МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра загальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ МЕТРИЧНОЇ СТРУКТУРИ НА НЕПОРОЖНІЙ МНОЖИНІ»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1118-з
спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми математика
Ю.О. Панкратова
(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Стєганцев Є.В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри фундаментальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Ткаченко І.Г.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра загальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
загальної математики,
к.ф.-м.н., доцент
______________ Зіновєєв І.В.
(підпис)

« ____ » __________2019 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Панкратовій Юлії Олександрівні

(прізвище, ім'я та по батькові)

1. Тема роботи Особливості побудови метричної структури на непорожній множині

керівник роботи Стєганцев Євгеній Вікторович к.ф.-м.н., доцент

(прізвище, ім'я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 29 » травня 2019 року № 812-с

2. Строк подання студентом роботи 26.12.2019

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
   1. Постановка задачі.
   2. Основні теоретичні відомості.
   3. Метрична структура на непорожній множині

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) __________
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 30.05.2019

К А Л Е Н Д А Р Н И Й П Л А Н

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	10.06.2019	
2.	Збір вихідних даних.	25.06.2019	
3.	Обробка методичних та теоретичних	15.07.2019	
	джерел.		
4.	Розробка першого та другого розділу.	10.09.2019	
5.	Розробка третього розділу.	15.10.2019	
6.	Оформлення та нормоконтроль	05.12.2019	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	10.01.2020	

Студент ______________ Ю.О. Панкратова
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ______________ Є.В. Стєганцев
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ______________ О.Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Особливості побудови метричної структури на непорожній множині»: 59 с., 9 рис., 1 табл., 19 джерел.

АКСІОМАТИЧНИЙ СПОСІБ, МЕТРИКА, МЕТРИЧНИЙ ПРОСТІР, МНОЖИНА, НЕРІВНІСТЬ, НЕРІВНІСТЬ ТРИКУТНИКА, ПРОСТІР, ПСЕВДОЕВКЛІДІВ ПРОСТІР.

Об'єкт дослідження – побудова метричної структури.

Предмет дослідження – метричний простір.

Мета роботи: дослідження побудови метричної структури на непорожній множині.

Методи дослідження – аксіоматичний, аналітичний.

У кваліфікаційній роботі розглядаються метричні простори, аксіоматичний спосіб їх задання, зв'язок між різними метриками та псевдоевклідів простір. Розглянуто основні поняття «множина», «метрика», «метричний простір», «псевдоевклідів простір», доводиться система аксіом метрики та будується метрична структура. Доведено залежність системи аксіом метричного простору. Розглянуто побудову метричних просторів на непорожній множині. На основі цього матеріалу вивчено аналітичні означення метрики та метричного простору, наведено приклади метричних просторів та визначено зв'язок між різними метриками для розв'язання практичних завдань.

SUMMARY

Master's Qualifycation Thesis «The Particularities of the Construction of the Metric Structure on the Non-Empty Set»: 59 pages, 9 figures, 1 table, 19 references.

AXIOMATIC WAY, METRICS, METRIC SPACE, PLURAL, INEQUALITY, TRIANGLE INEQUALITY, SPACE, PSEUDOEUCLIDE SPACE.

The object of the research is of the Construction of the Metric Structure.

The subject of the research is metric space.

The aim of the research is searching of the construction of the metric structure on the non-empty set.

The methods of research are axiomatic, analytical.

There are being considered metric spaces, axiomatic way of their assignment, connection between different metrics and pseudoeuclide space in qualifying paper. There are also being considered basic concept «plural», «metric», «metric space», «pseudoeuclide space». It is proved the dependence of metric space axiom system in this paper. There is being considered the construction of the metric structure on the non-empty set. Based on this material it has been studied the analytical definitions of the metric and the metric space. There are given examples of the metric space and it is identified the relationship between different metrics to solve the practical problems.

ЗМІСТ

ВСТУП

Як відомо, одним з найважливіших понять в математичному аналізі є поняття граничного переходу, що лежить в основі таких фундаментальних операцій, як диференціювання та інтегрування. Більш того, в залежності від розглянутих задач в аналізі часто вводять різні (але еквівалентні між собою) поняття межі для послідовності одних і тих же математичних об’єктів (дійсні числа, комплексні числа, n-мірні вектори, функції і т.д.). Однак всі вони зв’язані в основному лише тим, що між об'єктами які досліджуються можна вимірювати «відстань». Це дозволяє ввести і вивчити властивості граничного переходу незалежно від природи елементів, що беруть участь у цій побудові [16].

Стрімко збагачувалося саме математичне знання: народжувалися нові підходи, теорії та методи. Німецькі математики Карл Вейерштрасс (1815-1897), Георг Кантор (1848-1918) і Ріхард Дедекинд (1831-1916) створили основу математичного аналізу: обгрунтували теорію дійсних чисел, побудували теорію граничного переходу. На цьому грунті виникла і стала активно розвиватися теорія функцій дійсної змінної, головним чином, зусиллями французьких математиків Бореля (1871-1956), Рене Бера (1874-1935), Анрі Лебега (1875-1941). Теорія функцій включала і дослідження різних множин (просторів) функцій.

Кантор побудував теорію множин, яка в якості чіткої універсальної мови якнайкраще виявилася пристосована для виділення і вивчення абстрактних математичних структур [5].

Узагальнюючи відоме поняття відстані між двома дійсними числами, ми природно приходимо до одного з основних понять сучасної математики – поняття метричного простору (воно було введено вперше французьким математиком Морісом Фреше (1878-1973) в 1906 р). Відзначимо також фундаментальну важливість метричних ідей в прикладному відношенні:

всякий обчислювальний процес повинен сходитися до шуканого результату [10].

Самі терміни метрика і метричний простір вперше з'явилися в книзі німецького математика Фелікса Хаусдорфа (1868-1942) «Основи теорії множин» в 1914 році Хаусдорф ввів в розгляд поняття віддільного топологічного простору, який отримав назву хаусдорфового простору. Тим самим було покладено початок нової математичної науки – загальної топології. Метрична структура є попередницею топологічної структури. Загальне поняття топологічного простору лежить в основі сучасної топології і математики в цілому.

Мабуть, сам термін «загальна топологія» [17] вперше використав американський математик Маршалл Стоун (в назві своєї знаменитої праці [18]). Вперше загальне визначення топологічного простору дано в 1922 році польським математиком Казимиром Куратовським за допомогою оператора замикання. У 1925 році творець московської топологічної школи Павло Сергійович Александров дав визначення топологічного простору через відкриті множини, а в 1927 році польський математик Вацлав Серпінського через замкнуті множини. Загальне поняття топологічного простору лежить в основі сучасної топології і математики в цілому.

