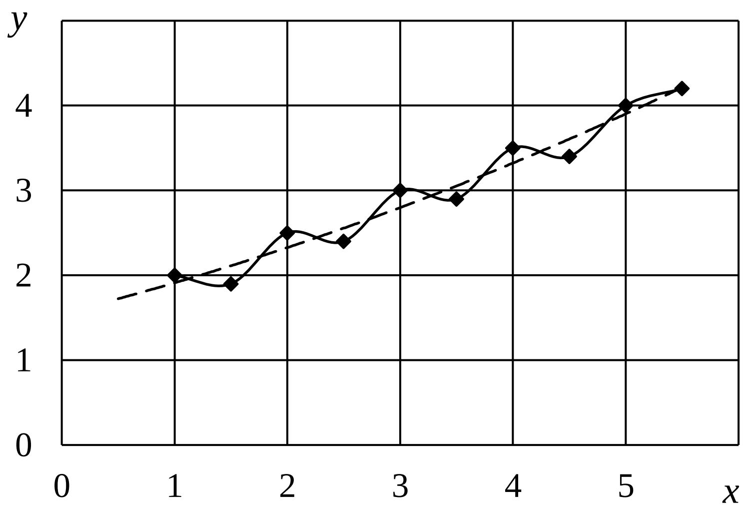


Рисунок 1.2 – Приклад побудови апроксимаційної функції

Припустимо, що в ході деякого експерименту було проведений ряд вимірів величин y при зміні деякої величини x (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Вид таблиці експериментальних даних

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Якщо аналітичний вираз функції, яка описує закон зміни y_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, невідомо чи досить складно, то виникає задача знайти таку емпіричну формулу

$$\tilde{f} = \tilde{y}(\mathrm{x}),$$

значення якої при $x = x_i$ мало відрізнялися б від дослідних даних.

Геометрично задача побудова функції $\tilde{f}$ за емпіричною формулою полягає в проведенні усередненої кривої – кривої, що проходить через середину області значень (табл. 1.2) (рис. 1.3).

Таблиця 1.2 – Експериментальні дані

x	1	2	3	4	5
y	2,5	4	3,5	5	5,5

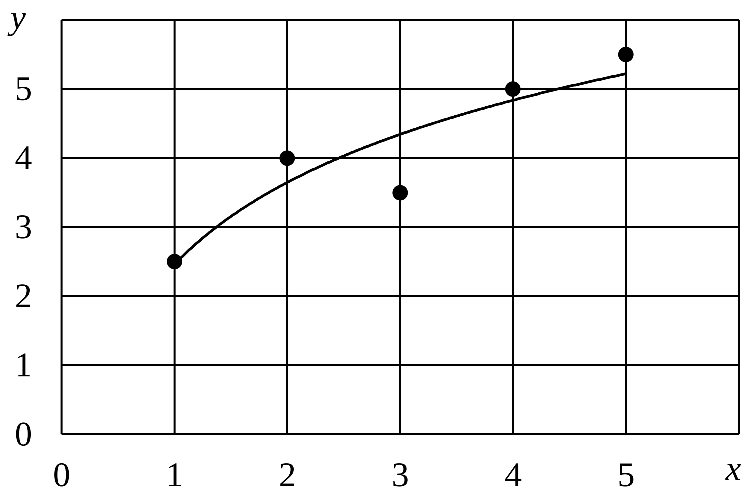


Рисунок 1.3 – Приклад апроксимаційної функції для даних

При проведенні експерименту дані x_i та y_i зазвичай наближені, тобто містять помилки, тому інтерполяційна формула, що базується на експериментальних даних, повторює ці помилки.

При апроксимації емпірична залежність згладжує похибки експерименту, не повторюючи, як у випадку інтерполяції, помилки.

При побудові емпіричної залежності визначають:

– загальний вигляд формули;

– найкращі параметри емпіричної залежності.

Якщо характер залежності між вхідною величиною x і досліджуваною y невідомий, то вид емпіричної формули, яка описує залежність $y\ (x)$, є довільним. При цьому перевага віддається простим формулам, що мають хорошу точність.

При відсутності проміжних даних приймається:

– аналітичний характер емпіричної формули;

– плавний безперервний вид графіка.

Існує кілька методів апроксимації, один з яких метод найменших квадратів.

Суть методу найменших квадратів полягає в знаходженні таких значень x_i, при яких сума квадратів відхилень (помилок) $e_i = y_i - f_i\ (x)$ буде прагнути до мінімуму

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 \to \min_x. \qquad (1.1)$$

Оскільки у шуканій залежності кожне значення x_i в загальному випадку «супроводжується» відповідним коефіцієнтом $a_i, (i = 0, 1, 2, \dots, n)$, то задача зводиться до знаходження цих коефіцієнтів. Введемо позначення функції

$$F(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 \to \min_x.$$

Тоді, на основі обернення у точці мінімуму функції F в нуль її частинних похідних, для визначення вищезазначених коефіцієнтів складається нормальна система:

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{da_0} = 0; \\ \dfrac{dF}{da_1} = 0; \\ \dots \\ \dfrac{dF}{da_n} = 0. \end{cases}$$

Істотним недоліком методу є громіздкість обчислень, внаслідок чого до нього вдаються при досить точних експериментальних даних при необхідності отримання точних значень функції.

1.2 Лінійна апроксимація

У ряді експериментів дані розподіляються таким чином, що виявляється можливим описати їх зміну лінійною залежністю (лінійним рівнянням) (рис. 1.4)

$$P(X) = a \cdot x + b. \tag{1.2}$$

Формули для розрахунку коефіцієнтів a і b визначаються за методом найменших квадратів (1.2), підставивши замість $f\ (x)$ формулу (1.3)

$$F = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a \cdot x_i - b)^2 \to \min.$$

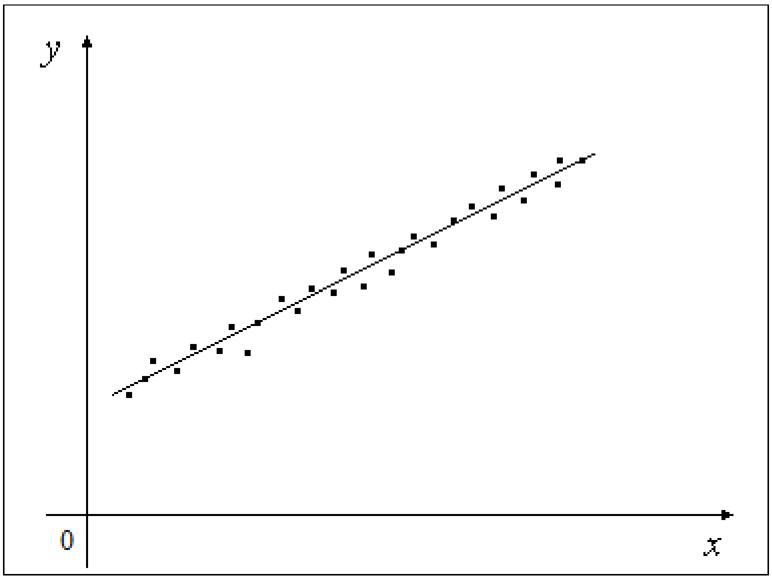


Рисунок 1.4 – Лінійна апроксимація

Потім складається і вирішується система з двох рівнянь з двома невідомими – знаходяться приватні похідні функції за змінними a і b, прирівнюючи до нуля ці похідні:

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{db} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - a \cdot x_i - b) \cdot 1 = 0, \\ \dfrac{dF}{da} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - a \cdot x_i - b) \cdot x_i = 0. \end{cases}$$

Виходить система рівнянь

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i), \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i . \end{cases} \quad (1.3)$$

Вирішуючи отриману систему методом підставлення, отримуємо формули для знаходження коефіцієнтів a і b:

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot y_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \tag{1.4}$$

$$b = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot y_i)}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{1.5}$$

1.3 Аналіз методів апроксимації функції з випадковими складовими

Як правило, ми задаємо емпіричні дані числовими рядами значень двох величин: незалежної (x_k) і залежною (y_k). Кожна з яких може містити випадкові складові самої різної природи, крім певної регулярної складової. Ці складові обумовлені як статистичною природою досліджуваних процесів, так і чинниками процесів вимірювань і перетворення даних (помилки вимірювань, шуми, перешкоди,), що мають вплив ззовні. В загальному випадку незалежна змінна x_k задається детермінованою, а її випадкова складова "відбивається" на залежну змінну y_k. Потрібно також, щоб значення випадкової складової було залежною змінною в розподілені по деякому ймовірнісному закону (наприклад – нормальному) [6].

