МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра загальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: «АНАЛІЗ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ АФІННИХ ТА МЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ»

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1118-з
спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми математика
А. В. Кравченко
(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Стєганцев Е. В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент завідувач кафедри фундаментальної математики, доцент, д.т.н. Гребенюк С. М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра загальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
загальної математики,
д.т.н., доцент
________________ Зіновєєв І.В.
(підпис)

« 10 » вересня 2019 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Кравченко Анастасії Віталіївні
(прізвище, ім'я та по батькові)

1. Тема роботи «Аналіз методів розв'язання афінних та метричних задач»

керівник роботи Стєганцев Евгеній Вікторович, к.ф.-м.н., доцент
(прізвище, ім'я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 29 » травня 2019 року № 812-с

2. Строк подання студентом роботи 26.12.2019

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Постановка задачі.
2. Перелік посилань.
3.Теоретичні та практичні завдання.
4.Висновки.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання ______________________________

К А Л Е Н Д А Р Н И Й П Л А Н

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	20.09.2019	
2.	Збір вихідних даних.	21.09.2019	
3.	Обробка методичних та теоретичних	10.10.2019	
	джерел.		
4.	Розробка першого та другого розділу.	20.10.2019	
5.	Розробка третього розділу.	01.11.2019	
6.	Оформлення та нормоконтроль	23.12.2019	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	09.01.2020	

Студент ____________ А.В. Кравченко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ____________ Є.В. Стєганцев
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ____________ О.Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Методи розв'язання афінних та метричних задач»: 43 с., 12 рис., 12 джерел.

АФІННІ ЗАДАЧІ, ВЕКТОР, ВЕКТОРНИЙ МЕТОД, ДЕКАРТОВА СИСТЕМА, КООРДИНАТ, КООРДИНАТНИЙ МЕТОД, КОСОКУТНА СИСТЕМА КООРДИНАТ, МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ, ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ, ТЕОРЕМА СИНУСІВ, ТЕОРЕМА ФАЛЕСА, ТОЧКА.

Об'єкт дослідження – афінні та метричні задачі.

Мета роботи: дослідити ефективність методів розв'язання афінних та метричних задач.

Метод дослідження – аналітичний.

У кваліфікаційній роботі наведені традиційний, векторний, координатний методи розв'язання метричних та афінних задач. Досліджено, які методи є більш ефективними.

SUMMARY

The master's qualifying paper "An Analysis of the Methods of the Solution of the Affine and Metric problems": 43 pages, 12 figures, 12 references.

AFFINE PROBLEMS, VECTOR, VECTORIAL METHOD, CARTESIAN COORDINATE SYSTEM, METHOD OF COORDINATES, OBLIQUE AXES AXIS, METRICAL PROBLEMS, LAW OF SINES, LOW OF COSINES, INTERCEPT THEOREM, POINT.

The object of study: the affine and metrical problems.

The aim of the work is the investigation of the efficiency of the methods of the solution of the affine and metrical problems.

The method of the study is analytical.

The diploma work deals with the traditional, vectorial and coordinate methods of the solution of the affine and the metrical problems. One studies which of the method is the most effective.

ЗМІСТ

ВСТУП

Одним з основних завдань, поставлених перед школою, є всебічний розвиток творчого мислення учнів. Розв’язати це важливе завдання при викладанні математики означає на сам перед – озброїти майбутніх вчителів загальними прийомами і методами розв’язування задач.

При розв’язанні афінних та метричних задач крім традиційного методу використовують также векторний та координатний методи. Про доцільність та переваги данних методів багато сказано і написано.

В даній роботі:

– проаналізовані основні методи розв’язання афінних та метричних задач;

– порівняно ефективність кількох методів на конкретній задачі;

– описано приблизні послідовні дії можливості розв’язання задач векторним методом;

– описано приблизний алгоритмічних підхід при розв’язанні задач координатним методом.

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

1.1 Метричні задачі

Задача називається метричною, якщо в ній фігурують метричні властивості фігур, тобто властивості, які можна виявити безпосереднім виміром (довжина відрізка, відстань між точками, відстань від точки до прямої або площини, величина кута, перпендикулярність, площа, обсяг) [1].

Для розв'язання більшості метричних та деяких позиційних задач, геометричні фігури загального положення треба привести в окреме положення. Це перш за все стосується прямих ліній, площин, гранниць і криволінійних поверхонь. Після перетворення комплексного креслення додаткові проекції дають можливість розв'язувати задачі простіше. Методи перетворення проекцій опираються на два основних принципи:

а) зміна взаємного положення об'єкта проекціювання та площин проекцій;

б) зміна напряму проекціювання.

На першому принципі ґрунтуються два способи перетворення проекцій: заміна площин проекцій та плоско-паралельне переміщення, а на другому – спосіб допоміжного проекціювання, який має два різновиди: прямокутний та косокутний [10].

Метричні задачі вміщують в собі:

– поділ відрізка прямої в даному відношенні;

– визначення дійсних величин відрізків прямої, відстаней, кутів, площ і т. п.

Необхідно зазначити, що при розв'язуванні метричних задач використовуються:

– теорема про проектування прямого кута;

– спосіб прямокутного трикутника;

– методи перетворення ортогональних проекцій (обертання, плоско-паралельне переміщення, заміна площин проекцій).

Кожна метрична задача може бути розв'язана кількома способами. В кожному окремому випадку необхідно вибирати такий спосіб розв'язування поставленої задачі, який дає найбільшу точність і є найпростішим [11].

Основна метрична задача:

Теорема 1.1 Якщо в прямокутній декартовій системі координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ існують точки $A(a_1; a_2; a_3)$ і $B(b_1; b_2; b_3)$, то відстань AB між точками A і B знаходиться по формулі $AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$.

1.2 Афінні задачі

У афінних завданнях метричні властивості не розглядаються. Афінні завдання вирішуються в афінній системі координат, а, отже, і в прямокутній декартовій. Метричні задачі зручно розв'язувати в прямокутній системі координат [1].

Основні афінні задачі:

– координати вектора заданого двома точками.

Теорема 1.2 Якщо в афінній системі координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, то існують точки $A(a_1; a_2; a_3)$ і $B(b_1; b_2; b_3)$, що $\overrightarrow{AB}(b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3)$.

Доведення теореми можна знайти в [1];

– ділення відрізка в данному відношенні.

Говорять, що точка M ділить напрямлений відрізок $\overrightarrow{M_1M_2}$ в відношенні $\lambda \neq -1$, якщо виконується векторну рівність: $\overrightarrow{M_1M_2} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$.

Доведення теореми можна знайти в [1].

Теорема 1.3 Нехай в афінній системі координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Тоді координати точки $M(x; y; z)$, яка ділить напрямлюючий відрізок $\overrightarrow{M_1M_2}$ в відношенні $\lambda \neq -1$, знаходять за формулами: $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$ [1].