Терміни число і простір широко використовуються. У математичній діяльності зазвичай поняття числа носить арифметико алгебричний характер, а поняття простору має геометротопологічний відтінок. У різних метричних геометріях (скажімо, в геометрії Евкліда) ці категорії тісно взаємодіють. Під простором розуміється якесь вмістище будь-яких речей, пов'язаних певними структурними відносинами. Самі простори багатоликі: векторний, евклідів, афінний, проективний, Лобачевского, ріманів, Гільбертів, Банахів, метричний, топологічний, простір подій і т.д [5].

Об'єкт дослідження – побудова метричної структури.

Предмет дослідження – метричний простір.

Мета роботи: дослідження побудови метричної структури на непорожній множині.

Методи дослідження – аксіоматичний, аналітичний.

Відповідно до мети сформульовано завдання дослідження:

а) з’ясувати сутність понять «множина», «метрика», «метричний простір» та «псевдоевклідів простір»;

б) довести залежність системи аксіом метричного простору;

в) встановити зв’язок між різними метриками, заданими на одній і тій же множині;

г) побудувати метричні простори на непорожній множині;

д) розглянути псевдоевклідів простір та дослідити його перетворення.

1 ВИЗНАЧЕННЯ ТА ПРИКЛАДИ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

1.1 Аксіоматичний спосіб задання метричних просторів

В математиці часто розглядається множина, між елементами (точками) яких визначена відстань (метрика). Такі множини називаються метричними просторами, якщо виконані відповідні аксіоми. Існує багато різних способів визначити відстань в різних множинах [10]. У цій роботі ми розглядаємо саме аксіоматичний спосіб.

Аксіоматичний метод – це такий спосіб побудови будь якої математичної теорії, при якому в основу теорії кладуться деякі вихідні положення, які називаються аксіомами, а всі інші положення теорії, називаються теоремами, які доводяться на основі цих аксіом шляхом логічних міркувань [15].

При вимірі відстані між двома точками ми маємо чотири різні метрики:

а) евклідову метрику, коли відстань між двома точками простору вимірюється довжиною яка поєднную їх відрізком, нехай і протикає наскрізь нашу планету;

б) сферичну метрику, коли відстань між двома точками вимірюється по поверхні сфери;

в) залізничну метрику, коли відстань між двома точками вимірюється довжиною рейкового шляху між ними;

г) автомобільну метрику, коли відстань вимірюється довжиною автомобільного шляху.

Виділимо ті властивості, які притаманні всім способам вимірювання відстані. Таких властивостей чотири. По-перше, відстань між точками на площині невід’ємна, де x, y – довільні точки площини. По-друге, відстань між точками x, y дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли точки збіжні. По-третє, все одно, вимірювати відстань від точки x до точки y або, навпаки, від точки y до точки x. Відстань від цього не змінюється. Це називається властивістю симетрії. І нарешті, в четверте виконується так звана нерівність трикутника, і саме для довільних точок x, y, z [15].

Визначення. Метрикою (або відстанню) на довільній непорожній множині M називається дійсна функція $\rho(x, y)$, визначена для всіх $x, y \in M$ і задовольняє таким аксіомам:

а) для будь-яких $x, y \in M$ $\rho(x, y) \geq 0$ (аксіома невід'ємності);

б) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксіома тотожності);

в) для будь-яких $x, y \in M$ $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксіома симетрії);

г) для будь-яких $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$ (аксіома нерівність трикутника).

Якщо на множині M зафіксована деяка метрика $\rho(x, y)$, то пара (M, ρ), називається метричним простором [4].

При цьому:

а) множина M називається множиною яка належить метричному простору;

б) елементи множини M називаються точками метричного простора;

в) функція $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ називається метрикою [2].

Бієкція між різними метричними просторами (X, ρ_X) і (Y, ρ_Y), яка зберігає відстані, називається ізометрією. У цьому випадку простори (X, ρ_X) і (Y, ρ_Y) називаються ізометричними.

Якщо M підмножина множини X, то, розглядаючи звуження $\rho_M = \rho_X|_M$ метрики ρ_X на множину M, можна отримати метричний простір (M, ρ_M), який називається підпростором простору (X, ρ).

Метричний простір називається повним, якщо будь-яка фундаментальна послідовність у ньому збігається до деякого елементу цього простору.

Метрика ρ на M називається внутрішньою, якщо будь-які дві точки x і y в M можна з'єднати кривою з довжиною, довільно близькою до $\rho(x, y)$.

Простір називається геодезичним якщо будь-які дві точки x і y в M можна з'єднати кривою з довжиною рівною $\rho(x, y)$.

Будь-який метричний простір має природню топологію, базою для якої служить множина відкритих куль, тобто множин наступного типу:

$$B(x;r) = \{y \in M | \rho(x,y) < r\},$$

де x є точка в M і r – додатнє дійсне число, яке називається радіусом кулі. Інакше кажучи, множина O є відкритим, якщо разом з будь-якою своєю точкою воно містить відкриту кулю з центром в цій точці.

Дві метрики, що визначають одну і ту ж топологію, називаються еквівалентними.

Топологічний простір, який може бути отримано таким чином, називається метризованим.

Відстань $\rho(x,S)$ від точки x до підмножини S в M визначається за формулою:

$$\rho(x,S) = \inf\{\rho(x,s) | s \in S\}.$$

Тоді $\rho(x,S) = 0$, тільки якщо x належить замиканню S.

На одній і тій же множині можна задавати різні метрики, однак не слід вважати, що метрику можна задавати довільно. Справа в тому, що при розв’язанні практичних завдань метрика, як правило, є частиною постановки задачі [3].

Розглянемо приклади різних метрик.

а) множина точок площини з метрикою

$$\rho(M_1, M_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

б) множина комплексних чисел з метрикою

$$\rho(z, z_1) = \max\{|r - r_1|, |\varphi - \varphi_1|\}.$$

в) множина дійсних квадратних матриць з метрикою

$$\rho(A,B) = \max_{i,j=\overline{1,n}} \left| a_{ij} - b_{ij} \right|.$$

г) множина дійсних чисел з метрикою

$$\rho(x,y) = \min\{|x-y|, 1\}.$$

д) множина дійсних чисел з метрикою

$$\rho(x,y) = \max\{x-y, y-x\}.$$

е) множина дійсних чисел з метрикою

$$\rho(x,y) = \max\{x,y\} - \min\{x,y\}.$$

ж) множина рухів площини з метрикою

$$\rho(f,g) = \max_{x \in D} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)},$$

де D – коло одиничного радіуса з центром в початку координат.

