

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
Кафедра фундаментальної математики

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА**  
на тему: «**ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ  
ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДОТИЧНОГО КОНТАКТУ  
ПРУЖНИХ КУЛЬ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ І  
ЗЧЕПЛЕННЯ**»

Виконала студентка 2 курсу, групи 8.1119-з  
спеціальності 111 математика  
(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми математика

В. Г. Киба

(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної  
математики, к.ф.-м.н. Стреляєв Ю. М.  
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри загальної математики,  
доцент, к.ф.-м.н. Стеганцев Є. В.  
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя

2020

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач кафедри  
фундаментальної математики,  
д.т.н., доцент

Гребенюк С.М.

(підпис)

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2020 р.

**З А В Д А Н Н Я**  
**НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ**

Кибі Вероніці Геннадіївні

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Чисельне розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь  
дотичного контакту пружних куль з урахуванням тертя і зчеплення

керівник роботи (проекту) Стреляєв Юрій Михайлович, к.ф.-м.н., доцент  
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затвержені наказом ЗНУ від 20 травня 2020 року № 577-с

2. Строк подання студентом роботи 27.11.2020

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.  
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

1. Огляд математичних методів розв'язання контактних задач теорії пружності.

2. Постановка задачі про контактну взаємодію пружних куль з урахуванням тертя Кулона.

3. Метод розв'язання контактної задачі.

4. Числові результати.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) \_\_\_\_\_

Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання \_\_\_\_\_

## КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	15.06.2020	
2.	Збір вихідних даних.	30.07.2020	
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	14.09.2020	
4.	Розробка першого та другого розділу.	15.10.2020	
5.	Розробка третього розділу.	23.10.2020	
6.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.		

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

В. Г. Киба  
\_\_\_\_\_  
(ініціали та прізвище)

Керівник роботи \_\_\_\_\_  
(підпис)

Ю. М. Стреляєв  
\_\_\_\_\_  
(ініціали та прізвище)

**Нормоконтроль пройдено**

Нормоконтролер \_\_\_\_\_  
(підпис)

О. Г. Спиця  
\_\_\_\_\_  
(ініціали та прізвище)

## РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Чисельне розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь дотичного контакту пружних куль з урахуванням тертя і зчеплення»: 46 с., 4 рис., 19 джерел, 1 додаток.

ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД, КОНТАКТНА ЗАДАЧА, НЕЛІНІЙНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ, ПРУЖНЕ ТІЛО, ТЕРТЯ КУЛОНА

Об'єкт дослідження – нелінійні інтегральні рівняння квазістатичної контактної задачі теорії пружності з урахуванням тертя.

Мета роботи: розробка алгоритму чисельного розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь контактної задачі про фрикційну взаємодію пружних тіл, що перебувають під дією нормальних і дотичних сил.

Методи дослідження – аналітичний, числовий.

У даній роботі розглянуто математичну модель контактної задачі про взаємодію лінійно-пружних тіл, що перебувають під дією нормального і дотичного навантаження та сили тертя. Задачу зведено до сукупності систем нелінійних інтегральних рівнянь. Викладено алгоритм чисельного розв'язання отриманих систем інтегральних рівнянь. За допомогою цього алгоритму були знайдені наближені розв'язки квазістатичної задачі про фрикційну контактну взаємодію пружних куль, виготовлених з однакових матеріалів. Отримані чисельні результати порівнювалися з відомими розв'язками задач, а також з чисельними розв'язками цих задач в статичній постановці.

## SUMMARY

Master's Qualification Thesis «Numerical solution of nonlinear integral equations of the tangential contact of elastic balls taking into account friction and adhesion»: 46 pages, 4 figure, 19 references, 1 supplement.

ITERATION METHOD, CONTACT PROBLEM, NONLINEAR INTEGRAL EQUATION, ELASTIC BODY, COLOMB FRICTION

The object of research is nonlinear integral equations of the quasi-static contact problem of the theory of elasticity taking into account friction.

Purpose: to develop an algorithm for numerical solution of nonlinear integral equations of the contact problem on the frictional interaction of elastic bodies under the action of normal and tangential forces.

Research methods – analytical, numerical.

In this paper, we consider a mathematical model of the contact problem on the interaction of linear-elastic bodies under the action of normal and tangential loads and friction forces. The problem is reduced to a set of systems of nonlinear integral equations. An algorithm for numerical solution of the obtained systems of integral equations is presented. Using this algorithm, approximate solutions of the quasi-static problem on the frictional contact interaction of elastic spheres made of the same materials were found. The obtained numerical results were compared with the known solutions of the problems, as well as with the numerical solutions of these problems in the static formulation.

## ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	2
Реферат .....	4
Summary .....	5
Вступ.....	7
1 Огляд математичних методів розв’язання контактних задач теорії пружності .....	8
2 Постановка задачі про контактну взаємодію двох пружних куль з урахуванням тертя Кулона .....	12
2.1 Механічна постановка квазістатичної задачі .....	12
2.2 Дискретизація процесу навантажування .....	17
3 Метод розв’язання контактної задачі.....	19
3.1 Виведення системи нелінійних інтегральних рівнянь .....	19
3.2 Дискретизація інтегральних рівнянь.....	20
3.3 Ітераційний метод .....	21
4 Числові результати.....	23
Висновки .....	28
Перелік посилань.....	29
Додаток А Програма для чисельного рішення просторової контактної задачі про взаємодію штампа і пружного тіла з урахуванням тертя, історії навантаження і температурних розширень.....	30

## ВСТУП

На сьогодні розв'язанню контактних задач теорії пружності з урахуванням тертя вченими зконцентровано багато уваги. Це зумовлюється потребою вирішення складних контактних задач в механіці твердих деформованих тіл. Особливість цих розв'язків обумовлена коли контактна взаємодія пружних тіл з тертям викликає появу дотичних контактних напружень та зон проковзування і зчеплення на поверхні взаємодії тіл. За умови наявності тертя необхідно враховувати історію навантажування, що може впливати на розподіл контактних напружень.

Об'єктом дослідження є нелінійні інтегральні рівняння квазістатичної контактної задачі теорії пружності з урахуванням тертя.

Предметом дослідження є контактні напруження, розміри та форма області контакту, зон зчеплення і проковзування.

У роботі застосовувався метод крайових нелінійних інтегральних рівнянь та ітераційний метод.

Метою кваліфікаційної роботи є отримання наближених розв'язків контактної задачі про взаємодію пружних куль з урахуванням тертя та які виготовлені з однакових матеріалів.

Для реалізації поставленої мети будуть вирішені такі задачі:

- сформулювати математичну постановку контактної задачі;
- отримати системи нелінійних інтегральних рівнянь;
- розробити алгоритм чисельного розв'язання отриманих систем;
- застосувати розроблений алгоритм до розв'язання задачі про фрикційний контакт з частковим проковзуванням двох пружних куль, що мають однакові пружні властивості.

## 1 ОГЛЯД МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Контактна задача, або задача визначення напружено-деформованого стану взаємодіючих тіл, що знаходяться під навантаженням, являє собою один з найбільш складних розділів механіки деформованого твердого тіла. Перші дослідження, які заклали теоретичний фундамент механіки контактної взаємодії, були виконані німецьким фізиком Генріхом Рудольфом Герцем наприкінці XIX сторіччя [1]. Значний внесок у розвиток теорії контактних задач, а також у розробку точних і наближених аналітичних методів їхнього розв'язання внесли С. Cattaneo, R.D. Mindlin, Л.О. Галін, І.Я. Штаєрман, М.І. Мухелишвілі, D. Spence, І.І. Ворович, В.І. Моссаковський, J.J. Kalker, А.А. Спектор, О.С. Кравчук, Г.Я. Попов, В.М. Александров, С.М. Мхитарян, Б.О. Галанов, К.Л. Джонсон, та інші дослідники.

Серед українських дослідників, які розвинули теорію контактних задач, слід відмітити роботи: В.І. Острика, А.Ф. Улітка, які застосовували до розв'язання контактних задач узагальнений метод Вінера-Хопфа; Р.М. Мартиняка, який дослідив фрикційну контактну взаємодію тіл з узгодженими поверхнями, що мають локальні нерівності; В.І. Кузьменка, Г.Й. Михальчука, які розглядали контактні задачі руху пружних тіл при неklasичних умовах контактної взаємодії; О.І. Александрова, яким запропоновано метод нелінійних межових інтегральних рівнянь для розв'язання широкого кола контактних задач, в яких є відомими оператори впливу поверхневих навантажень на поверхневі пружні переміщення.