2 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ АФІННИХ ТА МЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

2.1 Традиційні методи

Традиційні методи розв'язання афінних та метричних задач грунтуюються на основних теоремах та властивостях геометричних фігур, які вивчаються в шкільних програмах. Далі перечислемо основні теореми та властивості фігур, які знадобляться при роз'язанні задач даної дипломної роботи.

Дві прямі на площині або перетинаються, або паралельні.

Означення 2.1 Дві прямі називаються паралельними, якщо вони не перетинаються.

Означення 2.2 Два відрізка називаються паралельними, якщо вони лежать на паралельних прямих.

Теорема 2.1 (теорема Фалеса) Якщо паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на другій його стороні. (Доведення даної теореми можна знайти в будь-якому шкільному підручники програми 8 класу).

Для знаходження елементів у довільному трикутнику виконується теорема синусів або косинусів (рис. 2.1).

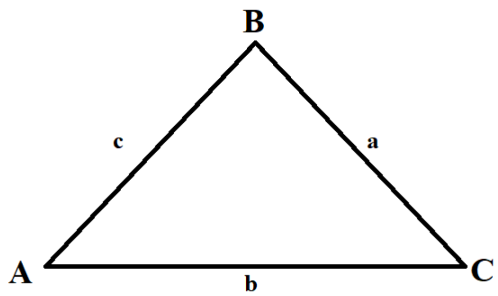

Рисунок 2.1

За теоремою синусів сторони трикутника ABC пропорційні синусам протилежних кутів: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Теорему синусів можна використовувати для обчислення:

– невідомих сторін трикутника, якщо відомі два кути і одна сторона;

– невідомих кутів трикутника, якщо відомі дві сторони і один прилеглий кут.

За теоремою косинусів: квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін на косинус кута між ними: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$.

Теорему косинусів можна використовувати для обчислення:

– невідомої сторони трикутника, якщо відомі дві сторони і кут між ними;

– обчислення косинуса невідомого кута трикутника, якщо відомі всі сторони трикутника.

2.2 Векторний метод

При розв’язанні геометричних задач, крім традиційних методів з використанням алгебри і тригонометрії, можна використовувати і інші методи, зокрема векторний. Правильне використання векторів потребує певних навиків. Векторний метод, як і будь-який інший, використовується не завжди. Вміння заздалегіть передбачити, чи може він використовуватися для розв’язання конкретної задачі, виробляється досвідом.

Для початку необхідно навчитися використовувати вектори при розв’язку планіметричних задач. Такі задачі можна знайти в книзі [4] і багатьох інших учбових посібниках.

Наведемо основні векторні відношення і їх формули, на яких грунтуються розв’язання задач:

– правило трикутника. Для будь-яких трьох точок *A*, *B*, *C* має місце нерівність:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC};$$

– правило віднімання векторів. Для будь-яких трьох точок *A*, *B* і *O* має місце нерівність:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA};$$

– для того, щоб точка *C* належала прямій *AB*, необхідно і достатньо, щоб існувало таке число *k*, щоб

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}.$$

З цієї рівності випливає, що $\frac{AC}{AB} = k$;

– нехай *A* і *B* – дві різні точки прямої і C – точка цієї прямої така, що $\frac{AC}{CB} = k$. Якщо точка *O* – довільна точка прямої, то має місце рівність:

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{OB}}{1 + k}.$$

Цю формулу називають формулою ділення відрізка в данному співвідношенні. Доведення даної формули можна знайти в [5, 34].

Якщо ж точка *C* – середина відрізка *AB*, то $k = 1$ и $\overrightarrow{OC}\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$;

– чотирикутник *ABCD* є паралелограмом тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних рівностей: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$, де *O* – довідьна точка простору;

– якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то для будь-якого вектора $\vec{c}$, який належить тій самій площині, що і вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, існує єдина пара чисел *x* та *y* таких, що $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$;

– в просторі для каждого вектора $\vec{p}$ існує єдиний розклад за трьома некомпланарним векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c},$$

де *x*, *y*, *z* – однозначно визначені числа.

В випадку, якщо $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$, то $x = y = z = 0$;

– нехай точки *A*, *B*, *C* не належать одній прямій, тоді для того, щоб точка *D* належала площині *ABC*, необхідно і достатньо, щоб існувала така пара чисел α і β, що $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$. Доведення даної формули можна знайти в [5, 35].

Тетраедр має ряд властивостей, аналогічних властивостям трикутника.

Відрізок, який з'єднує вершину тетраедра з центром протилежної грані, називають медіаною тетраедра. Медіани тетраедра, як і медіани трикутника, перетинаються в одній точці.

Доведення теореми про медіани тетраедра можна знайти в [5, 35-36].

При розв'язанні різного роду геометричних задач на розрахунок довчин відрізків і величин кутів, на доведення геометричних нерівностей ефективним може бути використання скалярного добутку векторів.

Означення 2.1 Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$.

Якщо вектори задані координатами $\vec{a} = \overline{(a_1; a_2; a_3)}$ і $\vec{b} = \overline{(b_1; b_2; b_3)}$, то скаларний добуток дорівнює сумі добутків відповідних координат: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Властивості скалярного добутку векторів:

– із означення скалярного добутку випливає, що $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, тобто скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини. Отже, для знаходження довжини відрізка *AB* може бути використана формула $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$.

Кут φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ розраховується за формулою $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$;

– для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ має місце нерівність $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \geq \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$;

– відрізки *AB* і *CD* перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$;

– для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ має місце формула: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$.

Для успішного застосування векторів корисно знати деякі рівності, які часто використовуються при розв’язанні задач. Зокрема так;

– для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ виконується рівність: $\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{c}\vec{a}$;

– теорема косинусів. Для будь-яких трьох точок *A*, *B* і *C*: $AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;

– для будь-яких чотирьох точок *A*, *B*, *C*, *D*: $AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$. Доведення цієї рівності можна знайти в [5, 38].

Загального алгоритму розв’язування задач векторним методом не існує, проте часто буває корисно скористатися такими прийомами:

а) «векторизувати» умову задачі;

б) у вибраних позначеннях (чи координатах) виразити потрібні вектори;

в) виконати зазначені операції над векторами згідно правил;

г) знайденому результату надати геометричного тлумачення.

Геометричні задачі, що розв’язуються за допомогою векторів, можна умовно розділити на дві групи. До першої групи відносяться задачі, в яких умова вже сформульована на мові векторів. До другої групи відносяться задачі, в формулюванні яких не вказано на зв’язок їх з векторним методом. Як правило, такі задачі можна розв’язувати різними способами, – векторний спосіб є одним з них. Ці задачі даються учням важче, ніж задачі першої групи, тому ми приділимо їм основну увагу.

В свою чергу задачі першої і другої групи діляться на два види:

а) афінні задачі;

б) метричні задачі.

Успіх у вирішені задач за допомогою векторної алгебри лежить в основі наступних (умовах) уміннях:

– вміння переводити текст задачі з геометричної мови на векторну і навпаки;

– вміння виконувати операції над векторами;

– вміння представляти вектор у вигляді суми (різниці) векторів, у вигляді перетворення вектора на число;

– вміння виконувати перетворення векторних виразів;

– вміння переходити від співвідношень між векторами до довжин і навпаки;

– вміння застосовувати основні векторні рівняння (формули) до розв’язуваної задачі.