з) множина С$[a,b]$ неперервна на відрізку $[a,b]$ функцій з метрикою

$$\rho(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

и) множина обмежених на відрізку $[a,b]$ функцій з метрикою

$$\rho(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

к) множина диференційованих на відрізку [0,1] функцій з метрикою

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x) - g'(x)| \text{ [12].}$$

Визначення (приклади метричних просторів): зазначені в таблиці 1.1 метричні простори є основними, проте, крім цих, існує безліч інших просторів [6].

Крім того, навіть в кожному із зазначених просторів можна визначати відстань різними способами.

Таблиця 1.1 – Приклади метричних просторів

№	Назва, позначення	Опис	Відстань
1.	Числова пряма, $\mathbb{R}$	Множина всіх дійсних чисел	$\rho(x,y) = \lvert x - y\rvert$
2.	Евклідів n-мірний простір, $\mathbb{R}^n$	Множина всіх упорядкованих систем з n дійсних чисел	$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \eta_k)^2}$, де $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$
3.	Простір $\mathrm{C}[a,b]$	Множина всіх неперервних функцій x (t), заданих на відрізку $[a,b]$	$\rho(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} \lvert x(t) - y(t)\rvert$
4.	Простір l_∞	Множина обмежених числових послідовностей виду $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, тобто, таких, що $\forall k \in \mathbb{N}$	$\rho(x,y) = \sup_k \lvert\xi_k - \eta_k\rvert$, де $x = (\xi_1, \xi_n, \dots)$, $y = (\eta_1, \eta_n, \dots)$

Продовження таблиці 1.1

№	Назва, позначення	Опис	Відстань
		$\lvert\xi_k\rvert \le c_x$ – константа, своя для кожної послідовності x	
5.	Простір c	Множина збіжних числових послідовностей виду $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, тобто, таких, що $\exists \lim_{k\to\infty} \xi_k = \xi$	$\rho(x, y) = \sup_k \lvert\xi_k - \eta_k\rvert$, де $x = (\xi_1, \xi_n, \dots)$, $y = (\eta_1, \eta_n, \dots)$
6.	Простір c_0	Множина числових послідовностей виду $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, збіжних до нуля, тобто, таких, що $\lim_{k\to\infty} \xi_k = 0$	$\rho(x, y) = \sup_k \lvert\xi_k - \eta_k\rvert$, де $x = (\xi_1, \xi_n, \dots)$, $y = (\eta_1, \eta_n, \dots)$
7.	Простір $L_p[a, b], p \ge 1$	Множина всіх функцій $x\,(t)$, для яких $\int_a^b \lvert x(t)\rvert^p dt < +\infty$ (в сенсі Лебега)	$\rho(x, y) = \left(\int_a^b \lvert x(t) - y(t)\rvert^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$
8.	Простір $l_p, p \ge 1$	Множина числових послідовностей виду $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, для яких $\sum_{k=1}^{\infty} \lvert\xi_k\rvert^p < +\infty$	$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lvert\xi_k - \eta_k\rvert^p\right)^{\frac{1}{p}}$ де $x = (\xi_1, \xi_n, \dots)$, $y = (\eta_1, \eta_n, \dots)$

Зауваження: метрика $\rho(x,y) = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$ може розглядатися також і в просторі обмежених розривних на відрізку $[a, b]$ функцій.

Крім того, таким же чином можна задавати метрику в просторі функцій, неперервну на інтервалі (a, b) (а також на різних видах напівінтервалів, скінченних або нескінченних).

Нарешті, відзначимо, що для простору функцій, неперервних на відрізку, можна використовувати ще таке визначення метрики (оскільки в цьому випадку максимум і точна верхня грань функції збігаються): $\rho(x,y) =$ $= \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$ [10].

Властивості метричного простору:

а) метричний простір компактний тоді і тільки тоді, коли з будь-якої послідовності точок можна вибрати збіжну підпослідовність (секвенційна компактність);

б) метричний простір може не мати зліченну базу, але завжди задовольняє першій аксіомі зліченності – має злічену базу в кожній точці:

1) більш того, кожен компакт в метричному просторі має злічену базу окілу;

2) проте, в кожному метричному просторі існує така база, що кона точка простору належить лише зліченній множині її елементів – точково-зліченна база [6].

Модуль числа і його властивості.

Оскільки метрикою може бути тільки невід’ємна функція, то досить часто у формулі, задає цю функцію, присутній знак модуля. Наведемо кілька властивостей модуля, які часто використовуються при перевірці аксіом метрики:

$$|x| = \max\{-x, x\}; \tag{1.1}$$

$$|x| - |y| \le |x + y| \le |x| + |y|; \tag{1.2}$$

$$-|x - y| \le |x| - |y| \le |x - y|; \tag{1.3}$$

$$|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|. \quad (1.4)$$

Рівність (1.1) вірна лише для дійсних чисел, а нерівності (1.2) – (1.4) мають місце як для дійсних, так і для комплексних чисел.

1.2 Доведення залежності системи аксіом метричного простору

Наведена у пункті 1.1 система аксіом метрики є залежною, а саме, досить прийняти тільки аксіоми тотожності і нерівність трикутника у вигляді

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z),$$

а аксіоми невід’ємності і симетрії є їх наслідками. Але зазвичай користуються системою, що складається із всіх чотирьох аксіом, оскільки вона описує більше властивостей метрики [14].

Доведемо залежність системи аксіом метрики.

Аксіома невід’ємності. Метрика є невід’ємною функцією:

$$\rho(x,y) \geq 0.$$

Доведення.

За аксіомами тотожності $\forall x \in M: \rho(x,x) = 0$.

Розглянемо нерівність трикутника для трійки x, x, z, отримаємо

$$\rho(x,x) \leq \rho(x,z) + \rho(x,z).$$

Спростивши маємо

$$0 \leq 2\rho(x,z).$$

Тому

$$\rho(x,z) \geq 0.$$

Аксіома симетрії.

$$\rho(x,y) = \rho(y,x).$$

Доведення.

Запишемо нерівність трикутника для трійки x, y, x

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,x) + \rho(y,x).$$

Використавши аксіому тотожності отримаємо

$$\rho(x,y) \leq \rho(y,x).$$

Далі, запишемо нерівність трикутника для трійки y, x, y, маємо

$$\rho(y,x) \leq \rho(y,y) + \rho(x,y).$$

Згідно з аксіомою тотожності маємо

$$\rho(x,y) \geq \rho(y,x).$$

Звідки виходить, що

$$\rho(x,y) = \rho(y,x).$$

Ці умови висловлюють інтуїтивні поняття про концепцію відстані. Наприклад, що відстань між різними точками додатна і відстань від x до y така ж сама, що і відстань від y до x. Нерівність трикутника означає, що відстань від x до z через y не менше ніж прямо від x до z.

