

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА
на тему: «**ЗАСТОСУВАННЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ ДО
УСУНЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ У МЕТОДІ
СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**»

Виконав: студент 2 курсу, групи 8.1119
спеціальності 111 математика
освітньої програми математика
(назва освітньої програми)

Д.А. Колупаєв

(ініціали та прізвище)

Керівник завідувач кафедри фундаментальної
математики, доцент, д.т.н. Гребенюк С. М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент професор кафедри програмної інженерії,
доцент, д.т.н. Чопоров С.В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя
2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет Математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти Магістр

Спеціальність 111 математика

Освітня програма Математика

(шифр і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної математики,
д.т.н., доцент

_____ Гребенюк С.М.
(підпис)

« _____ » _____ 2020 р.

З А В Д А Н Н Я
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ

Колупаєву Дмитру Андрійовичу
(прізвище, ім'я та по батькові)

1. Тема роботи Застосування степеневих рядів до усунення невизначеностей у методі скінченних елементів

керівник роботи Гребенюк Сергій Миколайович, д.т.н, доцент
(прізвище, ім'я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 20 » Травня 2020 року № 576-С

2. Строк подання студентом роботи 27.11.2020

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

1. Постановка задачі.

2. Основні теоретичні відомості.

3. Принципи побудови моментних схем різних скінченних елементів.

4. Застосування моментної схеми методу скінченних елементів.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) _____

Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 22.05.2020

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	22.05.2020	
2.	Збір вихідних даних.	01.07.2020	
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	01.09.2020	
4.	Розробка першого та другого розділу.	15.10.2020	
5.	Розробка третього та четвертого розділу.	20.11.2020	
6.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	27.11.2020	
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	18.12.2020	

Студент

(підпис)

Д. А. Колупаєв

(ініціали та прізвище)

Керівник роботи

(підпис)

С. М. Гребенюк

(ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер

(підпис)

О. Г. Спиця

(ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Застосування степеневих рядів до усунення невизначеностей у методі скінченних елементів»: 42 с., 4 рис., 14 джерел.

РОЗКЛАДАННЯ, РЯД ТЕЙЛОРА, МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ, МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, МОМЕНТНА СХЕМА, ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦІЙ.

Об'єкт дослідження: метод скінченних елементів.

Предмет дослідження: використання розкладань у ряд Тейлора при отриманні основних співвідношень моментної схеми скінченного елемента.

Мета роботи: вивчити та систематизувати теоретичний матеріал про моментну схему методу скінченних елементів та використати його для розв'язання практичних задач.

Методи дослідження: аналітичний, чисельний.

У кваліфікаційній роботі було вивчено основні теоретичні відомості про застосування розкладань у ряд Тейлора при отриманні основних співвідношень матриці жорсткості скінченного елемента на основі моментної схеми. Наведено основні теоретичні основи практичного застосування моментної схеми методу скінченних елементів. Для дослідження основних аспектів методу скінченних елементів було проведено розрахунки на елементарних конструкціях еластомерів. Було створено програми за допомогою пакету комп'ютерної алгебри Maple, що реалізують основні етапи методу. Було розглянуто скінченні елементи різної форми.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis «The Application of Power Series to Eliminate Uncertainties in the Finite Element Method»: 42 pages, 4 figures, 14 references.

NODE, STIFFNESS MATRIX, FINITE ELEMENT METHOD, MOMENTARY SCHEME, TAYLOR SERIES, STRAIN TENSOR.

The object of study is finite element method.

The subject of study is usage of Taylor's series approximation for receiving main formulas of momentary scheme of finite element method.

The aim of the study is to collect, study and systematize theoretical material about momentary scheme in finite element method, and to use it for modeling of simple problems of elastomers projecting.

The methods of research are analytical, generalization method.

The basic concepts: «Momentary scheme in finite element method», «strain tensor», etc. were studied in this paper. The main theoretical foundations of the practical application of momentary scheme in the finite element method are studied. Calculations were made on elementary constructions of elastomers to study the main aspects of the finite element method. The programs, that implement the main stages of the method, were created by using Maple as a computer algebra system. Finite elements of different shapes were considered. In the subsequent study, one can consider finite elements of more sophisticated shape. The results of research can be used in numerical analysis and elasticity theory courses.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	2
Реферат	4
Summary	5
Вступ.....	7
1 Теоретичні основи моментної схеми методу скінченних елементів	9
1.1 Огляд літератури за темою	9
1.2 Особливості побудови математичних моделей механіки еластомерів	11
1.3 Використання моментної схеми методу скінченних елементів	12
2 Побудова матриць жорсткості різних скінченних елементів за допомогою моментної схеми МСЕ	18
2.1 Використання скінченного елемента у формі паралелепіпеду для проектування гумових деталей	18
2.2 Використання скінченного елемента у формі трикутної призми для проектування гумових деталей	20
2.3 Використання скінченного елемента у формі трикутної призми з 18 вузлами для проектування гумових деталей	23
3 Дослідження чисельних розрахунків еластомірів за допомогою методу скінченних елементів	28
3.1 Знаходження переміщень елементарної гумової деталі за допомогою скінченного елемента у формі паралелепіпеду.....	28
3.2 Знаходження переміщень елементарної гумової деталі за допомогою скінченного елемента у формі трикутної призми.....	33
3.2 Отримання коефіцієнтів розкладу деформацій для елемента у формі скінченного паралелепіпеду з 27 вузлами	35
Висновки	40
Перелік посилань	41

ВСТУП

Кваліфікаційна робота присвячена методу скінченних елементів у механіці еластомерів. Це ефективний чисельний метод розв'язання інженерних та фізичних задач. Область його застосування включає в себе як аналіз напруження в конструкціях автомобілів та літаків, так і розрахунок таких складних систем, як атомні електростанції. З його допомогою розглядають рух рідини по трубам, досліджується потік газу, що стискається, розв'язуються задачі електростатики, аналізуються коливання систем [1-5]. Але використання цього методу для певних матеріалів, таких як різні види гум та каучуків, має деякі складнощі. Саме тому вченими було розроблено моментну схему методу скінченних елементів, суть якої полягає в апроксимації функцій переміщення за допомогою рядів.

Мета роботи: зібрати, вивчити та систематизувати теоретичний матеріал про метод скінченних елементів у механіці еластомерів, використати його для моделювання елементарних задач теорії пружності. Отримати чисельні розв'язки та порівняти їх.

Розділ 1 присвячено основам методу скінченних елементів у механіці еластомерів та ідеї моментної схеми. У розділі 2 розглядається побудова матриць жорсткості елементів у формі паралелепіпеда та трикутної призми з різною кількістю вузлів та трикутної призми для моментної схеми скінченних елементів. Розділ 3 містить результати чисельних розрахунків елементарних задач механіки еластомерів за допомогою різних елементів, а також отримання коефіцієнтів розкладу для більш складних скінченних елементів. У висновках перераховано основні результати роботи.

Практична значимість роботи полягає в тому, що в процесі її виконання були створені програми за допомогою сучасної системи комп'ютерної алгебри Maple, які можна використовувати для подальшого поглиблення досліджень за даною темою.

Дослідження напружено-деформованого стану континуальних конструкцій є нелегкою задачею. Тому використання чисельних методів

заради цієї мети є виправданим. Метод скінченних елементів – один із найбільш універсальних методів для дослідження складних конструкцій. Але розв'язання задачі цього методу часто потребує великих обчислювальних витрат. Тому проблема пошуку найбільш вдалих модифікацій методу та перевірка їх правильної дії на елементарних конструкціях є актуальною.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

1.1 Огляд літератури за темою

Проектування еластомерів за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ) – це досить актуальне питання, яке постійно розвивається. Дуже багато сучасних та класичних робіт по МСЕ не розглядають способи подолання проблем, що виникають при розрахунку гумових деталей [1-5]. Тому більшість літератури за темою – це наукові статті, що присвячено розрахунку окремого виду гумових деталей [8, 11-15]; дисертації, які присвячено деяким спеціальним аспектам проектування еластомерів [9]; монографії, що були б присвячені використанню методу скінченних елементів у механіці еластомерів, є нечисленними [6, 7, 10].

У монографії [1] багато інформації присвячено теоретичним засадам методу, а саме основним рівнянням теорії пружності та підходу їх розв'язання за допомогою чисельних методів. Також автори крім методу скінченних елементів розглядають метод Рітца та метод Гальоркіна.

У роботі [2] Р. Галагер приділяє увагу як основам методу: означення та операції над елементами, способи глобального аналізу конструкцій тощо; так і складним, наприклад, аналіз стійкості пружних тіл. Книзі не вистачає практичних розрахунків, але в той же час у ній присутня велика кількість ілюстрацій, що покращують сприйняття матеріалу.

Навчальний посібник [3] містить основну інформацію щодо методу скінченних елементів, яка написана простою та зрозумілою мовою. Ця робота має в собі ідеї реалізації методу на ЕОМ.