Коли ми виконуємо апроксимацію даних, то передбачаємо існування певного детермінованого зв'язку $y\,(x)$ між регулярними складовими цих двох числових рядів на статистично значущому рівні, достатньому для її виявлення на рівні випадкових складових. До числа невизначених і неоднозначних саме і відноситься завдання виявлення такої закономірності, результат якої залежить від трьох основних суб'єктивних факторів:

– вибору методу побудови наближення (параметрів математичної моделі) та міри близькості між залежною змінною до шуканої функції;

– вибору міри близькості залежною змінною до шуканої функції і методу побудови наближення (параметрів математичної моделі);

– вибору відповідного класу функції апроксимації (статичної, тригонометричної та ін.), що відповідає фізичній природі модельованого процесу;

– методу оптимізації порядку модельної функції або числа членів ряду апроксимаційних виразів.

З цього випливає, що найкраща апроксимація може бути забезпечена тільки завдяки досить гнучким інтерактивним алгоритмам на основі багатоетапних ітераційних процесів які дають можливість корекції на кожному етапі.

Міра наближення. Широковідомий критерій найкращого наближення у вигляді мінімуму статичної різниці між змінною y_k та апроксимаційною функцією $\mathcal{G}(x_k)$ має вигляд:

$$\sum_k [Y_k - \mathcal{G}(x_k)]^s \to \min, \tag{1.6}$$

де $s > 0$ – додатне число [6].

В методі найменших квадратів (МНК) квадратична міра реалізується при $s = 2$ та забезпечує максимальну правдоподібність функції наближення при нормальному розподілі випадкової складової залежною змінною y_k. Незміщеною оцінкою заходів наближення в МНК є дисперсія залишків:

$$D = \frac{\{\sum_k [\mathrm{Y_k} - \mathrm{G(x_k)}]^2\}}{\mathrm{k_m}}, \tag{1.7}$$

де m – кількість параметрів функції наближення, k_m – число ступенів свободи [7].

Однак, емпіричні дані можуть містити викиди та грубі помилки, які викликають зміщення обчислюваних параметрів. Їх вплив зазвичай виключається цензуруванням даних: обчисленням гістограми різниць (залишків)

$y_k - \mathcal{G}(xk)$ після визначення першого наближення функції апроксимації і винятком "хвостових" елементів гістограми (до 2.5% від кількості емпіричних даних, або, з використанням r- або t- розподілів на підставі оцінок ймовірностей різко виділяються, елементів даних).

Міра найменших модулів (Метод Лагранжа) реалізується при $S = 1$ і застосовується при розподілах випадкових складових залежною змінною за законами, близькими до закону Лапласа (двосторонній експоненціальний розподіл). Такий спосіб базується на визначенні між графіками емпіричних даних і функції апроксимації. Міра найменших модулів в порівнянні з квадратичною, є більш стійкою, в тому числі при наявності випадкових складових з великими амплітудами (довгі "хвости" різницевих гістограм) [4]. Оцінки за модулем отримали назву «стійких».

Властивості квадратичної міри і заходи найменших модулів певною мірою поєднуються при $S = \frac{3}{2}$.

Мінімаксна міра (Міра Чебишева – мінімізація максимальної розбіжності функції апроксимації з даними) забезпечує найкраще наближення при рівномірному розподілі значень випадкової складової, але не є стійкою при наявності великих розбіжностей даних з функцією апроксимації [4].

Функція, що апроксимує, в принципі, може бути математичною функцією будь-якого типу, лінійною комбінацією різних функцій або функціональних, тригонометричних і будь-яких інших функцій. В основу її побудови бажано закладати теоретичні припущення про сутність досліджуваного явища, хоча б за такими властивостями, як область визначення змінних і похідних, асимптоти, мінімуми та максимуми.

При повній відсутності апріорної інформації про розподіл випадкової складової даних, на початковому етапі зазвичай використовується квадратична міра наближення, при цьому істотне значення має кількість параметрів, що задаються функції апроксимації, особливо при малій кількості даних. Як випливає з (1.7), при інших рівних умовах доцільно використовувати функції з мінімальною кількістю параметрів, що задаються, що забезпечує більшу кількість ступенів свободи та менші значення дисперсії залишків.

Найбільшого поширення в практиці апроксимації при відсутності теоретичних аспектів досліджуваних явищ отримали функціональні ряди, для яких визначальне значення має порядок функції (моделі), що апроксимує.

Порядок моделі обмежує число членів функціонального ряду апроксимаційної функції певною оптимальною кількістю членів ряду, яке забезпечує обґрунтовану розбіжність з фактичними даними та мінімізує відхилення від шуканої регулярної складової даних.

Очевидно, що для функціональних рядів порядок моделі (ступінь ряду для статичних рядів) визначає значення ступеня наближення. При підвищенні порядку моделі мінімум функції (1.8) прагне до нуля. Однак це означає, що при підвищенні порядку моделі в функцію апроксимації входить не тільки регулярна складова даних, але все більша і більша частка випадкових складових, в границі до повної відповідності функції $\mathcal{G}_k$ вихідними даними y_k. Але підвищення ступеня наближення до вихідних даних при наявності в них випадкових складових з якогось певного моменту (близької моделі) не тільки не буде наближати функцію апроксимації до регулярних складових даних, а навпаки – збільшувати розбіжність. З цієї точки зору термін "ступеня наближення" (1.7) було б доцільніше замінити терміном "міра апроксимації" даних, а під мірою наближення розуміти значення заходи апроксимації, при якій забезпечується максимальний ступінь наближення функції апроксимації до регулярної складової даних (мінімум дисперсії різниці функцій апроксимації та регулярної складової).

1.4 Дослідження використання лінійних фільтрів при апроксимації функції двох змінних

Розглянемо варіант використання лінійних фільтрів на прикладі інженерного доданку.

Імпульсною перехідною функцією $w(t)$, або ваговою функцією системи, називають зміну вихідної величини у часі, викликану вхідним впливом типу δ-функції, за умови, що до моменту додатка вхідного впливу система перебувала в спокої: $w(t) = y(t)$ при $x(t) = \delta(t)$.

Використання вагової функції дозволяє описувати систему у вигляді інтеграла Дюамеля (інтеграла згортки) для неперервного випадку.

$$y(t) = \int_0^t w(\tau)x(t-\tau)d\tau. \tag{1.8}$$

Тобто задача побудови цифрового динамічного фільтра ставиться як задача відтворення невідомої $w(\tau)$, використовуючи спостереження за входом об'єкта $x(t)$ та його виходом $y(t)$. Як правило вихід об'єкта $y(t)$ спостерігається нами не безпосередньо, а у спотвореному вигляді, як сума $\varphi(t) = y(t) + N(t)$, де $N(t)$ – завада (шум) з характеристиками $M[N(t)] = 0$; $M[N(t)]^2 = \sigma^2$; $M[N(t_1) \cdot N(t_2)] = 0$; $t_1 \neq t_2$; $M[N(t) \cdot x(t_1)]$, тобто як «білий шум», некорельований із вхідним сигналом [4].

Формула (1.8), з урахуванням накладеного на вихідний сигнал шуму $N(t)$ набуває вигляду:

$$\varphi(t) = \int_0^T w(\tau)\, x(t-\tau)d\tau. \tag{1.9}$$

Напишемо формулу (1.9) у дискретному вигляді

$$\varphi[n] = \sum_{m=0}^{m=M} w[m]x[n-m],\ n = M, \dots, N, \tag{1.10}$$

де $m = 0, \dots, M;\ M = \frac{T}{\Delta\tau};\ \Delta\tau = \Delta t;$

$[0, N]$ – інтервал спостереження за об'єктом;

$[0, M]$ – інтервал інерційності об'єкта.

У загальному випадку система лінійних рівнянь для поточкового визначення невідомих значень вагової функції фільтра за даними спостереження за входом та виходом має вигляд

$$\begin{gathered} \varphi[n] = w[0]x[n] + w[1]x[n-1] + \dots + w[M]x[n-M], \\ \dots \\ \varphi[n+M] = w[0]x[n+M] + w[1]x[n+M-1] + \dots + w[M]x[n] \end{gathered} \tag{1.11}$$

Ми маємо $\mathrm{M}+1$ рівняння з $\mathrm{M}+1$ невідомими.

