МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра загальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: «УЗАГАЛЬНЕННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ТА АЛГОРИТМІВ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ»

Виконав студент 2 курсу, групи 8.1118
спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми математика
А.О. Артеменко
(ініціали та прізвище)
Керівник доцент кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Стєганцева П.Г.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)
Рецензент доцент кафедри програмної інженерії, доцент, к.ф.-м.н. Курапов С.В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра загальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
загальної математики,
к.ф.-м.н., доцент
_______________ Зіновєєв І.В.
(підпис)

« 30 » травня 2019 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ (СТУДЕНТЦІ)

Артеменку Анатолію Олексійовичу
(прізвище, ім'я та по батькові)

1. Тема роботи Узагальнення деяких задач та алгоритмів дискретної математики

керівник роботи Стєганцева П.Г., к.ф.-м.н., доцент
(прізвище, ім'я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 29 » травня 2019 року № 811-с

2. Строк подання студентом роботи 26.12.2019

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
    1. Постановка задачі.
    2. Основні теоретичні відомості.
    3.
    4.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 30.05.2019

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	04.06.2019	
2.	Збір вихідних даних.	10.09.2019	
3.	Обробка методичних та теоретичних	19.10.2019	
	джерел.		
4.	Розробка першого розділу.	14.11.2019	
5.	Розробка другого розділу.	10.12.2019	
6.	Оформлення та нормоконтроль	20.12.2019	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	16.01.2020	

Студент ____________ А.О. Артеменко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ____________ П.Г. Стєганцева
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ____________ О.Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Узагальнення деяких задач та алгоритмів дискретної математики»: 51 с., 7 рис., 16 джерел, 4 додатки.

БІНОМ НЬЮТОНА, ВЕРШИНА ГРАФА, ГРАФ, КОМБІНАТОРИКА, КОРІНЬ СТЕПЕНЯ N, НЕОРІЄНТОВАНИЙ ГРАФ, НЕПОМІЧЕНИЙ ГРАФ.

Об’єкт дослідження – графи без петель та кратних ребер, дійсні числа.

Мета роботи: порівняти результати застосування різних алгоритмів добування кореня n-го степеня, порівняти результати застосування формули Харарі та доведених рекурентних співвідношень для знаходження кількостей непомічених неізоморфних графів із заданим числом вершин та ребер.

Методи дослідження – аналітичний, графічний.

У першому розділі кваліфікаційної роботі магістра розглянуто алгоритм обчислення кореня n-го степеня, який обґрунтовується властивостями біноміальних коефіцієнтів. Другий розділ присвячено неорієнтованим неізоморфним непоміченим графам без петель та кратних ребер. Застосовано пакет Maple для обчислення перераховуючого многочлена для графів із заданою кількістю вершин. Знайдено деякі відсутні елементи в таблиці кількостей неізоморфних непомічених графів.

SUMMARY

Master’s Qualification Thesis «The Extension of the Certain Problems and the Algorithms of the Discrete Mathematics»: 51 pages, 7 figures, 16 references, 4 supplements.

NEWTON BINOMIAL, VERTEX, GRAPH, COMBINATORICS, NTH ROOT, UNDIRECTED GRAPH, UNLABELED GRAPH.

The objects of the study are graphs without loops and multiple edges, real numbers.

The aim of the study is to compare results of applying different algorithms of extracting nth root, to compare results of applying Harary’s formula and proved recurrence relations for calculating numbers of unlabeled non-isomorphic graphs with given number of vertices and edges.

The methods of research are analytic and graphic.

In first part of master’s qualification thesis algorithm of calculation of nth root that explained by properties of binomial coefficients was considered. In second part of master’s qualification thesis undirected, non-isomorphic, unlabeled graphs were considered. Maple software for calculation of enumerating polynomial for graphs with given number of vertices was applied. Some unknown elements in the table of numbers of non-isomorphic, unlabeled graphs were found.

ЗМІСТ

ВСТУП

Математика загалом є доволі вагомою та невід’ємною частиною нашої культури. Математика є наукою, в якій вивчаються математичні структури на множинах та властивості їх взаємодії. Вона зародилася тисячі років тому. Від самого початку математику можна умовно розділити на дискретну і континуальну (неперервну) математику. До континуальної математики відноситься все, що містить ідеї теорії границь, неперервності тощо. Все інше є дискретною математикою (discrete mathematics). Головною її специфікою є дискретність, тобто антипод неперервності. Дискретною математикою називають область математики, що вивчає дискретні математичні об'єкти і структури. Її елементи виникли в далекій давнині. З незапам'ятних часів відомі комбінаторно-логічні завдання, розв’язання яких пов'язане з перебором комбінацій дискретних об'єктів і логічним аналізом варіантів, які можуть виникнути за умовами задачі. Деякі задачі комбінаторики та логіки збереглися до нашого часу.

З найдавніших часів дискретні системи знаходять застосування в обчислювальній практиці. Широко відомі винайдені в давнину різні системи подання чисел, а також – алгоритми виконання арифметичних операцій над даними числами, розв’язання рівнянь і т.д., всюди поширені були дискретні обчислювальні пристосування: абак, різні види рахунків. Розвиваючись паралельно з іншими розділами математики, елементи дискретної математики були їх складовою частиною. Найважливіші приклади дискретних математичних об'єктів: натуральний ряд чисел; кінцеве безліч елементів довільної природи; функція (відображення) з кінцевого безлічі в кінцеве безліч; слово (послідовність символів) і формальну мову (безліч слів) в кінцевому алфавіті; кінцевий граф і інші. Змістовно дискретний об'єкт зазвичай мислиться як що складається з строго відокремлених один від одного неподільних частин.

Об'єкти розглядають як дискретні також в тих випадках, коли з яких-небудь причин відволікаються від властивих їм властивостей безперервності.

У широкому сенсі дискретна математика включає в себе такі давно сформовані розділи математики, як теорія чисел, алгебра, теорія множин, математична логіка та інші. У вузькому сенсі дискретна математика складається з ряду спеціальних розділів і порівняно нових галузей, які почали розвиватися великими кроками у середині минулого століття в зв'язку зі створенням та поступовим впровадженням в усі сфери життя ЕОМ і цифрових технологій. До таких розділів можна віднести теорію функціональних систем, теорію графів і мереж, комбінаторний аналіз, теорію автоматів і алгоритмів, теорію кодування, теорію синтезу керуючих систем, дискретну геометрію та ін.

1 УЗАГАЛЬНЕННЯ АЛГОРИТМУ ДОБУВАННЯ КВАДРАТНОГО КОРЕНЯ З ЧИСЛА НА ВИПАДОК ДОВІЛЬНОГО СТЕПЕНЯ

1.1 Теоретичні відомості з комбінаторики

Наведемо деякі відомі означення з комбінаторики.

Факторіалом натурального числа n називається добуток усіх натуральних чисел від 1 до n включно. Його можна записати у вигляді:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Перестановкою множини з n елементів називають розташування елементів даної множини у деякому визначеному порядку. Число усіх перестановок з n елементів обчислюється за формулою

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Розміщеннями множини з n елементів по k елементів $(k \leq n)$ називаються комбінації, які складені з елементів даної множини та відрізняються самими елементами та їх порядком. Число розміщень множини з n елементів по k дорівнює

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Сполуками з n різних елементів по k елементів називають комбінації, які складені з даних елементів та відрізняються хоча б одним елементом. Головна відмінність сполуки від розміщення полягає у тому, що сполука є неупорядкованим набором. Формула для обчислення кількості сполук виглядає таким чином:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Дані числа називаюсь також біноміальними коефіцієнтами. Вони застосовуються у формулі бінома Ньютона, яка має вигляд

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Біноміальні коефіцієнти утворюють добре відому структуру, яка має назву «трикутник Паскаля». Це нескінчена трикутна таблиця, у якій на вершині та по бічним сторонам розташовані одиниці, а кожне з інших чисел дорівнює сумі двох чисел, які стоять над ним у попередньому рядку, тобто має місце наступна властивість біноміальних коефіцієнтів:

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & & & & & & & \dots & & & & & & &
\end{array}$$

Рисунок 1.1 – Трикутник Паскаля до сьомого рядка

Також відома властивість суми всіх біноміальних коефіцієнтів, які входять до одного рядка трикутника Паскаля:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

1.2 Обґрунтування кроків алгоритму

Арифметичним коренем n-ого степеня додатного дійсного числа А називається додатний дійсний розв'язок рівняння

$$x^n = A \to x = \sqrt[n]{A}.$$

Існує алгоритм знаходження кореня n-го степеня, який виводиться з чисельного методу Ньютона знаходження коренів рівняння на даному відрізку. Цей метод є ітераційним і використовує деяке початкове наближення, а для збільшення точності використовуються похідні. Під час дослідження властивостей коренів n-го степеня було виведено алгоритм, який точно обчислює корінь n-го степеня з числа A.

Для обчислення точного значення квадратного кореня відомий алгоритм, з яким зазвичай знайомлять у школі. Комбінаторний аналіз даного алгоритму показав, що його можна узагальнити на випадок кореня n-го степеня. Для реалізації виконується наступна послідовність дій:

Дія 1 Розбити число, корінь з якого потрібно знайти, на групи цифр по n, починаючи з розряду одиниць. Якщо число має дробову частину, записану десятковим дробом, її також розбивати на групи цифр, але розбиття починати з першого знаку після коми. Кількість цифр в останній групі може бути менше або дорівнювати n. Кількість отриманих груп цифр в цілій частині початкового числа дорівнюватиме кількості цифр в цілій частині обчисленого кореня. Даний крок пояснюється тим, що при піднесенні k-цифрового числа до степеня n кількість цифр не буде перевищувати kn.

Дія 2 Здобути корінь з недоліком з групи цифр, яка містить найбільші розряди. Для цього корисно знати значення n-их степенів чисел від 1 до 9.

Дія 3 Відняти отримане в дії 2 значення в степені n від даної групи цифр. Остачу записати і дописати до нього наступну групу цифр.

Дія 4 Скласти нерівність виду

$$x(q^{n-1} \cdot C_n^1 \cdot 10^{n-1} + q^{n-2} \cdot C_n^2 \cdot 10^{n-2} \cdot x + q^{n-3} \cdot C_n^3 \cdot 10^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + q^2 \cdot C_n^{n-2} \cdot 10^2 \cdot x^{n-3} + q \cdot C_n^{n-1} \cdot 10^1 \cdot x^{n-2} + x^{n-1}) \leq r,$$

де q – число, складене з вже відомих цифр; x – невідома змінна, що дорівнює деякій цифрі в запису значення кореня; r – залишок з обчислення попередніх цифр.

Дія 5 Розв’язати нерівність, записану в дії 4, враховуючи умову

$$x \in [0; 9] \cap \mathbb{Z}.$$

Найбільше значення x і буде шуканою цифрою. Якщо у результаті виходить, що x не задовольняє даній умові (наприклад, $x \geq 10$), це свідчить про те, що в попередніх обчисленнях було допущено помилку.

Дія 6 Записати нову остачу, яка отримується з різниці попередньої остачі і значення лівої частини нерівності при знайденому значенні змінної.

Дія 7 Повторювати пункти 4-6 до тих пір, поки існують групи цифр, які ще не були розглянуті.