У монографії [4] розглянуто основні теоретичні засади методу скінченних елементів. Подано інформацію про функції форми як у стандартному вигляді, так і в ієрархічному. Також частина інформації присвячена нескінченним елементам

У монографії [5] багато інформації Ю. Немчинов присвячує різним видам скінченних елементів, наприклад тетраедерним, скінченним елементам у формі паралелепіпедів із різною кількістю вузлів і у формі трикутних призм, а також приводить загальні схеми апроксимації функцій у методі та приклади розрахунків для задач будівельної механіки.

У монографії [6] автор розглядає теоретичні основи моментної схеми скінченних елементів. У роботі представлено напрямки використання теоретичних відомостей для проектування реальних гумових деталей.

У роботі [7] автори надають короткі відомості про використання еластомерів як конструкційного матеріалу. У монографії розглянуто недоліки та переваги різних емпіричних та чисельних методів, що використовуються для проектування еластомерів. Також автори на прикладі методу скінченних елементів демонструють суть використання чисельних методів у механіці еластомерів.

У статті [8] автор розглядає моменту схему скінченного елемента у формі паралелепіпеду з 8 вузлами та використовує цей скінченний елемент для розрахунку вигину консолі з одиничним розрізом.

Дисертацію [9] присвячено розрахунку гумових деталей за допомогою моментної схеми скінченних елементів із урахуванням армування еластомерів. У роботі автор докладно пояснює особливості використання МСЕ у механіці волокнистих композиційних матеріалів та представляє візуальне відображення отриманих практичних результатів.

У монографії [10] порівнюється можливість різних систем реалізації методу скінченних елементів для проектування поведінки гумових деталей. Було розглянуто різні нелінійні методи скінченноелементного аналізу еластомерів.

У статті [11] автори виводять формули для моментної схеми методу скінченних елементів кругового скінченного елемента.

У статті [12] автори використовують моменту схему скінченного елемента у формі паралелепіпеду для розрахунку пружно-деформаовного стану конструкцій із еластомерних матеріалів у інструментальних системах.

У статті [13] розглянуто особливості проектування стискання тонкошарових гумовометалевих елементів, використовуючи моментної схеми методу скінченних елементів.

У статті [14] автори визначають пружно-деформований стан гумового буфера на основі уточненої моментної схеми скінченного елемента.

Отже, дослідження літератури за темою показало недостатню кількість робіт присвячених проектуванню еластомерів та по використанню моментної схеми методу скінченних елементів. Також автори рідко порівнюють чисельні результати досліджень, проведених за допомогою різних елементів або різних апроксимуючих функцій. Крім того практична реалізація нечасто виконується за допомогою сучасних мов програмування. Саме ці причини зумовили мету та структуру кваліфікаційної роботи.

1.2 Особливості побудови математичних моделей механіки еластомерів

Еластомери – це полімери, що мають високоеластичні властивості та є в'язкими, наприклад гума, каучуки, поліуретан. Гумою або еластомером у широкому сенсі називають будь-який пружний матеріал, який може розтягуватися до розмірів, які у багато разів перевищують його початкову довжину, а також повертаються до початкового розміру, коли навантаження знято.

Використання еластомерів у різних інженерних конструкціях дає можливість підвищити їхню надійність, продуктивність та довговічність. Гумові елементи дають можливість знизити вібрацію та матеріалоемність конструкцій. Сьогодні досить часто використанню еластомерів у інженерній практиці немає аналогів.

При розрахунку еластомерів виникає необхідність враховувати різноманітні властивості еластомерів, такі як нестисливість, дисипативний розігрів тощо. Це призводить до ускладнення розрахунків, а також

різноманіття форм гумових деталей не дають змогу виробити універсальні методи математичного моделювання для створення якісних алгоритмів аналітичних розрахунків еластомерів. Саме тому поширення набули чисельні методи для проектування гумових деталей. При розрахунках матеріалів із коефіцієнтом Пуассона близьким до 0,5 виникають невизначеності у вигляді коефіцієнтів, що прагнуть до нескінченності.

Основними чисельними методами, що використовуються на практиці для розрахунку гумових деталей є метод кінцевих різниць, варіаційно-різницевий метод та метод скінченних елементів. Основною ідеєю переважної більшості чисельних методів є зведення диференціальних та інтегральних рівнянь, що описують поведінку суцільного середовища в континуальній області до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь, невідомими в яких є дискретні значення шуканої функції.

Метод скінченних елементів є одним із найбільш ефективних методів розрахунку інженерних конструкцій. Його суть полягає в розділенні континуальної області на малі підобласті (які називаються скінченними елементами) скінченної форми, в середині кожного скінченного елемента задається закон, що апроксимує шукану функції через її вузлові значення. Після цього записується функціонал енергії для кожного скінченного елемента, а загальний функціонал енергії – записується як сума функціоналів по всім скінченим елементам. Варіювання отриманого функціонала по вузловим значенням функції призводить до алгебраїчної системи [7, с. 10].

1.3 Використання моментної схеми методу скінченних елементів

Використання традиційних схем методу скінченних елементів у формі методу переміщення, побудованого на основі варіаційного принципу Лагранжа для розв'язання задач з особливостями (врахування слабкої стисливості, розрахунок пластин та оболонки на базі тривимірних скінченних елементів), виникають істотні труднощі. Для подолання цих труднощів

використовують інші варіаційні принципи: Кастільяно (метод сил), Хеллінга-Рейснера, Ху-Вашицу (змішані методи) [8].

Метод сил не отримав широкого застосування через недоліки використання цього методу в порівнянні з класичним методом: порушення додатної визначеності матриці рівнянь, збільшення порядку розв'язуючої системи рівнянь тощо. Через це використання гібридних схем методу скінченних елементів більш прийнятне.

Для усунення недоліків класичної схеми методу скінченних елементів (відсутність врахування жорстких зміщень та наявність похибок, пов'язаних із фіктивними зсувними деформаціями) використовують моментну схему скінчених елементів. Її суть полягає в тому, що деякі члени розкладу деформацій, що реагують на жорсткі зміщення та появу фіктивних зсувних деформацій відкидають. Точні рівняння зв'язку та переміщення при цьому замінюються наближеними [8].

Продемонструємо суть моментної схеми на прикладі скінченного елемента у формі паралелепіпеду. Розглянемо скінченний елемент у формі паралелепіпеду. Будемо вважати, що паралелепіпед визначено в прямокутній декартовій системі координат $\{O, x, y, z\}$. Потрібно ввести місцеву систему координат $\{O', x^1, x^2, x^3\}$: таку, що центр нової системи координат O' знаходиться в центрі елемента, а сам елемент представляє собою куб із стороною 2.

Вузли скінченного елемента будуть розташовуватися рівномірно, а в якості змінних приймаються значення вузлових переміщень. Для апроксимації полів переміщення відносно базисної системи в загальному випадку використовують розклад апроксимуючої функції в ряд Тейлора:

$$u_{k'} = \sum_{p=0}^l \sum_{q=0}^m \sum_{r=0}^n \omega_{k'}^{(pqr)} \psi^{(pqr)}, \quad (1.1)$$

де $\omega_{k'}^{(pqr)}$ – коефіцієнти розкладу, $\psi^{(pqr)}$ – набір степеневих координатних функцій, які можна знайти за формулами:

$$\psi^{(pqr)} = \frac{x^p y^q z^r}{p! q! r!}, \quad (1.2)$$

де $p = 0, 1, \dots, l; q = 0, 1, \dots, m; r = 0, 1, \dots, n$.

Компоненти тензора деформацій розкладемо в ряд Маклорена в околі початку координат:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \sum_{s=0}^{L_{ij}} \sum_{t=0}^{M_{ij}} \sum_{g=0}^{N_{ij}} e_{ij}^{(stg)} \psi^{(stg)}, \\ L_{ij} &= \begin{cases} l, & \text{при } i, j \neq 1, \\ l - 1, & \end{cases} \\ M_{ij} &= \begin{cases} m, & \text{при } i, j \neq 1, \\ m - 1, & \end{cases} \\ N_{ij} &= \begin{cases} n, & \text{при } i, j \neq 1, \\ n - 1, & \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3)$$

де коефіцієнти розкладу $e_{ij}^{(stg)}$ можна розрахувати за формулами:

$$\begin{aligned} e_{11}^{(pqr)} &= \sum_{\mu=0}^p \sum_{\vartheta=0}^q \sum_{\tau=0}^r \omega_{k'}^{(\mu+1 \vartheta \tau)} b_{(p+1-\mu q-\vartheta r-\tau)}^{k'}, \\ e_{22}^{(pqr)} &= \sum_{\mu=0}^p \sum_{\vartheta=0}^q \sum_{\tau=0}^r \omega_{k'}^{(\mu \vartheta+1 \tau)} b_{(p-\mu q+1-\vartheta r-\tau)}^{k'}, \\ e_{33}^{(pqr)} &= \sum_{\mu=0}^p \sum_{\vartheta=0}^q \sum_{\tau=0}^r \omega_{k'}^{(\mu \vartheta \tau+1)} b_{(p-\mu q-\vartheta r+1-\tau)}^{k'}, \\ e_{12}^{(pqr)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^p \sum_{\vartheta=0}^q \sum_{\tau=0}^r \left(\omega_{k'}^{(\mu \vartheta+1 \tau)} b_{(p+1-\mu q-\vartheta r-\tau)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu+1 \vartheta \tau)} b_{(p-\mu q+1-\vartheta r-\tau)}^{k'} \right), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$e_{13}^{(pqr)} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^p \sum_{\vartheta=0}^q \sum_{\tau=0}^r \left(\omega_{k'}^{(\mu \vartheta \tau + 1)} b_{(p+1-\mu q-\vartheta r-\tau)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu+1 \vartheta \tau)} b_{(p-\mu q-\vartheta r+1-\tau)}^{k'} \right),$$

$$e_{23}^{(pqr)} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^p \sum_{\vartheta=0}^q \sum_{\tau=0}^r \left(\omega_{k'}^{(\mu \vartheta \tau + 1)} b_{(p-\mu q+1-\vartheta r-\tau)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu \vartheta + 1 \tau)} b_{(p-\mu q-\vartheta r+1-\tau)}^{k'} \right),$$

де

$$b_{(\mu \vartheta \tau)}^{k'} = \frac{\partial^{(\mu+\vartheta+\tau)} Z^{k'}}{(\partial x^1)^\mu (\partial x^2)^\vartheta (\partial x^3)^\tau} \Big|_{x^1=x^2=x^3=0}, \quad (1.5)$$

де $Z^{k'}$ – функції, що задають геометрію для скінченного елемента.