Основні векторні рівняння (формули) ми називаємо базисними задачами.

При розв’язуванні задач зводимо до обгрунтування колінеарності векторів, а саме:

– паралельності прямих (відрізків);
– належності трьох точок одній прямій;
– доведення того, що даний чотирикутник є паралелограмом;
– три даних прямих (відрізків) перетинаються в одній точці.

Зручно дотримуватися наступної схеми:

а) аналіз змісту задачі, який включає:
   1) виділення умови і вимоги задачі;
   2) виконання малюнку до задачі;
   3) записи умови і вимог через загальноприйняті позначення.

б) визначення можливості розв'язання задачі за допомогою апарата векторної алгебри, що включає з'ясування питання, що означає розв’язати задачу на мові векторів. При цьому зручно використовувати таблиці переводу з геометричної мови на векторну;

в) доведення колінеарності векторів включає:
   1) вибір двох неколінеарних векторів (по можливості тих, що виходять з однієї точки);
   2) розкладання шуканих і даних векторів по вибраних базисних векторах;
   3) перетворення отриманих векторних рівнянь до встоновлення колінеарності (неколінеарності) векторів.

2.2.1 Застосування векторного методу при розв’язанні афінних задач

Проблемою методики навчання векторному методу займалось багато вчених-методистів: В.А. Гусєв, Г.Л. Луканін, Г.І Саранцев, З.А. Скопець, Т.А. Іванова і багато інших.

Автори навчального посібника [6] пропонують розглядати вектор як паралельне перенесення площині (простору). Однак при доказі теорем і розв’язанні задач за допомогою векторів використовують визначення вектора як спрямованого відрізка.

Автор звертає велику увагу на вирішення завдань різними методами (векторних і конструктивним), підкреслюючи важливість їх зіставлення для розвитку математичного мислення учнів.

Більш докладні методичні рекомендації з навчання школярів векторному методу вирішення геометричних завдань, зокрема при вивченні теми «Вектори в просторі», дає Т.А. Іванова в навчальних посібниках [7], [8].

2.2.2 Застосування векторного методу при розв'язанні метричних задач

При розв'язуванні метричних задач, зокрема на визначення довжини відрізків і міри кута векторним методом, доцільно використати наступні алгоритми.

Алгоритм 2.1 (Обчислення довжини відрізка):

а) вибрати два не колінеарні (на площині) або три не компланарні (у просторі) основні вектори, у яких відомі довжини і кути між ними;

б) розкласти по них вектор, довжина якого обчислюється;

в) знайти скалярний квадрат цього вектора за формулою $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ і довжину $|\vec{a}| = \sqrt{a^2}$;

Алгоритм 2.2 (Обчислення міри кута):

а) вибрати два не колінеарні (на площині) або три не компланарні (у просторі) основні вектори, у яких відомі довжини або відношення довжин і кут між ними;

б) визначити вектори, що задають шуканий кут, розкласти їх по основних векторах;

в) обчислити $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Правило-орієнтир розв'язування позиційних задач і алгоритм розв'язування метричних задач векторним методом в стереометрії той самий, що і в планіметрії яке розглянуте вище.

2.3 Метод координат

Деякі метричні задачі зручніше розв'язувати за допомогою координат. Перш за все це задачі, в яких мова йде про куб, прямокутний паралелепіпед або тетраедр з прямим тригранним кутом. Прямокутна система координат в просторі природнім чином пов'язана з цими багатогранниками, при цьому серед координат їх вершин багато нулів, що спрощує розрахунки.

Суть координатного методу, як і векторного, полягає в тому, що геометрична задача перекладається на мову алгебри, і її розв'язок зводиться до розв'язку рівнянь, нерівностей або їх систем. При розв'язку деяких задач даної роботи знадобляться деякі рівняння і формули, які в шкільному курсі геометрії не вивчаються. Необхідний додатковий матеріал, який наведено нижче.

Із курсу стереометрії відомо, що рівняння площини, яка проходить через точку $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно нульовому вектору $\vec{n}=\{A, B, C\}$ в прямокутній системі координат має вигляд: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, або $Ax+By+Cz+D=0$, де $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$.

Навпаки, будь-яке рівняння першої степені $Ax+By+Cz+D=0$ визначає в координатному просторі єдину площину, яка перпендикулярна вектору з координатами $\{A, B, C\}$.

Положення площині в просторі однозначно визначається знанням трьох точок, які не належать одній прямій. Нехай дана площина, яка перетинає осі координат в точках $M_1=(a, 0, 0)$, $M_2=(0, b, 0)$, $M_3=(0, 0, c)$, але яка проходить через початок координат. Підставивши значення цих точок в загальне рівняння площини, отримаємо: $Aa+D=0$, $Bb+D=0$, $Cc+D=0$, де числа a, b, c и D не дорівнюють нулю. Звідси знаходимо: $A=\frac{-D}{a}$,

$B = \dfrac{-D}{b}$, $C = \dfrac{-D}{c}$, і рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$ зводиться до вигляду: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$. Отримане рівняння називають рівнянням площини в відрізках. Воно використовується при розв'язанні задач.

Як відомо, відстань між двома точками $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ обчислюється за формулою: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Використовуючи цю формулу, легко розрахувати рівняння сфери.

В прямокутній системі координат рівняння сфери радіуса R з центром в точці $C(a, b, c)$ має вигляд: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$. Якщо центр сфери співпадає з початком координат, то рівняння має вигляд $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Розглянемо способи задання прямої в координатному просторі. Нехай пряма l проходить через данну точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ і паралельна нульовому вектору $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$. Вектор $\vec{a}$ називають направляючим вектором прямї l (рис. 2.2).

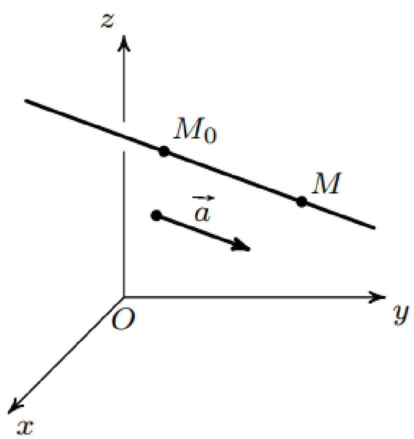

Рисунок 2.2

Довільна точка $M = (x, y, z)$ належить прямій l тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ колініарні, тобто коли виконується рівність: $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$, або $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} + t\vec{a}$, де t – деяке число (параметр). Це відношення в координатах рівносильне трьом рівнянням:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \\ z = z_0 + a_3 t. \end{cases}$$

Їх називають параметричним рівнянням.

Якщо пряма l паралельна осі Oz, то вектор $\vec{k} = \{0, 0, 1\}$ є її направляючим ветором, і рівняння прямої приймає вигляд: $x = x_0$, $y = y_0$ (координата z приймає довільне значення).