Така постановка задачі некоректна, що не сприяє її якісному вирішенню. По-перше, виходи, які спостерігаються, зашумлені, тому знайдене рішення буде залежати від вибраних $\varphi[n]$, по-друге, навіть у постановці МНК рішення не буде стійким. З проведеного в роботі аналізу відомих підходів до вирішення некоректних задач, випливає, що по точковий підхід до знаходження вагової функції не є правильним. Наявність вимоги шукати рішення на компактній множині примушує нас звернутися до пошуку рішення серед апроксимацій вагової функції багаточленами.

Розглянуті відомі підходи до апроксимації функцій, а саме поліномами, в тому числі тригонометричними поліномами, ортогональними багаточленами, сплайн-функціями, логістичними функціями. Зроблено вибір на користь ортогональних багаточленів.

На основі цього вибору запропоновано структуру цифрового фільтру й методику оцінювання його параметрів.

Замість рішення системи лінійних рівнянь (1.11) пропонується апроксимувати $w(\tau)$ (недоступну для прямого спостереження) поліномами одного з відомих класів (наприклад, Лежандра або Чебишева) на відрізку $[0,\ T]$

$$w(\tau) = \sum_{i=1}^{K} a_i P_i(\tau). \qquad (1.12)$$

Після підстановки (1.12) у (1.9), отримаємо

$$y(t) = \int_0^T w(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^T (\sum_{i=1}^{K} a_i P_i(\tau))x(t-\tau)d\tau =$$
$$= \sum_{i=1}^{K} a_i \left(\int_0^T P_i(\tau)x(t-\tau)d\tau\right).$$

Використаємо позначення

$$z_i(t) = \int_0^T P_i(\tau)x(t-\tau)d\tau, \qquad (1.13)$$

й отримаємо задачу апроксимації відомої функції через лінійну комбінацію інших відомих функцій.

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{K} a_i z_i(t). \qquad (1.14)$$

Виникає питання знаходження невідомих параметрів фільтра $\{a_1, a_2,\ \ldots, a_K\}$ через спостережені значення $x(t)$ й $\varphi(t)$.

В залежності від обраної метрики можна застосовувати один з двох відомих методів оцінювання. А саме – метод стохастичної апроксимації або метод найменших квадратів (МНК). Отримаємо залежності застосувавши МНК.

Оскільки на практиці значення $x(t)$ й $\varphi(t)$ подані у дискретному вигляді перейдемо до дискретного подання виразів (13) та (14):

$$\varphi[n] = \sum_{i=1}^{K} a_i z_i[n], \tag{1.15}$$

де

$$z_i[n] = \sum_{m=0}^{M} P_i[m] x[n-m],\ i = 1, \dots, K;\ n = M, M+1, \dots, N. \tag{1.16}$$

В нашому випадку критерій найменших квадратів набуває вигляду

$$S = \sum_{n=M}^{n=N} \left(\varphi[n] - \sum_{k=1}^{k=K} a_k z[n]\right)^2, \tag{1.17}$$

що призводить до системи K нормальних рівнянь

$$\sum_{n=M}^{n=N} \varphi[n] z_j[n] = \sum_{n=M}^{n=N} \left(\sum_{k=1}^{k=K} a_k z_k[n] z_j[n]\right). \tag{1.18}$$

Якщо перейти до матричних позначень

$$\widehat{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} = \|\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_K\|,$$
$$\Phi^{\mathrm{T}} = \|\varphi[M], \varphi[M+1], \dots, \varphi[N]\|,$$
$$\mathrm{Z} = \begin{Vmatrix} z_1[M] & \dots & z_K[M] \\ \dots & \dots & \dots \\ z_1[N] & \dots & z_K[N] \end{Vmatrix},$$

то матриця оцінок коефіцієнтів $\{a_i\}$, що входять у вираз (15), згідно із методом найменших квадратів знаходиться із виразу

$$\widehat{\mathrm{A}} = (\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Z})^{-1}\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\Phi. \tag{1.19}$$

Таким чином, методика оцінювання параметрів фільтру складається з таких етапів:

а) вибір багаточленів $P_i[m]$;

б) визначення їх кількості K;

в) визначення інтервалу інерційності M;

г) обрахування змінних $z[n]$;

д) формування матриць, що утворюють вираз (1.19);

е) розрахунок за формулою (1.19).

Оскільки виходи, як правило незалежні, достатньо побудувати фільтр для кожного з вихідних сигналів окремо. Їх сукупність й дасть змогу прогнозувати поведінку об’єкта в цілому.

Припустимо, що $\{w_1(\tau_1), w_2(\tau_2), \ldots, w_n(\tau_n)\}$ апроксимовані таким чином:

$$w_1(\tau_1) = \sum_{j_1=1}^{j_1=K_1} a_{j_1} P_{j_1}(\tau_1) x_1(t-\tau_1);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$w_n(\tau_n) = \sum_{j_n=1}^{j_n=K_n} a_{j_n} P_{j_n}(\tau_n) x_n(t-\tau_n).$$

Тоді $\{y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\}$ набувають вигляду

$$y_1(t) = \sum_{j_1=1}^{j_1=K_1} a_{j_1} \int_0^{T_1} P_{j_1}(\tau_1) x_1(t-\tau_1) d\tau_1;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n(t) = \sum_{j_n=1}^{j_n=K_n} a_{j_n} \int_0^{T_n} P_{j_n}(\tau_n) x_n(t-\tau_n) d\tau_n.$$

Не зашумлений загальний вихід такого фільтра обчислюється за формулою:

$$y(t) = \sum_{r=1}^{r=n} y_r(t) = \sum_{r=1}^{r=n} \left(\sum_{j_r}^{K_r} a_{j_r} \int_0^{T_r} P_{j_r}(\tau_r) x_r(t-\tau_r) d\tau_r \right).$$

Оскільки вихід $y(t)$ нами не спостерігається напряму, остаточна формула для безперервного випадку має вигляд

$$\varphi(t) = \sum_{r=1}^{r=n} y_r(t) = \sum_{r=1}^{r=n} \left(\sum_{j_r}^{K_r} a_{j_r} \int_0^{T_r} P_{j_r}(\tau_r) x_r(t-\tau_r) d\tau_r \right). \qquad (1.20)$$

Як і для одновимірного випадку, введення допоміжних змінних $z_{j_r}(t)$,

$$z_{j_r}(t) = \int_0^{T_r} P_{j_r}(\tau) x_r(t-\tau) d\tau$$

спрощує остаточну формулу

$$\varphi(t) = \sum_{r-1}^{n} \sum_{j_r=1}^{K_r} a_{j_r} z_{j_r}(t). \qquad (1.21)$$

Таким чином, спрощення системи індексування дає можливість спростити формулу (21):

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{nK} a_i \, z_i(t). \qquad (1.22)$$

Формула (1.22) ідентична формулі (1.14), тобто маємо узагальнений багатовимірний фільтр, тієї ж структури, що й одновимірний.

Перехід до дискретного подання

$$z_i[n] = \sum_{m=0}^{M} P_i[m] x_1[n-m],$$
$$\varphi(n) = \sum_{i=1}^{nK} a_i \, z_i(n),$$

дає можливість скористатися набутками щодо методики оцінювання невідомих параметрів $\{a_1, a_2, \ldots, a_{nK}\}$ із застосуванням МНК.

Введення змінних в часі коефіцієнтів (апроксимація коефіцієнтів багаточленами від часу). Не стаціонарність об’єкта при використанні інтегрального опису визначається залежністю вагової функції $w(\tau)$ від параметра t, вираз (1.8) набуває вигляду:

$$y(t) = \int_0^T w(t,\tau)x(t-\tau)d\tau. \qquad (1.23)$$

Найпростішою реакцією на це, як здається на перший погляд, є введення параметра t у формулу (1.19)

$$w(t,\tau) = \sum_{i=1}^{K} a_i(t)P_i(\tau). \qquad (1.24)$$

Апроксимуючи $a_i(t)$ багаточленами $\{P_j(t)\}$, отримаємо

$$a_i(t) = \sum_{j=1}^{J} b_{ji}P_{ji}(t), \;\; w(t,\tau) = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} b_{ji}\,P_{ji}(t)P_i(\tau).$$

Подальша процедура відноситься до визначення нових коефіцієнтів $\{b_{ji}\}$ замість старих $\{a_i\}$. Зміна кількості оцінюваних параметрів з K (у випадку стаціонарного об'єкта) до KJ (у випадку нестаціонарного) збільшує кількість оцінюваних параметрів у J разів.