Перейдемо до обґрунтування послідовності дій. В даному алгоритмі використовуються властивості бінома Ньютона, оскільки кожне число ми можемо представити у вигляді n-го ступеня суми деяких чисел. Причому існує можливість звести поліном до біному, тому що шукане число можна подати в наступному вигляді:

$$(10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0)^n =$$
$$= (10\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1} + a_0)^n.$$

В свою чергу, перший доданок бінома Ньютона може бути поданий у наступному вигляді:

$$10\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1} = 100\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2} + 10 a_1.$$

Аналогічно розкладається і отриманий добуток:

$$100\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2} = 1000\overline{a_n a_{n-1} \dots a_3} + 100 a_2.$$

Цей процес можна повторювати доти, доки не отримаємо представлення числа у вигляді суми добутків цифри на степінь числа 10. Звідси маємо, що, наприклад, куб чотиризначного числа можна записати так:

$$(10^3 a + 10^2 b + 10c + d)^3 = \left(10\overline{abc} + d\right)^3 =$$
$$= C_3^0 10^3 \left(\overline{abc}\right)^3 + C_3^1 10^2 \left(\overline{abc}\right)^2 d + C_3^2 10 \left(\overline{abc}\right) d^2 + C_3^3 d^3.$$

1.3 Порівняння різних методів добування кореня

Розглянемо метод знаходження кореня n-го степеня, який виводиться з чисельного методу Ньютона. Його суть полягає у тому, що спочатку робиться початкове припущення x_0, а потім застосовується ітераційна формула

$$x_{k+1} = \frac{1}{n}\left((n-1)x_k + \frac{A}{x_k^{n-1}}\right).$$

Ітераційний процес триває до моменту отримання необхідної точності обчислення.

Для прикладу обчислимо корінь 5-го степеня з числа 10. Використання чисельного методу дасть наступний результат. Нехай маємо початкове припущення

$$x_0 = 1.$$

Виконуємо ітерації:

$$x_1 = \frac{1}{5}\left(4x_0 + \frac{10}{x_0^4}\right) = \frac{1}{5}(4+10) = \frac{14}{5} = 2.8;$$

$$x_2 = \frac{1}{5}\left(4x_1 + \frac{10}{x_1^4}\right) = \frac{1}{5}\left(4 \cdot \frac{14}{5} + \frac{10}{\left(\frac{14}{5}\right)^4}\right) \approx 2.2725;$$

$$x_3 = \frac{1}{5}\left(4x_2 + \frac{10}{x_2^4}\right) \approx 1.893;$$

$$x_4 = \frac{1}{5}\left(4x_3 + \frac{10}{x_3^4}\right) \approx 1.6701;$$

$$x_5 = \frac{1}{5}\left(4x_4 + \frac{10}{x_4^4}\right) \approx 1.59315;$$

$$x_6 = \frac{1}{5}\left(4x_5 + \frac{10}{x_5^4}\right) \approx 1.58497.$$

Точне значення кореня 5-го степеня з 10 дорівнює

$$\sqrt[5]{10} = 1.58489319246111348 5\ldots$$

Результат, отриманий даним методом, збігається з відомим результатом обчислення з точністю до третього знаку після коми. Причому це було отримано лише після 6-ої ітерації. До 5-ої ітерації включно збігалася лише ціла частина шуканого числа.

Тепер застосуємо алгоритм, запропонований у даній роботі. Запишемо число 10 у вигляді десяткового дробу з деякою кількістю нулів у дробовій частині:

$$10 = 10.0000000000000000\ldots$$

Дія 1 Розбиваємо число на групи по 5, починаючи з найменших розрядів: 10.00000’00000’00000’00000’000… Оскільки група цифр у цілій частині одна, з цього випливає, ціла частина шуканого числа буде містити одну цифру.

Дія 2 З групи цифр, яка містить найбільші розряди, здобуваємо корінь з недоліком. Тобто

$$\left[\sqrt[5]{10}\right] = 1.$$

Отримали, що цифра в найбільшому розряді шуканого числа дорівнює 1, а оскільки це єдина група цифр, робимо висновок, що ціла частина шуканого кореня дорівнює 1.

Дія 3 Віднімаємо з даної групи цифр одиницю у п’ятому степені, а до отриманої різниці конкатенуємо наступну групу чисел. Тобто

$$10 - 1 = 9.$$

Конкатенація 9 та 00000 дасть число 900000.

Дія 4 Складаємо нерівність, підставляючи знайдену цифру

$$x(1^4 \cdot 5 \cdot 10^4 + 1^3 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot x + 1^2 \cdot 10 \cdot 10^2 \cdot x^2 + 1 \cdot 5 \cdot 10x^3 + x^4) \leq 900000.$$

Дія 5 Знаходимо найбільший цілий розв’язок нерівності у межах від 0 до 9:

$$x(50000 + 10000x + 1000x^2 + 50x^3 + x^4) \leq 900000;$$
$$x = 5.$$

Дія 6 Віднімаємо з даної групи цифр значення лівої частини нерівності при знайденому x, а до отриманої різниці конкатенуємо наступну групу чисел. Тобто

$$900000 - 659375 = 240625.$$

Конкатенація 240625 і 00000 дає число 24062500000.

Повторюємо дії 4-6 для знаходження третьої цифри, яка буде другою після коми:

$$x(15^4 \cdot 5 \cdot 10^4 + 15^3 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot x + 15^2 \cdot 10 \cdot 10^2 \cdot x^2 + 15 \cdot 5 \cdot 10x^3 + x^4) \leq$$
$$\leq 24062500000;$$
$$x(x^4 + 750x^3 + 225000x^2 + 33750000x + 2531250000) \leq 24062500000;$$
$$x = 8;$$
$$24062500000 - 22528304768 = 1534195232;$$
$$concat(1594195232{,}00000) = 153419523200000.$$

Ті ж самі дії робимо для обчислення четвертої цифри:

$$x(158^4 \cdot 5 \cdot 10^4 + 158^3 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot x +$$
$$+158^2 \cdot 10 \cdot 10^2 \cdot x^2 + 158 \cdot 5 \cdot 10x^3 + x^4) \leq 153419523200000;$$
$$x = 4;$$

$$153419523200000 - 125272948839424 = 28146574360576;$$
$$concat(28146574360576{,}00000) = 2814657436057600000.$$

Звідси маємо, що корінь 5-го степеня з 10 після знаходження чотирьох цифр дорівнює 1,584. Цей результат збігається з даним з точністю до третього знаку після коми, причому з кожним новим повторенням дій 4-6 буде точно обчислюватися цифра, яка стоїть на кожному наступному місці.

2 ЗАДАЧА ПЕРЕРАХУВАННЯ НЕПОМІЧЕНИХ НЕІЗОМОРФНИХ ГРАФІВ

2.1 Зв'язок між цикловими індексами

У даному розділі будемо розглядати лише неорієнтовані графи з n вершинами та m ребрами або інакше (n,m)-графи без петель та кратних ребер. Задача перерахування непомічених графів на n вершинах для довільного значення параметра n є більш складною, якщо порівнювати її із задачею перерахування відповідних помічених графів. Для перерахування непомічених неізоморфних графів застосовують підстановки.

Підстановкою степеня n називають бієкцію n-елементної множини перших n натуральних чисел на себе. Вона задається таблицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

У даному випадку другий рядок $\big(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)\big)$ таблиці підстановки є перестановкою елементів множини. Також підстановка може бути подана у вигляді добутку циклів, які не перетинаються.

Розглянемо групу S_n порядку $n!$ всіх можливих підстановок і групу $S_n^{(2)}$ на множині всіх можливих пар натуральних чисел від 1 до n без повторень, яка має вигляд

$$\big\{\{1,2\}, \{1,3\}, \dots, \{1,n\}, \{2,3\}, \dots \{2,n\}, \dots \{n-1,n\}\big\}.$$

Степінь кожної підстановки із $S_n^{(2)}$ дорівнює $d = C_n^2$. Кожна підстановка σ з групи S_n індукує підстановку σ' з групи $S_n^{(2)}$ наступним чином:

$$\sigma'\{i,j\} = \{\sigma i, \sigma j\},$$

де i та j змінюються у межах від 1 до n.

Кількість елементів групи $S_n^{(2)}$ дорівнює $d!$. Цикловим індексом групи S_n називається многочлен від n змінних $a_1, a_2, \dots, a_n$, який задається формулою

$$Z(S_n) = \frac{1}{|S_n|} \sum_{\alpha \in S_n} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{j_k(\alpha)} \right),$$

де $j_k(\alpha)$ є k-тою координатою n-вимірного вектору, який відповідає певному розбиттю числа n.

Наприклад, розбиттю 3+2+1 числа 6 відповідає вектор (1,1,1,0,0,0), оскільки у даному розбитті одиниця, двійка та трійка зустрічається рівно один раз, а інші числа не зустрічаються. Таких 6-вимірних векторів буде 11, оскільки існує 11 варіантів розбиття числа 6 на суму натуральних доданків.

Цикловим індексом групи $S_n^{(2)}$ буде многочлен від d змінних, визначений формулою

$$Z\left(S_n^{(2)}\right) = \frac{1}{n!} \sum_i \Bigg(\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} (k^{j_k(\alpha)} \cdot j_k(\alpha)!)} \cdot \prod_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(a_k a_{2k}^{k-1}\right)^{j_{2k}(\alpha)} \times$$
$$\times \prod_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} a_{2k+1}^{k \cdot j_{2k+1}} \cdot \prod_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_k^{k \cdot C_{j_k}^2} \cdot \prod_{k=1}^{C_{n-1}^2} a_{\text{НСК}(\xi_{k,1},\xi_{k,2})}^{\text{НСД}(\xi_{k,1},\xi_{k,2}) \cdot j_{\xi_{k,1}} \cdot j_{\xi_{k,2}}} \Bigg),$$

де $\xi_{k,1}$ та $\xi_{k,2}$ – елементи k-ої пари з множини всіх можливих пар натуральних чисел від 1 до $n-1$ без повторень, i – номер розбиття числа n.

Якщо відомий цикловий індекс групи підстановок, які складаються з n елементів, то з'являється можливість обчислити перераховуючий многочлен степеня d. Для цього необхідно підставити в кожну змінну a_ψ двочлен $1 + x^\psi$, де ψ змінюється у межах від 1 до d, а після цього – спростити, розкриваючи дужки та зводячи подібні доданки. Коефіцієнти отриманого многочлена при відповідних степенях змінної x будуть кількістю неізоморфних непомічених графів із заданим числом ребер.

2.2 Використання пакету Maple для обчислення кількостей графів

Для обчислення кількості непомічених неізоморфних графів за допомогою Maple було створено робочий лист, на якому реалізовано наступну послідовність дій:

Крок 1 Задається число вершин графа (позначено літерою n).

Крок 2 Підключається модуль «combinat», оскільки для подальших обчислень будуть необхідні функції, які закладені у даний модуль.

Крок 3 Обчислюються усі можливі розбиття числа n та їх кількість. Тут розбиття числа подається у вигляді множини. Кількість розбиттів числа n позначено літерою o. Послідовність кількості розбиттів числа на натуральні доданки записана в онлайн-енциклопедії [15].

Крок 4 За допомогою функції $choose$ змінним $B[i]$ надаються усі можливі двохелементні множини, які містять числа від 1 до $n-1$ без повторень.

Крок 5 Змінним $C[i]$ за функції numelems надається значення кількості елементів у множині розбиття числа n. Кількість цих змінних дорівнює кількості розбиттів.

Крок 6 Оголошуємо новий набір змінних з подвійними індексами $j[l,i]$, де $l = 1 \dots o, i = 1 \dots n$. Надаємо їм значення від 0 до n в залежності від того, скільки разів зустрічається число i у l-тому розбитті числа n.

Крок 7 Обчислюємо множники першого типу із формули Харарі:

$$\frac{n!}{\prod_{q=1}^{n}(q^{j[i,q]}\cdot j[i,q]!)}.$$

Кількість таких множників дорівнює кількості розбиттів числа n на натуральні доданки.

Крок 8 Знаходимо наступні величини:

$$u1 := trunc\left(\frac{n}{2}\right);$$
$$u2 := trunc\left(\frac{n-1}{2}\right);$$
$$u3 := C_n^2;$$
$$u4 := C_{n-1}^2.$$

Вони стануть у нагоді для обчислення множників інших типів із формули Харарі.