Нехай жодна з координат вектора $\vec{a}$ не дорівнює нулю. Тоді, виключивши з отриманих рівнянь параметр t, отримаємо рівняння $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$. Вони називаються канонічними рівняннями прямої.

Виведемо формулу для розрахунку відстані від точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ до площини α, заданої в прямокутній системі координат рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$.

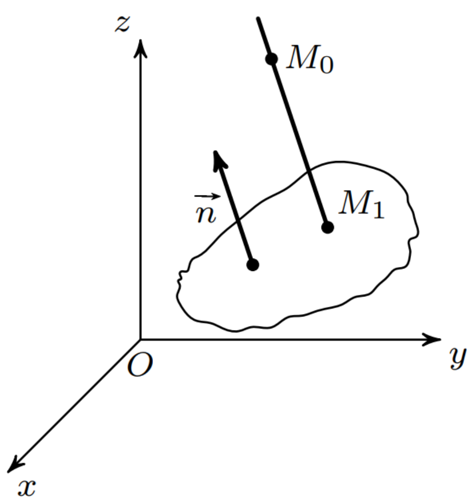

Рисунок 2.3

Нехай перпендикуляр, проведений із точки M_0 до площини α, перетинає її в точці M_1 (рис. 2.3). Тоді $\overrightarrow{M_0M} = \{x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z\}$.

Так як вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$ перпендикулярний площині α і, отже, колінеарний вектору $\overrightarrow{M_0M}$, то, згідно означення скалярного добутку $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = |\vec{n}| \cdot \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| \cdot (\pm 1)$. Позначимо $\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = d$. Тогді $d = \dfrac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1}\right|}{|\vec{n}|}$.

Виразимо скалярний добуток, який стоїть в чисельнику дробу, координатами векторів $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M_1}$. Отримаємо:

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} &= A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = \\ &= Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0).\end{aligned}$$

Точка M_1 належить площині α, тому $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Таким чином, маємо: $\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1}\right| = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|$. Враховуючи, що $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, отримаємо:. $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ Отже, для того, розрахувати відстань від точки M_0 до площини α, треба в многочлен $Ax + By + Cz + D$ замість x, y, z підставити координати точки M_0, взяти модуль отриманого числа і поділити його на число $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

2.3.1 Введення косокутної системи для розв'язування афінних та метричних задач

В ході застосування векторів (координат) до розв'язування задач, необхідно засвоїти наступне:

а) операції додавання векторів і множення вектора на число, обчислення відстані та кути (ці операції, не застосовуються в задачах, в яких э такі поняття, як «коло», «бісектриса», «перпендикуляр»);

б) задачі, в яких мова йде про: паралельні прямі і площини, паралельні відрізки (конкретно про паралелограм, трапецію, паралелепіпед, призму, середину відрізка, середню лінію трикутника, центральну симетрію, точку перетину медіан трикутника й тетраедра) піддаються ефективному розв'язанню.

Суть координатного методу в геометрії полягає в тім, щоб залежності між елементами геометричної фігури виразити за допомогою алгебраїчних співвідношень.

Розв'язування афінних задач координатним методом починається з побудови афінної (зокрема косокутної) системи координат, в якій потрібно знайти координати точок і векторів та скласти рівняння необхідних прямих, площин.

Систему координат можна вводити довільно. Результат розв'язування задач не залежить від вибору системи координат. Але від вдалого її вибору залежить швидкість і легкість одержання необхідного результату. Тому перш ніж вводити систему координат, необхідно проаналізувати задачу, встановити координати яких точок потрібно знайти, рівняння яких прямих (та площин) одержати й подумати, в якій з обраних систем координат це можна зробити простіше. Загальних правил тут немає: кожна задача вимагає індивідуального підходу.

В статті [9] пропонується один із підходів до вивчення та застосування цього методу. Нагадаємо, що афінна (зокрема косокутна) система координат є узагальненням прямокутної декартової системи координат.

Отже, афінна система координат на площині визначається вибором точки $O(0;0)$ – початком системи координат і двома базисними (не колінеарними) векторами $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ (в загальному випадку різної довжини) зі спільним початком у цій точці. Напрямки зазначених векторів визначають додатні напрямки відповідних координатних осей OE_1, OE_2 (рис. 2.4).

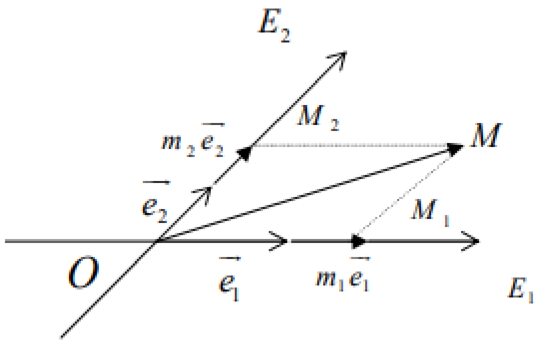

Рисунок 2.4

а) оскільки вектори $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ не є колінеарними (утворюють базис відповідного двовимірного векторного простору), то будь-який вектор $\vec{m}$ площини (зокрема з початком у точці O) однозначно розкладається за цими векторами: $\vec{m} = m_1\vec{e}_1 + m_2\vec{e}_2$, де $m_1\vec{e}_1$, $m_2\vec{e}_2$ – це вектори, які колінеарні відповідним осям і є сторонами того паралелограма, для якого вектор $\vec{m}$ співпадає з діагоналлю (Рис. 2.1). m_1, m_2 – числа, рівні «проекціям» вектора $\vec{m}$ відповідно на вісі OE_1, OE_2, тобто, проводячи через кінець вектора $\vec{m}$ (точку M) прямі паралельні осям OE_1, OE_2, одержимо відповідно точки M_2, M_1.

Проекції m_1, m_2, на осі координат будемо називати координатами вектора $\vec{m}$ в системі OE_1, OE_2 (що визначається точкою O і базисними векторами $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$) та позначати $\vec{m} = \{m_1, m_2\} = m_1\vec{e}_1 + m_2\vec{e}_2$;

б) під координатами довільної точки M в цій системі координат будемо розуміти координати вектора $\overrightarrow{OM} = \vec{m}$ (радіус-вектора точки) відносно цієї ж системи. Тобто: $M = (m_1, m_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \{m_1, m_2\} = m_1\vec{e}_1 + m_1\vec{e}_2$.

Якщо в системі $O\bar{e}_1, e_2$, задано дві точки: $A = (a_1, a_2) \neq (0{,}0)$ і $B = (b_1, b_2) \neq (0{,}0)$, то координати вектора $\overrightarrow{AB}$ визначаються за правилом $\overrightarrow{AB} = \{(b_1 - a_1), (b_2 - a_1)\}$.

в) дії з векторами в афінній системі координат на площині: нехай маємо координати двох векторів $\vec{x} = (x_1, x_2)$ і $\vec{y} = (y_1, y_2)$ в системі $O\bar{e}_1, e_2$.