Періодичне переоцінювання коефіцієнтів. Інтервал спостереження за входом й виходом нестаціонарного об'єкта $[1,\ N]$ розбивається на інтервали квазістаціонарності $[1,\ N_1]$, $[N_1+1,\ N_2]$, …, $[N_{p-1}+1,\ N_p]$, продовж яких поведінка об'єкта не дає підстав для оскарження точності стаціонарної моделі.

Введення діагональної матриці у рівняння найменших квадратів для забування старих даних. Для придання певної переваги (ваги) різним значенням ряду $\varphi(t)$ під час процесу обчислення пропонується ввести функцію "забування", яка б надавала більшої ваги "найсвіжішим" даним у порівнянні з "застарілими даними.

Розглянуті такі функції: експонента $K = \ell^{-Rt}$, при двох значеннях R ($R = 0{,}2$ й $R = 0{,}1$); пряма лінія $K = At + B$, при значеннях $A = -0{,}05$ й $B = 1$; гіпербола $K = \frac{1}{(t+1)}$.

Використання будь-якої функції "забування" змінює рівняння (1.19) на рівняння (1.25)

$$A = (ZKZ^{T})^{-1}Z^{T}K\Phi, \qquad (1.25)$$

де K − діагональна матриця "ваг".

На діагоналі матриці K знаходяться значення обраної функції K= K(t). Використання цієї матриці призводить до оцінювання стандартною процедурою МНК, яка вміє забувати застарілі дані. Завдання адаптації зводиться до знаходження розміру матриці K, яким визначається інтервал квазістаціонарності об’єкта. Як правила це – результат експериментування по зменшенню СКП в залежності від інтервалу спостереження.

Рекурентне оцінювання методом найменших квадратів. Розглянемо випадок, коли рівняння МНК має вигляд $\boldsymbol{\widehat{A}} = (\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\varphi$. Припустимо тепер, що до рівнянь, що мають місце у нашому випадку, додається ще одне додаткове рівняння, наприклад, $\boldsymbol{x^1}\mathbf{A} = \boldsymbol{z_{N+1}}$. Тоді маємо (ми вводимо індекс N, N+1, для того щоб вказати розмірність вектору вимірювання φ)

$$\boldsymbol{X}^{*}_{\boldsymbol{N+1}}A = \phi^{*}_{\boldsymbol{N+1}},$$

де

$$\boldsymbol{X}^{*}_{\boldsymbol{N+1}} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_N \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}} \end{bmatrix}, \quad \phi^{*}_{\boldsymbol{N+1}} \equiv \begin{bmatrix} \phi_N \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{N+1}} \end{bmatrix}.$$

Рішення має вигляд

$$\hat{A}_{\boldsymbol{N+1}} = (\boldsymbol{X}^{*\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{N+1}}\boldsymbol{X}^{*}_{\boldsymbol{N+1}})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X}^{*\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{N+1}}\phi^{*}_{\boldsymbol{N+1}}.$$

У результаті отримано рекурентну формулу

$$\hat{\boldsymbol{A}}_{N+\mathbf{1}} = \boldsymbol{C}_{N+\mathbf{1}}\left[\boldsymbol{X}_N^{\boldsymbol{T}}\phi_N + \boldsymbol{x}\phi_{N+1}\right] =$$
$$= \boldsymbol{C}_N\boldsymbol{X}_N^{\boldsymbol{T}}\phi_N + \boldsymbol{C}_N\boldsymbol{x}\phi_{N+\mathbf{1}} - \boldsymbol{C}_N\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{x} + \mathbf{1})^{-\mathbf{1}} \times$$
$$\times \left\{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}_N\left[\boldsymbol{X}_N^{\boldsymbol{T}}\phi_N + \boldsymbol{x}\phi_{N+\mathbf{1}}\right]\right\} =$$
$$= \hat{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{N}} + \boldsymbol{C}_N\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{x} + \mathbf{1})^{-\mathbf{1}}\left(\phi_{N+\mathbf{1}} - \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\hat{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{N}}\right).$$

Тобто, нова оцінка визначається як стара оцінка плюс лінійний коригувальний член, який заснований на новій інформації φ_{N+1}, x й старій $\mathbf{C}_N$. На початковому етапі отримання оцінок необхідно мати значення $\mathbf{C}_0$ й $\mathbf{x}_0$. Якщо цих даних нема, просто береться перша система n рівнянь, виконується обертання матриці для отримання $\mathbf{C}_N$, $\mathbf{x}_{\mathrm{N}}$, а потім використовуємо отриману формулу для подальшого оцінювання.

Вплив кількості спостережень. Відомо, якщо значення $z[n]$ відомі без помилок, а значення $\varphi[n]$ незалежні й рівно точні, то оцінка дисперсії $\tilde{\sigma}^2$ величини $\varphi[n]$ визначається формулою

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{N - M - K} S_{\min}, \tag{1.26}$$

де $S_{\min}$ – значення S, обчислене при припущенні, що коефіцієнти моделі замінені їх оцінками, що знайдені з системи нормальних рівнянь.

Дисперсія помилки тим менше, чим більшим є знаменник у формулі (26), тобто кількість спостережень N має бути якнайбільшою (у випадку стаціонарного процесу). Число M визначає інтервал інерційності, неточність його визначення позначається на неточності прогнозу. Число використаних багаточленів K має бути як найменшим при задовільній точності апроксимації, подальше збільшення їх кількості зменшує знаменник у й може призвести до збільшення помилки.

Точність прогнозування із застосуванням запропонованого цифрового динамічного лінійного фільтра набагато вища за точність, що забезпечують широко використовувані в сучасних програмних продуктах засоби прогнозу.

1.5 Кусочно-поліноміальна апроксимація

В тих випадках, коли проміжок $[a, b]$, на якому потрібно підмінити функцію $f(x)$ функцією $\varphi(x)$, завеликий, і відсутні підстави вважати дану функцію $f(x)$ достатньо гладкою при $x \in [a, b]$, немає сенсу намагатися збільшувати кількість її поліноміальної апроксимації внаслідок використання як функцію $\varphi(x)$ многочленів вищих степенів. Застосуємо кусочно-поліноміальну апроксимацію $f(x)$, що передбачає, що апроксимуюча функція $\varphi(x)$ складається з окремих многочленів, однаково невеликого ступеня, які визначені кожен на своїй частині відрізку $[a, b]$. При цьому, якщо функція $f(x)$ неперервна і має достатню кількість точкової інформації про неї, то можна наблизити її на $[a, b]$ як завгодно добре кусочно-поліноміальною функцією $\varphi(x)$ тільки внаслідок збільшення числа часткових проміжків, з яких складається $[a, b]$, при будь-яких фіксованих степенях складових многочленів і будь-яких способах узгодження $f(x)$ та $\varphi(x)$ [1].

Використання низьких степенів многочленів, з яких складається $\varphi(x)$, дозволяє легко знаходити їх коефіцієнти з різних умов.

Якщо задані значення y_i функції $y = f(x)$ на системі вузлів x_i таких, що

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b, \qquad (1.27)$$

і потрібно апроксимувати $f(x)$ кусочно-лінійною функцією $\varphi(x)$, виходячи з умов інтерполяції

$$\varphi(x_i) = y_i, \ (i = 0, 1, \dots, n),$$

то, якщо візьмемо функцію $\varphi(x)$ у вигляді

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1x + b_1 \text{ при } x \in [x_0, x_1], \\ a_2x + b_2 \text{ при } x \in [x_1, x_2], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_nx + b_n \text{ при } x \in [x_{n-1}, x_n], \end{cases} \tag{1.28}$$

для знаходження n пар її коефіцієнтів $a_k,\ b_k\ (k = 1, 2, \dots, n)$ отримаємо систему із $2n$ лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \begin{cases} a_1x_0 + b_1 = y_0, \\ a_1x_1 + b_1 = y_1; \end{cases} \\ \begin{cases} a_2x_1 + b_1 = y_1, \\ a_2x_2 + b_1 = y_2; \end{cases} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \begin{cases} a_nx_{n-1} + b_n = y_{n-1}, \\ a_nx_n + b_n = y_n, \end{cases} \end{cases} \tag{1.29}$$

і кожна пара сусідніх рівнянь системи (1.29), яка має коефіцієнти з однаковими індексами, не пов’язана з рештою і може розв’язуватися окремо.