Для зручності подальшого використання представимо співвідношення (1.3) та (1.4) у матричному вигляді:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_{ij}\} &= \{e_{ij}\}^T \{\psi_{ij}\}, \\ \{e_{ij}\} &= [F_{ij}^{k'}] \{\omega_{k'}\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для врахування слабкої стисливості еластомерів необхідно також апроксимувати функцію зміни об'єму:

$$\theta = \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^{n-1} \sum_{\gamma=0}^{l-1} \xi^{(\alpha\beta\gamma)} \psi^{(\alpha\beta\gamma)}, \quad (1.7)$$

де $\xi^{(\alpha\beta\gamma)}$ – коефіцієнти розкладу, які можна визначити співвідношенням:

$$\xi^{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{\partial^{(\alpha+\beta+\gamma)} \varepsilon_{ij} g^{ij}}{(\partial x^1)^\alpha (\partial x^2)^\beta (\partial x^3)^\gamma} \Big|_{x^1=x^2=x^3=0}, \quad (1.8)$$

де g^{ij} – компоненти метричного тензора \hat{g} , що входить до складу тензора пружних постійних:

$$C^{ijkl} = \mu(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}) + \lambda g^{ij}g^{kl}, \quad (1.9)$$

де μ, λ – параметри Ляме, які можна визначити через фізичні постійні (коефіцієнт Пуассона ν та модуль Юнга E):

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)}, \\ \lambda &= \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Аналогічно для зручності запишемо (1.7) та (1.8) у матричному вигляді:

$$\begin{aligned} \{\theta\} &= \{\xi\}^T \{\psi_\theta\}, \\ \{\xi\} &= [F_\theta^{k'}] \{\omega_{k'}\}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Підставимо формули (1.11) в вираз варіації пружної деформації, яку можна знайти за формулою:

$$\delta W = \iiint_V (2\mu g^{ik}g^{jl}\varepsilon_{kl} + \lambda\theta g^{ij})\delta\varepsilon_{ij}dV, \quad (1.12)$$

маємо [7], враховуючи (1.6) та (1.11):

$$\begin{aligned} \delta W &= \{\delta\varepsilon_{ij}\}^T [H^{ijkl}] \{e_{kl}\} + \delta\{\xi\}^T [H^\theta] \{\xi\} = \\ &= \delta\{\omega_{s'}\}^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^t] \{\omega_t\}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

де

$$\begin{aligned}
[H^{ijkl}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2\mu g^{ik} g^{jl} \{\psi_{ij}\} \{\psi_{kl}\}^T \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3, \\
[H^\theta] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \lambda \{\psi_\theta\} \{\psi_\theta\}^T \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3.
\end{aligned}
\tag{1.14}$$

Але для побудови матриці жорсткості скінченного елемента цього недостатньо. Потрібно перейти в (1.13) від $\{\omega_{k'}\}$ до виразів коефіцієнтів для переміщення через інтерполяційні многочлени наступного вигляду:

$$u_i = u_i^{(pqr)} N_{(pqr)}, \tag{1.15}$$

де $N_{(pqr)}$ – функції форми, $u_i^{(pqr)}$ – вузлові значення переміщень скінченного елемента.

Порівнюючи (1.3) та (1.15) отримуємо зв'язок апроксимуючих інтерполяційних функцій форми та степеневих функцій у вигляді:

$$\{N\} = [A]^T \{\psi\}, \tag{1.16}$$

де $[A]$ – матриця перетворення, що визначається для кожного виду апроксимуючих функцій окремо.

Матриця жорсткості скінченного елемента матиме вигляд:

$$[K^{s't'}] = [A]^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{k'l'}^t] [A] + [A]^T [F_\theta^{s'}]^T [H^\theta] [F_\theta^t]$$

2 ПОБУДОВА МАТРИЦЬ ЖОРСТКОСТІ РІЗНИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЗА ДОПОМОГОЮ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ МСЕ

2.1 Використання скінченного елемента у формі паралелепіпеду для проектування гумових деталей

Розглянемо скінченний елемент у формі паралелепіпеду з 8 вузлами (див. рис. 2.1). Будемо вважати, що паралелепіпед визначено в прямокутній декартовій системі координат $\{O, x, y, z\}$. Потрібно ввести місцеву систему координат $\{O', x_1, y_1, z_1\}$: таку, що центр нової системи координат O' знаходиться в центрі елемента, а сам елемент представляє собою куб із стороною 2.

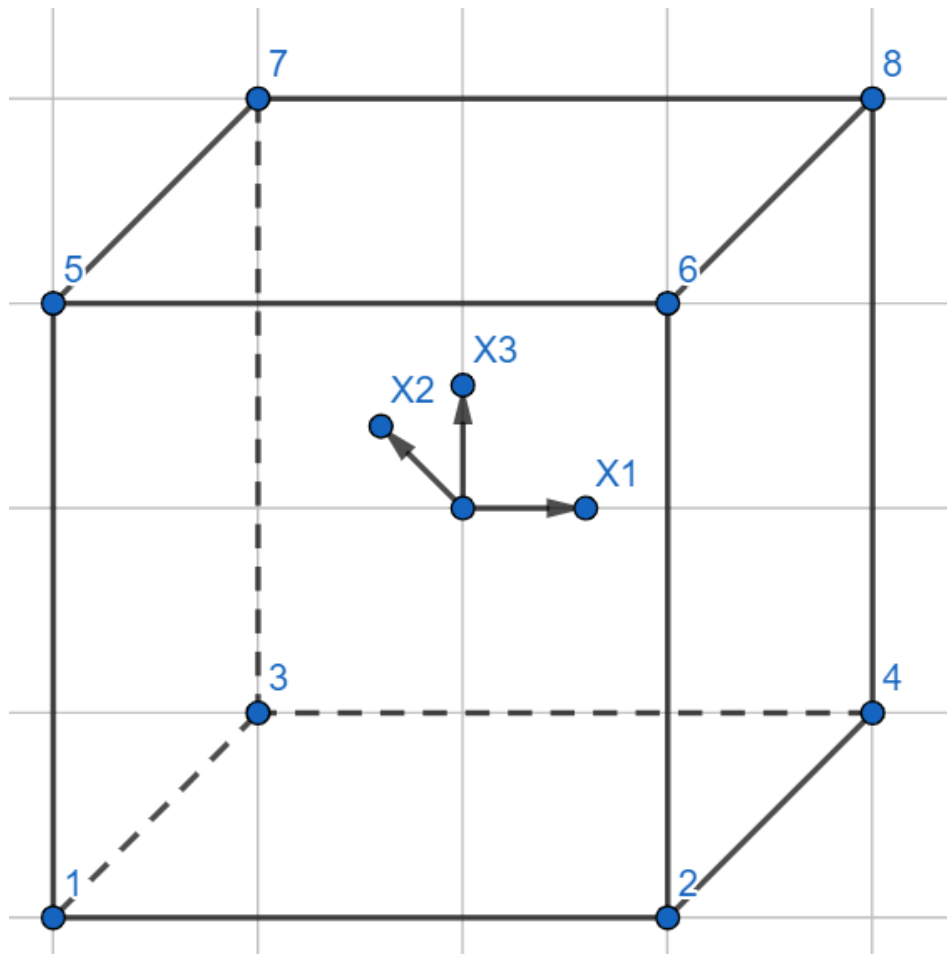


Рисунок 2.1 – Скінченний елемент у формі паралелепіпеду з 8 вузлами

Функції, що задають геометрію для скінченного елемента в базисній системі координат мають вигляд:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{i=1}^8 N_i x^i, \\ Z_2 &= \sum_{i=1}^8 N_i y^i, \\ Z_3 &= \sum_{i=1}^8 N_i z^i, \end{aligned} \quad (2.1)$$

де $(x^i, y^i, z^i) (i = \overline{1,8})$ – координати вузлових точок паралелепіпеду; N_i – функції форми, що задані в базисній системі координат:

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + x_i x) (1 + y_i y) (1 + z_i z) \quad (i = \overline{1,8}). \quad (2.2)$$

Основною ідеєю моментної схеми скінченного елемента є представлення апроксимуючої функції за допомогою ряду Тейлора та відкидання деяких членів ряду. Для скінченного елемента у формі паралелепіпеду функції матимуть вигляд:

$$u_{k'} = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 w_{k'}^{(pqr)} \psi^{(pqr)}, \quad (2.3)$$

де $w_{k'}^{(pqr)}$ – коефіцієнти розкладу, $\psi^{(pqr)}$ – набір степеневих координатних функцій, які можна знайти за формулами:

$$\psi^{(pqr)} = \frac{x^p y^q z^r}{p! q! r!} \quad (p, q, r = 0, 1). \quad (2.4)$$

Компоненти тензора деформацій розкладемо в ряд Тейлора в околі початку координат:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 e_{11}^{(pqr)} \psi^{(pqr)}, \\
 \varepsilon_{22} &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 e_{22}^{(pqr)} \psi^{(pqr)}, \\
 \varepsilon_{33} &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 e_{33}^{(pqr)} \psi^{(pqr)}, \\
 \varepsilon_{12} &= \sum_{r=0}^1 e_{12}^{(00r)} \psi^{(00r)}, \\
 \varepsilon_{13} &= \sum_{q=0}^1 e_{13}^{(0q0)} \psi^{(0q0)}, \\
 \varepsilon_{23} &= \sum_{p=0}^1 e_{12}^{(p00)} \psi^{(p00)},
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Елементи матриці жорсткості будемо знаходити за формулою:

$$[K^{s't'}] = [A]^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{k'l'}^t] [A], \tag{2.6}$$

де $[A]$ – матриця зв'язку, яку буде знайдено в розділі 3.1, інші компоненти визначаються з формул (1.14) та (1.6).

2.2 Використання скінченного елемента у формі трикутної призми для проектування гумових деталей

Використання скінченного елемента у формі трикутної призми часто

необхідно при проектуванні складних границь інженерних об'єктів, а також для конструкцій, у яких скінченні елементи примикають до вертикальних осей. Розглянемо скінченний елемент у вигляді трикутної призми (див рис. 2.2). Помістимо початок базисної системи $z^{s'}$ та місцевої $\{O, x_1, x_2, x_3\}$ у центр ваги трикутної призми розміром $2 \times 1 \times 1$. Осі місцевої та базисної систем координат паралельні ребрам трикутної призми.

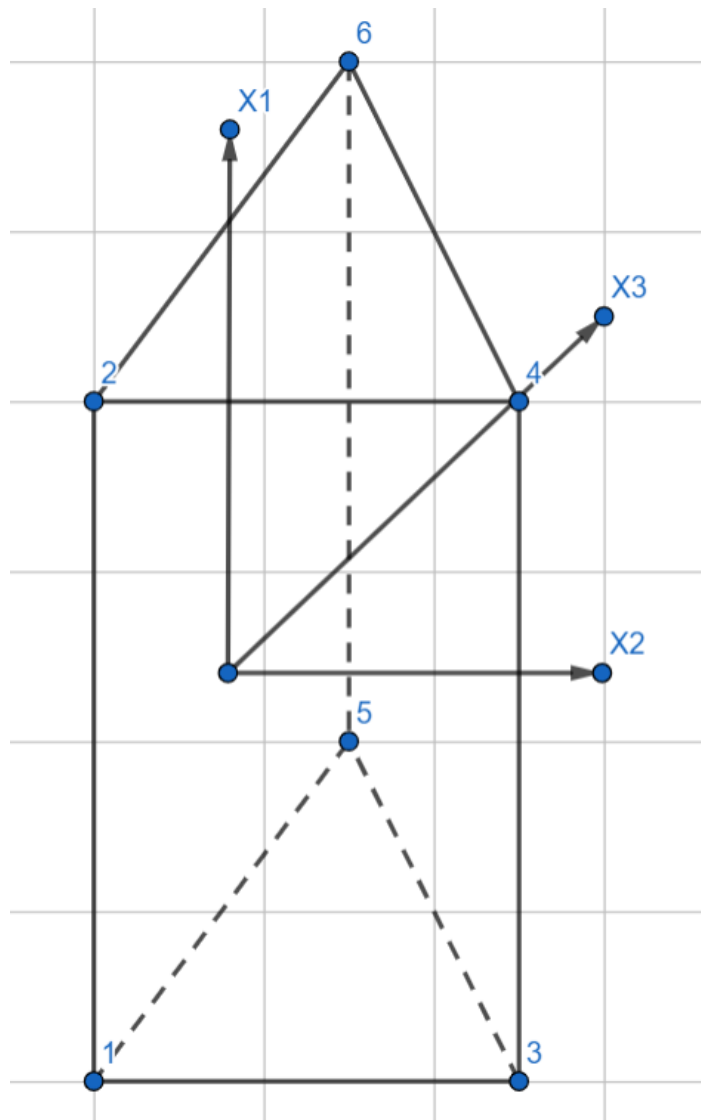


Рисунок 2.2 – Скінченний елемент у формі трикутної призми з 6 вузлами

Апроксимацію переміщення представимо у вигляді:

$$u_{k'} = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_{k'}^{(pqr)} \psi^{(pqr)}, \quad (2.7)$$

де $q + r \leq 1$, $\omega_{k'}^{(pqr)}$ – коефіцієнти розкладу, $\psi^{(pqr)}$ – визначаються формулою (1.2).

Запишемо похідні від функції переміщення всередині скінченного елемента:

$$\begin{aligned} u_{s',1} &= \omega_{s'}^{(100)} + \omega_{s'}^{(110)}\psi^{(010)} + \omega_{s'}^{(101)}\psi^{(001)}, \\ u_{s',2} &= \omega_{s'}^{(010)} + \omega_{s'}^{(110)}\psi^{(100)}, \\ u_{s',3} &= \omega_{s'}^{(001)} + \omega_{s'}^{(101)}\psi^{(100)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Функція зміни об'єму θ , що відповідає за слабку стисливість еластомеру приймається відповідно (1.11). А компоненти тензора деформацій ε_{ij} на основі формули (1.6) та враховуючи відсутність деяких коефіцієнтів $\omega_{s'}^{(pqr)}$ в розкладі (2.7) та (2.8) можна задати наступним чином:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= e_{11}^{(000)} + e_{11}^{(010)}\psi^{(010)} + e_{11}^{(001)}\psi^{(001)}, \\ \varepsilon_{22} &= e_{22}^{(000)} + e_{22}^{(100)}\psi^{(100)}, \\ \varepsilon_{33} &= e_{33}^{(000)} + e_{33}^{(100)}\psi^{(100)}, \\ \varepsilon_{12} &= e_{12}^{(000)}, \\ \varepsilon_{13} &= e_{13}^{(000)}, \\ \varepsilon_{23} &= e_{23}^{(000)} + e_{23}^{(100)}\psi^{(100)}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

де $e_{ij}^{(pqr)}$ – коефіцієнти розкладу деформацій.

Функцію переміщення тривимірного скінченного елемента представимо через функції форми N_i наступним чином:

$$u_{s'} = \sum_{i=1}^k u_{s'i} N_i, \quad (2.10)$$

де k – кількість вузлів скінченного елемента.

Функції форми для трикутного призматичного скінченного елемента мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (1 - x_1) \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \right), \\
 N_2 &= (1 + x_1) \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \right), \\
 N_3 &= (1 - x_1) \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}x_2 \right), \\
 N_4 &= (1 + x_1) \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}x_2 \right), \\
 N_5 &= (1 - x_1) \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}x_3 \right), \\
 N_6 &= (1 + x_1) \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}x_3 \right),
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Елементи матриці жорсткості будемо аналогічно до паралепіпедного елемента знаходити за формулою (2.6)

2.3 Використання скінченного елемента у формі призми з 18 вузлами для проектування гумових деталей

Розглянемо скінченний елемент таких же розмірів як і в розділі 2.2, але кількість вузлів цього елемента збільшимо до 18. Вузли розташовуються у вершинах призми, на серединах ребер та у центрі чотирикутних граней (див. рис. 2.3). Апроксимація функцій переміщення цього скінченного елемента відбувається за допомогою квадратичних функцій.

Помістимо початок базисної системи $z^{s'}$ та місцевої $\{O, x_1, x_2, x_3\}$ у центр ваги трикутної призми. Осі місцевої та базисної систем координат паралельні ребрам трикутної призми. Апроксимацію переміщення представимо у вигляді:

$$u_{k'} = \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^2 \sum_{r=0}^2 \omega_{k'}^{(pqr)} \psi^{(pqr)}, \quad (2.12)$$

де $q + r \leq 2$, $\omega_{k'}^{(pqr)}$ – коефіцієнти розкладу, $\psi^{(pqr)}$ – визначаються формулою (1.2).