Знайдемо скалярний добуток цих векторів:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle (\vec{x}_1\vec{e}_1 + \vec{x}_2\vec{e}_2), (\vec{y}_1\vec{e}_1 + \vec{y}_2\vec{e}_2) \rangle =$$
$$= x_1y_1\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle + x_1y_2\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle + x_2y_1\langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle + x_2y_2\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle =$$
$$= x_1y_1|\vec{e}_1|^2 + x_1y_2\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle + x_2y_1\langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle + x_2y_2|\vec{e}_2| = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} |\vec{e}_1|^2 & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle \\ \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & |\vec{e}_2|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

або в скороченій формі

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

де $g_{ij} = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = |\vec{e}_i| \cdot |\vec{e}_j| \cdot \cos\vec{e}_i, \vec{e}_j = g_{ji}$, $i = 1{,}2$, $j = 1{,}2$.

Матрицю $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ називають матрицею метричних коефіцієнтів, або матрицею Грама.

Як наслідок з 2.1, маємо, що

$$|\vec{x}|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

Косинус кута між векторами можна визначити за формулою

$$\cos \vec{x}, \vec{y} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}, \qquad (2.3)$$

де $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ обчислюється за формулою (2.1), а величини $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$ – за формулою (2.2).

Аналогічним чином афінна (зокрема косокутна) система координат у тривимірному просторі визначається точкою $O(0,0,0)$ – початком системи координат і трійкою не компланарних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (таких, що не лежать в одній площині) зі спільним початком у цій точці (рис. 2.5).

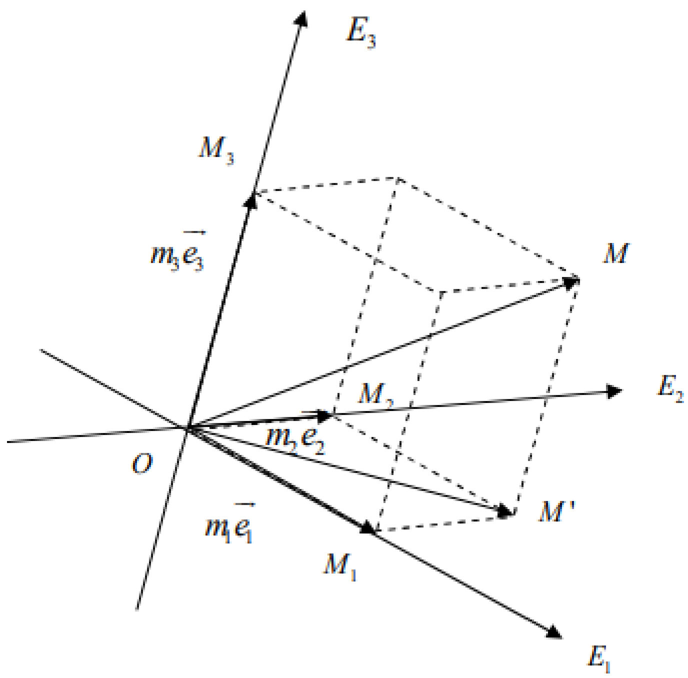

Рисунок 2.5

Скалярний добуток векторів $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ і $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$, заданих своїми координатами в системі $O\bar{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, обчислюється за аналогічною формулою:

$$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle=(x_1,x_2,x_3)\cdot\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{32} & g_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3\end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

де $g_{ij}=\langle \vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle=|\vec{e}_i|\cdot|\vec{e}_j|\cdot\cos\vec{e}_i,\vec{e}_j=g_{ji}$, $i=1,2,3$, $j=1,2,3$;

$$|\vec{x}|^2=\langle \vec{x},\vec{x}\rangle=(x_1,x_2,x_3)\cdot\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{32} & g_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Не важко бачити, що:

$$g_{11}=|\vec{e}_1|^2;\ g_{22}=|\vec{e}_2|^2;\ g_{33}=|\vec{e}_3|^2;\ g_{12}=\langle \vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle=|\vec{e}_1|\cdot|\vec{e}_2|\cdot\cos\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=g_{21};$$
$$g_{13}=\langle \vec{e}_1,\vec{e}_3\rangle=|\vec{e}_1|\cdot|\vec{e}_3|\cdot\cos\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_3)=g_{31};$$
$$g_{23}=\langle \vec{e}_2,\vec{e}_3\rangle=|\vec{e}_2|\cdot|\vec{e}_3|\cdot\cos\angle(\vec{e}_2,\vec{e}_3)=g_{32}. \tag{2.6}$$

Таким чином, з вище розглянутих міркувань випливає, що:

а) геометрична задача на площині повністю визначена, якщо відомі дві прилеглі сторони плоскої фігури та кут між ними;

б) геометрична задача в просторі (тривимірному) визначена, якщо відомі три прилеглі ребра просторової фігури й кути між кожною парою цих ребер.

Наступні твердження (1–4) є теоретичною основою, що переводить геометричні поняття та властивості на векторну мову алгебри і будуть корисними при розв’язувані афінних задач:

а) прямі AB і CD паралельні або співпадають тоді і лише тоді, коли $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{CD}$, де $\lambda \neq 0$;

б) три точки A, B, C належать одній прямій тоді і лише тоді, коли де $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{CD}$, де $\lambda \neq 0$.

в) якщо точки A, B, C належать одній прямій, то для будь-якої точки O має місце співвідношення:

$$\overrightarrow{OC} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}, \text{ де } \lambda + \mu = 1;$$

г) для четвірки точок A, B, C, D площини, з яких точки A, B, C не належать одній прямій має місце рівність:

$$\overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}, \ \overrightarrow{OD} = (1 - \alpha - \beta)\overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{OB} + \beta \overrightarrow{OC}.$$

І навпаки, якщо виконується одна з наведених рівностей, то виконується й друга, а точки A, B, C, D належать одній площині.

Як було зазначено вище, специфіка обох типів задач полягає в тому, що кожна з них є особливою і потребує індивідуального підходу. Саме це і становить основну проблему пошуку ефективного їх розв'язання.

Проте, для деяких метричних задач (задач обчислювального характеру) можливим є наступний алгоритм до їх розв’язування.

Нехай на площині (в просторі) задано фігуру. І нехай a, b (a, b, c) довжини сторін (ребер) зі спільною вершиною, кут між якими (кути між кожною парою яких) також відомий (відомі). І нехай цими даними вичерпується умова задачі. Тоді для застосування координатного методу слід виконати наступну послідовність дій:

а) за початок O афінної системи координат природно обрати спільну точку відомих сторін (ребер), покласти її координати рівними нулеві $O(0,0,0)$;

б) в якості базисних векторів $\bar{e}_1, \vec{e}_2$ $(\bar{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ слід обрати саме ті сторони (ребра), довжини та кут між якими є відомими.

Тоді цілком визначені напрямки базисних векторів, їх довжини та кути між ними;

в) оскільки відомий кут (кути) між базисними векторами, то можливим є обчислення метричних коефіцієнтів $g_{ij} = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle =$ $= |\vec{e}_i| \cdot |\vec{e}_j| \cdot \cos\angle(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = g_{ji}$;

г) відносно системи $O\bar{e}_1, \vec{e}_2$ $(O\bar{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ знайти координати векторів (точок фігури), необхідних для обчислення шуканого елементу.