Аналогічно, кожна ланка кусочно-квадратичної функції при $n = 2m$ у виразі

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 \text{ при } x \in [x_0, x_2], \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \text{ при } x \in [x_2, x_4], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_mx^2 + b_mx + c_m \text{ при } x \in [x_{2m-2}, x_{2m}] \end{cases} \tag{1.30}$$

визначається трійкою коефіцієнтів $a_k,\ b_k,\ c_k\ \ (k = 1, 2, \dots, m)$, які можуть бути знайдені послідовним розв’язанням при $(k = 1, 2, \dots, m)$ тривимірних лінійних систем

$$\begin{cases} a_kx_{2k-2}^2 + b_kx_{2k-2} + c_k = y_{2k-2}, \\ a_kx_{2k-1}^2 + b_kx_{2k-1} + c_k = y_{2k-1}, \\ a_kx_{2k}^2 + b_kx_{2k} + c_k = y_{2k}, \end{cases} \tag{1.31}$$

відповідними виставленими інтерполяційними умовами.

Представимо функцію $f(x)$ в табличному вигляді (табл. 1.3):

Таблиця 1.3 – Табличне представлення функції $f(x)$

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	$\dots$	f_n

(1.32)

Функцію $\varphi(x)$, зіставляємо з лінійних функцій

$$\varphi_i(x) = a_i + b_i(x - x_i)$$

так, щоб

$$f(x) \approx \varphi_i(x), \qquad \forall\, x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$$

та

$$\sum_{k=i-1}^{i+1} \left(f_k - \varphi_i(x)\right)^2 = \min.$$

Знаходимо коефіцієнти $a_i,\ b_i$ методом найменших квадратів.

$$(f_{i-1} - a_i + b_i h)^2 + (f_i - a_i)^2 + (f_{i+1} - a_i - b_i h)^2 = \min.$$

Утворимо систему з частинних похідних

$$\begin{cases} (f_{i-1} - a_i + b_i h) + (f_i - a_i) + (f_{i+1} - a_i - b_i h) = 0; \\ (f_{i-1} - a_i + b_i h)h + (f_{i+1} - a_i - b_i h)h = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3a_i + f_{i-1} + f_i + f_{i+1} = 0; \\ -2b_i h + f_{i-1} + f_{i+1} = 0, \end{cases}$$

розв’язавши яку, знайдемо шукані коефіцієнти

$$a_i = \frac{1}{3}(f_{i-1} + f_i + f_{i+1}),$$
$$b_i = \frac{1}{2}(f_{i-1} + f_{i+1}).$$

Отже, на кожному з проміжків $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ функція $f(x)$ може бути замінена лінійною функцією

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{3}(f_{i-1} + f_i + f_{i+1}) + \frac{1}{2h}(f_{i-1} + f_{i+1})(x - x_i).$$

Так як i змінюється від 1 до $n-1$, то для функції $f(x)$ таких лінійних функцій буде побудовано $n-1$; на кожний проміжок $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ їх прийдеться по дві.

Далі перераховуємо значення вихідних даних таблиці 1.3 і заміняємо значення функції $f(x)$ на значення

$$\varphi_i(x_i) = \frac{1}{3}(f_{i-1} + f_i + f_{i+1})$$

при $i = 1, 2, \dots, n-1$. При цьому до визначаємо нову табличну функцію значеннями $\varphi_0(x_0) = f_0$ та $\varphi_n(x_n) = f_n$. Отримали табличну залежність (табл. 1.4)

Таблиця 1.4 – Таблична залежність $\varphi(x)$ та $f(x)$

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$\varphi(x)$	φ_0	φ_1	$\cdots$	φ_{n-1}	φ_n

в якій зберігається характер поведінки початкової функції $f(x)$ і зменшена роль її окремих значень.

Виконана процедура має назву усереднення за трьома точками і є простим випадком лінійного фільтра.

Для двовимірного випадку маємо $z = f(x, y)$, що залежить від двох параметрів і усереднення будемо проводити за п'ятьма точками.

Таблиця 1.5 – Табличне представлення функції двох змінних

$y \backslash x$	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y_0	f_{00}	f_{01}	$\cdots$	f_{0n}
y_1	f_{10}	f_{11}	$\cdots$	f_{1n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_m	f_{m0}	f_{m1}	$\cdots$	f_{mn}

Апроксимуюча функція $\varphi_{ij}(x, y)$ набуде вигляду

$$\varphi_{ij}(x, y) = a_{ij} + b_{ij}(x - x_i) + c_{ij}(y - y_j).$$

Нас цікавить міра відхилення функції $\varphi(x, y)$ від функції $f(x, y)$ за сукупністю точок $x_1,\ x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$. Визначимо цільову функцію метода МНК:

$$S = \sum_{k=i-1}^{i+1} \sum_{l=j-1}^{j+1} \left(f_{kl} - \varphi_{ij}(x_i, y_j)\right)^2 = \min.$$

Для випадку, коли функція залежить від двох змінних, цільова функція S набуде вигляду

$$S = \left(f_{i-1,j} - \left(a_{ij} + b_{ij}(x_i - h_i - x_i) + c_{ij}\left(y_j - y_j\right)\right)\right)^2 +$$

$$+\left(f_{i+1,j} - \left(a_{ij} + b_{ij}(x_i + h_i - x_i) + c_{ij}\left(y_j - y_j\right)\right)\right)^2 +$$

$$+\left(f_{i,j} - \left(a_{ij} + b_{ij}(x_i - x_i) + c_{ij}\left(y_j - y_j\right)\right)\right)^2 +$$

$$+\left(f_{i,j-1} - \left(a_{ij} + b_{ij}(x_i - x_i) + c_{ij}\left(y_j - h_j - y_j\right)\right)\right)^2 +$$

$$+\left(f_{i,j+1} - \left(a_{ij} + b_{ij}(x_i - x_i) + c_{ij}\left(y_j + h_j - y_j\right)\right)\right)^2 =$$

$$= \left(f_{i-1,j} - a_{ij} + b_{ij}h_i\right)^2 + \left(f_{i+1,j} - a_{ij} - b_{ij}h_i\right)^2 + \left(f_{i,j} - a_{ij}\right)^2 +$$

$$+\left(f_{i,j-1} - a_{ij} + c_{ij}h_j\right)^2 + \left(f_{i,j+1} - a_{ij} - c_{ij}h_j\right)^2 \to min,$$

а параметри a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} функції $\varphi_{ij}(x, y)$ можна визначити з умови найменшого відхилення $\varphi(x, y)$ від $f(x, y)$. Ці параметри знаходяться як точка, в якій функція S досягає мінімального значення (точка мінімуму).

Застосовуємо метод найменших квадратів для знаходження коефіцієнтів a_i, b_i, c_i. Для цього спочатку утворимо систему з частинних похідних за кожним параметром:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_{ij}} = q_1 = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b_{ij}} = q_2 = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial c_{ij}} = q_3 = 0, \end{cases}$$

де

$$q_1 = \left(f_{i-1,j} - a_{ij} + b_{ij}h_i\right) + \left(f_{i+1,j} - a_{ij} - b_{ij}h_i\right) + \left(f_{i,j} - a_{ij}\right) +$$

$$+\left(f_{i,j-1} - a_{ij} + c_{ij}h_j\right) + \left(f_{i,j+1} - a_{ij} + c_{ij}h_j\right),$$

$$q_2 = \left(f_{i-1,j} - a_{ij} + b_{ij}h_i\right)h_i + \left(f_{i+1,j} - a_{ij} - b_{ij}h_i\right)(-h_i),$$
$$q_3 = \left(f_{i,j-1} - a_{ij} + c_{ij}h_j\right)h_j + \left(f_{i,j+1} - a_{ij} - c_{ij}h_j\right)\left(-h_j\right).$$

Зведемо подібні та отримаємо систему вигляду:

$$\begin{cases} 5a_{ij} = f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1}, \\ 2b_{ij}h_i = f_{i-1,j} - f_{i+1,j}, \\ 2c_{ij}h_j = f_{i,j-1} - f_{i,j+1}. \end{cases}$$

Шукані параметри a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} матимуть вигляд

$$\begin{cases} a_{ij} = \dfrac{f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1}}{5}, \\ b_{ij} = \dfrac{f_{i-1,j} - f_{i+1,j}}{2h_i}, \\ c_{ij} = \dfrac{f_{i,j-1} - f_{i,j+1}}{2h_j}. \end{cases}$$

Таким чином на кожному проміжку функція $f(x, y)$ може бути замінена лінійною функцією вигляду:

$$\varphi_{ij}(x, y) = \frac{f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1}}{5} + $$
$$+ \frac{f_{i-1,j} - f_{i+1,j}}{2h_i}(x - x_i) + \frac{f_{i,j-1} - f_{i,j+1}}{2h_j}\left(y - y_j\right). \qquad (1.26)$$