Крок 9 Змінним $T[i]$ привласнюються значення найбільшого спільного дільника елементів множин $B[i]$, а змінним $V[i]$ надається значення найменшого спільного кратного елементів множин $B[i]$. Кількість змінних такого типу дорівнює $u4$.

Крок 10 Змінним $Wr[m,i]$ та $Ws[m,i]$, де m змінюється від 1 до o, i змінюється від 1 до $u4$, надаються значення $j\big[m,B[i,1]\big]$ та $j\big[m,B[i,2]\big]$ відповідно.

Крок 11 Обчислення кожного доданку формули Харарі, яку наведено в пункті 2.1.

Крок 12 Утворення перераховуючого многочлена підсумовуванням доданків, отриманих у попередньому кроці.

Крок 13 Підстановка $a[i] = 1 + x^i, i = 1 \dots u3$.

Крок 14 Спрощення многочлена із кроку 12.

```
> restart
> n := 22
                                n := 22
> with(combinat) :
> A := partition(n) :
> o := numbpart(n) :
> B := choose(n − 1, 2) :
> for i from 1 to o do C[i] := numelems(A[i]) od:
> for i from 1 to n do for l from 1 to o do j[l, i] := 0 od od;
> for m from 1 to n do for i from 1 to o do for l from 1 to C[i] do if A[i, l] = m then j[i, m] := 1 + j[i, m] fi od od od;
```

$$> \text{for } i \text{ from } 1 \text{ to } o \text{ do } h[i] := \frac{n!}{\prod_{q=1}^{n}\left(q^{j[i,q]} \cdot j[i,q]!\right)} \text{ od:}$$

$$> u1 := \mathrm{trunc}\left(\frac{n}{2}\right) :$$

$$> u2 := \mathrm{trunc}\left(\frac{n-1}{2}\right) :$$

```
> u3 := binomial(n, 2) :
> u4 := binomial(n − 1, 2) :
> for i from 1 to u4 do T[i] := gcd(B[i, 1], B[i, 2]) od:
> for i from 1 to u4 do V[i] := lcm(B[i, 1], B[i, 2]) od:
> for m from 1 to o do for i from 1 to u4 do Wr[m, i] := j[m, B[i, 1]] od od;
> for m from 1 to o do for i from 1 to u4 do Ws[m, i] := j[m, B[i, 2]] od od;
```

$$> \text{for } i \text{ from } 1 \text{ to } o \text{ do } p[i] := h[i] \cdot \left(\prod_{k=1}^{u1}\left(a[k] \cdot a[2 \cdot k]^{k-1}\right)^{j[i, 2 \cdot k]}\right) \cdot \left(\prod_{k=0}^{u2}\left(a[2 \cdot k+1]\right)^{k \cdot j[i, 2 \cdot k+1]}\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{u1}\left(a[k]\right)^{k \cdot \mathrm{binomial}(j[i,k],\,2)}\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{u4} a[V[k]]^{T[k] \cdot Wr[i,k] \cdot Ws[i,k]}\right) \text{ od:}$$

$$> G := \frac{1}{n!}\sum_{q=1}^{o} p[q] :$$

```
> for i from 1 to u3 do a[i] := 1 + x^i od:
> simplify(G) :
> for i from 0 to u3 do s[i] := coeff(G, x, i) od;
```

Рисунок 2.1 – Код програми на робочому листі Maple

Результати обчислень для графів з 21, 22, 23 та 24 вершинами з використанням Maple наведені у Додатку А, Додатку Б, Додатку В та Додатку Г відповідно.

2.3 Обчислення невідомих елементів таблиці

Розглянемо таблицю кількостей неізоморфних непомічених (n, m)-графів, яку можна знайти в онлайн-енциклопедії цілочислових послідовностей під номером A008406. Наведемо деякі властивості таблиці, що розглядається.

Властивість 2.1 Для будь-якого $n \geq 2$ кількість елементів у n-му рядку дорівнює $C_n^2 + 1$.

Властивість 2.2 Кожен рядок таблиці є симетричним, тобто

$$T(n, 0) = T(n, C_n^2),$$

де $T(n, m)$ – кількість неізоморфних непомічених (n, m)-графів.

Властивість 2.3 Сума елементів кожного рядка утворює цілочислову послідовність А000088 [3].

В кваліфікаційній роботі бакалавра було доведено наступне

Твердження 2.1 Кількість неізоморфних непомічених графів з m ребрами та $2m$ вершинами, де $m > 1$, дорівнює сумі кількостей графів з одним ребром та графів з $2m - 1$ вершинами та m ребрами, тобто виконується рівність:

$$T(2m, m) = T(2m, 1) + T(2m - 1, m).$$

На основі цього можна вивести деякі рекурентні співвідношення, які дадуть змогу обчислити невідомі елементи рядків таблиці з елементів двадцятого, дев'ятнадцятого і так далі рядка, починаючи з двадцять першого, не застосовуючи формулу, яку розглядав Харарі у своїх працях [5,6], і яка наведена в пункті 2.1. Для обчислення елементів непарних рядків стануть у нагоді наступні рекурентні співвідношення:

$$T(2m - 1, m) = T(2m - 2, m) + 1,$$
$$T(2m - 1, m) = T(2m - 3, m) + 4,$$
$$T(2m - 1, m) = T(2m - 4, m) + 11,$$
$$T(2m - 1, m) = T(2m - 5, m) + 29,$$
$$T(2m - 3, m) = T(2m - 5, m) + 25,$$
$$T(2m - 3, m) = T(2m - 6, m) + 67.$$

Наприклад, необхідно обчислити $T(21,11)$ – елемент 21-го рядка, який не записано у таблиці. Оскільки $m = 11$, тоді $21 = 2m - a$, звідки $a = 1$. Застосуємо отримані рекурентні співвідношення.

$$T(21,11) = T(19,11) + 4 = 15211 + 4 = 15215.$$

При $m = 11$ можна обчислити також деякі елементи 22-го рядка. Оскільки вже відоме значення $T(21,11)$, можна обчислити $T(22,11)$, а також елементи вигляду $T(q, 11), q > 22$, застосовуючи твердження 2.1. Воно дорівнюватиме 15216. Також елементи парних рядків можуть бути обчислені за допомогою наступних рекурентних співвідношень:

$$T(2m-2, m) = T(2m-3, m) + 3,$$
$$T(2m-2, m) = T(2m-4, m) + 10,$$
$$T(2m-2, m) = T(2m-5, m) + 28,$$
$$T(2m-2, m) = T(2m-6, m) + 70.$$

Покладемо $m = 12$. При даному значенні m знайдемо $T(21,12)$ та $T(22,12)$.

$$T(21,12) = T(19,12) + 25 = 52914 + 25 = 52939,$$
$$T(22,12) = T(20,12) + 10 = 52932 + 10 = 52942.$$

З отриманого значення з’явилась можливість обчислити елементи вигляду $T(q, 12)$, де $q \geq 23$.

$$T(23,12) = T(22,12) + 1 = 52942 + 1 = 52943,$$
$$T(24,12) = T(22,12) + 2 = 52942 + 2 = 52944.$$

Для знаходження елементів 25-го та 26-го рядків через наявні рекурентні співвідношення обчислимо $T(24,13)$ через T(20,13):

$$T(24,13) = T(20,13) + 70 = 193295 + 70 = 193365.$$

Тепер обчислимо $T(25,13)$ та $T(26,13)$, додавши одиницю та двійку відповідно. Отримаємо 193366 для $n = 25$ та 193367 для $n = 26$. Елементи $T(21,13), T(22,13)$ та $T(23,13)$ знайдемо із вже відомого значення $T(24,13)$:

$$T(24,13) = T(21,13) + 28 \rightarrow T(21,13) = 193365 - 28 = 193337,$$
$$T(24,13) = T(22,13) + 10 \rightarrow T(22,13) = 193365 - 10 = 193355,$$
$$T(24,13) = T(23,13) + 28 \rightarrow T(23,13) = 193365 - 3 = 193362.$$

Таким чином, перші 13 елементів у рядках 21-26 набудуть значень, які відображено на рисунку 2.2.

n \ m	Ø	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
XIX	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4612	15211	52914	193186
XX	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15214	52932	193295
XXI	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15215	52939	193337
XXII	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15216	52942	193355
XXIII	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15216	52943	193362
XXIV	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15216	52944	193365
XXV	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15216	52944	193366
XXVI	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15216	52944	193367

Рисунок 2.2 – Результати заповнення рядків

Синім кольором на рисунку 2.2 позначені елементи, які знаходяться, виходячи з властивості про $(2m, m)$-графи. Зеленим позначено відомий елемент вигляду $T(2m, m)$. Помаранчевим позначені елементи, завдяки яким обчислені значення комірок, позначених блакитним кольором.

Ті ж самі кількості були отримані за допомогою пакету Maple з використанням формули Харарі, яка дає перераховуючий многочлен.

> **for** i **from** 1 **to** o **do** $p[\mathrm{i}] := h[\mathrm{i}] \cdot \left(\prod_{k=1}^{u1} \left(a[k] \cdot a[2 \cdot k]^{k-1} \right)^{j[i, 2 \cdot k]} \right) \cdot \left(\prod_{k=0}^{u2} (a[2 \cdot k + 1])^{k \cdot j[i, 2 \cdot k + 1]} \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{u1} (a[k])^{k \cdot \mathrm{binomial}(j[i,k],\, 2)} \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{u4} a[V[k]]^{T[k] \cdot Wr[i,k] \cdot Ws[i,k]} \right)$ **od**:

> $G := \frac{1}{\mathrm{n}!} \sum_{q=1}^{o} p[q]$:

> **for** i **from** 1 **to** $u3$ **do** $a[i] := 1 + x^i$ **od**:

> $simplify(G)$:

> **for** i **from** 0 **to** $u3$ **do** $s[i] := coeff(G, x, i)$ **od**;

$s_0 := 1$

$s_1 := 1$

$s_2 := 2$

$s_3 := 5$

$s_4 := 11$

$s_5 := 26$

$s_6 := 68$

$s_7 := 177$

$s_8 := 497$

$s_9 := 1476$

$s_{10} := 4613$

$\boxed{s_{11} := 15215}$

$\boxed{s_{12} := 52939}$

$\boxed{s_{13} := 193337}$

$s_{14} := 740045$

Рисунок 2.3 – Частина робочого аркуша Maple для $n = 21$

> $G := \frac{1}{\mathrm{n}!} \sum_{q=1}^{o} p[q]$:

> **for** i **from** 1 **to** $u3$ **do** $a[i] := 1 + x^i$ **od**:

> $simplify(G)$:

> **for** i **from** 0 **to** $u3$ **do** $s[i] := coeff(G, x, i)$ **od**;

$s_0 := 1$

$s_1 := 1$

$s_2 := 2$

$s_3 := 5$

$s_4 := 11$

$s_5 := 26$

$s_6 := 68$

$s_7 := 177$

$s_8 := 497$

$s_9 := 1476$

$s_{10} := 4613$

$\boxed{s_{11} := 15216}$

$\boxed{s_{12} := 52942}$

$\boxed{s_{13} := 193355}$

$s_{14} := 740154$

Рисунок 2.4 – Частина робочого аркуша Maple для $n = 22$

$$> G := \frac{1}{n!}\sum_{q=1}^{o} p[q]:$$

$> $ **for** i **from** 1 **to** $u3$ **do** $a[i] := 1 + x^i$ **od**:

$> simplify(G):$

$> $ **for** i **from** 0 **to** $u3$ **do** $s[i] := coeff(G, x, i)$ **od**;

$$s_0 := 1$$
$$s_1 := 1$$
$$s_2 := 2$$
$$s_3 := 5$$
$$s_4 := 11$$
$$s_5 := 26$$
$$s_6 := 68$$
$$s_7 := 177$$
$$s_8 := 497$$
$$s_9 := 1476$$
$$s_{10} := 4613$$
$$s_{11} := 15216$$
$$\boxed{s_{12} := 52943}$$
$$\boxed{s_{13} := 193362}$$
$$s_{14} := 740196$$

Рисунок 2.5 – Частина робочого аркуша Maple для $n = 23$

$$> G := \frac{1}{n!}\sum_{q=1}^{o} p[q]:$$

$> $ **for** i **from** 1 **to** $u3$ **do** $a[i] := 1 + x^i$ **od**:

$> simplify(G):$

$> $ **for** i **from** 0 **to** $u3$ **do** $s[i] := coeff(G, x, i)$ **od**;

$$s_0 := 1$$
$$s_1 := 1$$
$$s_2 := 2$$
$$s_3 := 5$$
$$s_4 := 11$$
$$s_5 := 26$$
$$s_6 := 68$$
$$s_7 := 177$$
$$s_8 := 497$$
$$s_9 := 1476$$
$$s_{10} := 4613$$
$$s_{11} := 15216$$
$$\boxed{s_{12} := 52944}$$
$$\boxed{s_{13} := 193365}$$
$$s_{14} := 740214$$

Рисунок 2.6 – Частина робочого аркуша Maple для $n = 24$

На рисунках 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, зеленим виділені числа (n, m)-графів, які були обчислені за допомогою рекурентних співвідношень.