На цьому кроці більш ніж доцільно користуватися правилом трикутника, поділом направленого відрізка в заданому відношенні;

д) користуючись формулами (1) – (6) та результатами попередніх кроків, знайти шуканий елемент фігури [9].

2.3.2 Застосування координатного методу при розв’язуванні афінних та метричних задач

Часто процес розв’язування геометричної задачі методом координат допускає алгоритмічний підхід:

а) переформулювання умови задачі на умову алгебри;

б) застосування законів алгебри до знайдених математичних залежностей;

в) інтерпретація кінцевого результату в потрібній термінології.

3 ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

Доведемо теорему про медіану трикутника двома методами (традиційним і векторним).

Задача 1 Довести, що медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з них по відношенню до 2: 1, рахуючи від вершини.

Спосіб 1 (традиційний метод). На рисунку (3.1) медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці M:

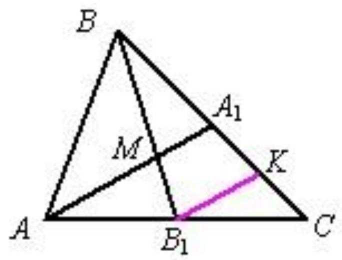

Рисунок 3.1

Доведемо, що $\frac{BM}{MB_1} = \frac{2}{1}$.

Проведемо $B_1K \| AA_1$. Оскільки $AB_1 = B_1C$, то за теоремою Фалеса $A_1K = KC$, тобто $A_1C = 2A_1K$. Проте $BA_1 = A_1C$. Тоді $\frac{BA_1}{A_1K} = \frac{2}{1}$. За теоремою про пропорційні відрізки $\frac{BM}{MB_1} = \frac{BA_1}{A_1K} = \frac{2}{1}$.

Таким чином, медіана AA_1, перетинаючи медіану BB_1, ділить її у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини B.

Теорему доведено.

Спосіб 2 (векторний метод). Візьмемо на медіані *CD* трикутника *ABC* точку *M* (рис. 3.2), таку, що $\frac{CM}{MD}=2$ (рис. 1). Відповідно до формули розподілу відрізка в даному відношенні $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OD}}{3}$, де *O* – довільна точка простору. А так як *D* – середина відрізка *AB*, то $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$. З цих двох рівностей випливає, що $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$. Нехай точка *M'* ділить будь-яку з двох інших медіан у відношенні 2: 1, рахуючи від вершини. Тоді для вектора $\overrightarrow{OM'}$ аналогічно отримаємо такий же самий вираз, тобто $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM}$. А це означає, що точки *M* і *M'* збігаються. Таким чином, всі три медіани трикутника *ABC* мають загальну точку *M*, яка ділить кожну з них в відношенню 2:1, рахуючи від вершини. Теорема доведена.

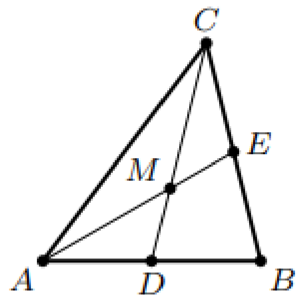

Рисунок 3.2

Далі доведемо теорему про медіану тетраедра двома методами (традиційним і векторним).

Задача 2 Довести, що медіани тетраедра (відрізки, що з'єднують вершини з точками перетину медіан протилежних граней) перетинаються в одній точці і діляться нею у відношенні 3:1, рахуючи від вершини.

Спосіб 1 (традиційний метод). Доведемо, що будь-які дві медіани тетраедра перетинаються і діляться точкою перетину у відношенні 3:1, рахуючи від вершини. Звідси буде випливати, що через точку, що ділить одну із медіан тетраедра у відношенні 3:1, рахуючи від вершини, проходять інші три медіани. Нехай *M* і *N* – точки перетину медіан граней *ABC* і *ABD* тетраедра *ABCD, K* – середина *AB*. Площина, що проходить через точки *D, K* і *C*, містить точки *M* і *N*, причому боку *CK* і *DK* трикутника *DKC* діляться цими точками в одному і тому ж відношенні: *CM*: *MK* = *DN*: *NK* = 2: 1.

З подібності трикутників *KCD* і *KMN* слідує, що $CD : MN = KC : KM = 3:1$.

Нехай відрізки *DM* і *CN* перетинаються в точці *O*. З подібності трикутників *DOC* і *MON* слідує, що *OD*: *OM* = *OC*: *ON* = *CD*: *MN* = 3: 1, що й потрібно було довести.

Спосіб 2 (векторний метод). Візьмемо на медіані DM1 тетраедра *ABCD* точку *M* таку, що $\frac{DM}{MM_1} = 3$ (Рис. 3.3). За формулою розподілу відрізка в даному відношенні маємо: $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OD} + 3\overrightarrow{OM_1}}{4}$, де *O* – будь-яка точка простору.

Враховуючи, що центр ваги M_1 трикутника *ABC* задовольняє співвідношенню $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$, отримаємо:

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right).$$

Для точки *M'*, що ділить будь-яку з трьох інших медіан тетраедра *ABCD* у відношенні 3: 1, рахуючи від вершини, отримаємо той самий вираз (воно симетрично відносно $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OD}$). А це означає, що $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$, і всі чотири медіани тетраедра перетинаються в одній точці *M* і кожна з них ділиться цією точкою у відношенні 3:1, рахуючи від вершини тетраедра. Точку *M* називають центроїдом тетраедра.

Теорема доведена.

Задача 3 Дано сторони трикутника a, b, c. Знайти медиани, проведені до цих сторін.

Спосіб 1 (традиційний). Розглянемо трикутники ABC і BOC (рис 3.3). Нехай медіана $BO = m_b$. Продовжимо медіану BO за точку O на відрізок $MD = OM$. Тоді за ознакою паралелограма чотирикутник $ABCD$ – паралелограм. За теоремою косинусів, маємо $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\angle B$. По властивостям паралелограма діагоналі діляться точкою перетину на рівні частини. За властивостями діагоналей: сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін. Тепер необхідно застосувати наслідок з теореми косинусів, згідно з яким сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі подвоєних квадратів його сторін: $b^2 + BD^2 = 2\left(c^2 + a^2\right)$, враховуючи, що $BD = 2BO$, отримаємо $b^2 + 4m_b{}^2 = 2\left(c^2 + a^2\right)$, з останьої рівності виведемо m_b: $m_b = \frac{\sqrt{2\left(c^2 + a^2\right) - b^2}}{2}$.

Аналогічно можна вивести m_a, m_c: $m_a = \frac{\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}}{2}$, $m_c = \frac{\sqrt{2\left(c^2 + b^2\right) - c^2}}{2}$.