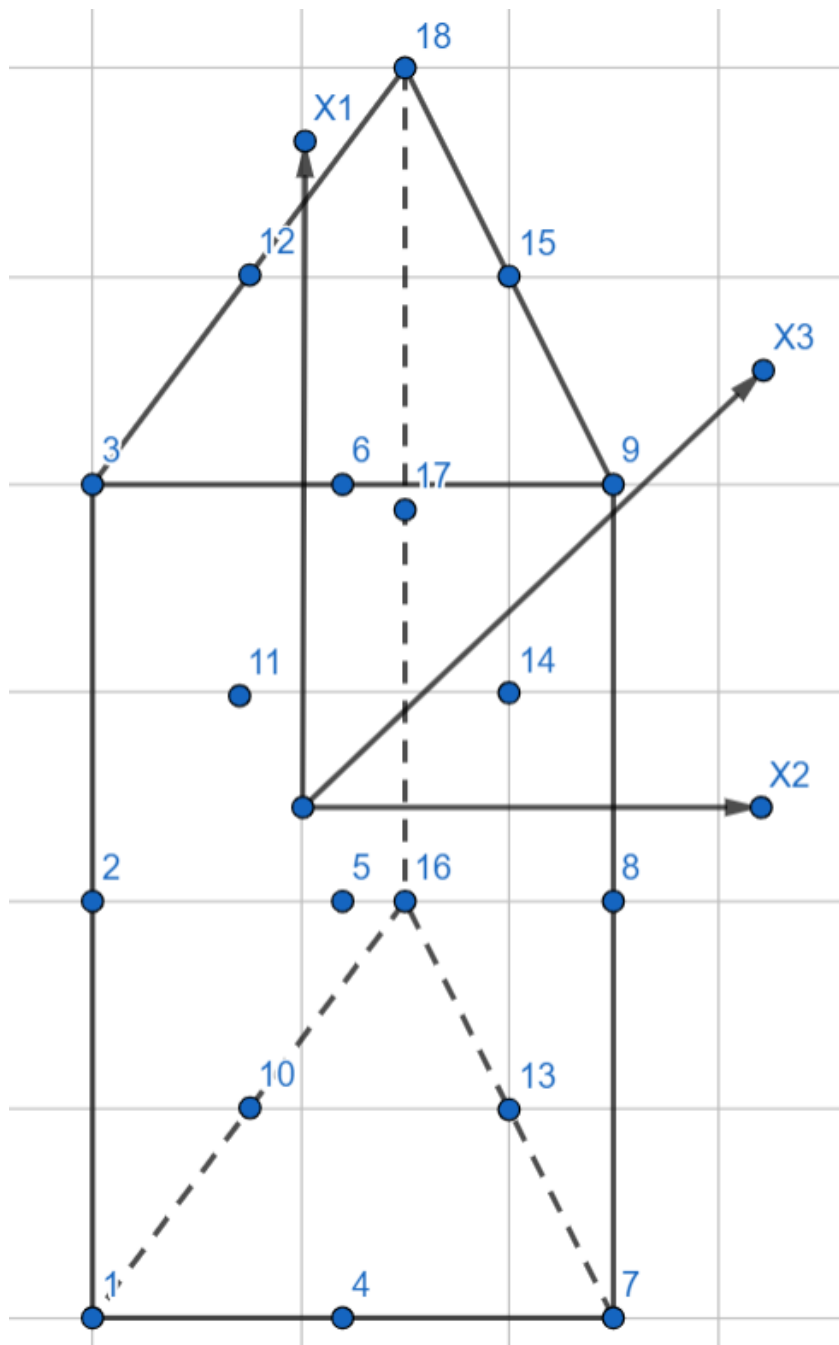


Рисунок 2.3 – Скінченний елемент у формі трикутної призми з 18 вузлами

Запишемо похідні від функції переміщення всередині скінченного елемента:

$$\begin{aligned}
u_{s',1} &= \omega_{s'}^{(100)} + \omega_{s'}^{(200)}\psi^{(100)} + \omega_{s'}^{(110)}\psi^{(010)} + \omega_{s'}^{(120)}\psi^{(020)} + \\
&+ \omega_{s'}^{(210)}\psi^{(110)} + \omega_{s'}^{(220)}\psi^{(120)} + \omega_{s'}^{(101)}\psi^{(001)} + \omega_{s'}^{(201)}\psi^{(101)} + \\
&+ \omega_{s'}^{(111)}\psi^{(011)} + \omega_{s'}^{(211)}\psi^{(111)} + \omega_{s'}^{(102)}\psi^{(002)} + \omega_{s'}^{(202)}\psi^{(102)}, \\
u_{s',2} &= \omega_{s'}^{(010)} + \omega_{s'}^{(110)}\psi^{(100)} + \omega_{s'}^{(210)}\psi^{(200)} + \omega_{s'}^{(020)}\psi^{(010)} + \\
&+ \omega_{s'}^{(120)}\psi^{(110)} + \omega_{s'}^{(220)}\psi^{(210)} + \omega_{s'}^{(011)}\psi^{(001)} + \omega_{s'}^{(111)}\psi^{(101)} + \\
&\quad + \omega_{s'}^{(211)}\psi^{(201)}, \\
u_{s',3} &= \omega_{s'}^{(001)} + \omega_{s'}^{(101)}\psi^{(100)} + \omega_{s'}^{(201)}\psi^{(200)} + \omega_{s'}^{(011)}\psi^{(010)} + \\
&+ \omega_{s'}^{(111)}\psi^{(110)} + \omega_{s'}^{(211)}\psi^{(210)} + \omega_{s'}^{(002)}\psi^{(001)} + \omega_{s'}^{(102)}\psi^{(101)} + \\
&\quad + \omega_{s'}^{(202)}\psi^{(201)}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Функція зміни об'єму θ , що відповідає за слабку стисливість еластомеру приймається відповідно (1.11). А компоненти тензора деформацій ε_{ij} на основі формули (1.6) та враховуючи відсутність деяких коефіцієнтів $\omega_{s'}^{(pqr)}$ в розкладі (2.12) та (2.13) можна задати наступним чином:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= e_{11}^{(000)} + e_{11}^{(100)}\psi^{(100)} + e_{11}^{(010)}\psi^{(010)} + e_{11}^{(110)}\psi^{(110)} + \\
&+ e_{11}^{(020)}\psi^{(020)} + e_{11}^{(120)}\psi^{(120)} + e_{11}^{(001)}\psi^{(001)} + e_{11}^{(101)}\psi^{(101)} + \\
&+ e_{11}^{(011)}\psi^{(011)} + e_{11}^{(111)}\psi^{(111)} + e_{11}^{(002)}\psi^{(002)} + e_{11}^{(102)}\psi^{(102)}, \\
\varepsilon_{22} &= e_{22}^{(000)} + e_{22}^{(100)}\psi^{(100)} + e_{22}^{(200)}\psi^{(200)} + e_{22}^{(010)}\psi^{(010)} + \\
&+ e_{22}^{(110)}\psi^{(110)} + e_{22}^{(210)}\psi^{(210)} + e_{22}^{(001)}\psi^{(001)} + e_{22}^{(101)}\psi^{(101)} + \\
&\quad + e_{22}^{(201)}\psi^{(201)}, \\
\varepsilon_{33} &= e_{33}^{(000)} + e_{33}^{(100)}\psi^{(100)} + e_{33}^{(200)}\psi^{(200)} + e_{33}^{(010)}\psi^{(010)} + \\
&+ e_{33}^{(110)}\psi^{(110)} + e_{33}^{(210)}\psi^{(210)} + e_{33}^{(001)}\psi^{(001)} + e_{33}^{(101)}\psi^{(101)} + \\
&\quad + e_{33}^{(201)}\psi^{(201)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{12} &= e_{12}^{(000)} + e_{12}^{(100)} \psi^{(100)} + e_{12}^{(010)} \psi^{(010)} + e_{12}^{(110)} \psi^{(110)} + \\
&\quad + e_{12}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{12}^{(101)} \psi^{(101)}, \\
\varepsilon_{13} &= e_{13}^{(000)} + e_{13}^{(100)} \psi^{(100)} + e_{13}^{(010)} \psi^{(010)} + e_{13}^{(110)} \psi^{(110)} + \\
&\quad + e_{13}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{13}^{(101)} \psi^{(101)}, \\
\varepsilon_{23} &= e_{23}^{(000)} + e_{23}^{(100)} \psi^{(100)} + e_{23}^{(200)} \psi^{(200)} + e_{23}^{(010)} \psi^{(010)} + \\
&\quad + e_{23}^{(110)} \psi^{(110)} + e_{23}^{(210)} \psi^{(210)} + e_{23}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{23}^{(101)} \psi^{(101)} + \\
&\quad + e_{23}^{(201)} \psi^{(201)}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

де $e_{ij}^{(pqr)}$ – коефіцієнти розкладу деформацій.