Далі розглянемо корисні аксіоми, які можуть бути виведені з визначення метрики.

Аксіома нерівність трикутника. Для будь-яких трьох елементів $x, y, z \in M$ має місце нерівність

$$|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \leq \rho(x,y).$$

Для доведення потрібно покласти $u = z$ у нерівності чотирикутника.

Доведення.

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) \Rightarrow \rho(x,z) - \rho(y,z) \leq \rho(x,y),$$
$$\rho(y,z) \leq \rho(x,y) + \rho(x,z) \Rightarrow \rho(y,z) - \rho(x,z) \leq \rho(x,y).$$

Порівнюючи ці дві нерівності, отримаємо $|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \leq \rho(x,y)$.

Для перевірки аксіоми трикутника для різних просторів корисні наступні леми.

Лема (нерівність Коші-Буняковського).

Для будь-яких двох скінченних наборів дійсних чисел $(a_1, \dots, a_n)$ і $(b_1, \dots, b_n)$ має місце нерівність:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Доведення.

Визначимо функцію дійсної змінної $F(t)$ наступним чином

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i t + b_i)^2 \geq 0.$$

Застосуємо формулу квадрата суми:

$$F(t) = t^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2t \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Нехай спочатку всі a_i дорівнюють нулю. В цьому випадку

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0.$$

Так як $0 \leq 0$, то в цьому випадку нерівність Коші-Буняковського дійсно має місце.

Тепер будемо вважати, що

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0.$$

Оскільки $F(t) \geq 0$ як сума квадратів, то дискримінант D квадратичної відносно t функції $F(t)$ повинен бути менше або дорівнює нулю. Так як

$$D = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2,$$

то

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq 0$$

і, отже

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Лема доведена.

Лема (нерівність Мінковського).

Для будь-яких двох скінченних наборів дійсних чисел $(a_1, \dots, a_n)$ і $(b_1, \dots, b_n)$ має місце нерівність:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Доведення.

За формулою квадрата суми і в силу нерівності Коші-Буняковського:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Права частина цієї нерівності може бути записана у вигляді квадрата суми:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2.$$

Таким чином

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2.$$

Нерівність Мінковського виходить після вилучення квадратного кореня з правої і лівої частини даного нерівності.

Лема (Інтегральна нерівність Коші-Буняковського).

$$\int_a^b f(t)g(t)dt \leq \sqrt{\int_a^b f^2\,(t)dt} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2\,(t)dt}.$$

Доведення.

Якщо одна з функцій дорівнює нулю на всьому $[a;\,b]$, то ліва і права частини не строгої нерівності дорівнюють нулю і лема доведена. Тепер будемо вважати, що обидві функції не рівні тотожно нулю на всьому $[a;\,b]$.

Розглянемо невід'ємну функцію

$$F(\lambda) = \int_a^b [f(t)\lambda + g(t)]^2 dt.$$

За властивостями інтеграла і формулою квадрата суми:

$$F(\lambda) = \lambda^2 \int_a^b f^2(t)dt + 2\lambda \int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b g^2(t)dt.$$

Функція $F(\lambda)$ є квадратичною і невід'ємною, значить її дискримінант повинен бути менше або дорівнює нулю:

$$4\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 - 4\int_a^b f^2(t)dt \cdot \int_a^b g^2(t)dt \leq 0.$$

звідки і випливає твердження леми.

Лема (Інтегральна нерівність Мінковського).

$$\sqrt{\int_a^b [f(t)+g(t)]^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b f^2\,(t)dt} + \sqrt{\int_a^b g^2\,(t)dt}.$$

Доведення.

За властивостями інтеграла:

$$\int_a^b [f(t)+g(t)]^2 dt = \int_a^b f^2(t)dt + 2\int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b g^2(t)dt.$$

Скористаємося інтегральною нерівністю Коші-Буняковського:

$$\int_a^b [f(t)+g(t)]^2 dt \leq \int_a^b f^2(t)dt + 2\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} + \int_a^b g^2(t)dt,$$

звідки випливає

$$\int_a^b [f(t) + g(t)]^2 dt \leq \left(\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} + \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} \right)^2 .$$

Інтегральна нерівність Мінковського виходить після знаходження квадратного кореня з правої і лівої частини даної нерівності.

Наведені доведення показують, що поняття метрики і метричного простору дозволяють розглядати з єдиних позицій такі несхожі на перший погляд об'єкти, як дійсні і комплексні числа, вектора, неперервні функції і числові послідовності [19].

2 ВСТАНОВЛЕННЯ ЗВ'ЯЗКУ МІЖ РІЗНИМИ МЕТРИКАМИ, ЯКІ ЗАДАНІ НА ОДНІЙ І ТІЙ ЖЕ МНОЖИНІ

2.1 Зв'язок між різними метриками на одній і тій же множині

З теорії метричних просторів відомо, що на одній і тій же множині можна розглядати різні метрики. Зрозуміло, що певний інтерес представляє питання про існування в'язків між ними. Так в 1 розділі на множині точок площини розглядалася метрика $\rho_\infty(M_1, M_2) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$, в якій відстань між ними дорівнює найбільшій з довжин проекцій відрізка M_1M_2 на вісі координат. На тій же множині часто розглядають метрики $\rho_1(M_1, M_2) =$ $= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ (відстань – сума довжин проекцій відрізка M_1M_2 на вісі координат) і $\rho_2(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (відстань – довжина відрізка M_1M_2). Всі ці метрики є окремими випадками класу метрик на площині R^2, що задаються формулою $\rho_p(M_1, M_2) = \sqrt[p]{|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p}$.

Очевидно, $\rho_2(M_1, M_2) \leq \rho_1(M_1, M_2)$ (довжина гіпотенузи не перевищує суми довжин катетів). При $x_1 = y_1 = 0$ остання нерівність рівносильно алґебричної нерівності $\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$. Зауважимо також, що $\rho_\infty(M_1, M_2) \leq \rho_2(M_1, M_2)$. Із цієї нерівності при $x_1 = y_1 = 0$ одержимо рівносильну нерівність

$$\text{мах}\{|x|, |y|\} \leq \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2.1}$$

2.2 Побудова метричного простору

Розглянемо метричний простір – числову пряму. Покажемо, що множина дійсних чисел з метрикою $\rho(x, y) = |x - y|$ є метричними простором. Дійсно, розглянемо три довільних дійсних числа $x, y, z \in \mathbb{R}$. Всі аксіоми метричного простору виконуються, за властивостями модуля (1.1), (1.2), (1.3), (1.4).

Нехай (M, ρ) – метричний простір, і A – непорожня підмножина множини M, тоді (A, ρ) – теж є метричними простором, яке називається підпростором метричного простору (M, ρ).