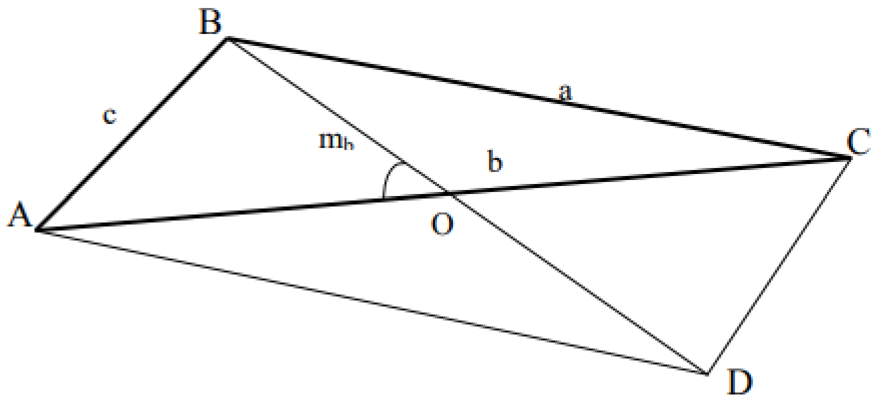

Рисунок 3.3

Спосіб 2 (векторний). Щоб розʼязати дану задачу векторним методом, спочатку необхідно ввести вектори: $\overrightarrow{BA}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{m}_b$ (рис. 3.4). Виконуючи правило дій над векторами, запишемо: $\begin{cases}\vec{a}+\vec{c}=2\vec{m}_b,\\ \vec{a}+\vec{c}=\vec{b}.\end{cases}$

Піднесемо обидві частини, кожної рівності системи до квадрату. $\begin{cases}\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{c}+c^2=4\vec{m}_b,\\ \vec{a}^2+2\vec{a}\vec{c}+\vec{c}^2=b^2.\end{cases}$ Додавши ці дві рівності, отримаємо: $2c^2+2a^2=4m_b^{\,2}+b^2$. Виведемо з останньої рівності $\vec{m}_b$: $m_b=\dfrac{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)-b^2}}{2}$.

Аналогічно знаходимо і довжини інших двох медіан: $m_a=\dfrac{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}}{2}$, $m_c=\dfrac{\sqrt{2\left(c^2+b^2\right)-c^2}}{2}$.

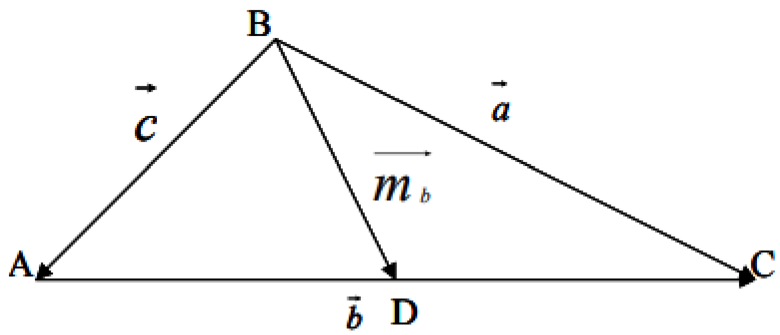

Рисунок 3.4

Задача 4 Задано трикутник *ABC*: *AB*=4, *AC*=3, $\angle BAC=60^\circ$.Знайти довжину відрізка *AD*, якщо точка *D* поділяє напрямлений відрізок *BC* 2:3 у відношення.

Спосіб 1 (введення косокутної системи координат). Введемо в площині трикутника афінну систему координат з початком в точці *A*(0,0) та базисними векторами $\vec{e}_1=\overrightarrow{AC}$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{AB}$.

Тоді зрозуміло, що: $|\vec{e}_1| = 3$, $|\vec{e}_2| = 4$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 60^\circ \Rightarrow \cos\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{1}{2}$.

Обчислимо метричні коефіцієнти: $g_{11} = |\vec{e}_1|^2 = 9$, $g_{22} = |\vec{e}_2| = 16$, $g_{12} = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \cos\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = g_{21} = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6$.

Тому матриця *G* має вид: $G = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$.

Зрозуміло, що для знаходження довжини *AD*, необхідно знайти координати вектора $\overrightarrow{OD}$, які визначаються координатами точки *D* в системі $O\bar{e}_1, \vec{e}_2$. Не важко бачити, що точки *B* і *C* в системі $O\bar{e}_1, \vec{e}_2$ мають координати *C*(1,2), *B*(0,1). За умовою точка $D(d_1, d_2)$ поділяє напрямлений відрізок $\overrightarrow{BC}$ у відношенні $\lambda = 2:3$. Тоді за формулами координат точки, яка поділяє напрямлений відрізок у відношенні λ, маємо: $d_1 = \dfrac{0 + 1 \cdot \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \dfrac{2}{5}$, $d_2 = \dfrac{0 + 0 \cdot \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \dfrac{3}{5}$. Звідки $D\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$. А тому $\overrightarrow{OD} = \left\{\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\}$.

Знайдемо довжину відрізка AD:

$$AD^2 = \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 = \left\langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD} \right\rangle = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) \cdot \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{2}{5} \cdot 9 + \frac{3}{5} \cdot 6, \frac{2}{5} \cdot 6 + \frac{3}{5} \cdot 16\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \cdot (18 + 18{,}12 + 48) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{25} \cdot (36 \cdot 2 + 60 \cdot 3) = \frac{252}{25} = \left(\frac{6}{5} \cdot \sqrt{7}\right)^2.$$

Таким чином $AD = \frac{6}{5} \cdot \sqrt{7}$.

Спосіб 2 (традиційний). Розглянемо рис. 3.5.

Спочатку знайдемо довжину ВС, за допомогою теореми косинусів: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{16 + 9 - 12} =$
$= \sqrt{13}$.

Знайдемо довжину DC: $2x + 3x = \sqrt{13}$; $5x = \sqrt{13}$; $x = \frac{\sqrt{13}}{5}$. Звідси $DC = 3x = 3 \cdot \frac{\sqrt{13}}{5}$.

Тепер знайдемо, чому дорівнює $\cos\angle C$:

$$\cos\angle C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{3^2 + \sqrt{13} - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Залишилось знайти AD:

$$AD = \sqrt{AC^2 + DC^2 - 2AC \cdot DC \cdot \cos\angle C} =$$
$$\sqrt{3^2 + \left(\frac{3\sqrt{13}}{5}\right)^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{3\sqrt{13}}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}} = \sqrt{9 + \frac{117}{25} - \frac{18}{5}} = \sqrt{\frac{252}{25}} = 6\frac{\sqrt{7}}{6}.$$

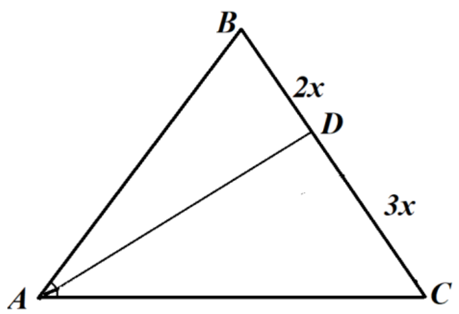

Рисунок 3.5

Задача 5 Довести теорему Піфагора: в прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

Спосіб 1 (традиційний). Нехай трикутник ABC – прямокутний трикутник з прямим кутом C. Проведем з вершини C на гіпотенузу AB висоту CH (рис. 3.6).