Функцію переміщення тривимірного скінченного елемента представимо через функції форми N_i у вигляді (2.10). Але тут функції форми будуть іншими:

$$N_1 = x_1(1 - x_1) \left(\frac{1}{6} + x_2 + x_3 \right) \left(\frac{1}{3} - x_2 - x_3 \right),$$

$$N_2 = -2(1 + x_1)(1 - x_1) \left(\frac{1}{6} + x_2 + x_3 \right) \left(\frac{1}{3} - x_2 - x_3 \right),$$

$$N_3 = -x_1(1 + x_1) \left(\frac{1}{6} + x_2 + x_3 \right) \left(\frac{1}{3} - x_2 - x_3 \right),$$

$$N_4 = -2x_1(1 - x_1) \left(\frac{1}{3} + x_2 \right) \left(\frac{1}{3} - x_2 - x_3 \right),$$

$$N_5 = 4(1 + x_1)(1 - x_1) \left(\frac{1}{3} + x_2 \right) \left(\frac{1}{3} - x_2 - x_3 \right),$$

$$N_6 = 2x_1(1 + x_1) \left(\frac{1}{3} + x_3 \right) \left(\frac{1}{3} - x_2 - x_3 \right),$$

$$N_7 = x_1(1 - x_1) \left(\frac{1}{3} + x_2 \right) \left(\frac{1}{6} - x_2 \right),$$

$$N_8 = -2(1 + x_1)(1 - x_1) \left(\frac{1}{3} + x_2 \right) \left(\frac{1}{6} - x_2 \right),$$

$$N_9 = -x_1(1 + x_1) \left(\frac{1}{3} + x_2 \right) \left(\frac{1}{6} - x_2 \right),$$

$$N_{10} = -2x_1(1 - x_1) \left(\frac{1}{3} + x_3 \right) \left(\frac{1}{3} - x_2 - x_3 \right),$$

(2.15)

$$N_{11} = 4(1 + x_1)(1 - x_1) \left(\frac{1}{3} + x_3\right) \left(\frac{1}{3} - x_2 - x_3\right),$$

$$N_{12} = 2x_1(1 + x_1) \left(\frac{1}{3} + x_3\right) \left(\frac{1}{3} - x_2 - x_3\right),$$

$$N_{13} = -2x_1(1 - x_1) \left(\frac{1}{3} + x_2\right) \left(\frac{1}{3} + x_3\right),$$

$$N_{14} = 4(1 + x_1)(1 - x_1) \left(\frac{1}{3} + x_2\right) \left(\frac{1}{3} + x_3\right),$$

$$N_{15} = 2x_1(1 + x_1) \left(\frac{1}{3} + x_2\right) \left(\frac{1}{3} + x_3\right),$$

$$N_{16} = x_1(1 - x_1) \left(\frac{1}{3} + x_3\right) \left(\frac{1}{6} - x_3\right),$$

$$N_{17} = -2(1 + x_1)(1 - x_1) \left(\frac{1}{3} + x_3\right) \left(\frac{1}{6} - x_3\right),$$

$$N_{18} = -x_1(1 + x_1) \left(\frac{1}{3} + x_3\right) \left(\frac{1}{6} - x_3\right).$$

Елементи матриці жорсткості визначаються аналогічно до паралелепіпедного елемента за формулою (2.6)

3 ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗРАХУНКІВ ЕЛАСТОМІРІВ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

3.1 Знаходження переміщень елементарної гумової деталі за допомогою скінченного елемента у формі паралелепіпеда

Будемо розглядати стиснення простої гумової деталі у вигляді одиничного куба. Виберемо коефіцієнт пружності матеріалу E рівним 2 МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,495$.

Випишемо функції форми скінченного елемента

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{8}(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3), \\
 N_2 &= \frac{1}{8}(1 + x_1)(1 - x_2)(1 - x_3), \\
 N_3 &= \frac{1}{8}(1 - x_1)(1 + x_2)(1 + x_3), \\
 N_4 &= \frac{1}{8}(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3), \\
 N_5 &= \frac{1}{8}(1 - x_1)(1 - x_2)(1 + x_3), \\
 N_6 &= \frac{1}{8}(1 + x_1)(1 - x_2)(1 + x_3), \\
 N_7 &= \frac{1}{8}(1 - x_1)(1 + x_2)(1 + x_3), \\
 N_8 &= \frac{1}{8}(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Неважко переконатися, що матриця зв'язку A між функціями форми (3.1) та степеневими функціями $\psi^{(pqr)}$, що задаються формулою (2.4), враховуючи умову (1.16) буде мати вигляд:

$$A^T = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Переміщення та деформації апроксимуються за допомогою формул (2.3) та (2.5). Визначимо ненульові коефіцієнти розкладу деформацій $e_{ij}^{(pqr)}$:

$$\begin{aligned} e_{11}^{(000)} &= \omega_{k'}^{100} b_{100}^{k'}, \\ e_{11}^{(010)} &= \omega_{k'}^{100} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{100}^{k'}, \\ e_{11}^{(001)} &= \omega_{k'}^{100} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{100}^{k'}, \\ e_{11}^{(011)} &= \omega_{k'}^{100} b_{111}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{111} b_{100}^{k'}, \\ e_{22}^{(000)} &= \omega_{k'}^{010} b_{010}^{k'}, \\ e_{22}^{(100)} &= \omega_{k'}^{010} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{010}^{k'}, \\ e_{22}^{(001)} &= \omega_{k'}^{010} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{010}^{k'}, \\ e_{22}^{(101)} &= \omega_{k'}^{010} b_{111}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{111} b_{010}^{k'}, \\ e_{33}^{(000)} &= \omega_{k'}^{001} b_{001}^{k'}, \\ e_{33}^{(100)} &= \omega_{k'}^{001} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{001}^{k'}, \\ e_{33}^{(010)} &= \omega_{k'}^{001} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{001}^{k'}, \\ e_{33}^{(110)} &= \omega_{k'}^{001} b_{111}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{111} b_{001}^{k'}, \\ e_{12}^{(000)} &= \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{010} b_{100}^{k'} + \omega_{k'}^{100} b_{010}^{k'}), \\ e_{12}^{(001)} &= \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{010} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{100}^{k'} + \omega_{k'}^{100} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{010}^{k'}), \\ e_{13}^{(000)} &= \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{100}^{k'} + \omega_{k'}^{100} b_{001}^{k'}), \\ e_{13}^{(010)} &= \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{100}^{k'} + \omega_{k'}^{100} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{001}^{k'}), \end{aligned}$$

$$e_{23}^{(000)} = \frac{1}{2}(\omega_{k'}^{001} b_{001}^{k'} + \omega_{k'}^{010} b_{001}^{k'}),$$

$$e_{23}^{(100)} = \frac{1}{2}(\omega_{k'}^{001} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{010}^{k'} + \omega_{k'}^{010} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{001}^{k'}).$$

Коефіцієнти $b_{pqr}^{k'}$ будемо знаходити за формулою (1.5). Для нашої задачі отримаємо:

$$b_{100}^{k'} = b_{010}^{k'} = b_{001}^{k'} = 2,$$

$$b_{110}^{k'} = b_{101}^{k'} = b_{011}^{k'} = b_{111}^{k'} = 0.$$

Для знаходження матриці жорсткості елемента за формулою:

$$[K^{s't'}] = [A]^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{k'l'}^t] [A] \quad (3.3)$$

залишилося знайти матриці $[F_{ij}^{k'}]$. Їх достатньо легко знайти використовуючи формули (1.6):

$$[F_{11}^{k'}] = \begin{bmatrix} 0 & b_{100}^{k'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{110}^{k'} & b_{100}^{k'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{101}^{k'} & 0 & 0 & 0 & b_{100}^{k'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{111}^{k'} & b_{101}^{k'} & 0 & b_{110}^{k'} & b_{100}^{k'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[F_{22}^{k'}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{010}^{k'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{110}^{k'} & b_{010}^{k'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{011}^{k'} & 0 & 0 & 0 & b_{010}^{k'} & 0 \\ 0 & 0 & b_{111}^{k'} & b_{011}^{k'} & 0 & 0 & b_{110}^{k'} & b_{010}^{k'} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
[F_{33}^{k'}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b_{001}^{k'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{101}^{k'} & b_{001}^{k'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{101}^{k'} & 0 & b_{001}^{k'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{101}^{k'} & b_{011}^{k'} & b_{101}^{k'} & b_{001}^{k'} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
[F_{12}^{k'}] &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}b_{010}^{k'} & \frac{1}{2}b_{100}^{k'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}b_{011}^{k'} & \frac{1}{2}b_{101}^{k'} & 0 & 0 & \frac{1}{2}b_{010}^{k'} & \frac{1}{2}b_{100}^{k'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
[F_{13}^{k'}] &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}b_{001}^{k'} & 0 & 0 & \frac{1}{2}b_{100}^{k'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}b_{011}^{k'} & 0 & \frac{1}{2}b_{001}^{k'} & \frac{1}{2}b_{110}^{k'} & 0 & \frac{1}{2}b_{100}^{k'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
[F_{23}^{k'}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}b_{001}^{k'} & 0 & \frac{1}{2}b_{001}^{k'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}b_{101}^{k'} & \frac{1}{2}b_{001}^{k'} & \frac{1}{2}b_{110}^{k'} & \frac{1}{2}b_{010}^{k'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Нехай даний куб щільно закріплено на нижній основі. Потрібно знайти переміщення вузлів верхньої основи, якщо на неї діє рівномірно розподілене одиничне навантаження, яке можна записати як:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{Bmatrix},$$

Розв'язавши рівняння:

$$[K]\{u\} = \{F\},$$

де $[K]$ – матриця жорсткості, яка визначається за формулою (3.3), $\{u\}$ – вектор невідомих шуканих переміщень, отримаємо:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} 0,0168254 \\ 0,0168254 \\ 0,4025367 \\ 0,0168254 \\ -0,0168254 \\ 0,4025367 \\ -0,0168254 \\ -0,0168254 \\ 0,4025367 \\ -0,0168254 \\ 0,0168254 \\ 0,4025367 \end{Bmatrix}. \quad (3.4)$$

3.2 Знаходження переміщень елементарної гумової деталі за допомогою скінченного елемента у формі трикутної призми

Розв'яжемо задачу підрозділу 3.1 за допомогою скінченних елементів у вигляді трикутної призми. Для цього необхідно використати два таких елементи. Аналогічно виберемо коефіцієнт пружності матеріалу E рівним 2 МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,495$.