Серед досліджень останніх років в області контактних задач з врахуванням тертя слід відмітити роботи таких вчених, як В.І. Острик, О.І. Жупанська, Д.О. Пожарський, М.І. Чебаков, S. Reina, N. Sundaram, С.Н. Liu, М. Ciavarella та інших дослідників.



При моделюванні контактної взаємодії пружних тіл з урахуванням тертя зазвичай використовується закон Кулона [2]. Складність контактних задач, в яких враховується тертя між поверхнями взаємодіючих тіл, обумовлена в основному тим, що поверхня контакту, зони проковзування та зчеплення заздалегідь невідомі, а розподіл контактних тисків на цій поверхні найчастіше не може бути визначений незалежно від дотичних контактних напружень. Ці обставини обмежують можливості використання традиційних методів аналізу для розв'язання контактних задач з урахуванням тертя.

Розвиток аналітичних методів розв'язання контактних задач з урахуванням тертя почався з двадцятих років ХХ сторіччя. В цьому напрямку виконано дослідження F.W. Carter, C. Cattaneo, R.D. Mindlin, Л.О. Галіна, І.Я. Штаєрмана, М.І. Мусхелишвілі, К.L. Johnson, P.J. Vermeulen, В.І. Моссаковського.

Незалежно один від одного С. Cattaneo [3] та R.D. Mindlin [4] отримали розв'язок задачі про взаємодію ідентично пружних тіл під дією нормальних і дотичних навантажень при наявності зчеплення і проковзування. Л.О. Галін [5] вперше отримав розв'язок плоскої задачі про вдавнення жорсткого прямокутного штампу в пружну півплощину при невідомих заздалегідь зоні зчеплення і зоні проковзування. Л.О. Галін дослідив відносні розміри зони зчеплення в залежності від коефіцієнта тертя. Задачі про стаціонарне кочення тіл і осесиметричні контактні задачі при невідомих ділянках контакту і зонах зчеплення розглядалися в роботах F.W. Carter, В.І. Моссаковського, К.L. Johnson, P.J. Vermeulen.

Поява у середині ХХ сторіччя електронно-обчислювальних машин та постійний і стрімкий ріст можливостей комп'ютерної техніки зумовили активне використання чисельних методів для отримання наближених розв'язків різних контактних задач теорії пружності. Застосування чисельних методів дозволило розв'язувати такі контактні задачі, для яких отримання наближених аналітичних розв'язків є практично неможливим внаслідок складних геометричних і фізичних особливостей взаємодіючих пружних тіл

та непростих умов їхнього контактування. Чисельним методам наближеного розв'язання різних контактних задач теорії пружності присвячена велика кількість робіт. Статичні і квазістатичні контактні задачі з урахуванням тертя Кулона розглядалися в роботах [6-8]. Авторами цих робіт розроблено різні чисельні алгоритми та отримано наближені розв'язки різних складних задач, у тому числі й таких, в яких поверхня контакту та розподіл тисків на ній неможливо знайти незалежно від дотичних контактних напружень. Насамперед слід відмітити результати, отримані А.А. Спектором, R. Gaertner, N. Okamoto, M. Nakazawa, В.І. Кузьменко, О.С. Кравчуком, L.T. Campos, J.T. Oden, N. Kikuchi, L.M. Keer, N. Ahmadi, T. Mura, С.У. Lee, С. Н. Liu, Yih-Hong Lin, Po-Hsuan Lin, T. Ligurský, J. Haslinger, R. Kučera, X. Li, L. Liang, S. Wu, які добре демонструють ефективність чисельного аналізу при неможливості отримання аналітичних розв'язків поставлених задач.

Дуже часто для наближеного розв'язання контактних задач з урахуванням тертя використовуються чисельні методи, засновані на як на варіаційній постановці задачі [2] (огляд цих методів наведено в роботі О.С. Кравчука [9]), так і на зведенні задачі до різних операторних рівнянь. Важкість реалізації варіаційних методів, яка полягає в необхідності розглядати складні задачі нелінійного програмування з недиференційовною та неопуклою функцією енергії системи взаємодіючих тіл (що підлягає мінімізації), іноді не дає можливість отримати наближений розв'язок задачі з бажаною точністю. Однак зазначена складність не виникає при реалізації методів, заснованих на використанні нелінійних інтегральних рівнянь для моделювання контактної взаємодії тіл. Серед відомих спроб використання нелінійних граничних інтегральних рівнянь в контактній механіці особливо слід відмітити роботи Б.О. Галанова, який розглядає контактні задачі без урахування тертя при невідомій ділянці контакту, а також роботу В.М. Александрова, Д.О. Пожарського [10], в якій врахування тертя здійснюється при спрощених граничних умовах, що відповідають повному прослизанню тіл. Метод нелінійних граничних інтегральних рівнянь,

запропонований О.І. Александровим [11-14], дозволяє використовувати закон тертя Кулона в неспрощеному класичному вигляді, але при цьому важко виразити умову єдиності розв'язку контактної задачі, виконати регуляризацію отриманих інтегральних рівнянь, а також довести збіжність ітераційних процесів, які використовуються для отримання розв'язку задачі.

## 2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО КОНТАКТНУ ВЗАЄМОДІЮ ДВОХ ПРУЖНИХ КУЛЬ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ КУЛОНА

### 2.1 Механічна постановка задачі

Розглянемо для двох абсолютно гладких пружних куль осесиметричну просторову контактну задачу про їх взаємодію.

Вважатимемо, що для взаємодіючих тіл виконані наступні умови:

- кулі лінійно-пружні, ізотропні;
- пружні переміщення точок куль малі в порівнянні з розмірами області контакту;
- розміри області контакту малі порівняно з радіусами куль;
- процес взаємодії куль супроводжується поверхневим тертям Кулона;
- інерційні і хвильові ефекти не враховуються;
- задана обмежена плоска область  $\Omega$ , що містить у собі невідому ділянку контакту.

Нехай кулі з радіусами  $R_1, R_2$  отримують послідовну дію нормального та дотичного навантаження. Вважатимемо, що кулі жорстко зчеплені з абсолютно твердим тілом – опорою, на деякій ділянці своєї поверхні. Також в цей час вони знаходяться у недеформованому і ненапруженому стані. Схема контактної взаємодії пружних куль представлена на рис. 2.1.

За рахунок того, що опора верхньої кулі здійснює спочатку залежне від часу  $t \in [0, T]$  нормальне переміщення  $\Delta_1(t)$ , де  $t \in [0, T_1]$ , а потім дотичне переміщення  $\Delta_2(t)$ , де  $t \in [T_1, T]$  при фіксованому значенні нормального переміщення  $\Delta_1(T_1) = \Delta_1$ . Коли кулі дотикаються то входять в контакт і мають одну точку дотику одне до одного, а опора нижнього тіла залишається нерухомою.