Коефіцієнт при m-тому степені є шуканою кількістю неізоморфних непомічених (n, m)-графів. Повні результати для $n = 21$ та $n = 22$ наведені у додатку А і додатку Б відповідно.

Також за результатами обчислень з використанням пакету Maple висунуто гіпотезу про вигляд нових рекурентних співвідношень, які дозволять обчислювати нові елементи у таблиці кількостей неізоморфних непомічених (n, m)-графів.

Твердження 2.2 Кількість неізоморфних непомічених $(2m, m)$-графів, де $m \geq 12$, дорівнює сумі кількостей $(2m, 7)$-графів та $(2m - 7, m)$-графів плюс чотири, тобто має місце рівність:

$$T(2m, m) = T(2m, 7) + T(2m - 7, m) + 4.$$

ВИСНОВКИ

У даній роботі було розглянуто та розв’язано задачу про здобування кореня n-го степеня. Запропоновано альтернативний алгоритм, який ґрунтується на властивостях бінома Ньютона та біноміальних коефіцієнтів, а також дозволяє обчислювати точні значення коренів дійсних чисел. Проведено порівняльний аналіз двох методів знаходження кореня n-го степеня.

За допомогою програмного забезпечення Maple були отримані результати для перерахування графів з кількістю вершин від 21 до 28 та з усіма можливими кількостями ребер. Також показано, що значення, отримані при застосуванні виведених рекурентних співвідношень, збігаються з тими значеннями, які були обчислені у Maple. Виявлено нове рекурентне співвідношення, яке пов’язує деякі значення з таблиці неізоморфних непомічених графів.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. A008406. The on-line encyclopedia of integer sequences. URL: https://oeis.org/A008406 (дата звернення: 10.12.2019).

2. Алексеев В.Е., Таланов В.А. Графы. Модели вычислений. Структуры данных. Учебник. Нижний Новгород : Издательство Нижегородского госуниверситета, 2004. 296 с.

3. A000088. The on-line encyclopedia of integer sequences. URL: https://oeis.org/A000088 (дата звернення: 12.12.2019).

4. Тишин В. В. Дискретная математика в примерах и задачах. Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2008. 352 с.

5. Харари Ф. Теория графов / пер. с англ. Г. П. Гаврилов. Москва : Мир, 1973. 300 с

6. Харари Ф., Палмер Э. М. Перечисление графов / пер. с англ. Г. П. Гаврилов. Москва : Мир, 1977. 328 с.

7. Домнин Л. Н. Элементы теории графов : учеб. пособие. Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2007. 144 с.

8. Ландо С. К. Введение в дискретную математику. Москва : МЦНМО, 2012. 195 с.

9. Алексеев В. Е. Графы и алгоритмы. Нижний Новгород : ЗАО «Нижегородская лаборатория программных технологий», 2000. 68 с.

10. Дискретна математика : навчальний посібник для студентів освітнього рівня «бакалавр» напряму підготовки «Математика» / П. Г. Стєганцева [та ін.]. Запоріжжя : ЗНУ, 2015. 93 с.

11. Huisinga M. Pólya’s counting theory. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2012. 46 с.

12. Зыков А. А. Основы теории графов. Москва : Наука, 1987. 592 с.

13. Кристофидес Н. Теория графов : алгоритмический подход. Москва : Мир, 1978. 432 с.

14. Ерош И. Л., Сергеев М. Б., Соловьев Н. В. Дискретная математика : учебник для вузов. Санкт-Петербург: Питер, 2005. 144 с.