Функції форми задаються за допомогою формули (2.11). Матрицю зв'язку A між функціями форми та степеневим функціями апроксимації знаходимо у вигляді:

$$A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Деформації визначаються за формулою (2.9). Матриці $[F_{ij}^{k'}]$ можна знайти за допомогою формули (1.6) (приводити їх тут не будемо). Аналогічно до підрозділу 3.1 маємо рівномірно розподілене одиничне навантаження на верхню основу конструкції, утвореної з двох скінченних елементів у формі трикутної призми. Навантаження:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{6} \end{Bmatrix},$$

Маємо:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} 0,0235192 \\ 0,0235192 \\ 0,4102134 \\ 0,0235192 \\ -0,0235192 \\ 0,3964327 \\ -0,0235192 \\ -0,0235192 \\ 0,4102134 \\ -0,0235192 \\ 0,0235192 \\ 0,3964327 \end{Bmatrix}. \quad (3.5)$$

Порівнюючи чисельні результати (3.4) та (3.5) можемо дійти висновку, що різниця між ними досягає 1,9%.

3.3 Отримання коефіцієнтів розкладу деформацій для скінченного елемента у формі паралелепіпеду з 27 вузлами

Розглянемо скінченний елемент у вигляді паралелепіпеду з 27 вузлами (див рис. 3.1). Для скінченного елемента у формі паралелепіпеду функції форми мають вигляд:

$$N_{14} = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(1 - \zeta^2),$$

$$N_i = \frac{1}{8} \xi_i \xi (1 + \xi_i \xi^2) \eta_i \eta (1 + \eta_i \eta^2) \zeta_i \zeta (1 + \zeta_i \zeta^2) \quad i = 1, 3, 7, 9, 19, 21, 25, 27,$$

$$N_i = \frac{1}{4} \xi_i \xi (1 + \xi_i \xi^2) \eta_i \eta (1 + \eta_i \eta^2) (1 - \zeta^2) \quad i = 10, 16, 12, 18,$$

$$N_i = \frac{1}{4} \xi_i \xi (1 + \xi_i \xi^2) (1 - \eta^2) \zeta_i \zeta (1 + \zeta_i \zeta^2) \quad i = 4, 6, 22, 24,$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \xi^2) \eta_i \eta (1 + \eta_i \eta^2) \zeta_i \zeta (1 + \zeta_i \zeta^2) \quad i = 2, 8, 20, 26,$$

$$N_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) \eta_i \eta (1 + \eta_i \eta^2) (1 - \zeta^2) \quad i = 11, 17,$$

$$N_i = \frac{1}{2} \xi_i \xi (1 + \xi_i \xi^2) (1 - \eta^2) (1 - \zeta^2) \quad i = 13, 15,$$

$$N_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) \zeta_i \zeta (1 + \zeta_i \zeta^2) \quad i = 5, 23,$$

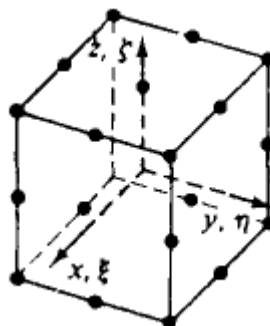


Рисунок 3.1 – Паралелепіпед із 27 вузлами

Мета отримати формули для апроксимації деформацій у моментній схемі методу скінченних елементів. Для цього скористаємося формулою (1.3). Маємо:

$$\begin{aligned}
e_{11}^{(000)} &= \omega_{k'}^{100} b_{100}^{k'}, \\
e_{11}^{(100)} &= \omega_{k'}^{100} b_{100}^{k'} + \omega_{k'}^{200} b_{100}^{k'}, \\
e_{11}^{(010)} &= \omega_{k'}^{100} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{100}^{k'}, \\
e_{11}^{(001)} &= \omega_{k'}^{100} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{100}^{k'}, \\
e_{11}^{(110)} &= \omega_{k'}^{100} b_{210}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{200}^{k'} + \omega_{k'}^{200} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{210} b_{100}^{k'}, \\
e_{11}^{(101)} &= \omega_{k'}^{100} b_{201}^{k'} + \omega_{k'}^{200} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{200}^{k'} + \omega_{k'}^{201} b_{100}^{k'}, \\
e_{11}^{(011)} &= \omega_{k'}^{100} b_{111}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{111} b_{100}^{k'}, \\
e_{11}^{(200)} &= \omega_{k'}^{100} b_{300}^{k'} + \omega_{k'}^{200} b_{200}^{k'} + \omega_{k'}^{300} b_{100}^{k'}, \\
e_{11}^{(020)} &= \omega_{k'}^{100} b_{120}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{120} b_{100}^{k'}, \\
e_{11}^{(002)} &= \omega_{k'}^{100} b_{102}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{102} b_{100}^{k'}, \\
e_{22}^{(000)} &= \omega_{k'}^{010} b_{010}^{k'}, \\
e_{22}^{(100)} &= \omega_{k'}^{010} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{010}^{k'}, \\
e_{22}^{(010)} &= \omega_{k'}^{010} b_{020}^{k'} + \omega_{k'}^{020} b_{010}^{k'}, \\
e_{22}^{(001)} &= \omega_{k'}^{010} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{010}^{k'}, \\
e_{22}^{(110)} &= \omega_{k'}^{010} b_{120}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{020}^{k'} + \omega_{k'}^{020} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{120} b_{010}^{k'}, \\
e_{22}^{(101)} &= \omega_{k'}^{010} b_{111}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{111} b_{010}^{k'}, \\
e_{22}^{(011)} &= \omega_{k'}^{010} b_{021}^{k'} + \omega_{k'}^{020} b_{021}^{k'} + \omega_{k'}^{020} b_{111}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{020}^{k'}, \\
e_{22}^{(200)} &= \omega_{k'}^{010} b_{210}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{210} b_{010}^{k'}, \\
e_{22}^{(020)} &= \omega_{k'}^{010} b_{030}^{k'} + \omega_{k'}^{020} b_{020}^{k'} + \omega_{k'}^{030} b_{010}^{k'}, \\
e_{22}^{(002)} &= \omega_{k'}^{010} b_{012}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{012}^{k'} + \omega_{k'}^{012} b_{010}^{k'}, \\
e_{33}^{(000)} &= \omega_{k'}^{001} b_{001}^{k'}, \\
e_{33}^{(100)} &= \omega_{k'}^{001} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{001}^{k'}, \\
e_{33}^{(010)} &= \omega_{k'}^{001} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{001}^{k'}, \\
e_{33}^{(001)} &= \omega_{k'}^{001} b_{002}^{k'} + \omega_{k'}^{002} b_{001}^{k'}, \\
e_{33}^{(110)} &= \omega_{k'}^{001} b_{111}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{111} b_{001}^{k'},
\end{aligned}$$

$$e_{33}^{(101)} = \omega_{k'}^{001} b_{102}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{002}^{k'} + \omega_{k'}^{002} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{102} b_{001}^{k'},$$

$$e_{33}^{(011)} = \omega_{k'}^{001} b_{012}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{002}^{k'} + \omega_{k'}^{002} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{012} b_{001}^{k'},$$

$$e_{33}^{(200)} = \omega_{k'}^{001} b_{201}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{201} b_{001}^{k'},$$

$$e_{33}^{(020)} = \omega_{k'}^{001} b_{021}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{021} b_{001}^{k'},$$

$$e_{33}^{(002)} = \omega_{k'}^{001} b_{003}^{k'} + \omega_{k'}^{002} b_{002}^{k'} + \omega_{k'}^{003} b_{001}^{k'},$$

$$e_{12}^{(000)} = \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{010} b_{100}^{k'} + \omega_{k'}^{100} b_{010}^{k'}),$$

$$e_{12}^{(100)} = \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{010} b_{200}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{100}^{k'} + \omega_{k'}^{100} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{200} b_{010}^{k'}),$$

$$e_{12}^{(010)} = \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{010} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{020} b_{100}^{k'} + \omega_{k'}^{100} b_{020}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{010}^{k'}),$$

$$e_{12}^{(001)} = \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{010} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{100}^{k'} + \omega_{k'}^{100} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{010}^{k'}),$$

$$e_{12}^{(110)} = \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{010} b_{210}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{020} b_{200}^{k'} + \omega_{k'}^{120} b_{100}^{k'} + \\ + \omega_{k'}^{100} b_{210}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{020}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{210} b_{010}^{k'}),$$