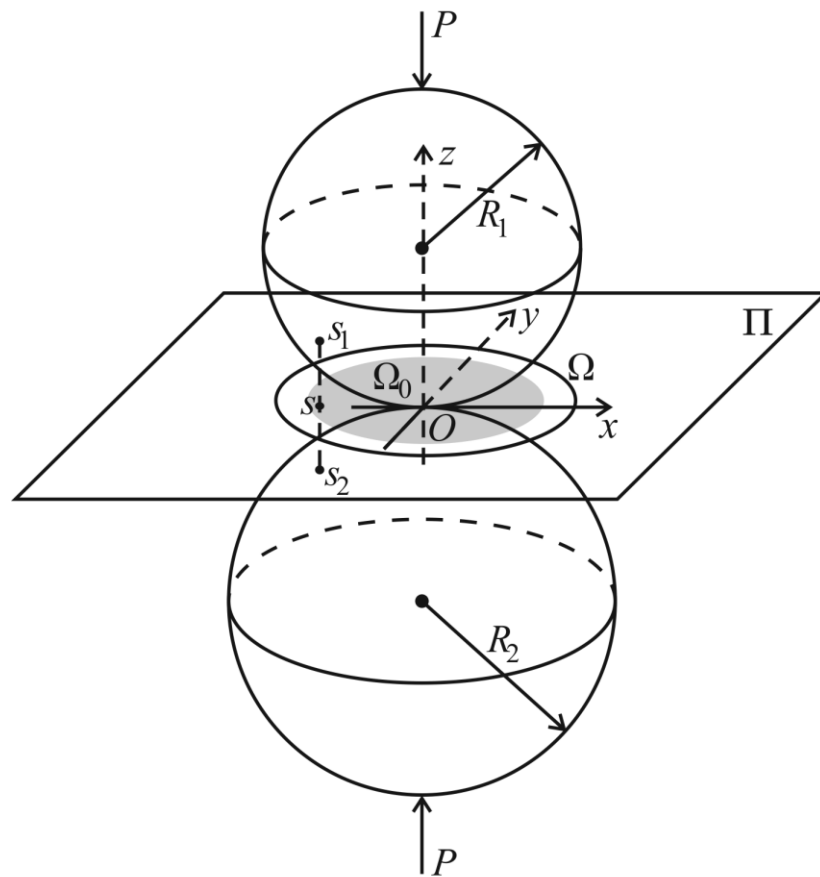


Рисунок 2.1 – Схема контактної взаємодії пружних куль

Припустимо, що процес контактування тіл супроводжується поверхневим тертям, що описується законом Кулона [2]. При зміні часу  $t$  від 0 до фіксованого значення  $T$  будемо вважати, що вектор  $\gamma(t)$  повільно змінюється. Нехтуючи інерційними і хвильовими ефектами враховуємо, що в будь-який фіксований момент часу  $t \in [0, T]$  тіла знаходяться у стані рівноваги. У фіксований момент часу  $t > 0$  при контактній взаємодії тіл відбувається процес навантаження спричинений переміщенням. В результаті цих дій тіла деформуються і утворюється поверхня контакту. Припустимо, що розміри поверхні контакту малі у порівнянні з розмірами контактуючих тіл. За прийнятих припущень невідома поверхня контакту  $\Omega_0$  є плоскою і міститься у спільній дотичній площині  $\Pi$  куль, що проходить через точку їх початкового дотику. Виберемо пов'язану з нижньою кулею декартову систему координат  $Oxyz$ , таким чином, що її початок знаходиться у точці

початкового дотику куль, вісь  $Oz$  напрямлена у бік верхньої кулі перпендикулярно площині  $\Pi$ , а вісь  $Ox$  співнапрямлена з переміщенням  $\Delta_2 = \Delta_2(T)$  (рис. 2.1). Крайові умови контактної взаємодії куль можна визначити в заданій області  $\Omega \subset \Pi$ , що містить у собі  $\Omega_0$ , наступною системою рівностей і нерівностей [15]:

$$\begin{cases} p_1(s,t) \geq 0, v_1(s,t) \geq 0, p_1(s,t) \cdot v_1(s,t) = 0, \\ \sqrt{p_2^2(s,t) + p_3^2(s,t)} \leq \mu \cdot p_1(s,t), \\ \sqrt{\dot{v}_2^2(s,t) + \dot{v}_3^2(s,t)} \cdot p_2(s,t) = -\mu \cdot p_1(s,t) \cdot \dot{v}_2(s,t), \\ \sqrt{\dot{v}_2^2(s,t) + \dot{v}_3^2(s,t)} \cdot p_3(s,t) = -\mu \cdot p_1(s,t) \cdot \dot{v}_3(s,t), \end{cases} \quad s \in \Omega, t \in [0, T], \quad (2.1)$$

де  $s = (x, y, 0)$  – точка площини  $Oxy$  з області  $\Omega$ ;

$p_1(s,t), p_2(s,t), p_3(s,t)$  – контактні напруження, що передаються від нижньої кулі до верхньої в точці  $s \in \Omega$ ;

$v_1(s,t), v_2(s,t), v_3(s,t)$  – зміщення точки поверхні верхньої кулі відносно протилежної точки поверхні нижньої кулі в точці  $s \in \Omega$ ;

$\dot{v}_2(s,t), \dot{v}_3(s,t)$  – компоненти вектору швидкості відносного дотичного проковзування протилежних точок поверхонь куль (точка над символом позначає диференціювання за часом  $t$ ).

$\mu > 0$  – коефіцієнт тертя.

Тут і далі індекси 1, 2, 3 відповідають напрямам координатних осей  $z, x, y$  відповідно.

Перше зі співвідношень (2.1) виражає невід'ємність контактного тиску, що діє в момент часу  $t$  у точках області  $\Omega$  на перше тіло, друге з співвідношень (2.1) означає відсутність взаємного проникання тіл одне в одне, третє – відсутність контактної взаємодії за межами ділянки контакту. Останні три співвідношення системи (2.1) виражають закон тертя Кулона.

За умови рівноваги між тілами в момент часу  $t$ , відносні зміщення  $v_1(s, t), v_2(s, t), v_3(s, t)$  можна записати у вигляді [16]:

$$\begin{cases} v_1(s, t) = \sum_{j=1}^3 A_{1j}(p_j)_{s,t} + \delta_0(s) + \Delta_1(t), \\ v_2(s, t) = \sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_j)_{s,t} + \Delta_2(t), \\ v_3(s, t) = \sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_j)_{s,t} + \Delta_3(t), \end{cases} \quad s \in \Omega, t \in [0, T], \quad (2.2)$$

де  $\delta_0(s) = R_1 + R_2 - \sqrt{R_1^2 - x^2 - y^2} - \sqrt{R_2^2 - x^2 - y^2}$  – початковий зазор між кулями в точці  $s = (x, y) \in \Omega$ .

У співвідношеннях (2.2)  $A_{ij}$  є лінійними операторами впливу поверхневих напружень на поверхневі відносні пружні переміщення, які за умови апроксимації взаємодіючих тіл пружними півпросторами можуть бути визначені у відповідності з розв'язками Буссінеска та Черруті з наступних співвідношень [17]:

$$A_{ij}(p_j)_{s,t} = \int_{\Omega} K_{ij}(s, s') p_j(s', t) ds', \quad s \in \Omega, t \in [0, T], \quad i, j = \overline{1, 3}; \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} K_{11}(s, s') = \frac{c_1}{r}; \quad K_{12}(s, s') = -K_{21}(s, s') = \frac{c_2(x - x')}{r^2}; \\ K_{13}(s, s') = -K_{31}(s, s') = \frac{c_2(y - y')}{r^2}; \\ K_{22}(s, s') = \frac{c_1}{r} + \frac{c_3(x - x')^2}{r^3}; \\ K_{23}(s, s') = -K_{32}(s, s') = \frac{c_3(x - x')(y - y')}{r^3}; \\ K_{33}(s, s') = \frac{c_1}{r} + \frac{c_3(y - y')^2}{r^3}; \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2}; \\ c_2 = \frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{2\pi E_2} - \frac{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}{2\pi E_1}; \\ c_3 = \frac{\nu_1(1+\nu_1)}{\pi E_1} + \frac{\nu_2(1+\nu_2)}{\pi E_2}; \\ r = |s - s'| = \sqrt{(x - x')^2 - (y - y')^2}. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

У співвідношеннях (2.4), (2.5)  $E_1$ ,  $E_2$  і  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  – модулі Юнга і коефіцієнти Пуассона першого та другого тіла відповідно, а  $x$ ,  $x'$  та  $y$ ,  $y'$  – абсциси та ординати точок  $s$  і  $s'$  відповідно.

Отже, квазістатичну контактну задачу про фрикційну взаємодію двох пружних куль можна сформулювати наступним чином: знайти невідомі складові питомого контактного навантаження  $p_1(s,t)$ ,  $p_2(s,t)$ ,  $p_3(s,t)$ , які для всіх  $t \in [0, T]$  та всіх  $s \in \Omega$  задовольняють системі співвідношень (2.1), в якій вирази  $v_1(s,t)$ ,  $v_2(s,t)$ ,  $v_3(s,t)$  мають вигляд (2.2). Причому, при  $t = 0$  мають місце наступні початкові умови:  $\Delta_1(0) = \Delta_2(0) = \Delta_3(0) = 0$ ,  $p_1(s,0) = p_2(s,0) = p_3(s,0) = 0 \quad \forall s \in \Omega$ .

Після отримання розв'язку  $p_1(s,t)$ ,  $p_2(s,t)$ ,  $p_3(s,t)$  поставленої контактної задачі, область контакту  $\Omega_0^{(t)}$ , зону зчеплення  $\Omega_C^{(t)}$  і зону проковзування  $\Omega_{II}^{(t)}$  в будь-який момент часу  $t > 0$  можна визначити з наступних співвідношень[2]:

$$\Omega_0^{(t)} = \left\{ s \in \Omega \mid \sum_{j=1}^3 A_{1j}(p_j)_{s,t} + \delta_0(s) + \Delta_1(t) = 0 \right\};$$

$$\Omega_C^{(t)} = \left\{ s \in \Omega_0^{(t)} \mid \sum_{k=2}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{j=1}^3 A_{kj}(p_j)_{s,t} + \Delta_k(t) \right) \right]^2 = 0 \right\};$$



$$\Omega_{\Pi}^{(t)} = \left\{ s \in \Omega_0^{(t)} \mid \sum_{k=2}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{j=1}^3 A_{kj}(p_j)_{s,t} + \Delta_k(t) \right) \right]^2 > 0 \right\},$$

в яких  $\Delta_3(t) \equiv 0$ .