15. A000041. The on-line encyclopedia of integer sequences. URL: https://oeis.org/A000041 (дата звернення: 14.12.2019).

16. A102189. The on-line encyclopedia of integer sequences. URL: https://oeis.org/A102189 (дата звернення: 02.12.2019).

ДОДАТОК А

Результати обчислень кількостей графів для n=21

$s_0 := 1$

$s_1 := 1$

$s_2 := 2$

$s_3 := 5$

$s_4 := 11$

$s_5 := 26$

$s_6 := 68$

$s_7 := 177$

$s_8 := 497$

$s_9 := 1476$

$s_{10} := 4613$

$s_{11} := 15215$

$s_{12} := 52939$

$s_{13} := 193337$

$s_{14} := 740045$

$s_{15} := 2959362$

$s_{16} := 12326876$

$s_{17} := 53336122$

$s_{18} := 239083372$

$s_{19} := 1107432714$

$s_{20} := 5287050500$

$s_{21} := 25945377057$

$s_{22} := 130480742790$

$s_{23} := 670143402073$

$s_{24} := 3501007984025$

$s_{25} := 18521618447316$

$s_{26} := 98748032376131$

$s_{27} := 527939073748744$

$s_{28} := 2816622710960703$

$s_{29} := 14927233150824178$

$s_{30} := 78261845573965169$

$s_{31} := 404472802863533348$

$s_{32} := 2054418717823509788$

$s_{33} := 10229983214747635175$

$s_{34} := 49840893371632062768$

$s_{35} := 237217205839413940594$

$s_{36} := 1101636978533598289990$

$s_{37} := 4987428524272420579628$

$s_{38} := 21997955027664495842546$

$s_{39} := 94485278161299494506695$

$s_{40} := 395094405692762927913813$

$s_{41} := 1608151031123978816776097$

$s_{42} := 6371185700600338212147025$

$s_{43} := 24569361401927294475451226$

$s_{44} := 92233165560836994676283645$

$s_{45} := 337101016242312676858735083$

$s_{46} := 1199743516734872323510798170$

$s_{47} := 4158718637871203698209733148$

$s_{48} := 14043304716269656847167651290$

$s_{49} := 46208258670473130717898115530$

$s_{50} := 148189077984605278048110716984$

$s_{51} := 463305296862121318910578057354$

$s_{52} := 1412479232359469807470677372782$

$s_{53} := 4200199984593161559245274781660$

$s_{54} := 12185395497093128401629824850734$

$s_{55} := 34498358361261614795096065355540$

$s_{56} := 95334914687436334033001139931788$

$s_{57} := 257219436972229128081581510606570$

$s_{58} := 677727238321763639406542044561729$

$s_{59} := 1744230921425242848016367028607183$

$s_{60} := 4385778699643123585596204075059277$

$s_{61} := 10776460392621928029093720988375889$

$s_{62} := 25881079330880176136765033745743561$

$s_{63} := 60764887313320625437355326950375319$

$s_{64} := 139499105593897177118731665586118378$

$s_{65} := 313198756702368521986158122652149229$

$s_{66} := 687823689180602339988061000565007466$

$s_{67} := 1477809727452336660506513204912602079$

$s_{68} := 3106828163808702784684872963202186461$

$s_{69} := 6392100246238676094506635446750706677$

$s_{70} := 12872568153081469265771455372978467605$

$s_{71} := 25377401018369804681347852726301686598$

$s_{72} := 48983735354264896877783542811605522605$

$s_{73} := 92584754587126221775612090284689732342$

$s_{74} := 171382889516043148761855571511747625095$

$s_{75} := 310735629364684367900310375600976871736$

$s_{76} := 551903507202377986537357873946622715148$

$s_{77} := 960360757806921486278284405455943198064$

$s_{78} := 1637394202976863283927636005232050858720$

$s_{79} := 2735684273900087792498443232966800042314$

$s_{80} := 4479368328560710938789121873603741243173$

$s_{81} := 7188657545484723420810186497422556223191$

$s_{82} := 11308348242818071455013595085701427370257$

$s_{83} := 17438498693655246580032002354055093684165$

$s_{84} := 26364152543300258825889014140013563732138$

$s_{85} := 39079385769403355969102892793733275321864$

$s_{86} := 56799351947891535402439396951263195327615$

$s_{87} := 80952732914208495682871895230933565758773$

$s_{88} := 113146495273317419132235920406980098377442$

$s_{89} := 155095569208643273735331118261456274019397$

$s_{90} := 208512404860084432311772487806072711350464$

$s_{91} := 274955538232949793644703715299401720164551$

$s_{92} := 355642215175719733474773597052869060295879$

$s_{93} := 451237269405855619829201620317714623586074$

$s_{94} := 561637879276809355426993275814807475577384$

$s_{95} := 685780219295182180435499890056679785719620$

$s_{96} := 821497875415565114614980663225453544435248$

$s_{97} := 965461812532698848697293773296233365164081$

$s_{98} := 1113226719833152354695454340580189312546234$

$s_{99} := 1259398532138214126873564869152546420058100$

$s_{100} := 1397923625015754731435579453709388541720881$

$s_{101} := 1522483395269500662454651896201292875139683$

$s_{102} := 1626961238671391818151227994397134261759801$

$s_{103} := 1705935253543818409882653356665815331433663$

$s_{104} := 1755142048260037519111972866834575927192038$

$s_{105} := 1771856721790425759554265832614437952858250$

$s_{106} := 1755142048260037519111972866834575927192038$

$s_{107} := 1705935253543818409882653356665815331433663$

$s_{108} := 1626961238671391818151227994397134261759801$

$s_{109} := 1522483395269500662454651896201292875139683$

$s_{110} := 1397923625015754731435579453709388541720881$

$s_{111} := 1259398532138214126873564869152546420058100$

$s_{112} := 1113226719833152354695454340580189312546234$

$s_{113} := 965461812532698848697293773296233365164081$

$s_{114} := 821497875415565114614980663225453544435248$

$s_{115} := 685780219295182180435499890056679785719620$

$s_{116} := 561637879276809355426993275814807475577384$

$s_{117} := 451237269405855619829201620317714623586074$

$s_{118} := 355642215175719733474773597052869060295879$

$s_{119} := 274955538232949793644703715299401720164551$

$s_{120} := 208512404860084432311772487806072711350464$

$s_{121} := 155095569208643273735331118261456274019397$

$s_{122} := 113146495273317419132235920406980098377442$

$s_{123} := 80952732914208495682871895230933565758773$

$s_{124} := 56799351947891535402439396951263195327615$

$s_{125} := 39079385769403355969102892793733275321864$

$s_{126} := 26364152543300258825889014140013563732138$

$s_{127} := 17438498693655246580032002354055093684165$

$s_{128} := 11308348242818071455013595085701427370257$

$s_{129} := 7188657545484723420810186497422556223191$

$s_{130} := 4479368328560710938789121873603741243173$

$s_{131} := 2735684273900087792498443232966800042314$

$s_{132} := 1637394202976863283927636005232050858720$

$s_{133} := 960360757806921486278284405455943198064$

$s_{134} := 551903507202377986537357873946622715148$

$s_{135} := 310735629364684367900310375600976871736$

$s_{136} := 171382889516043148761855571511747625095$

$s_{137} := 92584754587126221775612090284689732342$

$s_{138} := 48983735354264896877783542811605522605$

$s_{139} := 25377401018369804681347852726301686598$

$s_{140} := 12872568153081469265771455372978467605$

$s_{141} := 63921002462386760945066354467507066677$

$s_{142} := 31068281638087027846848729632021864 61$

$s_{143} := 14778097274523366605065132049126020 79$

$s_{144} := 6878236891806023399880610005650074 66$

$s_{145} := 3131987567023685219861581226521492 29$

$s_{146} := 1394991055938971771187316655861183 78$

$s_{147} := 607648873133206254373553269503753 19$

$s_{148} := 258810793308801761367650337457435 61$

$s_{149} := 107764603926219280290937209883758 89$

$s_{150} := 43857786996431235855962040750592 77$

$s_{151} := 17442309214252428480163670286071 83$

$s_{152} := 6777272383217636394065420445617 29$

$s_{153} := 2572194369722291280815815106065 70$

$s_{154} := 953349146874363340330011399317 88$

$s_{155} := 344983583612616147950960653555 40$

$s_{156} := 121853954970931284016298248507 34$

$s_{157} := 42001999845931615592452747816 60$

$s_{158} := 14124792323594698074706773727 82$

$s_{159} := 4633052968621213189105780573 54$

$s_{160} := 1481890779846052780481107169 84$

$s_{161} := 462082586704731307178981155 30$

$s_{162} := 140433047162696568471676512 90$

$s_{163} := 41587186378712036982097331 48$

$s_{164} := 11997435167348723235107981 70$

$s_{165} := 3371010162423126768587350 83$

$s_{166} := 922331655608369946762836 45$

$s_{167} := 245693614019272944754512 26$

$s_{168} := 63711857006003382121470 25$

$s_{169} := 16081510311239788167760 97$

$s_{170} := 3950944056927629279138 13$

$s_{171} := 944852781612994945066 95$

$s_{172} := 219979550276644958425 46$

$s_{173} := 49874285242724205796 28$

$s_{174} := 11016369785335982899 90$

$s_{175} := 2372172058394139405 94$

$s_{176} := 498408933716320627 68$

$s_{177} := 102299832147476351 75$

$s_{178} := 20544187178235097 88$

$s_{179} := 4044728028635333 48$

$s_{180} := 782618455739651 69$

$s_{181} := 149272331508241 78$

$s_{182} := 28166227109607 03$

$s_{183} := 5279390737487 44$

$s_{184} := 987480323761 31$

$s_{185} := 185216184473 16$

$s_{186} := 35010079840 25$

$s_{187} := 6701434020 73$

$s_{188} := 1304807427 90$

$s_{189} := 259453770 57$

$s_{190} := 52870505 00$

$s_{191} := 11074327 14$

$s_{192} := 2390833 72$

$s_{193} := 533361 22$

$s_{194} := 123268 76$

$s_{195} := 29593 62$

$s_{196} := 7400 45$

$s_{197} := 1933 37$

$s_{198} := 529 39$

$s_{199} := 152 15$

$s_{200} := 46 13$

$s_{201} := 14 76$

$s_{202} := 4 97$

$s_{203} := 177$

$s_{204} := 68$

$s_{205} := 26$

$s_{206} := 11$

$s_{207} := 5$

$s_{208} := 2$

$s_{209} := 1$

$s_{210} := 1$

ДОДАТОК Б

Результати обчислень кількостей графів для n=22

$s_0 := 1$

$s_1 := 1$

$s_2 := 2$

$s_3 := 5$

$s_4 := 11$

$s_5 := 26$

$s_6 := 68$

$s_7 := 177$

$s_8 := 497$

$s_9 := 1476$

$s_{10} := 4613$

$s_{11} := 15216$

$s_{12} := 52942$

$s_{13} := 193355$

$s_{14} := 740154$

$s_{15} := 2960069$

$s_{16} := 12331825$

$s_{17} := 53373313$

$s_{18} := 239380403$

$s_{19} := 1109921554$

$s_{20} := 5308573473$

$s_{21} := 26134330813$

$s_{22} := 132140242356$

$s_{23} := 684550272269$

$s_{24} := 3623530476832$

$s_{25} := 19535841033514$

$s_{26} := 106884565970826$

$s_{27} := 591023331913878$

$s_{28} := 3288516318383345$

$s_{29} := 18329830635257659$

$s_{30} := 101902233467195227$

$s_{31} := 562732256995411783$

$s_{32} := 3075494059151438107$

$s_{33} := 16581744039092009728$

$s_{34} := 87956458643732132427$

$s_{35} := 457985830797484068992$

$s_{36} := 2336654242935426148872$

$s_{37} := 11664618715804069239925$

$s_{38} := 56911033511096622539766$

$s_{39} := 271147936955982331379907$

$s_{40} := 1260757529651698538672988$

$s_{41} := 5718517006734538057975234$

$s_{42} := 25295161355509809235432485$

$s_{43} := 109099081767975014632556182$

$s_{44} := 458778548436417866064002231$

$s_{45} := 1880983662873585757829610536$

$s_{46} := 7519590876165523760387982176$

$s_{47} := 29314208462329734796232923446$

$s_{48} := 111455106626779984738587527838$

$s_{49} := 413365804427694725372052252776$

$s_{50} := 1495773089262060833300183931801$

$s_{51} := 5281822178848770287817552123788$

$s_{52} := 18204702080289751125740005096736$

$s_{53} := 61258021334721189432039530896548$

$s_{54} := 201289699482882903851136114933337$

$s_{55} := 646040460349025700266637019460694$

$s_{56} := 2025712612433201807275138638313258$

$s_{57} := 6206912559539240990076508556951779$

$s_{58} := 18588815396076792084886035253019979$

$s_{59} := 54425597230813264415499803879274559$