2 ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ФІЛЬТРІВ ДЛЯ ЗГЛАДЖУВАННЯ ДАНИХ ТА АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЙ

2.1 Постановка задачі

Нехай деяка функція $f(x,y)$, $f: R^2 \to R^2$, про яку відомо, що в $n \times m$ точках $x_1,\ x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$ вона приймає відповідно значення $f\left(x_i, y_j\right)$, тобто $z = f\left(x_i, y_j\right),\ i = 1,2, \dots, n, j = 1,2, \dots, m$. Потрібно згладити її значення в точках при $x\epsilon(x_1,\ x_n)$ та $y\epsilon(y_1,\ y_n)$. Функцію $f(x,y)$ задається таблично (табл. 2.1)

Таблиця 2.1 – Значення $f(x,y)$ у відповідних вузлах.

x / y		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
		0	0,5	1	1,5	2
y_0	0	0	0	0	0	0
y_1	0,5	0,479426	0,420735	0,259035	0,033913	-0,19951
y_2	1	0,841471	0,73846	0,454649	0,059523	-0,35018
y_3	1,5	0,997495	0,875384	0,538949	0,07056	-0,4151
y_4	2	0,909297	0,797984	0,491295	0,064321	-0,3784

Виходячи з умов інтерполяції

$$f(x,y) \approx \varphi_{ij}(x,y), (i,j = 0,1,..4),$$

беремо функцію $\varphi_{ij}(x,y)$ у вигляді

$$\varphi_{ij}(x,y) = a_{ij} + b_{ij}(x - x_i) + c_{ij}\left(y - y_j\right).$$

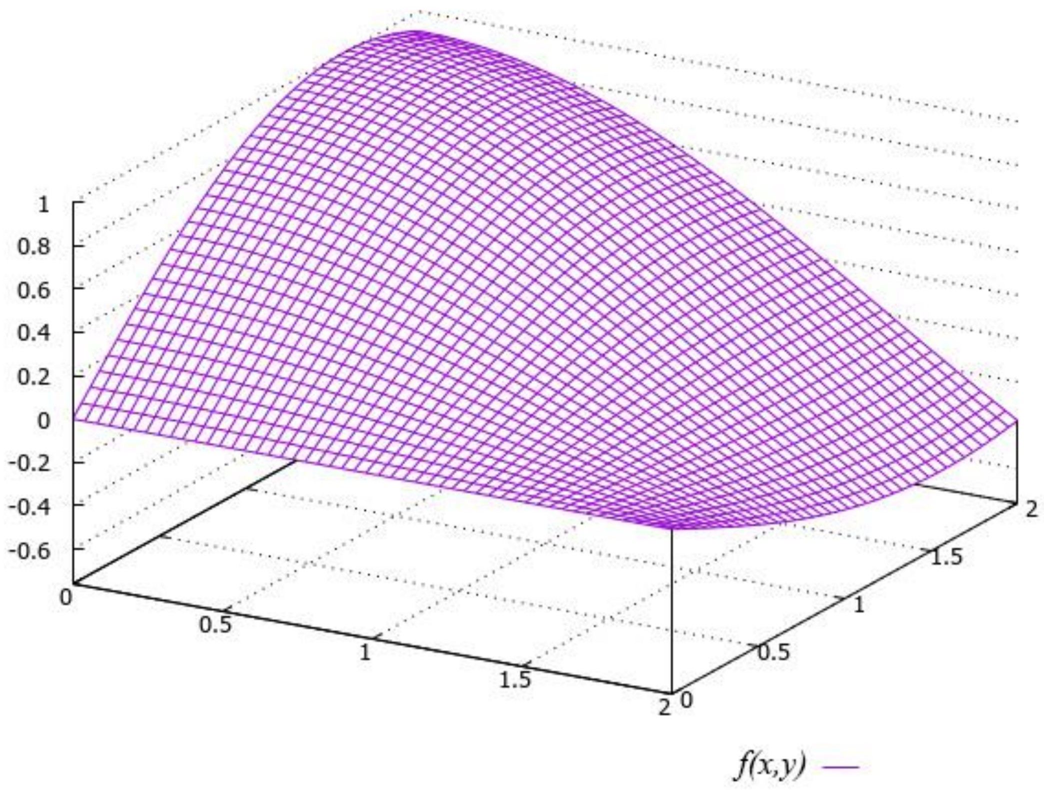


Рисунок. 2.1 – Графік функції $f(x,y)$

Скористаємося для згладжування функції отриманим співвідношенням (1.26). Таким чином, на кожному проміжку функція $f(x,y)$ може бути замінена лінійною функцією вигляду:

$$\varphi_{ij}(x,y) = \frac{f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1}}{5} +$$
$$+ \frac{f_{i-1,j} - f_{i+1,j}}{2h_i}(x - x_i) + \frac{f_{i,j-1} - f_{i,j+1}}{2h_j}(y - y_j).$$

Варіюванням індексів i та j від 1 до 3 побудуємо $3 \times 3 = 9$ лінійних функцій $\varphi_{ij}(x,y)$, а підставляючи замість x та y значення x_i та y_j з проміжків, отримаємо, що

$$\varphi_{ij}(x_i, y_j) = \frac{f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1}}{5} +$$

$$+\frac{f_{i-1,j} - f_{i+1,j}}{2h_i}(x_i - x_i) + \frac{f_{i,j-1} - f_{i,j+1}}{2h_j}(y_j - y_j) =$$

$$= \frac{f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1}}{5}.$$

Обчислимо їх, підставляючи в рівняння (1.26) значення з таблиці 2.1.

$$\varphi_{11}(x_1, y_1) = \frac{f_{0,1} + f_{2,1} + f_{1,1} + f_{1,2} + f_{1,0}}{5} =$$

$$= \frac{0{,}479426 + 0{,}259035 + 0{,}73846 + 0 + 0{,}420735}{5} = \frac{1{,}897656}{5} = 0{,}4333452,$$

$$\varphi_{12}(x_1, y_2) = \frac{f_{0,2} + f_{2,2} + f_{1,2} + f_{1,3} + f_{1,1}}{5} =$$

$$= \frac{0{,}841471 + 0{,}454649 + 0{,}73846 + 0{,}875384 + 0{,}420735}{5} = \frac{3{,}3307}{5} =$$

$$= 0{,}66614,$$

$$\varphi_{1,3}(x_1, y_3) = \frac{f_{0,3} + f_{2,3} + f_{1,3} + f_{1,4} + f_{1,2}}{5} =$$

$$= \frac{0{,}997495 + 0{,}538646 + 0{,}875384 + 0{,}797984 + 0{,}73846}{5} = \frac{3{,}948272}{5} =$$

$$= 0{,}6789654,$$

$$\varphi_{2,1}(x_2, y_1) = \frac{f_{1,1} + f_{3,1} + f_{2,1} + f_{2,2} + f_{2,0}}{5} =$$

$$= \frac{0{,}420735 + 0{,}033913 + 0{,}259035 + 0{,}454649 + 0}{5} = \frac{1{,}168332}{5} = 0{,}233666,$$

$$\varphi_{22}(x_2, y_2) = \frac{f_{1,2} + f_{3,2} + f_{2,2} + f_{2,3} + f_{2,1}}{5} =$$

$$= \frac{0{,}73846 + 0{,}059523 + 0{,}454649 + 0{,}538949 + 0{,}259035}{5} = \frac{2{,}0500616}{5} =$$

$$= 0{,}410123,$$

$$\varphi_{23}(x_2, y_3) = \frac{f_{1,3} + f_{3,3} + f_{2,3} + f_{2,4} + f_{22}}{5} =$$

$$= \frac{0{,}875384 + 0{,}07056 + 0{,}538949 + 0{,}491295 + 0{,}454649}{5} = \frac{2{,}430837}{5} =$$
$$= 0{,}486167,$$
$$\varphi_{31}(x_3, y_1) = \frac{f_{2,1} + f_{4,1} + f_{3,1} + f_{3,2} + f_{3,0}}{5} =$$
$$= \frac{0{,}033913 + 0{,}259035 - 0{,}19951 + 0{,}59523 + 0}{5} = \frac{0{,}15296}{5} = 0{,}030592,$$
$$\varphi_{32}(x_3, y_2) = \frac{f_{2,2} + f_{4,2} + f_{3,2} + f_{3,3} + f_{3,1}}{5} =$$
$$= \frac{0{,}454649 - 0{,}35018 + 0{,}059523 + 0{,}07056 + 0{,}033913}{5} = \frac{0{,}26847}{5} =$$
$$= 0{,}053694,$$
$$\varphi_{33}(x_3, y_3) = \frac{f_{2,3} + f_{4,3} + f_{3,3} + f_{3,4} + f_{3,2}}{5} =$$
$$= \frac{0{,}07056 + 0{,}538949 - 0{,}4151 + 0{,}064321 + 0{,}059523}{5} = \frac{0{,}318249}{5} =$$
$$= 0{,}06365.$$

До визначимо нову табличну функцію значеннями $\varphi_{00}(x_0, y_0) = f_{0,0}$, $\varphi_{04}(x_0, y_4) = f_{0,4}$, $\varphi_{40}(x_4, y_0) = f_{4,0}$, $\varphi_{44}(x_4, y_4) = f_{4,4}$.