Наприклад, множина раціональних чисел є підмножиною дійсних чисел:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

а отже, якщо взяти натуральну для дійсних чисел метрику $\rho(x, y) = |x - y|$, то $(\mathbb{Q}, \rho)$ буде метричним простором. Будь-яку множину можна розглядати як метричний простір.

В принципі, будь-яку множину можна розглядати як метричний простір. Дійсно, якщо для елементів довільного множині ввести так звану дискретну метрику:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, x = y, \\ 1, x \neq y, \end{cases}$$

то вийде метричний простір, який називають простором ізольованих точок.

Ми вже розглянули два метричних простори: множину дійсних чисел і множину раціональних чисел. Нижче наведені ще деякі приклади метричних просторів, всі вони грають важливу роль в математичному аналізі і алгебрі [13].

Перевірка перших двох аксіом є, як правило, тривіальним завданням, основні труднощі пов’язані з доведенням справедливості аксіоми трикутника [6].

Арифметичний евклідів простір.

Множина R^n з метрикою

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

є метричними простором.

Дійсно, розглянемо будь-які три елементи з множини R^n:

$$x = (x_1, \dots, x_n),$$
$$y = (y_1, \dots, y_n),$$
$$z = (z_1, \dots, z_n),$$

Тоді

а) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = 0 \Leftrightarrow \forall i = \overline{1,n}\ \ (x_i - y_i)^2 = 0\ \Leftrightarrow \forall i = \overline{1,n}$

$x_i = y_i \Leftrightarrow x = y$;

б) $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}((-1)(x_i - y_i))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = \rho(y,x)$.

Перейдемо до перевірки третьої аксіоми.

в) $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i + z_i - y_i)^2}$.

За нерівністю Мінковського (Лема):

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i + z_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2} =$$

$$= \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Тобто аксіома дійсно виконується.

Таким чином, (R^n, ρ) – метричний простір.

Метрика Хеммінга.

Знову розглянемо множину R^n, але відстань в ньому визначимо як суму відстаней між координатами:

$$\rho_1 = (x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|.$$

Метрика такого виду називається метрикою Хеммінга.

Метричний простір (R^n, ρ_1) позначають R_1^n.

Рівномірна метрика.

На множині R^n можна ввести ще одну метрику

$$\rho_\infty(x,y) = \max_{1\leq k\leq n}|x_k - y_k|.$$

Простір з даною метрикою позначають R_∞^n.

Таким чином, три розглянутих приклади показують, що на основі однієї і тієї ж множини можна, задаючи різні метрики, будувати різні метричні простори.

Комплексні числа.

Множина комплексних чисел C з метрикою $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ є метричними простором. Справедливість аксіом випливає з властивостей модуля комплексного числа. Дійсно, якщо $z_1 = x_1 + iy_1$, а $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, таким чином, з точки зору теорії метричних просторів, множина комплексних чисел еквівалентно двовимірному арифметичному евклідовому простору.

Неперервні функції.

Множина неперервних на відрізку $[a, b]$ функції $\mathrm{C}[a, b]$ з метрикою

$$\rho(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

є метричними простором.

Якщо $f = g$, то очевидно, що $\rho(f, g) = 0$. Навпаки, якщо $\rho(f, g) = 0$, то за визначенням метрики для даного простору:

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| = 0,$$

так як

$$|f(x) - g(x)| \leq \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| = 0,$$

то функції f і g дорівнюють один одному на відрізку $[a, b]$. Аксіома тотожності доведена.

Аксіома симетрії:

$$\rho(x, y) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| = \max_{x \in [a,b]} \left| -\big(f(x) - g(x)\big) \right| =$$
$$= \max_{x \in [a,b]} |g(x) - f(x)| = \rho(y, x).$$

Аксіома симетрії теж виконується.

Доведемо тепер аксіому трикутника. Для будь-яких трьох функцій $f, g, h \in \mathrm{C}[a,b]$, в силу нерівності трикутника для модуля, виконується нерівність

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|.$$

Візьмемо максимальне значення лівої і правої частини:

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \leq \max_{x \in [a,b]} \{|f(x) - h(x)| + |g(x) - h(x)|\}.$$

Так як на відрізку $[a,b]$, для будь-яких двох функцій $w_1, w_2 \in \mathrm{C}[a,b]$, в силу визначення найбільшого значення, має місце нерівність

$$w_1(x) + w_2(x) \leq \max_{x \in [a,b]} w_1(x) + w_2(x),$$

а отже

$$\max_{x \in [a,b]} \{w_1(x) + w_2(x)\} \leq \max_{x \in [a,b]} w_1(x) + w_2(x),$$

тобто найбільше значення суми функцій не перевищує суми їх найбільших значень.

Використаємо останню нерівність, поклавши

$$w_1(x) = |f(x) - h(x)|, w_2(x) = |h(x) - g(x)|,$$

отримаємо

$$\max_{x \in [a,b]} \{|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|\} \leq \max_{x \in [a,b]} |f(x) - h(x)| + \max_{x \in [a,b]} |h(x) - \\ - g(x)|.$$

А отже:

$$\rho(f,g) = \max_{x\in[a,b]}|f(x) - g(x)| \leq \max_{x\in[a,b]}|f(x) - h(x)| + \max_{x\in[a,b]}|h(x) - g(x)| =$$
$$= \rho(f,h) + \rho(h,g).$$

Всі аксіоми дійсно виконуються.

На множині неперервних функцій метрику можна визначити інакше, наприклад

$$\rho(x,y) = \sqrt{\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt},$$

отриманий метричний простір позначають $C_2[a,b]$.

Простір числових послідовностей.

Розглянемо множину всіляких числових послідовностей виду

$$x = \{x_1, \dots, x_n, \dots\},$$

яка задовольняє умові

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty.$$

Якщо на цій множині ввести відстань

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - y_k)^2},$$

то отримаємо метричний простір, який позначають l_2. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - y_k)^2$$

збігається, якщо збігаються ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2, \sum_{k=1}^{\infty}y_k^2,$$

а отже введена метрика має значення для будь-яких послідовностей з l_2.

Доведення аксіом тотожності і симетрії не становить труднощів, доведення правдивості аксіоми трикутника для зазначеної метрики можна за допомогою граничного переходу в нерівності Мінковського.

Наведені приклади показують, що поняття метрики і метричного простору дозволяють розглядати з єдиних позицій такі несхожі на перший погляд об'єкти, як дійсні і комплексні числа, вектора, неперервні функції і числові послідовності.