$s_{60} := 155820793120002066812663994644847862$

$s_{61} := 436326548792456893173929560437429012$

$s_{62} := 1195234209254546282287147291505692026$

$s_{63} := 3203600631283099196829326575324175549$

$s_{64} := 8403383153734033144454560886960568105$

$s_{65} := 21576670860698400694046957073985917897$

$s_{66} := 54238887292178258577294804873900879380$

$$s_{67} := 1335095408762054809907240181611893895 53$$

$$s_{68} := 32185904270076882254937157664231517569 4$$

$$s_{69} := 76005543410870054521522949012284919558 3$$

$$s_{70} := 175842084147166298450184428903351895468 6$$

$$s_{71} := 398628069490608814761379503062332082761 1$$

$$s_{72} := 885620392249284937070922560522855791594 6$$

$$s_{73} := 1928532311849877607054337499957875071845 7$$

$$s_{74} := 4116882626976242766668542160275087898792 4$$

$$s_{75} := 8616537842482829580319885603785233180001 6$$

$$s_{76} := 17683907240771822045946661215726891675448 3$$

$$s_{77} := 35592710097312539631391309033323262496827 4$$

$$s_{78} := 70264432747064317794440535506702054675252 8$$

$$s_{79} := 136067362915869265869229715380473810476745 1$$

$$s_{80} := 258503647138609087855792422673087641840675 6$$

$$s_{81} := 481861389866794857180249801038060365525677 8$$

$$s_{82} := 881387642592567173504311973415752248259795 3$$

$$s_{83} := 1582143947300670799331000223620314183329766 6$$

$$s_{84} := 2787419444174579615488937863174193870464512 2$$

$$s_{85} := 4820336191983502475503934130504124386049403 0$$

$$s_{86} := 8182965436475075304625064001411821899822242 4$$

$$s_{87} := 13637682387835705166906340350233571008306703 4$$

$$s_{88} := 22315333701056713305434450846227139489779369 3$$

$$s_{89} := 35853709362540254049235629573580650130973391 3$$

$$s_{90} := 56567385836489571651498264393588576056117216 7$$

$$s_{91} := 87645849434199561816738807798573792432975297 0$$

$$s_{92} := 133370657696844719502574126449554668313086243 3$$

$$s_{93} := 199334263833231995454578511914253351462721444 1$$

$$s_{94} := 292633454957663994144667214247857391486942964 3$$

$$s_{95} := 422000144441752895229934587713981794800756683 0$$

$$s_{96} := 597823152878839485543959451875124083127498672 6$$

$$s_{97} := 832008835872403455135342614424173533105868908 8$$

$$s_{98} := 1137628559871075972585371633816509336417031450 5$$

$$s_{99} := 1528309634563508214553865846285430480799330789 1$$

$$s_{100} := 2017345302963710709336952074687477384075811554$$

$$s_{101} := 2616529393658467337814006663382748083053006799 6$$

$$s_{102} := 3334760953218657884968587730820429184952763956 8$$

$$s_{103} := 4176509959972035552983952738517914554019498426 6$$

$$s_{104} := 5140281075286285805749018394348448839119531342 8$$

$$s_{105} := 6217250475714670685772432796558927865722337745 7$$

$$s_{106} := 7390272536177198071108425855857362885415312782 1$$

$$s_{107} := 8633450717583314705842213390370042559468025673 4$$

$$s_{108} := 9912435265972780226502012244304497026158239265 8$$

$$s_{109} := 11185548308002735505015332592930041570311855970 6$$

$$s_{110} := 12405748998434532171158512381557496368237044327 3$$

$$s_{111} := 13523347363209065364241624463939856933520223395 4$$

$$s_{112} := 14489269661536231338029018410995373830289192573 4$$

$$s_{113} := 15258587078170773608812638167828241343997707284 3$$

$$s_{114} := 15793959411429620396926552118890596809964618630 8$$

$$s_{115} := 16068628509912220881493282541951218754684474995 8$$

$$s_{116} := 16068628509912220881493282541951218754684474995 8$$

$$s_{117} := 15793959411429620396926552118890596809964618630 8$$

$$s_{118} := 15258587078170773608812638167828241343997707284 3$$

$$s_{119} := 14489269661536231338029018410995373830289192573 4$$

$$s_{120} := 13523347363209065364241624463939856933520223395 4$$

$$s_{121} := 12405748998434532171158512381557496368237044327 3$$

$$s_{122} := 11185548308002735505015332592930041570311855970 6$$

$$s_{123} := 9912435265972780226502012244304497026158239265 8$$

$$s_{124} := 8633450717583314705842213390370042559468025673 4$$

$$s_{125} := 7390272536177198071108425855857362885415312782 1$$

$$s_{126} := 6217250475714670685772432796558927865722337745 7$$

$$s_{127} := 5140281075286285805749018394348448839119531342 8$$

$$s_{128} := 4176509959972035552983952738517914554019498426 6$$

$$s_{129} := 3334760953218657884968587730820429184952763956 8$$

$$s_{130} := 2616529393658467337814006663382748083053006799 6$$

$$s_{131} := 2017345302963710709336952074687477384075811554$$

$$s_{132} := 1528309634563508214553865846285430480799330789 1$$

$$s_{133} := 11376285598710759725853716338165093364170314505$$

$$s_{134} := 8320088358724034551353426144241735331058689088$$

$$s_{135} := 5978231528788394855439594518751240831274986726$$

$$s_{136} := 4220001444417528952299345877139817948007566830$$

$$s_{137} := 2926334549576639941446672142478573914869429643$$

$$s_{138} := 1993342638332319954545785119142533514627214441$$

$$s_{139} := 1333706576968447195025741264495546683130862433$$

$$s_{140} := 876458494341995618167388077985737924329752970$$

$$s_{141} := 565673858364895716514982643935885760561172167$$

$$s_{142} := 358537093625402540492356295735806501309733913$$

$$s_{143} := 223153337010567133054344508462271394897793693$$

$$s_{144} := 136376823878357051669063403502335710083067034$$

$$s_{145} := 81829654364750753046250640014118218998222424$$

$$s_{146} := 48203361919835024755039341305041243860494030$$

$$s_{147} := 27874194441745796154889378631741938704645122$$

$$s_{148} := 15821439473006707993310002236203141833297666$$

$$s_{149} := 8813876425925671735043119734157522482597953$$

$$s_{150} := 4818613898667948571802498010380603655256778$$

$$s_{151} := 2585036471386090878557924226730876418406756$$

$$s_{152} := 1360673629158692658692297153804738104767451$$

$$s_{153} := 702644327470643177944405355067020546752528$$

$$s_{154} := 355927100973125396313913090333232624968274$$

$$s_{155} := 176839072407718220459466612157268916754483$$

$$s_{156} := 86165378424828295803198856037852331800016$$

$$s_{157} := 41168826269762427666685421602750878987924$$

$$s_{158} := 19285323118498776070543374999578750718457$$

$$s_{159} := 8856203922492849370709225605228557915946$$

$$s_{160} := 3986280694906088147613795030623320827611$$

$$s_{161} := 1758420841471662984501844289033518954686$$

$$s_{162} := 760055434108700545215229490122849195583$$

$$s_{163} := 321859042700768822549371576642315175694$$

$$s_{164} := 133509540876205480990724018161189389553$$

$$s_{165} := 54238887292178258577294804873900879380$$

$s_{166} := 2157667086069840069404695707398591789 7$

$s_{167} := 840338315373403314445456088696056810 5$

$s_{168} := 320360063128309919682932657532417554 9$

$s_{169} := 119523420925454628228714729150569202 6$

$s_{170} := 43632654879245689317392956043742901 2$

$s_{171} := 15582079312000206681266399464484786 2$

$s_{172} := 5442559723081326441549980387927455 9$

$s_{173} := 1858881539607679208488603525301997 9$

$s_{174} := 620691255953924099007650855695177 9$

$s_{175} := 202571261243320180727513863831325 8$

$s_{176} := 64604046034902570026663701946069 4$

$s_{177} := 20128969948288290385113611493333 7$

$s_{178} := 6125802133472118943203953089654 8$

$s_{179} := 1820470208028975112574000509673 6$

$s_{180} := 528182217884877028781755212378 8$

$s_{181} := 149577308926206083330018393180 1$

$s_{182} := 41336580442769472537205225277 6$

$s_{183} := 11145510662677998473858752783 8$

$s_{184} := 2931420846232973479623292344 6$

$s_{185} := 751959087616552376038798217 6$

$s_{186} := 188098366287358575782961053 6$

$s_{187} := 45877854843641786606400223 1$

$s_{188} := 10909908176797501463255618 2$

$s_{189} := 2529516135550980923543248 5$

$s_{190} := 571851700673453805797523 4$

$s_{191} := 126075752965169853867298 8$

$s_{192} := 27114793695598233137990 7$

$s_{193} := 5691103351109662253976 6$

$s_{194} := 1166461871580406923992 5$

$s_{195} := 233665424293542614887 2$

$s_{196} := 45798583079748406899 2$

$s_{197} := 8795645864373213242 7$

$s_{198} := 1658174403909200972 8$

$s_{199} := 307549405915143810 7$

$s_{200} := 56273225699541178 3$

$s_{201} := 10190223346719522 7$

$s_{202} := 1832983063525765 9$

$s_{203} := 328851631838334 5$

$s_{204} := 59102333191387 8$

$s_{205} := 10688456597082 6$

$s_{206} := 1953584103351 4$

$s_{207} := 362353047683 2$

$s_{208} := 68455027226 9$

$s_{209} := 13214024235 6$

$s_{210} := 2613433081 3$

$s_{211} := 530857347 3$

$s_{212} := 110992155 4$

$s_{213} := 23938040 3$

$s_{214} := 5337331 3$

$s_{215} := 1233182 5$

$s_{216} := 296006 9$

$s_{217} := 74015 4$

$s_{218} := 19335 5$

$s_{219} := 5294 2$

$s_{220} := 1521 6$

$s_{221} := 461 3$

$s_{222} := 147 6$

$s_{223} := 49 7$

$s_{224} := 17 7$

$s_{225} := 6 8$

$s_{226} := 2 6$

$s_{227} := 1 1$

$s_{228} := 5$

$s_{229} := 2$

$s_{230} := 1$

$s_{231} := 1$

ДОДАТОК В

Результати обчислень кількостей графів для n=23

$s_0 := 1$

$s_1 := 1$

$s_2 := 2$

$s_3 := 5$

$s_4 := 11$

$s_5 := 26$

$s_6 := 68$

$s_7 := 177$

$s_8 := 497$

$s_9 := 1476$

$s_{10} := 4613$

$s_{11} := 15216$

$s_{12} := 52943$

$s_{13} := 193362$

$s_{14} := 740196$

$s_{15} := 2960339$

$s_{16} := 12333670$

$s_{17} := 53386783$

$s_{18} := 239485595$

$s_{19} := 1110793092$

$s_{20} := 5316143531$

$s_{21} := 26202267612$

$s_{22} := 132760735671$

$s_{23} := 690238318754$

$s_{24} := 3675258986639$

$s_{25} := 19998343352758$

$s_{26} := 110923277563847$

$s_{27} := 625308911684111$

$s_{28} := 3570601421673323$

$s_{29} := 20574737024964997$

$s_{30} := 119163215536653798$

$s_{31} := 690885245615394561$

$s_{32} := 3994053534718348123$

$s_{33} := 22938566759511470425$

$s_{34} := 130442714791510430908$

$s_{35} := 732338763865398305862$

$s_{36} := 4049183958191450433788$

$s_{37} := 22003479576373722838983$

$s_{38} := 117315174235988428806832$

$s_{39} := 612876640318720899158997$

$s_{40} := 3133945007675901610541754$

$s_{41} := 15673256454456163791427349$

$s_{42} := 76615347483417591951340729$

$s_{43} := 365909244650080263748398778$

$s_{44} := 1706885285976999585122955179$

$s_{45} := 7775520383282552113894545400$

$s_{46} := 34586668557113814671297885623$

$s_{47} := 150221968021725339017884291449$

$s_{48} := 637118001173279030406216862311$

$s_{49} := 2638785049727788141116148305421$

$s_{50} := 10674249016392733137133412201733$

$s_{51} := 42177738175914672529188200361156$

$s_{52} := 162822541277250521107256240899038$

$s_{53} := 614201103310574416853927830879536$

$s_{54} := 2264415129055259696839391182798002$

$s_{55} := 8160917734067300169242184992997467$

$s_{56} := 28757416872535863321432793811817987$

$s_{57} := 99101546805822736775869230285462312$

$s_{58} := 334058865162785479822068260018132883$

$s_{59} := 1101716426703097027589378609306911829$

$s_{60} := 3555597353529148685546855761748462317$

$s_{61} := 11231608257674238185545279223960345362$

$s_{62} := 34733404773131198335528653105634066692$

$s_{63} := 105176009869765227835961463864750902769$

$s_{64} := 311914900276611728946845588424807936280$