Залишилося до визначити лінійну функцію у пустих клітинках таблиці 2.2. Оскільки це граничні вузли, то не має сенсу і можливості робити усереднення за п’ятьма вузлами, так як нам не відомий характер функції ззовні заданого проміжку.

Скористаємося набутками з розділу 1, та проведемо усереднення за трьома точками. Тоді для усереднення по горизонталі і вертикалі отримаємо наступні формули відповідно:

$$\varphi_{i0}(x_i, y_0) = \tfrac{1}{3}\left(f_{i-1,0} + f_{i,0} + f_{i+1,0}\right),$$
$$\varphi_{i4}(x_i, y_4) = \tfrac{1}{3}\left(f_{i-1,4} + f_{i,4} + f_{i+1,4}\right);$$
$$\varphi_{0j}\left(x_0, y_j\right) = \tfrac{1}{3}\left(f_{0,j-1} + f_{0,j} + f_{0,j+1}\right),$$

$$\varphi_{4j}(x_4, y_j) = \frac{1}{3}\left(f_{4,j-1} + f_{4,j} + f_{4,j+1}\right).$$

Підставимо значення з таблиці 2.1 у відповідні формули:

$$\varphi_{10}(x_1, y_0) = \frac{1}{3}\left(f_{0,0} + f_{1,0} + f_{1,0}\right) = 0$$

$$\varphi_{20}(x_2, y_0) = \frac{1}{3}\left(f_{1,0} + f_{2,0} + f_{3,0}\right) = 0$$

$$\varphi_{30}(x_3, y_0) = \frac{1}{3}\left(f_{2,0} + f_{3,0} + f_{4,0}\right) = 0$$

$$\varphi_{14}(x_1, y_4) = \frac{1}{3}\left(f_{0,4} + f_{1,4} + f_{2,4}\right) = \frac{0{,}909297 + 0{,}79794 + 0{,}491295}{3} =$$

$$= \frac{2{,}198576}{3} = 0{,}732859,$$

$$\varphi_{24}(x_2, y_4) = \frac{1}{3}\left(f_{1,4} + f_{2,4} + f_{3,4}\right) = \frac{0{,}797984 + 0{,}491295 + 0{,}064321}{3} =$$

$$\frac{1{,}3536}{3} = 0{,}4512,$$

$$\varphi_{34}(x_3, y_4) = \frac{1}{3}\left(f_{2,4} + f_{3,4} + f_{4,4}\right) = \frac{0{,}491295 + 0{,}064321 - 0{,}3784}{3} =$$

$$= \frac{0{,}177215}{3} = 0{,}059072,$$

$$\varphi_{01}(x_0, y_1) = \frac{1}{3}\left(f_{0,0} + f_{0,1} + f_{0,2}\right) = \frac{0 + 0{,}479426 + 0{,}841471}{3} =$$

$$= \frac{1{,}320897}{3} = 0{,}440299,$$

$$\varphi_{02}(x_0, y_2) = \frac{1}{3}\left(f_{0,1} + f_{0,2} + f_{0,3}\right) = \frac{0{,}479426 + 0{,}841471 + 0{,}997495}{3} =$$

$$= \frac{2{,}318392}{3} = 0{,}772797,$$

$$\varphi_{03}(x_0, y_3) = \frac{1}{3}\left(f_{0,2} + f_{0,3} + f_{0,4}\right) = \frac{0{,}841471 + 0{,}997495 + 0{,}909297}{3} =$$

$$= \frac{2{,}748263}{3} = 0{,}916088,$$

$$\varphi_{41}(x_4, y_1) = \frac{1}{3}\left(f_{4,0} + f_{4,1} + f_{4,2}\right) = \frac{0 - 0{,}19951 - 0{,}35018}{3} = \frac{-0{,}54969}{3} =$$

$$= -0{,}18323,$$

$$\varphi_{42}(x_4, y_2) = \frac{1}{3}\left(f_{4,1} + f_{4,2} + f_{4,3}\right) = \frac{-0{,}19951 - 0{,}35018 - 0{,}4151}{3} =$$

$$= \frac{-0{,}96479}{3} = -0{,}3216,$$

$$\varphi_{43}(x_4, y_3) = \frac{1}{3}\left(f_{4,2} + f_{4,3} + f_{4,4}\right) = \frac{-0{,}35018 - 0{,}4151 - 0{,}3784}{3} =$$

$$= \frac{-1{,}14368}{3} = -0{,}38123.$$

В результаті згладжування функції отримаємо замість таблиці 2.1 нову табличну залежність, в якій зберігається характер поведінки функції, – таблицю 2.2.

Таблиця 2.2 – Згладжені данні для функції $f(x, y)$

y \ x		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
		0	0,5	1	1,5	2
y_0	0	0	0	0	0	0
y_1	0,5	0,440299	0,379531	0,66614	0,789654	-0,18323
y_2	1	0,772797	0,233666	0,410123	0,486167	-0,3216
y_3	1,5	0,916088	0,030592	0,053694	0,06365	-0,38123
y_4	2	0,909297	0,732859	0,4512	0,059072	-0,3784

Різниця між двома функціями, вихідною $f(x, y)$ та після згладжування $\varphi(x, y)$, у вигляді залишків $\delta_{ij} = f\left(x_i,\ y_j\right) - \varphi\left(x_i,\ y_j\right)$ представлена у таблиці 2.3.

Таблиця 2.3 – Значення залишків

y \ x		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
		0	0,5	1	1,5	2
y_0	0	0	0	0	0	0
y_1	0,5	0,0391265	0,041204	-0,40711	-0,75574	-0,01628
y_2	1	0,068674	0,504794	0,044526	-0,42664	-0,02858
y_3	1,5	0,081407	0,844792	0,485255	0,00691	-0,03387
y_4	2	$4{,}268\cdot10^{-7}$	0,065125	0,040095	0,005249	$-1{,}2\cdot10^{-6}$

2.2 Апроксимація функції двох змінних із використанням лінійних фільтрів

Нехай деяка функція $z = f(x, y)$ задається своїми дискретними значеннями у табличному виді (табл. 2.4).

Таблиця 2.4 – Значення вихідної функції

x \ y		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
		0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
x_1	0	-0,01	0,01	0,012	-0,01	0,018	0,02	0,01
x_2	0,5	0,015	0,0525	0,142	0,1675	0,24	0,3025	0,364
x_3	1	-0,018	0,135	0,24	0,385	0,521	0,638	0,769
x_4	1,5	0,01	0,2015	0,385	0,5835	0,76	0,9215	1,135
x_5	2	0,01	0,235	0,49	0,76	0,988	1,26	1,475

Для цієї функції спочатку необхідно провести згладжування даних, а потім, використавши МНК, провести апроксимацію функції.

Для згладжування вихідної функції скористаємося співвідношенням (1.26), отриманим у розділі 1, для лінійного фільтру функції двох змінних із урахуванням сталого значення кроку для обох незалежних змінних.

В результаті отримаємо значення функції $\varphi(x_i, y_j)$, для всіх внутрішніх точок ($i = 2, \dots, 4$; $j = 2, \dots, 6$). «Кутові» значення залишимо незмінними, тобто $\varphi(x_1, y_1) = f(x_1, y_1)$, $\varphi(x_1, y_7) = f(x_1, y_7)$, $\varphi(x_5, y_1) = f(x_5, y_1)$, $\varphi(x_5, y_7) = f(x_5, y_7)$.