Задача. Нехай l^{ρ} при $\rho > 1$ лінійний простір послідовних комплексних чисел виду

$$x = \{x_k\}_{k=1}^{+\infty}, x_k \in C$$

таких, що

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^{\rho} < +\infty.$$

Введемо метрику на цьому лінійному просторі як

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k-y_k|^{\rho}\right)^{1/\rho}.$$

Твердження. Функція $\rho(x,y)$ є метрикою на лінійному просторі l^{ρ} при $\rho>1$.

Дійсно, перші дві властивості дійсні і в доведенні потребує тільки нерівність трикутника. Доведення проведемо у декілька кроків.

Крок 1

Нехай спочатку $\{x_k\}$ і $\{y_k\}$ – це послідовності невід'ємних чисел. Нехай

$$a=\frac{x_i^{\rho}}{\sum_{k=1}^{n}x_k^{\rho}},\quad b=\frac{y_i^{\rho}}{\sum_{k=1}^{n}y_k^{\rho}}.$$

Тоді з отриманої арифметичної рівності Гельдера приходимо к нерівності

$$\frac{x_iy_i}{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^{\rho}\right)^{1/\rho}\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^{q}\right)^{1/q}}\le\frac{1}{\rho}\frac{x_i^{\rho}}{\sum_{k=1}^{n}x_k^{\rho}}+\frac{1}{q}\frac{y_i^{\rho}}{\sum_{k=1}^{n}y_k^{\rho}}.$$

Тепер підсумуємо по $i=\overline{1,n}$ і отримаємо нерівність

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^{\rho}\right)^{1/\rho}\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^{q}\right)^{1/q}}\le\frac{1}{\rho}+\frac{1}{q}=1.$$

Таким чином, приходимо до нерівності Гельдера

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\le\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^{\rho}\right)^{1/\rho}\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^{q}\right)^{1/q}.$$

Отже, має місце наступний ланцюг виразів:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{\rho} = \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{\rho-1}x_i + \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{\rho-1}y_i \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{\rho}\right)^{(\rho-1)/\rho}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\rho}\right)^{1/\rho} + \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^{\rho}\right)^{1/\rho}\right].$$

Значить,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{\rho}\right)^{1/\rho} \le \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\rho}\right)^{1/\rho} + \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^{\rho}\right)^{1/\rho}.$$

Нехай $\{x_k\}$ і $\{y_k\}$ це комплексні послідовності, тоді по доведеному отримуємо наступну нерівність:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{\rho}\right)^{1/\rho} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^{\rho}\right)^{1/\rho} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^{\rho}\right)^{1/\rho}.$$

Нарешті, залишилось скористатись очевидною нерівністю

$$|x_i + y_i| \le |x_i| + |y_i|.$$

Тепер залишилось перейти до границі при $n \to +\infty$ і отримати нерівність Мінковського для лінійного простору l^{ρ} при $\rho > 1$.

3 ПСЕВДОЕВКЛІДІВ ПРОСТІР

3.1 Визначення та приклади псевдоевклідового простору

Визначення. Лінійний дійсний простір розмірності n називається псевдоевклідовим простором індексу s, якщо в цьому просторі задана білінійна форма $\xi\eta = -\xi^1\eta^1 - \cdots - \xi^s\eta^s + \xi^{s+1}\eta^{s+1} + \cdots + \xi^{s+q=n}\eta^{s+q=n}$.

Якщо $s = 0$, то отримуємо евклідів простір R^n. Вище наведений простір будемо позначати R_s^n.

Простір R_1^4 є простором спеціальних теорій відносності і називається простором Мінковського, який ми розглядали в пункті 1.2 [11].

Довжина вектора ξ в псевдоевклідовому просторі R_s^n визначається наступною формулою: $|\xi|_s = \sqrt{(\xi\xi)_s}$, де

$$(\xi\xi)_s = -\xi^1\xi^1 - \cdots - \xi^s\xi^s + \xi^{s+1}\xi^{s+1} + \cdots + \xi^{s+q=n}\xi^{s+q=n}.$$

На відміну від евклідового простора R^n в псевдоевклідовому просторі R_s^n довжини векторів можуть бути нульовими і уявними. У просторі R^n сукупність всіх точок ξ, таких що $|\xi| = \rho$ утворює $(n-1)$-мірну сферу, S^{n-1} (гіперсфера). У псевдоевклідовому просторі R_s^n також розглядається множина точок ξ, віддалених від початку координат на відстань ρ, де ρ може бути дійсним, уявним числом або нулем. Ця множина точок називається псевдосферою індексу S і позначається S_s^{n-1}. Будемо розрізняти псевдосфери дійсного, мнимого і нульового радіусів. Псевдосфера нульового радіуса має рівняння:

$$-(\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - \cdots - (\xi^s)^2 + (\xi^{s+1})^s + \cdots + (\xi^{s+q=n})^2 = 0.$$

Це є конус другого порядку в просторі R_s^n з вершиною на початку координат. Всі вектори, що виходять з початку координат і що лежать на цьому конусі, мають нульову довжину. Вектори, що лежать поза цим конусом, мають довжину, відмінну від нуля [1].

Псевдосфера S_s^{n-1} нульового радіуса називається ізотропним або світловим конусом. Вектори, що лежать всередині конуса, мають додатний квадрат довжини, $|\xi|^2 > 0$ і, називаються часоподібними, а вектори що лежать поза цим конусом мають від'ємний квадрат довжини, $|\xi|^2 > 0$, і називаються простороподібними. Вектори, що лежать на ізотропному конусі, називаються ізотропними або світловими, $|\xi| = 0$.

Розглянемо приклади псевдоеклідового простора.

а) нехай $n = 1$, $s = 0$. R_0^1 збігається зі звичайною дійсною прямою;

б) нехай $n = 2$, $s = 1$ і нехай задані декартові координати (x^1, x^2). Тоді отримуємо ізотропний конус $-(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0 \Longrightarrow x^1 = \pm x^2$. Цей конус розбиває простір R^2 на дві області. В одній з них скалярний добуток $(\xi\xi)_1 > 0$, коли $|x^2| > |x^1|$ і $(\xi\xi)_1 < 0$, коли $|x^2| < |x^1|$ (див. рис. 3.1).

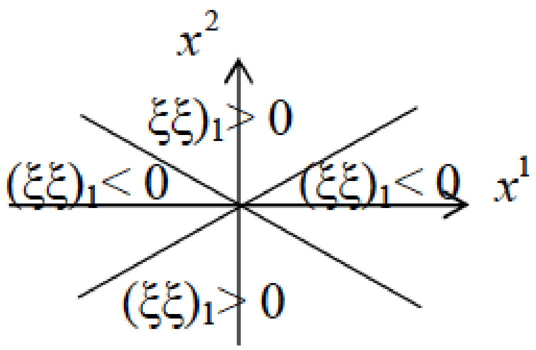

Рисунок 3.1 – Скалярний добуток

Псевдосфера дійсного радіуса – це гіпербола $-(x^1)^2 + (x^2)^2 = \alpha^2 (\alpha = \rho)$ і псевдосфера уявного радіуса – гіпербола $-(x^1)^2 + (x^2)^2 = -\alpha^2 (\rho = \alpha i)$ (див. рис. 3.2).