$s_{65} := 906128884744022664400182953706325418749$

$s_{66} := 2579055112514650993477073075669232545295$

$s_{67} := 7193304049189203747258394352125202168248$

$s_{68} := 19663989963177710722665859227310615151073$

$s_{69} := 52694646353850147204495487653820910705956$

$s_{70} := 138448119067236850108368861700012572393596$

$s_{71} := 356701827553031783609491876312851776921030$

$s_{72} := 901345360603352898413615775232009621051323$

$$s_{73} := 22341513338713407332293376028624172362135 78$$

$$s_{74} := 5432943988962355553892487975201356779389770$$

$$s_{75} := 12963520582708875061272385552367752262004121$$

$$s_{76} := 30355517251891637255078120487117168025371509$$

$$s_{77} := 69765253812763024995798252707059988511681782$$

$$s_{78} := 157393075822227428222965655783130825762994971$$

$$s_{79} := 348604640792866691163023073561722857506527199$$

$$s_{80} := 758116934595610731342055568438731651396493987$$

$$s_{81} := 1619001901418738681139925438878933290393717864$$

$$s_{82} := 3395608144530622089593556894152905959215376737$$

$$s_{83} := 6995134451894986193703286769234927859708839799$$

$$s_{84} := 14155671315141078250503374092184558103038186599$$

$$s_{85} := 28142767087795255750749767113794882226842852934$$

$$s_{86} := 54973009164185398838679191242607720355660110379$$

$$s_{87} := 105516787697685343078011022013172257895758968631$$

$$s_{88} := 199032693098942615893197854678927197619020899257$$

$$s_{89} := 368975994885349128191537939243212456029575278988$$

$$s_{90} := 672328094154453681057095957499924497195538065293$$

$$s_{91} := 1204234607090608624939160760381181519268334969846$$

$$s_{92} := 2120428079484020537166487035444624767832416459266$$

$$s_{93} := 3670736214348440560109977503480222353666651245185$$

$$s_{94} := 6247888904261613029440893362499235520299059610911$$

$$s_{95} := 10456731681330230461165100534117735699538833199704$$

$$s_{96} := 17209648372634011126197235531793594157886636717618$$

$$s_{97} := 27854221120876107086579660169722803352411337521721$$

$$s_{98} := 44338548917549282854669251419604381587259297004827$$

$$s_{99} := 69417770254644479175968625027825682133392166167359$$

$$s_{100} := 106901729857109512813944834861611797964455464205614$$

$$s_{101} := 161937991386651952290363263520791175064496954737986$$

$$s_{102} := 241316306638548092011541860453967594582461489756100$$

$$s_{103} := 353770318788484363821607747819125128528495850404506$$

$$s_{104} := 510240305603683947200260428180834264547286549241305$$

$$s_{105} := 724048383323739936533991924012692852599434090441671$$

$$s_{106} := 1010926697279014793975605862137248376353780835358115$$

$$s_{107} := 1388832236557071930184157666122679362994047418700433$$

$$s_{108} := 1877481918549062572251974323826787849562769510306428$$

$s_{109} := 24975513410850344840528562582754075584025335528330033$

$s_{110} := 3269502308104722439697171558636167566286262274344640$

$s_{111} := 4212038795489406527940023444800813397180191635391798$

$s_{112} := 5340237357856490709792037354130458778520457444177476$

$s_{113} := 6663452559235392633076266697081282109619310123665554$

$s_{114} := 8183154754722986210167324298381781195456206492535486$

$s_{115} := 9890908195276088023584934565424843354361597527933439$

$s_{116} := 11766732485175331324614204882595154238333454507305268$

$s_{117} := 13778100634403998282341244032364613438797245877526923$

$s_{118} := 15879805073594850918676316258172396489263402447960799$

$s_{119} := 18014865605028642946671517146979733802722591934253735$

$s_{120} := 20116562150562155226850869312180447487118099840019369$

$s_{121} := 22111558028188657214283998763606635124668521160699026$

$s_{122} := 23923949572629418686636871944307387639034027103715861$

$s_{123} := 25479952456562854070735292453158845657687861931264858$

$s_{124} := 26712832818623161442226593949741701028354993594202607$

$s_{125} := 27567629399735125734351649043867568082210533487001012$

$s_{126} := 28005203696378197332998662930223736450846067091051720$

$s_{127} := 28005203696378197332998662930223736450846067091051720$

$s_{128} := 27567629399735125734351649043867568082210533487001012$

$s_{129} := 26712832818623161442226593949741701028354993594202607$

$s_{130} := 25479952456562854070735292453158845657687861931264858$

$s_{131} := 23923949572629418686636871944307387639034027103715861$

$s_{132} := 22111558028188657214283998763606635124668521160699026$

$s_{133} := 20116562150562155226850869312180447487118099840019369$

$s_{134} := 18014865605028642946671517146979733802722591934253735$

$s_{135} := 15879805073594850918676316258172396489263402447960799$

$s_{136} := 13778100634403998282341244032364613438797245877526923$

$s_{137} := 11766732485175331324614204882595154238333454507305268$

$s_{138} := 9890908195276088023584934565424843354361597527933439$

$s_{139} := 8183154754722986210167324298381781195456206492535486$

$s_{140} := 6663452559235392633076266697081282109619310123665554$

$s_{141} := 5340237357856490709792037354130458778520457444177476$

$s_{142} := 4212038795489406527940023444800813397180191635391798$

$s_{143} := 3269502308104722439697171558636167566286262274344640$

$s_{144} := 2497551341085034484052856258275407558402533552833033$

$s_{145} := 1877481918549062572251974323826787849562769510306428$

$s_{146} := 1388832236557071930184157666122679362994047418700433$

$s_{147} := 1010926697279014793975605862137248376353780835358115$

$s_{148} := 724048383323739936533991924012692852599434090441671$

$s_{149} := 510240305603683947200260428180834264547286549241305$

$s_{150} := 353770318788484363821607747819125128528495850404506$

$s_{151} := 241316306638548092011541860453967594582461489756100$

$s_{152} := 161937991386651952290363263520791175064496954737986$

$s_{153} := 106901729857109512813944834861611797964455464205614$

$s_{154} := 69417770254644479175968625027825682133392166167359$

$s_{155} := 44338548917549282854669251419604381587259297004827$

$s_{156} := 27854221120876107086579660169722803352411337521721$

$s_{157} := 17209648372634011126197235531793594157886636717618$

$s_{158} := 10456731681330230461165100534117735699538833199704$

$s_{159} := 6247888904261613029440893362499235520299059610911$

$s_{160} := 3670736214348440560109977503480222353666651245185$

$s_{161} := 2120428079484020537166487035444624767832416459266$

$s_{162} := 1204234607090608624939160760381181519268334969846$

$s_{163} := 672328094154453681057095957499924497195538065293$

$s_{164} := 368975994885349128191537939243212456029575278988$

$s_{165} := 199032693098942615893197854678927197619020899257$

$s_{166} := 105516787697685343078011022013172257895758968631$

$s_{167} := 54973009164185398838679191242607720355660110379$

$s_{168} := 28142767087795255750749767113794882226842852934$

$s_{169} := 14155671315141078250503374092184558103038186599$

$s_{170} := 6995134451894986193703286769234927859708839799$

$s_{171} := 3395608144530622089593556894152905959215376737$

$s_{172} := 1619001901418738681139925438878933290393717864$

$s_{173} := 758116934595610731342055568438731651396493987$

$s_{174} := 348604640792866691163023073561722857506527199$

$s_{175} := 157393075822227428222965655783130825762994971$

$s_{176} := 69765253812763024995798252707059988511681782$

$s_{177} := 30355517251891637255078120487117168025371509$

$s_{178} := 12963520582708875061272385552367752262004121$

$s_{179} := 5432943988962355553892487975201356779389770$

$s_{180} := 2234151333871340733229337602862417236213578$

$s_{181} := 9013453606033528984136157752320096210513 23$

$s_{182} := 356701827553031783609491876312851776921030$

$s_{183} := 138448119067236850108368861700012572393596$

$s_{184} := 52694646353850147204495487653820910705956$

$s_{185} := 19663989963177710722665859227310615151073$

$s_{186} := 7193304049189203747258394352125202168248$

$s_{187} := 2579055112514650993477073075669232545295$

$s_{188} := 906128884744022664400182953706325418749$

$s_{189} := 311914900276611728946845588424807936280$

$s_{190} := 105176009869765227835961463864750902769$

$s_{191} := 34733404773131198335528653105634066692$

$s_{192} := 11231608257674238185545279223960345362$

$s_{193} := 3555597353529148685546855761748462317$

$s_{194} := 1101716426703097027589378609306911829$

$s_{195} := 334058865162785479822068260018132883$

$s_{196} := 99101546805822736775869230285462312$

$s_{197} := 28757416872535863321432793811817987$

$s_{198} := 8160917734067300169242184992997467$

$s_{199} := 2264415129055259696839391182798002$

$s_{200} := 614201103310574416853927830879536$

$s_{201} := 162822541277250521107256240899038$

$s_{202} := 42177738175914672529188200361156$

$s_{203} := 10674249016392733137133412201733$

$s_{204} := 2638785049727788141116148305421$

$s_{205} := 637118001173279030406216862311$

$s_{206} := 150221968021725339017884291449$

$s_{207} := 34586668557113814671297885623$

$s_{208} := 7775520383282552113894545400$

$s_{209} := 1706885285976999585122955179$

$s_{210} := 365909244650080263748398778$

$s_{211} := 76615347483417591951340729$

$s_{212} := 15673256454456163791427349$

$s_{213} := 3133945007675901610541754$

$s_{214} := 612876640318720899158997$

$s_{215} := 117315174235988428806832$

$s_{216} := 22003479576373722838983$

$s_{217} := 4049183958191450433788$

$s_{218} := 732338763865398305862$

$s_{219} := 130442714791510430908$

$s_{220} := 22938566759511470425$

$s_{221} := 3994053534718348123$

$s_{222} := 690885245615394561$

$s_{223} := 119163215536653798$

$s_{224} := 20574737024964997$

$s_{225} := 3570601421673323$

$s_{226} := 625308911684111$

$s_{227} := 110923277563847$

$s_{228} := 19998343352758$

$s_{229} := 3675258986639$

$s_{230} := 690238318754$

$s_{231} := 132760735671$

$s_{232} := 26202267612$

$s_{233} := 5316143531$

$s_{234} := 1110793092$

$s_{235} := 239485595$

$s_{236} := 53386783$

$s_{237} := 12333670$

$s_{238} := 2960339$

$s_{239} := 740196$

$s_{240} := 193362$

$s_{241} := 52943$

$s_{242} := 15216$

$s_{243} := 4613$

$s_{244} := 1476$

$s_{245} := 497$

$s_{246} := 177$

$s_{247} := 68$

$s_{248} := 26$

$s_{249} := 11$

$s_{250} := 5$

$s_{251} := 2$

$s_{252} := 1$

$s_{253} := 1$

ДОДАТОК Г

Результати обчислень кількостей графів для n=24

$$s_0 := 1$$
$$s_1 := 1$$
$$s_2 := 2$$
$$s_3 := 5$$
$$s_4 := 11$$
$$s_5 := 26$$
$$s_6 := 68$$
$$s_7 := 177$$
$$s_8 := 497$$
$$s_9 := 1476$$
$$s_{10} := 4613$$
$$s_{11} := 15216$$
$$s_{12} := 52944$$
$$s_{13} := 193365$$
$$s_{14} := 740214$$
$$s_{15} := 2960448$$
$$s_{16} := 12334378$$
$$s_{17} := 53391749$$
$$s_{18} := 239523128$$
$$s_{19} := 1111096424$$
$$s_{20} := 5318743428$$
$$s_{21} := 26225625392$$
$$s_{22} := 132977762151$$
$$s_{23} := 692294900849$$
$$s_{24} := 3694876952577$$
$$s_{25} := 20184618368312$$
$$s_{26} := 112668088476243$$
$$s_{27} := 641322779162878$$
$$s_{28} := 3713914014302270$$
$$s_{29} := 21821126714759994$$
$$s_{30} := 129674134254507316$$
$$s_{31} := 776716104531434782$$
$$s_{32} := 4672197130398320340$$
$$s_{33} := 28120839189532283024$$
$$s_{34} := 168744141414130778897$$