Для визначення зусиль та моментів (прикладених до опори першого тіла), дія яких призвела до появи знайденого питомого контактного навантаження  $p_1(s,t)$ ,  $p_2(s,t)$ ,  $p_3(s,t)$ , достатньо застосувати відомі співвідношення теорії пружності [17].

## 2.2 Дискретизація процесу навантажування

Розіб'ємо відрізок  $[0, T]$  системою точок  $t_i$  таких, що  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_l = T$ . Процес взаємодії тіл будемо розглядати як скінченне число  $l$  послідовних станів рівноваги (кроків навантажування) в моменти часу  $t = t_i$ . Отже  $\Delta_{1i} = \Delta_1(t_i)$ ,  $\Delta_{2i} = \Delta_2(t_i)$ ,  $\Delta_{3i} = 0$ . Введемо позначення для вектор-функцій  $p(s,t)$ ,  $v(s,t)$  на  $i$ -ому кроці навантажування  $p_{1i}(s) = p_1(s, t_i)$ ,  $p_{2i}(s) = p_2(s, t_i)$ ,  $p_{3i}(s) = p_3(s, t_i)$ , і  $v_{1i}(s) = v_1(s, t_i)$ ,  $v_{2i}(s) = v_2(s, t_i)$ ,  $v_{3i}(s) = v_3(s, t_i)$ . Тут  $i$  в подальшому індекс  $i$  приймає значення  $0, 1, 2, \dots, l$  і визначає номер кроку навантажування. На нульовому кроці функції  $\Delta_{k0}(s)$ ,  $p_{k0}(s)$ ,  $k = 1, 2, 3$  тотожно дорівнюють нулю.

Враховуючи деякі припущення [2] граничні умови (2.1) контактної взаємодії тіл в момент часу  $t = t_i$  можна записати в наступному вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1i}(s) \geq 0; F_1(p_i, \Delta_{1i})_s \geq 0; p_{1i}(s) \cdot F_1(p_i, \Delta_{k1})_s = 0; \\ \sqrt{p_{2i}^2(s) + p_{3i}^2(s)} \leq \mu \cdot p_{1i}(s); \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{2i}(s) + \mu \cdot p_{1i}(s) \cdot F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s = 0; \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{3i}(s) + \mu \cdot p_{1i}(s) \cdot F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s = 0; \\ s \in \Omega; i = \overline{1, l}. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Отже, контактна задача, що розглядається, на  $i$ -му кроці навантажування полягає в знаходженні невідомих функцій  $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s)$ , визначених в області  $\Omega$  та задовольняючих у кожній точці цієї області системі співвідношень (2.6). Кінцевим розв'язком квазістатичної задачі є функції  $p_{1l}(s), p_{2l}(s), p_{3l}(s)$ , які задовольняють співвідношенням (2.6) для  $i = l$ .

### 3 МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ

#### 3.1 Виведення системи нелінійних інтегральних рівнянь

На кожному  $i$ -му кроці навантажування система (2.6) еквівалентна наступній системі нелінійних інтегральних рівнянь, що доведено у роботі [18]:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1i}(s) = h \left( p_{1i}(s) - E \cdot \left( \sum_{j=1}^3 A_{1j} (p_{ji})_s + \delta_0(s) + \Delta_{1i} \right) \right); \\ p_{2i}(s) = q \left( p_{2i}(s) - E \cdot \left( \sum_{j=1}^3 A_{2j} (p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{2i}(s) \right), \right. \\ \left. p_{3i}(s) - E \cdot \left( \sum_{j=1}^3 A_{3j} (p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{3i}(s) \right), \mu \cdot p_{1i-1}(s) \right); \\ p_{3i}(s) = q \left( p_{3i}(s) - E \cdot \left( \sum_{j=1}^3 A_{3j} (p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{3i}(s) \right), \right. \\ \left. p_{2i}(s) - E \cdot \left( \sum_{j=1}^3 A_{2j} (p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{2i}(s) \right), \mu \cdot p_{1i-1}(s) \right); s \in \Omega; i = \overline{1, l}. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

де  $E$  – довільне додатне число.

Допоміжні функції  $h$  і  $q$ , що входять в (3.1), мають вигляд:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0; \\ 0, & \text{якщо } x < 0; \end{cases} \quad q(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} \leq z; \\ \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} > z. \end{cases}$$

Виходить, що контактна задача зводиться до послідовного розв'язання на кожному  $i$ -му кроці системи нелінійних інтегральних рівнянь (3.1) відносно невідомих функцій  $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s)$ .

### 3.2 Дискретизація інтегральних рівнянь

Для знаходження наближеного розв'язку системи (3.1) оберемо область  $\Omega$  у вигляді відкритого квадрата, який обмежений паралельними осями  $x, y$  та має центр у точці  $O$  на початку координат. Далі розіб'ємо  $\Omega$  на  $n^2$  однакових квадратів  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n^2}$ , орієнтованих подібно  $\Omega$ . Вважатимемо, що при кожному фіксованому значенні  $i$  невідомі функції  $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s)$  на кожному квадраті  $\omega_k$  приймають сталі значення  $x_{3k-2i}, x_{3k-1i}, x_{3ki}$ . Тоді для системи (3.1) отримуємо аналог цієї системи у дискретному вигляді наступною сукупністю систем нелінійних скалярних рівнянь [18]

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{3k-2i} = h \left( x_{3k-2i} - E \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-2j} \cdot x_{ji} - b_{3k-2i} \right) \right); \\ x_{3k-1i} = q \left( x_{3k-1i} - E \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1j} \cdot x_{ji} - b_{3k-1i} \right), \right. \\ \left. x_{3ki} - E \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3kj} \cdot x_{ji} - b_{3ki} \right), \mu \cdot x_{3k-2i-1} \right); \\ x_{3ki} = q \left( x_{3ki} - E \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3kj} \cdot x_{ji} - b_{3ki} \right), \right. \\ \left. k = \overline{1, n^2}, i = \overline{1, l}. \right. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

У системі (3.2) числові параметри  $a_{kj}$  є елементами матриці податливості взаємодіючих тіл, а  $b_{ki}$  визначають умови навантаження взаємодіючих тіл на  $i$ -му кроці навантажування [18].

### 3.3 Ітераційний метод

Дана контактна задача у дискретному вигляді для отримання наближеного розв'язку системи (3.2) зводиться до послідовного розв'язку на кожному фіксованому  $i$ -му кроці навантажування системи рівнянь. При кожному фіксованому  $i$  будемо шукати за допомогою методу простої ітерації, використовуючи ітераційний процес:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( x_{1i}^{(0)}, x_{2i}^{(0)}, \dots, x_{3n^2 i}^{(0)} \right) \in R^{3n^2}, i = \overline{1, l}, k = \overline{1, n^2}, m = 0, 1, 2, \dots \\ x_{3k-2i}^{(m+1)} = h \left( x_{3k-2i}^{(m)} - E \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-2j} x_{ji}^{(m)} - b_{3k-2i} \right) \right); \\ x_{3k-1i}^{(m+1)} = q \left( x_{3k-1i}^{(m)} - E \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1j} x_{ji}^{(m)} - b_{3k-1i} \right) \right); \\ \left. \begin{array}{l} x_{3ki}^{(m)} - E \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3kj} x_{ji}^{(m)} - b_{3ki} \right), \mu \cdot x_{3k-2i-1} \end{array} \right\}; \quad (3.3) \\ x_{3ki}^{(m+1)} = q \left( x_{3ki}^{(m)} - E \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3kj} x_{ji}^{(m)} - b_{3ki} \right) \right); \\ \left. \begin{array}{l} x_{3k-1i}^{(m)} - E \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1j} x_{ji}^{(m)} - b_{3k-1i} \right), \mu \cdot x_{3k-2i-1} \end{array} \right\}. \end{array} \right.$$

В роботі [19] доведено, що збіжність ітераційного процесу (3.3) на кожному  $i$ -му кроці навантажування при будь-якому виборі початкового

наближення  $(y_{1i}^{(0)}, y_{2i}^{(0)}, \dots, y_{3n^2 i}^{(0)}) \in R^{3n^2}$  можна забезпечити належним вибором довільної додатної константи  $E$ .

Розв'язавши на кожному кроці навантажування тіл за допомогою ітераційного процесу (3.3) відповідну цьому кроку систему рівнянь (3.2) можна отримати наближений розв'язок контактної задачі про взаємодію пружних тіл з урахуванням тертя.