$$e_{12}^{(101)} = \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{010} b_{201}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{200}^{k'} + \omega_{k'}^{111} b_{100}^{k'} + \\ + \omega_{k'}^{100} b_{111}^{k'} + \omega_{k'}^{200} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{201} b_{010}^{k'}),$$

$$e_{12}^{(011)} = \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{010} b_{111}^{k'} + \omega_{k'}^{020} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{021} b_{100}^{k'} + \\ + \omega_{k'}^{100} b_{021}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{010}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{020}^{k'} + \omega_{k'}^{111} b_{010}^{k'}),$$

$$e_{12}^{(200)} = \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{010} b_{300}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{200}^{k'} + \omega_{k'}^{210} b_{100}^{k'} + \\ + \omega_{k'}^{100} b_{210}^{k'} + \omega_{k'}^{200} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{300} b_{010}^{k'}),$$

$$e_{12}^{(020)} = \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{010} b_{120}^{k'} + \omega_{k'}^{020} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{030} b_{100}^{k'} + \\ + \omega_{k'}^{100} b_{030}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{020}^{k'} + \omega_{k'}^{120} b_{010}^{k'}),$$

$$e_{12}^{(002)} = \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{010} b_{102}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{012} b_{100}^{k'} + \\ + \omega_{k'}^{100} b_{012}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{102} b_{010}^{k'}),$$

$$e_{13}^{(000)} = \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{100}^{k'} + \omega_{k'}^{100} b_{001}^{k'}),$$

$$\begin{aligned}
e_{13}^{(100)} &= \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{200}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{100}^{k'} + \omega_{k'}^{100} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{200} b_{001}^{k'}), \\
e_{13}^{(010)} &= \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{100}^{k'} + \omega_{k'}^{100} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{001}^{k'}), \\
e_{13}^{(001)} &= \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{002} b_{100}^{k'} + \omega_{k'}^{100} b_{002}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{001}^{k'}), \\
e_{13}^{(110)} &= \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{210}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{200}^{k'} + \omega_{k'}^{111} b_{100}^{k'} + \\
&\quad + \omega_{k'}^{100} b_{111}^{k'} + \omega_{k'}^{200} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{210} b_{001}^{k'}), \\
e_{13}^{(101)} &= \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{201}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{002} b_{200}^{k'} + \omega_{k'}^{102} b_{100}^{k'} + \\
&\quad + \omega_{k'}^{100} b_{102}^{k'} + \omega_{k'}^{200} b_{002}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{201} b_{001}^{k'}), \\
e_{13}^{(011)} &= \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{111}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{002} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{012} b_{100}^{k'} + \\
&\quad + \omega_{k'}^{100} b_{012}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{002}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{111} b_{001}^{k'}), \\
e_{13}^{(200)} &= \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{300}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{200}^{k'} + \omega_{k'}^{201} b_{100}^{k'} + \\
&\quad + \omega_{k'}^{100} b_{201}^{k'} + \omega_{k'}^{200} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{300} b_{001}^{k'}), \\
e_{13}^{(020)} &= \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{120}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{021} b_{100}^{k'} + \\
&\quad + \omega_{k'}^{100} b_{021}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{120} b_{001}^{k'}), \\
e_{13}^{(002)} &= \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{102}^{k'} + \omega_{k'}^{002} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{003} b_{100}^{k'} + \\
&\quad + \omega_{k'}^{100} b_{03}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{002}^{k'} + \omega_{k'}^{102} b_{001}^{k'}), \\
e_{23}^{(000)} &= \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{001}^{k'} + \omega_{k'}^{010} b_{001}^{k'}), \\
e_{23}^{(100)} &= \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{010}^{k'} + \omega_{k'}^{010} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{001}^{k'}), \\
e_{23}^{(010)} &= \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{020}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{010}^{k'} + \omega_{k'}^{010} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{020} b_{001}^{k'}), \\
e_{23}^{(001)} &= \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{002} b_{010}^{k'} + \omega_{k'}^{010} b_{002}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{001}^{k'}), \\
e_{23}^{(110)} &= \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{120}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{020}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{010}^{k'} + \omega_{k'}^{111} b_{010}^{k'} + \\
&\quad + \omega_{k'}^{010} b_{111}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{002} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{120} b_{001}^{k'}),
\end{aligned}$$

$$e_{23}^{(101)} = \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{111}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{002} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{102} b_{010}^{k'} + \\ + \omega_{k'}^{010} b_{102}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{002}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{111} b_{001}^{k'}),$$

$$e_{23}^{(011)} = \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{021}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{010}^{k'} + \omega_{k'}^{002} b_{020}^{k'} + \omega_{k'}^{012} b_{010}^{k'} + \\ + \omega_{k'}^{010} b_{012}^{k'} + \omega_{k'}^{020} b_{002}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{021} b_{001}^{k'}),$$

$$e_{23}^{(200)} = \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{210}^{k'} + \omega_{k'}^{101} b_{110}^{k'} + \omega_{k'}^{201} b_{010}^{k'} + \\ + \omega_{k'}^{010} b_{201}^{k'} + \omega_{k'}^{110} b_{101}^{k'} + \omega_{k'}^{210} b_{001}^{k'}),$$

$$e_{23}^{(020)} = \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{030}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{020}^{k'} + \omega_{k'}^{021} b_{010}^{k'} + \\ + \omega_{k'}^{010} b_{021}^{k'} + \omega_{k'}^{020} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{030} b_{001}^{k'}),$$

$$e_{23}^{(200)} = \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{001} b_{012}^{k'} + \omega_{k'}^{002} b_{011}^{k'} + \omega_{k'}^{003} b_{010}^{k'} + \\ + \omega_{k'}^{010} b_{003}^{k'} + \omega_{k'}^{011} b_{002}^{k'} + \omega_{k'}^{012} b_{001}^{k'}).$$

ВИСНОВКИ

Метод скінченних елементів є одним із варіаційних методів. Область, яку займає тіло, розбивають на скінченну кількість елементів. При використанні класичного методу в кожному елементі задаються функції форми, які дають змогу визначити переміщення всередині елемента за допомогою переміщень у вузлах.

При розрахунках виникає ряд складнощів, що не дають можливість комфортно застосовувати метод скінченних елементів у переміщеннях. Саме тому для подолання виникаючих проблем використовують моментну схему методу скінченного елемента. У випадку наявності невизначеностей суть цього методу полягає в розкладі апроксимуючої функції в ряд Тейлора, а компонентів деформації в ряд Маклорена в околі нуля.

У роботі було змодельовано пружно-деформований стан елементарних еластомерних конструкцій за допомогою елементів різної форми. Порівнюючи чисельні результати дійшли висновку, що вони можуть відрізнитися на 1,9%. Також були побудовані програми, що реалізують основні етапи побудови моментної схеми методу скінченних елементів, за допомогою системи векторної алгебри Maple.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Баженов В. А., Гуляр А. И., Сахаров А. С., Топор А. Г. Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел : монографія. Киев : НИИ СМ, 1993. 376 с.
2. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / пер. с англ. В.М. Картвелишвили; под редакцией Н. В. Баничука. Москва : Мир, 1984. 428 с.
3. Овчаренко В. А. Расчет задач машиностроения методом конечных элементов: уч. пособ. Краматорск : ДГМА, 2004. 128 с.
4. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The finite element method: its basis and fundametals. Oxford : University of Oxford, 2005. 709 p.
5. Немчинов Ю. И. Расчет пространственных конструкций (Метод конечных элементов) : монографія. Киев : Будівельник, 1980. 232 с.
6. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров : моногр. Київ : Наукова думка, 2002. 655 с.
7. Дырда В. И., Гребенюк С. Н., Гоменюк С .И. Аналитические и численные методы расчета резиновых деталей. Днепропетровск-Запорожье : Запорожский национальный университет, 2012. 370 с.
8. Лаврик В. В. Использование моментной схемы для конечно-элементного анализа объектов, находящихся в напряженно-деформированном состоянии. *Вісник східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля*. 2013. №5. С. 96–100.
9. Гребенюк С. М. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів : дис. ... докт. техн. наук / Запорізький національний університет. Запоріжжя, 2016.
10. Nonlinear finite element analysis of elastomers. California : MSC Software Corporation, 2012. P. 75.

11. Баженов В. А., Пискунов С. О., Шкриль О. О., Романцова К. С. Моментна схема мсе для кругового скінченного елемента. *Опір матеріалів та теорія споруд*. 2015. №94. С. 107–117.

12. Гоменюк С. И., Лаврик В. В. Представление моментной схемы конечных элементов для расчёта напряжённодеформированного состояния конструкций из эластомерных материалов в инструментальных системах. *Штучний інтелект*. 2015. №3–4. С. 141–148.

13. Дырда В. И., Гребенюк С. Н., Решевская Е. С., Сокол С. П., Новикова А. В. Сжатие тонкослойных резинометаллических элементов. *Геотехнічна механіка*. 2017. №133. С. 34–41.

14. Гребенюк С. М., Бова А. А. Визначення напружено-деформованого стану гумової труби на основі уточненої моментної схеми скінченного елемента. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2014. № 22. С 67–79.