$$s_{35} := 10061638231640840150 16$$

$$s_{36} := 59433845999568875965 40$$

$$s_{37} := 346872377380780298746 66$$

$$s_{38} := 1995665217611724901097 20$$

$$s_{39} := 11296903865280935839556 25$$

$$s_{40} := 62820951206941625197454 26$$

$$s_{41} := 342747417659782090503416 81$$

$$s_{42} := 1832880428005248343566452 97$$

$$s_{43} := 9599473576987257277626711 85$$

$$s_{44} := 49210632078051716446816571 84$$

$$s_{45} := 246820694227171972605351792 51$$

$$s_{46} := 1210832642584105155390129966 91$$

$$s_{47} := 5808730036222225545493791922 23$$

$$s_{48} := 27247370541326711782883470461 81$$

$$s_{49} := 124967257392708165203263499401 33$$

$$s_{50} := 560405280412125811431203094886 96$$

$$s_{51} := 2457355491701654455545828777171 39$$

$$s_{52} := 10537421567584409144133744655947 13$$

$$s_{53} := 44193074842114673851369923485339 78$$

$$s_{54} := 181296698850953516532954059142026 51$$

$$s_{55} := 727630552527619973052153220693677 51$$

$$s_{56} := 2857539824045898733584066306332889 24$$

$$s_{57} := 10982796979936356992800722808660577 79$$

$$s_{58} := 41319463666719783429346919582603991 56$$

$$s_{59} := 152195228279422409030768385339237672 97$$

$$s_{60} := 548954898681072853684139622322621339 28$$

$$s_{61} := 1939307138368369279420214077419980937 16$$

$$s_{62} := 6711440738599923711647989027823645921 06$$

$$s_{63} := 22757710590336152713961922708888814420 40$$

$$s_{64} := 75625558953139454273122448560084316525 36$$

$$s_{65} := 246330568090273639178026095239393544911 40$$

$$s_{66} := 786608911490696001028443210638074251895 65$$

$$s_{67} := 2463031431631263630763234186871709292925 85$$

$$s_{68} := 7563619892997376180112498613255759578103 39$$

$$s_{69} := 22783189684024898223676469137338800338892 29$$

$$s_{70} := 6732853285363490648809144193941004338671505$$

$$s_{71} := 19523447070873645430496493707236131880555322$$

$$s_{72} := 55559419475940680003851105181801151862489385$$

$$s_{73} := 155192977831828358912722323345986664172346073$$

$$s_{74} := 425566177579000073186478529937201089300952410$$

$$s_{75} := 1145799198827739322453685955363160882595720633$$

$$s_{76} := 3029425027900516140538579756108590585953744812$$

$$s_{77} := 7866550539001691978171352675827797020074021005$$

$$s_{78} := 20065099020362420757320307134397280094946845613$$

$$s_{79} := 50279368948669225740220472605936900529206000731$$

$$s_{80} := 123790378430965631855095964187889544638292188117$$

$$s_{81} := 299493844135336202036131766856788956358596336660$$

$$s_{82} := 712109227377816861828222283351933175007793887896$$

$$s_{83} := 1664237185918591292993465165499319047530249299174$$

$$s_{84} := 3823352839794025206693278485294382023714331889318$$

$$s_{85} := 8635415444106338047666653224979737888298393804627$$

$$s_{86} := 19176947415646397399698440745164016013909194228992$$

$$s_{87} := 41877365845060135712566118861867539484770655066718$$

$$s_{88} := 89934790718170314161942378375830371576130124172184$$

$$s_{89} := 189962592664970114140149704934705807318037872356665$$

$$s_{90} := 394677710832136809342252082892241741030859204315550$$

$$s_{91} := 806662992365534571180424815835967468467906139987577$$

$$s_{92} := 1622020312233156510837376226960813978264672270035177$$

$$s_{93} := 3209027470696941846430251463992992721029836913327186$$

$$s_{94} := 6247132757540056458081185161785920188866335593445709$$

$$s_{95} := 11967795957775512236282230093883791179477655353335685$$

$$s_{96} := 22563610575399875415509060284372999050785957385763765$$

$$s_{97} := 41869493714846434447211573034480638041430886971075677$$

$$s_{98} := 76474058163624170911366409465063326255825243387910749$$

$$s_{99} := 137495798081220553886256047757604878414175996059487504$$

$$s_{100} := 243362734631495278872796324949450510947757558382004897$$

$$s_{101} := 424070013332762358466587439496088865469690561094073450$$

$$s_{102} := 727559237484773774781344729141848370329407671740009246$$

$$s_{103} := 1229062455251432345023171115336487044711723964552023446$$

$s_{104} := 2044470607284816557452961213647654550707208076521501453$

$s_{105} := 3348996558630233935247414126791659218526174919339046394$

$s_{106} := 5402566281121662855029320860432470471469841126168694827$

$s_{107} := 8583429284564392299011680553712380866784375896131663203$

$s_{108} := 13431352783051394846676837712407600789637793457205144798$

$s_{109} := 20701359356863485839074346838690067208383168947893582352$

$s_{110} := 31428184390376588417347569568313375178202686798638901042$

$s_{111} := 47000376002210971911621623470356525150228787197349649211$

$s_{112} := 69241177775370584959590864370586770422784919673193822910$

$s_{113} := 100491026462177852284895631287132149409217509810246736753$

$s_{114} := 143683759947476025785296140292743062539291648206128529859$

$s_{115} := 202405684697255105645257420791177307344382252019512071723$

$s_{116} := 280923856471838775204000550092454263330315627104187771774$

$s_{117} := 384167780245241003126763341824452113646649052384783083665$

$s_{118} := 517647837089177658707912726504371887553081735654601105447$

$s_{119} := 687294737170696772320282932027004629168767688807504197542$

$s_{120} := 899207754603226254938325163847425874051456088214409829176$

$s_{121} := 1159305803915835752823012243714352046326756042142994407587$

$s_{122} := 1472884619530342037332777180167228736909603921855273794037$

$s_{123} := 1844094994596466403725731753241329636511685361125857357863$

$s_{124} := 2275370290271570727411960828185311070463894469810834590165$

$s_{125} := 2766844781587578434303189769363243467160975870524487953917$

$s_{126} := 3315815980640117480867912614156358837245631491360927390651$

$s_{127} := 3916311782860050076925433192849931956953089040721586700733$

$s_{128} := 4558825127144421541316152244792178258144438665934786942785$

$s_{129} := 5230273316252434068034508506756414128091542865388614763778$

$s_{130} := 5914225499915508966247604343904608130581980405839851431872$

$s_{131} := 6591420470410221498766206482375773555700523583175810895311$

$s_{132} := 7240569485827112626416485951246576235987234299519399631115$

$s_{133} := 7839408118302772751544563043779784088750647210033283431464$

$s_{134} := 8365930808280372197902613220784079401818301380210137235946$

$s_{135} := 8799715981181328105946584709768274637938723024527809951618$

$s_{136} := 9123232130025390455488004305183541754648289132468735578272$

$s_{137} := 9323009212889910000388672246632382812270679090378985275657$

$s_{138} := 9390566673339284963209556300602063088163896933170108347086$

$s_{139} := 93230092128899100003886722466323828122706790903789852756 57$

$s_{140} := 9123232130025390455488004305183541754648289132468735578272$

$s_{141} := 8799715981181328105946584709768274637938723024527809951618$

$s_{142} := 8365930808280372197902613220784079401818301380210137235946$

$s_{143} := 7839408118302772751544563043779784088750647210033283431464$

$s_{144} := 7240569485827112626416485951246576235987234299519399631115$

$s_{145} := 6591420470410221498766206482375773555700523583175810895311$

$s_{146} := 5914225499915508966247604343904608130581980405839851431872$

$s_{147} := 5230273316252434068034508506756414128091542865388614763778$

$s_{148} := 4558825127144421541316152244792178258144438665934786942785$

$s_{149} := 3916311782860050076925433192849931956953089040721586700733$

$s_{150} := 3315815980640117480867912614156358837245631491360927390651$

$s_{151} := 2766844781587578434303189769363243467160975870524487953917$

$s_{152} := 2275370290271570727411960828185311070463894469810834590165$

$s_{153} := 1844094994596466403725731753241329636511685361125857357863$

$s_{154} := 1472884619530342037332777180167228736909603921855273794037$

$s_{155} := 1159305803915835752823012243714352046326756042142994407587$

$s_{156} := 899207754603226254938325163847425874051456088214409829176$

$s_{157} := 687294737170696772320282932027004629168767688807504197542$

$s_{158} := 517647837089177658707912726504371887553081735654601105447$

$s_{159} := 384167780245241003126763341824452113646649052384783083665$

$s_{160} := 280923856471838775204000550092454263330315627104187771774$

$s_{161} := 202405684697255105645257420791177307344382252019512071723$

$s_{162} := 143683759947476025785296140292743062539291648206128529859$

$s_{163} := 100491026462177852284895631287132149409217509810246736753$

$s_{164} := 69241177775370584959590864370586770422784919673193822910$

$s_{165} := 47000376002210971911621623470356525150228787197349649211$

$s_{166} := 31428184390376588417347569568313375178202686798638901042$

$s_{167} := 20701359356863485839074346838690067208383168947893582352$

$s_{168} := 13431352783051394846676837712407600789637793457205144798$

$s_{169} := 8583429284564392299011680553712380866784375896131663203$

$s_{170} := 5402566281121662855029320860432470471469841126168694827$

$s_{171} := 3348996558630233935247414126791659218526174919339046394$

$s_{172} := 2044470607284816557452961213647654550707208076521501453$

$$s_{173} := 1229062455251432345023171115336487044711723964552023446$$

$$s_{174} := 7275592374847737747813447291418483703294076717400009246$$

$$s_{175} := 4240700133327623584665874394960888654696905610940734 50$$

$$s_{176} := 2433627346314952788727963249494505109477575583820048 97$$

$$s_{177} := 1374957980812205538862560477576048784141759960594875 04$$

$$s_{178} := 764740581636241709113664094650633262558252433879107 49$$

$$s_{179} := 418694937148464344472115730344806380414308869710756 77$$

$$s_{180} := 225636105753998754155090602843729990507859573857637 65$$

$$s_{181} := 119677959577755122362822300938837911794776553533356 85$$

$$s_{182} := 62471327575400564580811851617859201888663355934457 09$$

$$s_{183} := 32090274706969418464302514639929927210298369133271 86$$

$$s_{184} := 16220203122331565108373762269608139782646722700351 77$$

$$s_{185} := 8066629923655345711804248158359674684679061399875 77$$

$$s_{186} := 3946777108321368093422520828922417410308592043155 50$$

$$s_{187} := 1899625926649701141401497049347058073180378723566 65$$

$$s_{188} := 899347907181703141619423783758303715761301241721 84$$

$$s_{189} := 418773658450601357125661188618675394847706550667 18$$

$$s_{190} := 191769474156463973996984407451640160139091942289 92$$

$$s_{191} := 86354154441063380476666532249797378882983938046 27$$

$$s_{192} := 38233528397940252066932784852943820237143318893 18$$

$$s_{193} := 16642371859185912929934651654993190475302492991 74$$

$$s_{194} := 7121092273778168618282222833519331750077938878 96$$

$$s_{195} := 2994938441353362020361317668567889563585963366 60$$

$$s_{196} := 1237903784309656318550959641878895446382921881 17$$

$$s_{197} := 502793689486692257402204726059369005292060007 31$$

$$s_{198} := 200650990203624207573203071343972800949468456 13$$

$$s_{199} := 78665505390016919781713526758277970200740210 05$$

$$s_{200} := 30294250279005161405385797561085905859537448 12$$

$$s_{201} := 11457991988277393224536859553631608825957206 33$$

$$s_{202} := 4255661775790000731864785299372010893009524 10$$

$$s_{203} := 1551929778318283589127223233459866641723460 73$$

$$s_{204} := 555594194759406800038511051818011518624893 85$$

$$s_{205} := 195234470708736454304964937072361318805553 22$$

$$s_{206} := 67328532853634906488091441939410043386715 05$$

$$s_{207} := 22783189684024898223676469137338800338892 29$$

$$s_{208} := 75636198929973761801124986132557595781033 9$$

$$s_{209} := 246303143163126363076323418687170929292585$$

$$s_{210} := 78660891149069600102844321063807425189565$$

$$s_{211} := 246330568090273639178026095239393544911 40$$

$$s_{212} := 7562555895313945427312244856008431652536$$

$$s_{213} := 2275771059033615271396192270888881442040$$

$$s_{214} := 671144073859992371164798902782364592106$$

$$s_{215} := 193930713836836927942021407741998093716$$

$$s_{216} := 54895489868107285368413962232262133928$$

$$s_{217} := 15219522827942240903076838533923767297$$

$$s_{218} := 4131946366671978342934691958260399156$$

$$s_{219} := 1098279697993635699280072280866057779$$

$$s_{220} := 285753982404589873358406630633288924$$

$$s_{221} := 72763055252761997305215322069367751$$

$$s_{222} := 18129669885095351653295405914202651$$

$$s_{223} := 4419307484211467385136992348533978$$

$$s_{224} := 1053742156758440914413374465594713$$

$$s_{225} := 245735549170165445554582877717139$$

$$s_{226} := 56040528041212581143120309488696$$

$$s_{227} := 12496725739270816520326349940133$$

$$s_{228} := 2724737054132671178288347046181$$

$$s_{229} := 580873003622222554549379192223$$

$$s_{230} := 121083264258410515539012996691$$

$$s_{231} := 24682069422717197260535179251$$

$$s_{232} := 4921063207805171644681657184$$

$$s_{233} := 959947357698725727762671185$$

$$s_{234} := 183288042800524834356645297$$

$$s_{235} := 34274741765978209050341681$$

$$s_{236} := 6282095120694162519745426$$

$$s_{237} := 1129690386528093583955625$$

$$s_{238} := 199566521761172490109720$$

$$s_{239} := 34687237738078029874666$$

$$s_{240} := 5943384599956887596540$$

$$s_{241} := 1006163823164084015016$$

$$s_{242} := 168744141414130778897$$

$$s_{243} := 28120839189532283024$$

$$s_{244} := 4672197130398320340$$

$$s_{245} := 776716104531434782$$

$$s_{246} := 129674134254507316$$

$$s_{247} := 21821126714759994$$

$$s_{248} := 3713914014302270$$

$$s_{249} := 641322779162878$$

$$s_{250} := 112668088476243$$

$$s_{251} := 20184618368312$$

$$s_{252} := 3694876952577$$

$$s_{253} := 692294900849$$

$$s_{254} := 132977762151$$

$$s_{255} := 26225625392$$

$$s_{256} := 5318743428$$

$$s_{257} := 1111096424$$

$$s_{258} := 239523128$$

$$s_{259} := 53391749$$

$$s_{260} := 12334378$$

$$s_{261} := 2960448$$

$$s_{262} := 740214$$

$$s_{263} := 193365$$

$$s_{264} := 52944$$

$$s_{265} := 15216$$

$$s_{266} := 4613$$

$$s_{267} := 1476$$

$$s_{268} := 497$$

$$s_{269} := 177$$

$$s_{270} := 68$$

$$s_{271} := 26$$

$$s_{272} := 11$$

$$s_{273} := 5$$

$$s_{274} := 2$$

$$s_{275} := 1$$

$$s_{276} := 1$$