#### 4 ЧИСЕЛЬНІ РОЗРАХУНКИ

Для дослідження впливу історії навантажування куль на розподіл контактних напружень була розглянута задача про контакт двох пружних куль при різних способах їх навантаження. Розглядалися два типи навантажування тіл. Це послідовне, при якому кулі спочатку стискувались за рахунок їх нормального зближення, а потім відбувався їх зсув у напрямі їх спільної дотичної площини. Другий тип навантажування називають простим навантаженням. В цьому випадку дії на кулі нормальних і дотичних сил зростають одночасно і пропорційно.

Для знаходження наближеного розв'язку будемо використовувати наступні вхідні дані: радіуси двох пружних куль однакові – 0,005 м; значення нормальної  $P_z = 60,438 \text{ кН}$  і дотичної  $P_x = 12,002 \text{ кН}$  сил; здатність матеріалу чинити опір розтягування, стиснення при пружній деформації (модулі Юнга)  $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^6 \text{ МПа}$ ; величина, коефіцієнт якої залежить не від розмірів тіла, а від природи матеріалу (коефіцієнти Пуассона)  $\nu_1 = \nu_2 = 0,2$ ; був прийнятий рівномірний коефіцієнт тертя  $\mu = 0,2$ . Для отримання чисельного розв'язку використану зону розбиття  $\Omega$  розіб'ємо на  $51 \times 51 = 2601$  рівних квадратних граничних елементів.

Згідно статичної постановки контактної задачі, спочатку визначаємо величини жорстких зміщень куль  $P_z$  і  $P_x$  за допомогою одного кроку навантажування. На рис. 4.1 показані отримані розподіли дотичних контактних напружень при одному кроці навантажування.

В квазістатичній постановці задачі навантаження здійснювалось за 40 кроків, спочатку за 20 кроків відбувалось монотонне нормальне стискання куль, а потім за 20 кроків відбувався їх відносний дотичний зсув у напрямі паралельному осі  $Ox$ . Величини жорстких зміщень куль, що відповідали силам  $P_z$  і  $P_x$  знаходили аналогічно попередній задачі.

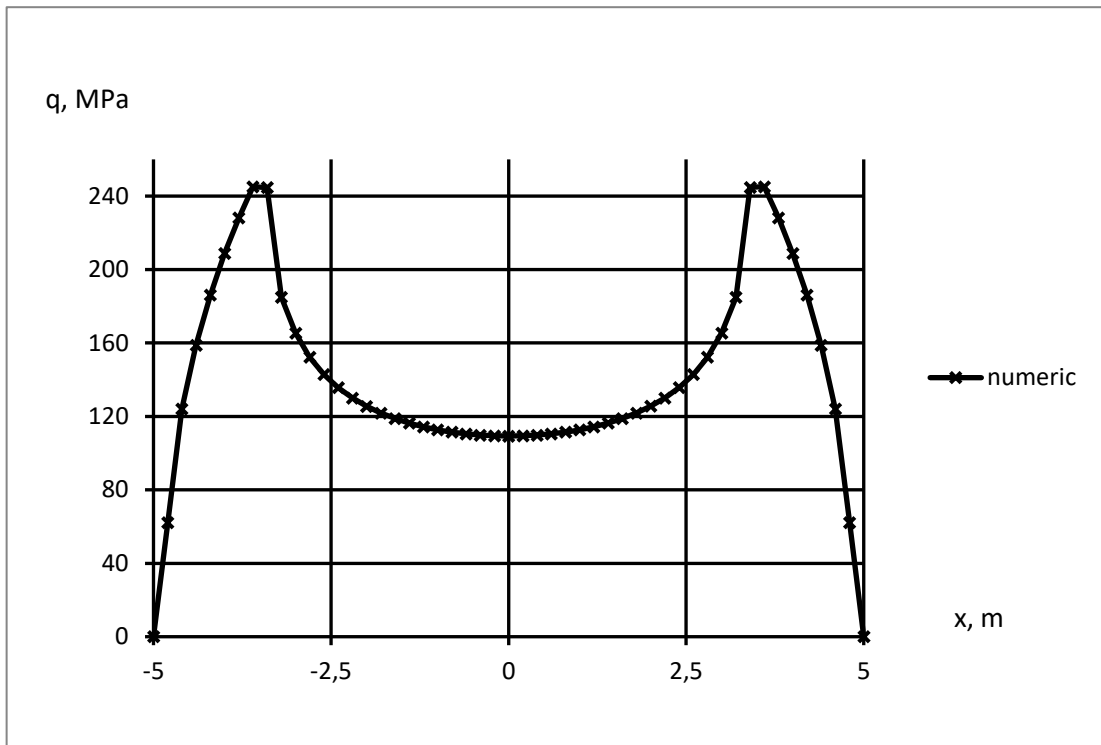


Рисунок 4.1 – Графік дотичних контактних напружень при одному кроці навантаження

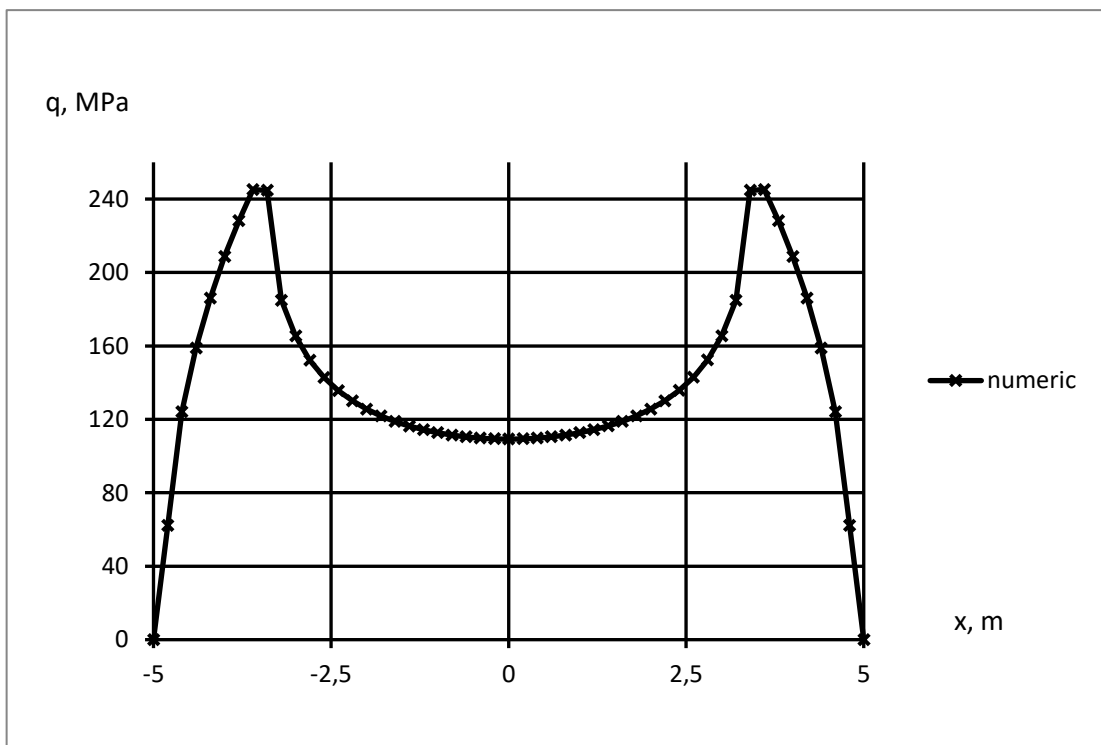


Рисунок 4.2 – Графік дотичних контактних напружень при 40 кроках навантаження



На рис. 4.2 представлено отримані розподіли дотичних контактних напружень.

Результати, отримані при пропорційному навантаженні куль нормальними і дотичними зусиллями, представлені на рис 4.3. В даному випадку нормальне і дотичне зміщення куль відбувалось одночасно за 40 кроків.