Для незаповнених клітин нової таблиці, тобто при $i = 1$; $j = 2, \dots, 6$; при $i = 5$; $j = 2, \dots, 6$; при $i = 2, \dots, 4$; $j = 1$ та при $i = 2, \dots, 4$; $j = 7$ скористаємося лінійними фільтрами для одновимірної функції, а саме для значень $\varphi(x_i, y_j)$:

при $i = 1$; $j = 2, \dots, 6$ та $i = 5$; $j = 2, \dots, 6$

$$\varphi(x_i, y_j) = \frac{f(x_i, y_{j-1}) + f(x_i, y_j) + f(x_i, y_{j+1})}{3},$$

при $i = 2, \dots 4$; $j = 1$ та $i = 2, \dots, 4$; $j = 7$

$$\varphi(x_i, y_j) = \frac{f(x_{i-1}, y_j) + f(x_i, y_j) + f(x_{i+1}, y_j)}{3}.$$

В результаті будемо мати таблично представлені згладжені числові дані (табл. 2.5).

А тепер скористаємося МНК і побудуємо апроксимуючу функцію степеневого виду як первісних вихідних даних так і для результатів проведеного згладжування:

$$\tilde{f}(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy; \quad (2.27)$$

$$\tilde{\varphi}(x, y) = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 xy. \quad (2.28)$$

Скориставшись числовими значеннями, наведеними у таблицях 2.5 та 2.6, побудуємо для (2.27) і (2.28) суму квадратів вузлових відхилів:

$$S(a_0, \ldots, a_3) = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{7}\left(a_0 + a_1 x_i + a_2 y_j + a_3 x_i y_j - f\left(x_i, y_j\right)\right)^2; \qquad (2.29)$$

$$R(b_0, \ldots, b_3) = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{7}\left(b_0 + b_1 x_i + b_2 y_j + b_3 x_i y_j - \varphi\left(x_i, y_j\right)\right)^2. \qquad (2.30)$$

Таблиця 2.5 – Значення згладжених даних

y / x		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
		0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
x_1	0	-0,01	0,004	0,004	0,00667	0,00933	0,016	0,01
x_2	0,5	-0,0043	0,0709	0,1228	0,1849	0,2498	0,3129	0,381
x_3	1	0,0023	0,1222	0,2574	0,3794	0,5088	0,6304	0,756
x_4	1,5	0,0007	0,1933	0,38	0,5747	0,7548	0,9429	1,12633
x_5	2	0,01	0,245	0,495	0,746	1,00267	1,241	1,475

Скористаємося умовами мінімуму функцій багатьох змінних для знаходження невідомих a_k та b_k $(k = 1, 2, 3)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(a_0, \ldots, a_3)}{\partial a_0} = 0, \\ \dfrac{\partial S(a_0, \ldots, a_3)}{\partial a_1} = 0, \\ \dfrac{\partial S(a_0, \ldots, a_3)}{\partial a_2} = 0, \\ \dfrac{\partial S(a_0, \ldots, a_3)}{\partial a_3} = 0, \end{cases} \qquad (2.31)$$

та

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R(b_0, \dots, b_3)}{\partial b_0} = 0, \\ \dfrac{\partial R(b_0, \dots, b_3)}{\partial b_1} = 0, \\ \dfrac{\partial R(b_0, \dots, b_3)}{\partial b_2} = 0, \\ \dfrac{\partial R(b_0, \dots, b_3)}{\partial b_3} = 0. \end{cases} \tag{2.32}$$

Тоді апроксимуючі функції (2.27) та (2.28) з урахуванням знайдених коефіцієнтів a_k та b_k $(k = 1, 2, 3)$ приймуть такий вигляд:

$$\tilde{f}(x, y) = -0{,}00059 + 0{,}00299x + 0{,}00361y + 0{,}24656xy; \tag{2.33}$$

$$\tilde{\varphi}(x, y) = -0{,}00369 + 0{,}00523x + 0{,}00623y + 0{,}24421xy. \tag{2.34}$$

Отримані для функцій (2.33) та (2.34) величини суми квадратів вузлових відхилів $S = 0{,}006347$ та $R = 0{,}001156$ показують, що для згладжених даних цей показник значно менший.

Для апроксимуючої функції (2.34) були отримані дискретні значення у тих же точках, у яких задана вихідна функція. Вони представлені у табл. 2.6.

Таблиця 2.6 – Дискретні значення апроксимуючої функції

x \ y		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
		0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
x_1	0	-0,01	0,004	0,004	0,00667	0,00933	0,016	0,01
x_2	0,5	-0,0043	0,0709	0,1228	0,1849	0,2498	0,3129	0,381
x_3	1	0,0023	0,1222	0,2574	0,3794	0,5088	0,6304	0,756
x_4	1,5	0,0007	0,1933	0,38	0,5747	0,7548	0,9429	1,12633
x_5	2	0,01	0,245	0,495	0,746	1,00267	1,241	1,475

Аналізуючи вплив згладжування функції можна побудувати функцію лишків:

$$\tilde{\delta}(x,y) = \tilde{f}(x,y) - \tilde{\varphi}(x,y), \tag{2.35}$$

яка для функції, що досліджується прийме вид

$$\tilde{\delta}(x,y) = 0{,}0031 - 0{,}00224x - 0{,}00262y + 0{,}00235xy. \tag{2.36}$$

Дискретні значення лишків, отриманих за формулою (2.36), представлені у табл. 2.7.

Таблиця 2.7 – Дискретні значення лишків

x \ y		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
		0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
x_1	0	0	0,006	0,008	-0,0167	0,00867	0,004	0
x_2	0,5	0,0193	-0,0184	0,0192	-0,0174	-0,0098	-0,0104	-0,017
x_3	1	-0,0203	0,0128	-0,0174	0,0056	0,0122	0,0076	0,013
x_4	1,5	0,0093	0,0082	0,005	0,0088	0,0052	-0,0214	0,00867
x_5	2	0	-0,01	-0,005	0,014	-0,0147	0,019	0

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто проблему згладжування числових даних та апроксимації функцій, яка має актуальне значення, особливо для функцій, що отримані в результаті експериментів або спостережень.

Надано основні теоретичні відомості про апроксимацію функцій, наведено підходи до побудови апроксимуючих функцій на прикладі одновимірних функцій.

Для згладжування функцій використовувалися лінійні фільтри. Описано їх застосування при корегуванні числових даних для одновимірних функцій, наведено приклади їх застосування у технічних системах.

На основі методу найменших квадратів знайдено основні співвідношення для лінійного фільтру у випадку дослідження таблично заданої функції двох незалежних змінних.

Отримані співвідношення для лінійного фільтру використано до розв’язання практичних задач, а саме згладжування таблично заданих функцій двох змінних та подальшої апроксимації згладжених функцій методом найменших квадратів.

Наведена різниця результатів апроксимації функцій двох змінних при використанні первісних та згладжених числових даних.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Вержбицький, В. М. Основы численных методов : учебник для вузов : В.М. Вержбицкий. Москва : Высшая школа, 2002. Вип. 31. С. 431–435.
2. Іванов Д. В. та ін. Алгоритмічні основи растрової графіки. URL : http://www.intuit.ru/goto/course/rastrgraph (дата звернення 23.09.20)
3. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров : Определения, теоремы, формулы. Москва, 2014. 832 с.
4. Краснік А. А. Використання лінійного динамічного фільтру при вирішенні задачі прогнозу. *Збірник Військового інституту Київського національного університету імені Тараса Шевченка*. 2006. №4. С. 54–56.
5. Краснік А. А. Експериментальне дослідження точності прогнозу при використанні різних методів прогнозування. *Збірник наукових праць Військового інституту Київського національного університету імені Тараса Шевченка*. 2007. № 6. С. 98–107.
6. Краснік А. А. Використання динамічного фільтра для прогнозування поведінки багатовимірних об’єктів. *Збірник наукових праць Одеського ордена Леніна інституту Сухопутних військ*. 2007. Вип.13. С. 81–83.
7. Лисікова К. О. Апроксимація функцій методом найменших квадратів. *Вісник інженерної академії України*. Київ, 2017. № 1. С. 106–110.
8. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Москва : Мир, 1983. 568 с.
9. Овечкина Е. В., Поршнев С. В. Разработка методов оптимальной аппроксимации эмпирических зависимостей. *Электронный журнал "Исследовано в России"*. URL : https://www.elibrary.ru/title_about.asp?id=7843 (дата звернення 10.10.20).
10. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. Москва : Наука, 1989. 423 с.
11. Хемминг Р.В. Численные методы. Москва : Наука, 1968. 400 с.