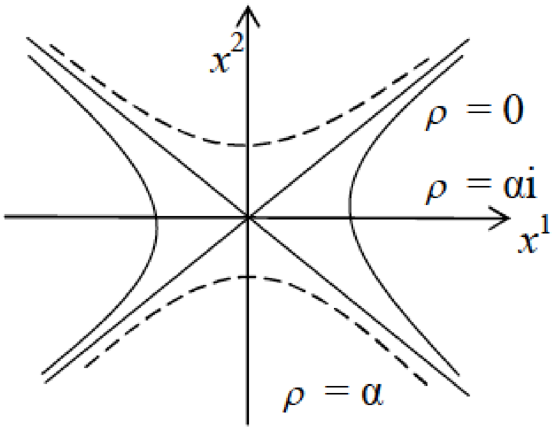

Рисунок 3.2 – Псевдосфера дійсного радіуса та псевдосфера уявного радіуса

в) нехай $n = 3$, $s = 1$. Ізотропний конус (псевдосфера нульового радіуса) є звичайним конусом другого порядку з віссю x^1:

$$-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0.$$

Він розбиває весь простір на дві області: внутрішню і зовнішню (див. рис. 3.3).

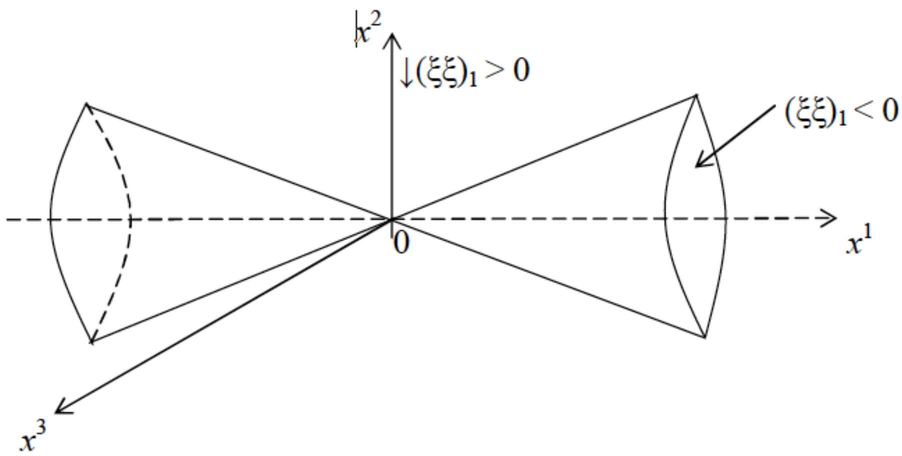

Рисунок 3.3 – Псевдосфера нульового радіуса

Псевдосфери дійсного радіуса – це однопорожнинні гіперболоїди: $-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \alpha^2 (\alpha = \rho)$, а псевдосфери уявного радіуса – це двопорожнинні гіперболоїди: $-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \alpha^2 (\rho = \alpha i)$ (див. рис. 3.4).

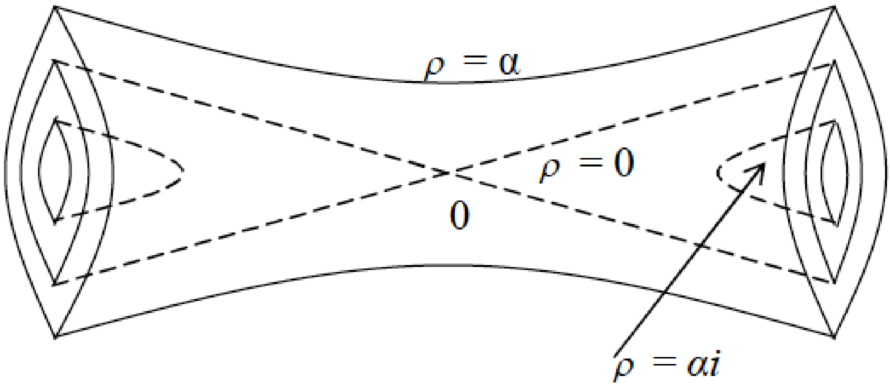

Рисунок 3.4 – Однопорожнинний гіперболоїд $\rho = \alpha$ та двопорожнинний гіперболоїд $\rho = \alpha i$

Розглянемо метричні властивості простору R_1^3. Цей простір будемо моделювати в просторі R^3. Через (*x, y, z*) позначимо декартові координати простору R^3. Тоді Псевдоскалярний добуток має вигляд

$$(\xi\xi)_1 = -x^2 + y^2 + z^2.$$

Гіперсферою або псевдосферою уявного радіуса $i\rho$ в просторі R_1^3 є двопорожнинний гіперболоїд $-\rho^2 = -x^2 + y^2 + z^2$. Так як цей гіперболоїд вкладений в R^3, то можна сказати, що геометрія простору R_1^3 індукує деяку геометрію на гіперболоїді або з точки зору рімановою метрики метрика простору R_1^3 індукує деяку метрику на гіперболоїді [11]. Розглянемо гіперболоїд – $-\rho^2 = -x^2 + y^2 + z^2, x > 0$ (див. рис. 3.5).

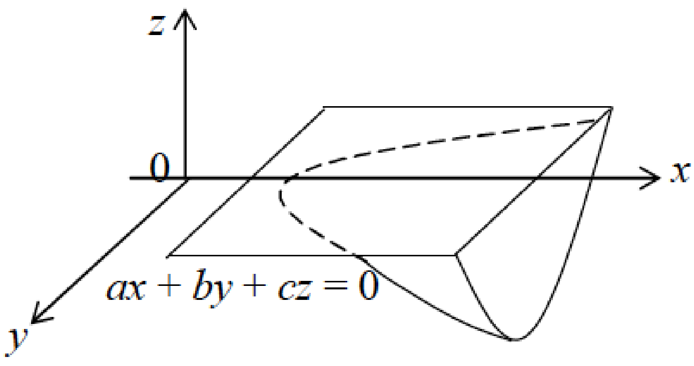

Рисунок 3.5 – Гіперболоїд $-\rho^2 = -x^2 + y^2 + z^2, x > 0$

Точками індукованої на гіперболоїді геометрії ми назвемо звичайні точки гіперболоїда, а прямими індукованої геометрії назвемо всілякі лінії на гіперболоїді, які виходять при перетині гіперболоїда площинами $ax + by +$ $+cz = 0$, що проходять через початок координат. Встановимо відповідність між геометрією на гіперболоїді і геометрією в колі на евклідовій площини. Таке перетворення називається стереографиченою проекцією [1].