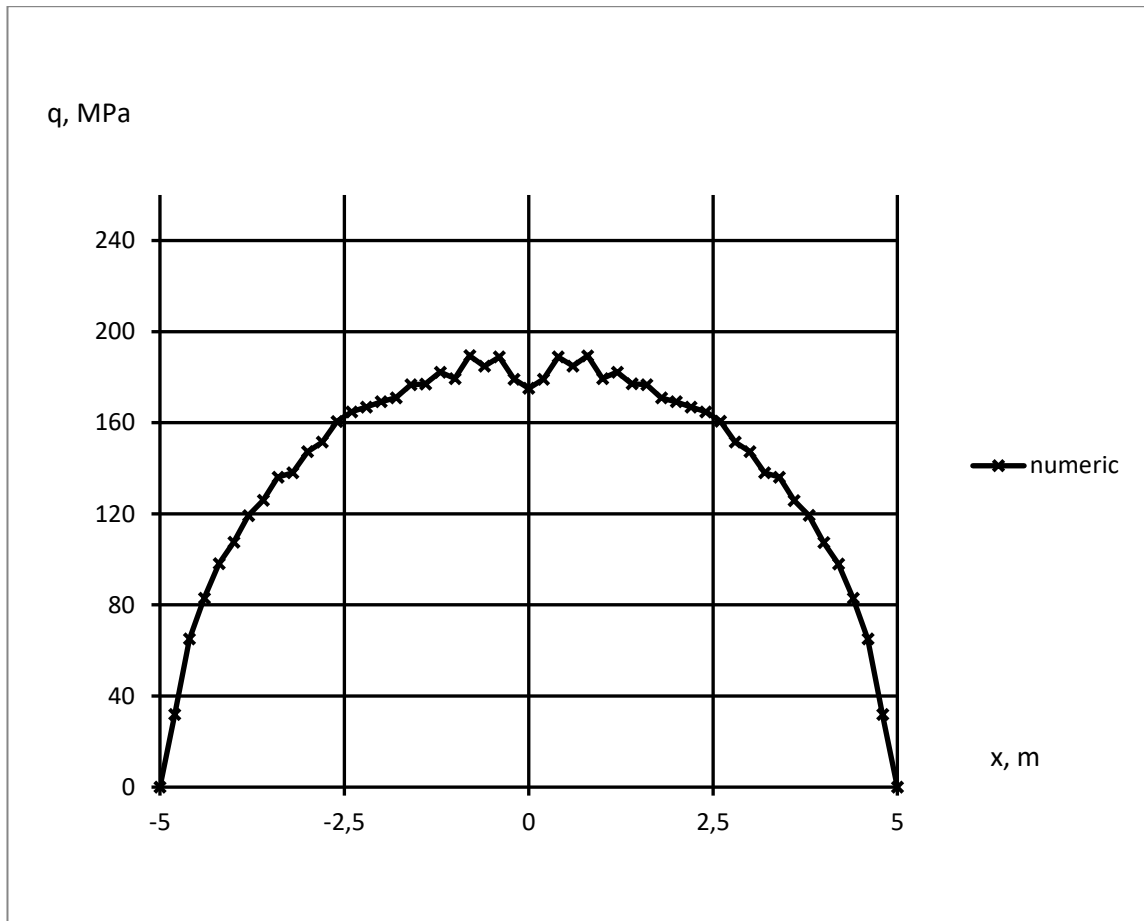


Рисунок 4.2 – Графік контактного напруження при ста кроках навантаження

Результати, зображені на рис. 4.1 – 4.3, показують, що коли матеріали куль однакові розподіли дотичних контактних напружень, отримані в статичній постановці та в квазістатичній постановці задачі, не мають великої відмінності один від одного та від розв'язку Р.Д. Міндліна [4] (рис. 4.1, 4.2). Відносна похибка порівнюваних величин не перевищує в розглянутому

випадку 2 %. Для нормальних контактних напружень відносно відхилення від розв'язку Герца [1] склала приблизно 1%. Таким чином, отримані результати свідчать, що для розглянутої задачі можна використовувати статичну постановку при одно-кроковому процесі навантажування взаємодіючих тіл. Також можна зробити висновок, що при послідовному навантаженні в області контакту утворюється центральна кругова область зчеплення радіуса приблизно 3,2 мм та кільцева зона проковзування, що прилягає до межі кругової області контакту радіуса приблизно 5 мм.

У випадку простого навантаження (рис. 4.3) розв'язок задачі суттєво відрізняється. В цьому випадку дотичні контактні напруження прямо пропорційні контактним тискам з коефіцієнтом пропорційності меншим за  $\mu$  коефіцієнт тертя. Це означає, що в області контакту має місце повне зчеплення контактуючих частин поверхонь куль. Водночас область контакту має такий самий радіус 5 мм як і при послідовному навантаженні.

## ВИСНОВКИ

За результатами проведених досліджень в даній кваліфікаційній роботі магістра було сформульовано математичну модель квазістатичної контактної задачі про фрикційну взаємодію пружних тіл.

Отримано системи нелінійних інтегральних рівнянь, що відповідають крокам дискретного процесу навантажування тіл.

Розроблено алгоритм чисельного розв'язання отриманих систем. За допомогою розробленого алгоритму отримано чисельний розв'язок квазістатичної задачі про фрикційний контакт з частковим проковзуванням двох пружних куль, що мають однакові пружні властивості при послідовному та простому навантажуванні куль.

Виконано порівняння отриманих результатів з відомими з літератури даними, яке свідчить про коректність застосованих математичних підходів.

**ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ**

1. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper. *J Reine und Angewandte Mathematik*. 1882. Bd. 92. P. 156–171.
2. Kalker J.J. A survey of the mechanics of contact between solid bodies. *ZAMM*. 1977. В. 57, Н. 5. P. T3–T17.
3. Cattaneo C. Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli stozzi. *Rend. Dell'Accademia nazionale dei Lincei*. 1938. Vol. 27. Ser. 6. P. 342–348, 434–436, 474–478.
4. Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1949. Vol. 16. №3. P. 259–268.
5. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. Москва : Гостехиздат, 1953. 250 с.
6. Кравчук А.С. Решение некоторых пространственных контактных задач с учётом трения на поверхности соприкосновения. *Трение и износ*. 1981. Т. 2. № 4. С. 589–595.
7. Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев-Одесса: Вища школа, 1982. 168 с.
8. Александров А.И., Стреляев Ю.М. Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для контактных задач теории упругости. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2014. № 3 (7). С. 36–40.
9. Кравчук А.С. Вариационный метод в контактных задачах. Состояние проблемы, направления развития. *ПММ*. 2009. Вып. 73. № 3. С. 492–502.
10. Александров В.М., Пожарский Д.А. Трёхмерные контактные задачи при учёте трения и нелинейной шероховатости. *Прикл. мат. и мех.* 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 516–527.
11. Александров А.И. Решение задач контактного взаимодействия упругих тел с использованием нелинейных операторных уравнений.

Днепропетровск, 1989. 74 с. (Препринт. АН УССР. Ин-т технической механики; 89-2).

12. Александров А.И. О единственности решения задачи контактного взаимодействия упругих тел при наличии кулонова трения. *Вісник Дніпропетровського університету*. 2009. № 5/1: сер.: механіка. Т. 2. Вип. 13. С. 3–11.

13. Александров А.И. Решение задач о контакте упругих тел с использованием нелинейных интегральных уравнений. *Доповіді Національної академії наук України*. 2012. № 11. С. 47–52.

14. Александров А.И. Метод решения пространственной контактной задачи о взаимодействии двух упругих тел при наличии трения между ними. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2013. Т. 56. № 3. С. 29–42.

15. Спектор А.А. Некоторые пространственные статические контактные задачи теории упругости с проскальзыванием и сцеплением. *Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела*. 1981. № 3. С. 12–25.

16. Vermeulen P.J., Johnson K.L. Contact of non-spherical bodies transmitting tangential forces. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* 1964. Vol. 31, № 1. P. 338–340.

17. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. Москва : Мир, 1989. 494 с.

18. Стреляев Ю.М. Чисельний розв'язок задачі про контакт пружних тіл під дією нормального і дотичного навантажень. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2016. Вип. 24. С. 100–110.

19. Стреляев Ю.М. Решение квазистатической контактной задачи теории упругости с учетом трения. *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. 2014. № 2. С.161–172.

## Додаток А

### Програма для чисельного рішення просторової контактної задачі про взаємодію штампa і пружного тіла з урахуванням тертя, історії навантаження і температурних розширень

DIMENSION

X(22000),X1(22000),U(22000),D1(300),D2(300),D3(300),

\*TM(300),V(22000)

NNX=51 !Число вузлів по осі x (макс 51)

NNY=51 !Число вузлів по осі y (макс 51)

NN=NNX\*NNY !Число граничних елементів

NSX=(NNY-1)/2+1 ! Номер лінії сітки осі x

NSY=(NNX-1)/2+1 ! Номер лінії сітки осі y

KSTEP=100 !Число кроків навантаження

!LSTEP=KSTEP

NSTEP=2\*KSTEP

DISN=0.08 !Нормальне зміщення

DIST=0.015 !Дотичне зміщення

STDX=0.2 !Крок сітки по X

STDY=0.2 ! Крок сітки по Y

!Пружні постійні

E1=210000.

E2=210000.

nu1=0.3

nu2=0.3

!коефіцієнт тертя

tr=0.3

TF=0. !кінцева температура

!=====

!Закони навантаження

!Просте (пропорціональне)

!DO 2 I=1,NSTEP !нормальне вдавнення

!D1(I)=DISN\*I/NSTEP

!D3(I)=DIST\*I/NSTEP

! D2(I)=0.