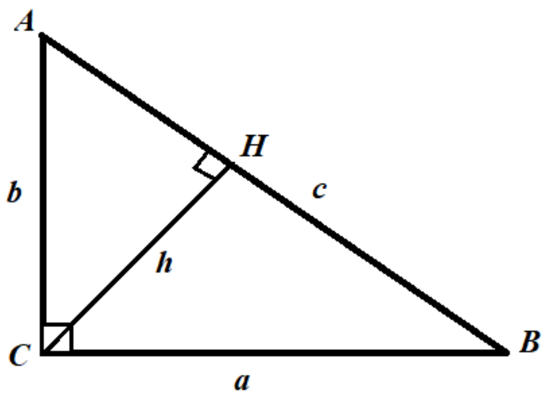

Рисунок 3.6

Прямокутний трикутник ACH подібний трикутнику ABC по двом кутам $(\angle ACB = \angle CHA = 90^\circ, \quad \angle A$ – спільний$)$. Аналогічно CBH подібний трикутнику ABC.

Введемо позначення $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.З подібності трикутника отримаємо, що $\frac{a}{c} = \frac{HB}{a}$, $\frac{b}{c} = \frac{AH}{b}$. Звідси маємо, що $a^2 = c \cdot HB$, $b^2 = c \cdot AH$. Склавши отримані рівності, отримаємо $a^2 + b^2 = c \cdot (HB + AH) \Rightarrow$ $a^2 + b^2 = c \cdot AB \Rightarrow a^2 + b^2 = c \cdot c \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$. Теорема доведена.

Спосіб 2 (координатний). Введемо прямокутну декартову систему координат.

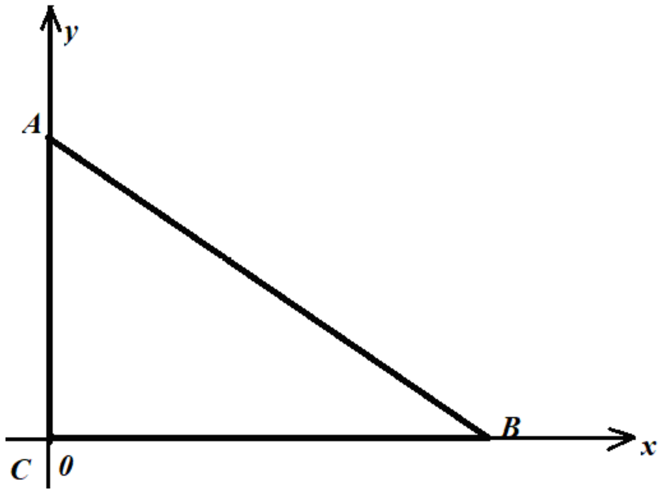

Рисунок 3.7

Нехай трикутник ABC – прямокутний трикутник з прямим кутом C. Точка С – початок координат. Нехай вершини трикутника ABC мають координати: $A(a,0)$, $B(0,b)$, $C(0;0)$, де $a \neq 0$, $b \neq 0$ (рис 3.7).

Значить,

$$BC^2 = b^2,\ CA^2 = a^2,\ AB^2 = BC^2 + CA^2.$$

Що і треба було довести.

ВИСНОВКИ

Геометрія розділилась на ряд дисциплін – проективна геометрія, афінна геометрія, метрична геометрія і т.д. Кожна з яких вивчає властивості однієї з груп геометричних перетворень. Ідея геометричних перетворень стає з цього часу домінуючою ідеєю в подальшому розвитку геометричної науки.

В даній роботі проаналізовані основні методи розв’язання афінних та метричних задач, а саме традиційний, векторний, координатний методи. При розв’язанні однієї з задач практичної частини виникла необхідність об’єднати два методи одночасно (векторний і координатний).

Також аналізуючи результати проведених досліджень, було отримано наступні висновки:

– традиційні методи розв’язання афінних та метричних задач грунтуюються на основних теоремах та властивостях геометричних фігур, які вивчаються в школі;

– векторний метод розв’язання задач потребує наступних навиків: вміння переводити геометричні твердження на векторну мову (і навпаки), вміння користуватися діями над векторами;

– векторний метод не завжди можна використовувати. Все залежить від конкретної задачі. Але можна визначити основні прийоми, які можуть бути корисними при розв’язанні афінних та метричних задач.

В другому розділі дипломної роботи також розглянуто: загальні алгоритми розв’язування метричних задач векторним та координатним методами в тому числі при введенні косокутної системи координат.

Доцільність та ефективність кожного з методів залежить безпосередньо від навиків людини, яка роз’язує задачі. Як показує статистика, то учні здебільшого застосовують традиційні методи. Все тому що на вивчення даних методів учням за загальноосвітньою програмою приділяється достатня увага, на відміну від векторного та координатного. Але в більшості випадках координатний та векторний методи значно заощяджуть час при розв’язанні задачі.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Э. Г. Готман. Стереометрические задачи. Москва : МЦНМО, 2006. 160 с.

2. Кадубовський О. А., Кадубовська О. Л., Плесканьова Л. Г. Аналітична геометрія. Частина І: Елементи векторної алгебри. Методи координат на площині та в просторі: навчальний посібник – Видання 2-е, виправлене та доповнене. Слов'янськ, 2010. 84 с.

3. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Москва, 2003. 320 с.

4. Гусев В. А., Калягин Ю. М., Луканин Г. Л. Векторы в школьном курсе геометрии.: Пособие для учителей. Москва, 1976. 46 с.

5. Скопец З. А. Векторное решение стереометрических задач : Преподавание геометрии в 9-10 классах. Москва : Просвещение, 1980. 272 с.

6. В помощь учителю математики: Методические рекомендации к изучению отдельных тем. Новгород: НГПУ, 1994. 82 с.

7. В помощь учителю математики: Методические рекомендации по решению геометрических задач аналитическими методами. Горький: ГГПИ им. Горького, 1985. 72 с.

8. Томенко М. И. Розв'язування геометричних задач: книга для вчителя. Київ : Радянська школа, 1991. 128 с.

9. Кормановський С.І. Конспект лекцій з інженерської графіки. Вінниця : ВНТУ, 2009. – 116 с.

10. Ковбашин В.І., Пік А.І. Позиційні та метричні задачі : навчально - методичний посібник та завдання до виконання графічних робіт із курсу нарисної геометрії. Тернопіль : ТНТУ імені Івана Пулюя, 2015. 64с.

11. Кадубовський О.А., Кадубовська О.Л. Введення косокутної системи координат, як метод розв'язання широкого кола задач з аналітичної

геометрії середньої та вищої шкіл. Матеріали наукової конференції СДПУ. Слов’янськ, 2003. с. 47 – 51.