!Послідовне

DO 2 I=1,KSTEP ! нормальне вдавнення

D1(I)=DISN\*I/KSTEP

D2(I)=0.

D3(I)=0.

TM(I)=0.

!Нагрівання

D1(KSTEP+I)=DISN

D3(KSTEP+I)= 0.

D2(KSTEP+I)=0.

TM(KSTEP+I)= TF\*I/KSTEP

!Охолодження

!D1(2\*KSTEP+I)=DISN

!D3(2\*KSTEP+I)= 0.

!D2(2\*KSTEP+I)=0.

!TM(2\*KSTEP+I)= TF-TF\*I/KSTEP

2 CONTINUE

!Розгрузка до 0.818\*DISN за LSTEP кроків

! DO 20 I=1,LSTEP

! D1(KSTEP+I)=DISN-(1.- 0.818)\*DISN\*I/LSTEP

! D2(KSTEP+I)=0.

!D3(KSTEP+I)=0.

!20 CONTINUE

! =====

CALL CONT3(D1,D2,D3, TM,NSTEP,pu1,pu2,E1,E2,tr,  
\*STDY,STDY,NN,NNX,NNY,NSX,NSY,X,X1,U,0.0001,V)

STOP

END

SUBROUTINE

CONT3(D1,D2,D3, TM,K,PUPL,PUMI,EPL,EMI,EM,DX,DY,N,N1,N2,  
\*KX,KY,X,X1,U,E1,V)

DIMENSION D1(K),D2(K),D3(K),TM(K),X(3\*N),X1(3\*N),U(3\*N),  
\*A(22000,22000),P(N1),M(N1),SS12(3\*N),SS13(3\*N),Z(N),XX(3\*N),  
\*XY(3\*N),V(3\*N)

!Опис вхідних параметрів:

!1) D1,D2,D3 – масиви значень(в мм)покрокових жорстких  
зміщень

! по осям z,x,y;

!2) K – число кроків навантаження;

!3) PUPL,PUMI – коефіцієнти Пуассона нижнього, верхнього тіл;

!4) EPL,EMI – модулі пружності (в МПа) нижнього, верхнього  
тіл;

!5) EM – коефіцієнт тертя;

!6) DX,DY – довжини сторін(в мм)елементарного прямокутника  
сітки;



!7) N – число вузлів сітки  $N=N1*N2$

!8)  $N1,N2$  – число ліній сітки паралельних осям  $u,x$ ;

!9)  $KX,KY$  – номери ліній сітки, співпадаючі з осями  $x,u$ ;

!10)  $A,X,X1,U,P,M,SS12,SS13,Z$  – допоміжні масиви;

!11)  $E1$  – відносна похибка(точність розв'язків)

!.12)  $TM$  – масив покрокового вимірювання температури

$N3=3*N$

!Координати лівого нижнього вузла сітки

$X5=DX*(1-KY)$

$Y5=DY*(1-KX)$

! Пружні параметри

$Pi=ATAN(1.)*4.$

$C1=((1-PUPL**2)/(Pi*EPL))+((1-PUMI**2)/(Pi*EMI))$

$C2=-((1+PUMI)*(1-2*PUMI)/(2*Pi*EMI))+$

$*((1+PUPL)*(1-2*PUPL)/(2*Pi*EPL))$

$C3=(PUMI*(1+PUMI)/(Pi*EMI)+(PUPL*(1+PUPL)/(Pi*EPL))$

$A1=C1*(2.*DX*ALOG(TAN(0.25*(Pi+2.*ATAN(DY/DX))))$

$*-2.*DY*ALOG(TAN(0.5*ATAN(DY/DX))))!+0.000000003$

$A2=C1*(2.*DX*ALOG(TAN(0.25*(Pi+2.*ATAN(DY/DX))))$

$*-2.*DY*ALOG(TAN(0.2*ATAN(DY/DX))))!+0.000000003$

$*+C3*DY*ALOG((SQRT(DX**2+DY**2)+DX)/(SQRT(DX**2+DY**2)-DX))$

$A3=C1*(2.*DX*ALOG(TAN(0.25*(Pi+2.*ATAN(DY/DX))))$

$*-2.*DY*ALOG(TAN(0.5*ATAN(DY/DX))))$

$*+C3*DX*ALOG((SQRT(DX**2+DY**2)+DY)/(SQRT(DX**2+DY**2)-DY))$

$!*+0.000000003$

```

DO 220 I=1,N2 !Формування масиву координат вузлів
DO 220 J=1,N1
I1=(I-1)*N1+J

X(I1)=X5+DX*(J-1)
220 X1(I1)=Y5+DY*(I-1)
DO 250 I=1,N !Формування матриці піддатливості
DO 250 J=1,N
R=SQRT((X(I)-X(J))**2+(X1(I)-X1(J))**2)
A(3*I-2,3*J-2)=A1
A(3*I-2,3*J-1)=0.
A(3*I-2,3*J)=0.
A(3*I-1,3*J-2)=0.
A(3*I-1,3*J-1)=A2
A(3*I-1,3*J)=0.
A(3*I,3*J-2)=0.
A(3*I,3*J-1)=0.
A(3*I,3*J)=A3
IF(I.EQ.J)GO TO 250
A(3*I-2,3*J-2)=C1*DX*DY/R
A(3*I-2,3*J-1)=C2*(X(I)-X(J))*DX*DY/(R**2)
A(3*I-2,3*J)=C2*(X1(I)-X1(J))*DX*DY/(R**2)
A(3*I-1,3*J-2)=-C2*(X(I)-X(J))*DX*DY/(R**2)
A(3*I-1,3*J-1)=C1*DX*DY/R+(C3*DX*DY*((X(I)-
X(J))**2))/(R**3)
A(3*I-1,3*J)=C3*(X(I)-X(J))*(X1(I)-X1(J))*DX*DY/(R**3)
A(3*I,3*J-2)=-C2*(X1(I)-X1(J))*DX*DY/(R**2)
A(3*I,3*J-1)=C3*(X(I)-X(J))*(X1(I)-X1(J))*DX*DY/(R**3)

```

$$A(3*I,3*J)=C1*DX*DY/R+(C3*DX*DY*((X1(I)-X1(J)**2))/(R**3)$$

250 CONTINUE

DO 1 I=1,N ! Початковий зазор між тілами

XX(I)=X(I)

XY(I)=X1(I)

1 U(I)=FD(X(I),X1(I))

DO 30 I=1,N3

SS12(I)=0.

SS13(I)=0.

X(I)=0. ! Очищення пам'яті масивів X(I) X1(I) для збереження  
напруження

30 X1(I)=0.

DD2=0.

DD3=0.

TMM=0.

DO 777 I20=1,K !Покрокове напруження

80 DO 40 I=1,N !Ітерація процесу Зейделя

I111=3\*I-2

I112=3\*I-1

I113=3\*I

S11=0.

S12=0.

S13=0.

Z(I)=X(I111) ! Збереження попередніх нормальних тисків

DO 60 J=1,N3

IF(J.GT.I111) S11=S11+A(I111,J)\*X(J)

IF(J.GT.I112) S12=S12+A(I112,J)\*X(J)

IF(J.GT.I113) S13=S13+A(I113,J)\*X(J)

IF(J.LT.I111) S11=S11+A(I111,J)\*X1(J)

IF(J.LT.I112) S12=S12+A(I112,J)\*X1(J)

IF(J.LT.I113) S13=S13+A(I113,J)\*X1(J)

60 CONTINUE

GAM=-((S11-D1(I20)+U(I))/A(I111,I111))

ALF=-((S12-D2(I20)+UT(XX(I),TM(I20))-UT(XX(I),TMM)+DD2-  
\*SS12(I112))/A(I112,I112))

BET=-((S13-D3(I20)+UT(XY(I),TM(I20))-UT(XY(I),TMM)+DD3-  
\*SS13(I113))/A(I113,I113))

S2=GAM

S2=ABS(GAM)

X1(I111)=0.5\*(GAM+S2)

Q1=SQRT(ALF\*\*2+BET\*\*2)

Q2=EM\*X(I111)

X1(I112)=ALF

X1(I113)=BET

IF(Q1.GT.Q2)X1(I112)=EM\*X(I111)\*ALF/Q1

IF(Q1.GT.Q2)X1(I113)=EM\*X(I111)\*BET/Q1

40 CONTINUE

S=0.

```

SM=0.
DO 730 I=1,N3
S=S+(X1(I)-X(I))**2
SM=SM+X1(I)**2
X(I)=X1(I)
730 CONTINUE

S1=SQRT(S)/SQRT(SM) !Відносна похибка ітерацій
WRITE(6,120)S1

IF(S1.GE.E1)GO TO 80 ! Перехід до наступної ітерації
! Поправки зсувів для наступного кроку навантаження

DD2=D2(I20)
DD3=D3(I20)
TMM=TM(I20)
! Поправки сум для наступного кроку навантаження

DO 776 I=1,N
I112=3*I-1
I113=3*I
SS12(I112)=0.
SS13(I113)=0.
V(I112)=0.
V(I113)=0.

DO 775 J=1,N3
SS12(I112)=SS12(I112)+A(I112,J)*X(J)
SS13(I113)=SS13(I113)+A(I113,J)*X(J)
V(I112)=SS12(I112)+UT(XX(I),TM(I20))-D2(I20)
V(I113)=SS13(I113)+UT(XY(I),TM(I20))-D3(I20)

```

```

775 CONTINUE
776 CONTINUE
      ! Висновок на екран покрокових зсувів
      WRITE(6,520)D1(I20)
520  FORMAT(2X,24H NORMAL DISPLACEMENT= ,F12.6)
      WRITE(6,521)D2(I20)
521  FORMAT(2X,24H TANGEN_X DISPLACEMENT=,F12.6)
      WRITE(6,522)D3(I20)
522  FORMAT(2X,24H TANGEN_Y DISPLACEMENT=,F12.6)
      ! Розрахунок і висновок сумарних сил
      SZ=0.
      SX=0.
      SY=0.

      DO 300 I=1,N
          I1=3*I-2
          I2=3*I-1
          I3=3*I
          SZ=SZ+X1(I1)*DX*DY
          SX=SX+X1(I2)*DX*DY
300  SY=SY+X1(I3)*DX*DY
      open(45, file = 'FORCES.txt')
          write(45, '(I4)')I20
          write(45, '(F12.6)') SZ, SX, SY
120  FORMAT(2X,19HRIGID DISPLACEMENT=,F12.6)
      WRITE(6,831)SZ
831  FORMAT(2X,8HZFORCE =,G12.5)

      WRITE(6,130)SX

```

```

130  FORMAT(2X,8HXFORCE =,G12.5)
      WRITE(6,830)SY
830  FORMAT(2X,8HYFORCE =,G12.5)

```

```

777  CONTINUE

```

```

      PAUSE

```

```

      ! Висновок тисків в вузлах

```

```

      WRITE(6,14)

```

```

14   FORMAT(2X,22HPRESSURE NORM ON AXI Z)

```

```

      J17=KX

```

```

      DO 23 J=1,J17

```

```

      DO 10 I=1,N1

```

```

10   P(I)=0.

```

```

      DO 11 I=1,N1

```

```

      I1=(KX-2+J)*3*N1+3*I-2

```

```

11   P(I)=X1(I1)

```

```

      open(45, file = 'P1onX.txt')

```

```

      write(45, '(I4)')J

```

```

      write(45, '(F12.6)')P

```

```

      WRITE(6,24)J

```

```

24  FORMAT(I4)

```

```
WRITE(6,15)P
15  FORMAT(6F12.6)
23  CONTINUE
    PAUSE

WRITE(6,140)

140  FORMAT(2X,22HPRESSURE KASX ON AX IX)

    J17=KX
        DO 230 J=1,J17
            DO 100 I=1,N1
100    P(I)=0.
        DO 110 I=1,N1
            I1=(KX-2+J)*3*N1+3*I-1

110  P(I)=X1(I1)
        open(45, file = 'P2onX.txt')
            write(45, '(I4)')J
            write(45, '(F12.6)')P

WRITE(6,240)J
240  FORMAT(I4)

WRITE(6,150)P
150  FORMAT(6F12.6)
230  CONTINUE
    PAUSE
```



!=====

WRITE(6,141)

141    FORMAT(2X,22HPRESSURE KASY ON AX IX)

J17=KX

DO 231 J=1,J17

DO 101 I=1,N1

101    P(I)=0.

DO 111 I=1,N1

I1=(KX-2+J)\*3\*N1+3\*I

111    P(I)=X1(I1)

open(45, file = 'P3onX.txt')

write(45, '(I4)')J

write(45, '(F12.6)')P

WRITE(6,241)J

241    FORMAT(I4)

WRITE(6,151)P

151    FORMAT(6F12.6)

231    CONTINUE

PAUSE

!=====

WRITE(6,440)

440    FORMAT(2X,22HPRESSURE KASY ON AX IY)

```

      J17=KY
      DO 430 J=1,J17
      DO 400 I=1,N2
400   P(I)=0.
      DO 410 I=1,N2
      I1=(KY-1+J)*3+3*N1*(I-1)
410   P(I)=X1(I1)
      open(45, file = 'P3onY.txt')
      write(45, '(I4)')J
      write(45, '(F12.6)')P

      WRITE(6,940)J
940   FORMAT(I4)

      WRITE(6,950)P
950   FORMAT(6F12.6)
430   CONTINUE
      PAUSE
      !=====
      WRITE(6,441)

441   FORMAT(2X,22HPRESSURE KASX ON AX IY)
      J17=KY
      DO 431 J=1,J17
      DO 401 I=1,N2
401   P(I)=0.
      DO 411 I=1,N2
      I1=(KY-1+J)*3+3*N1*(I-1)-1
411   P(I)=X1(I1)
      open(45, file = 'P2onY.txt')

```

```

write(45, '(I4)')J
write(45, '(F12.6)')P

```

```

WRITE(6,941)J
941 FORMAT(I4)

```

```

WRITE(6,951)P
951 FORMAT(6F12.6)
431 CONTINUE
PAUSE
!====displacement Vx on x
WRITE(6,147)

```

```

147 FORMAT(2X,22HDISPLACE KASX ON AX IX)

```

```

J17=KX
DO 237 J=1,J17
DO 107 I=1,N1
107 P(I)=0.
DO 117 I=1,N1
I1=(KX-2+J)*3*N1+3*I-1
117 P(I)=V(I1)
open(45, file = 'V2onX.txt')
write(45, '(I4)')J
write(45, '(F12.6)')P

```

```

WRITE(6,247)J
247 FORMAT(I4)

```

```

WRITE(6,157)P
157  FORMAT(6F12.6)
237  CONTINUE
      PAUSE

      !====displacement Vy on x
      WRITE(6,148)

148  FORMAT(2X,22HDISPLACE KASY ON AX IX)

      J17=KX
      DO 238 J=1,J17
      DO 108 I=1,N1
108  P(I)=0.
      DO 118 I=1,N1
      I1=(KX-2+J)*3*N1+3*I
118  P(I)=V(I1)
      open(45, file = 'V3onX.txt')
      write(45, '(I4)')J
      write(45, '(F12.6)')P

      WRITE(6,248)J
248  FORMAT(I4)

      WRITE(6,158)P
158  FORMAT(6F12.6)
238  CONTINUE
      PAUSE

```

```
!=====
!=====
```

! Побудова зон контакту

```
WRITE(6,160)
160  FORMAT(2X,14HCONTACT REGION)
      XMAX=X(1)
      DO 450 I450=2,N3

      IF(X(I450).GT.XMAX)XMAX=X(I450)

450  CONTINUE
      WRITE(6,161)XMAX
161  FORMAT(2X,7HXMAX = ,F12.6)
      DEL1=1./10000.
      DO 170 I=1,N2
      DO 190 J=1,N1
          J13=J+(I-1)*N1
          L41=3*J13-2
          L42=3*J13-1
          L43=3*J13
          Q3=ABS(SQRT(X1(L42)**2+X1(L43)**2)-EM*Z(J13))
          Q4=X1(L42)**2+X1(L43)**2+X1(L41)**2
          M(J)=2
      IF(Q3.LT.DEL1)M(J)=1
      IF(Q4.EQ.0.)M(J)=0
190  CONTINUE
      WRITE(6,240)I
          WRITE(6,200)M
200  FORMAT(102I1)
```

```

open(45, file = 'Region.txt')
write(45, '(102I1)') M
170  CONTINUE
RETURN
END

FUNCTION FD(X,Y) ! Функція задає геометрію тіл
      !R1X=10.0**20
      !R1Y=10.0**20
      R2X=300.
      R2Y=300.
      FD=(X**2)/(2*R2X)+(Y**2)/(2*R2Y)
RETURN
END

FUNCTION UT(X,T) ! Функція задає термопремещенія
      AA=0.000013 ! коефіцієнт теплового розширення

      UT=-AA*X*T
RETURN
END

!FUNCTION FD(X,Y)
      !
      !FD=300.-SQRT(300.**2-X**2-Y**2)
!RETURN
!END
!
```