Площина R^2 проходить через центр O сфери S^2 і стереографічна проекція $f: S^2 \to R^2$ зіставляє кожній точці x, яка не співпадає з північним полюсом N сфери, точку $f(x)$ – точку перетину променя N_x з площиною R^2 (див. рис. 3.6).

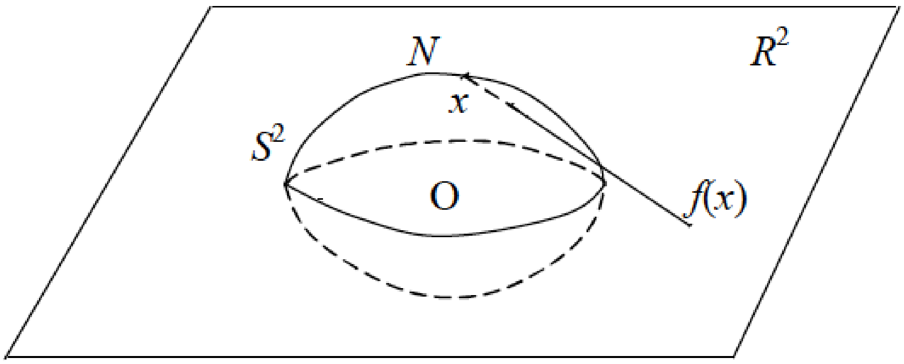

Рисунок 3.6 – Стереографічна проекція

При цьому північному полюсу відповідає нескінченно віддалена точка розширеної комплексної площини. Стереографічна проекція псевдосфери S_1^2 на площину R_1^2 визначається подібним же чином. Центр псевдосфери. $S_1^2 = \{-\rho^2 = -x^2 + y^2 + z^2\}$ є початок координат O. Північний полюс є точка з декартовими координатами $(\rho, 0,0)$. Площина, на яку здійснюємо проекцію, є площина YOZ. Так як ми розглянули тільки одну частину гіперболоїда $x > 0$, то образ цієї площини при проекції f покриває не всю площину $R^2 =$ YOZ, а тільки відкрите коло радіуса ρ.

Теорема. Нехай (x, y, z) – координати точки $x \in S_1^2 (x > 0)$, і нехай (u^1, u^2) – координати точки $f(x) \in$ YOZ, де f – стереографічна проекція [7].

Тоді

$$x = \rho\left(-1 + \frac{2\rho^2}{-(u^1)^2 - (u^2)^2 + \rho^2}\right),$$

$$y = \frac{-2\rho u^1}{-(u^1)^2 - (u^2)^2 + \rho^2},$$

$$z = \frac{2\rho u^2}{-(u^1)^2 - (u^2)^2 + \rho^2}.$$

Доведення.

Перетин гіперболоїда площиною, що проходить через вісь ОХ, має такий вигляд:

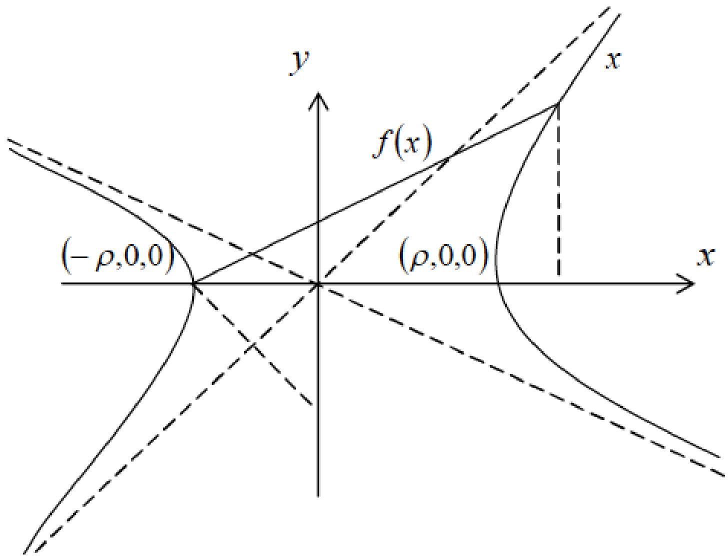

Рисунок 3.7 – Перетин гіперболоїда площиною, що проходить через вісь ОХ

Тоді з рисунка 3.7 бачимо, що

$$\frac{y}{u^1} = \frac{x+\rho}{\rho}, \frac{z}{u^2} = \frac{x+\rho}{\rho}, y = u^1\left(1 + \frac{x}{\rho}\right), z = u^2\left(1 + \frac{x}{\rho}\right) - \rho^2 = -x^2 + y^2 + z^2.$$

Так як $-\rho^2 = -x^2 + y^2 + z^2$, то підставляючи y і z в це рівняння, отримаємо, що

$$-\rho^2 = -x^2 + (u^1)^2 \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \Rightarrow x = -\rho \left(1 + \frac{2\rho^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2 - \rho^2}\right).$$

Аналогічне доведення для y і z. При стереографічній проекції $f: S_1^2 \to (y^2 + z^2 < \rho^2) = D^2$ точки гиперболоїда переходять в точки двовимірного кола D^2 радіусу ρ. У які криві на колі D^2 перейдуть прямі геометрії на гіперболоїді, тобто лінії перетину гіперболоїда площинами $ax + by + cz = 0$.

Теорема. Кожна лінія перетину S_1^2 площини $ax + by + cz = 0$ переходить при відображенні f в дугу окружності, що перетинає коло $y^2 + z^2 = \rho^2$ під прямим кутом [11].

Доведення.

Для доведення досить підставити в рівняння площини $ax + by + cz = 0$ вираз x, y, x через $u^1, u^2, u \neq 0$. Тоді

$$-a - \frac{2a\rho^2}{-(u^1)^2 - (u^2)^2 - \rho^2} + \frac{2bu^1}{-(u^1)^2 - (u^2)^2 + \rho^2} + \frac{2cu^1}{-(u^1)^2 - (u^2)^2 - \rho^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(u^1 - \frac{b}{a}\right)^2 + \left(u^2 - \frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + a^2}{a^2} - \rho^2$$

окружності з центром в точці перетинає окружність $y^2 + z^2 = \rho^2$ в точках A і B під прямим кутом

$$\rho^2 + r^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2.$$

Отже, геометрія, індукована на псевдосфері S_1^2 геометрією псевдоевклідового простору R_1^3, збігається з геометрією, що виникає в колі радіусу ρ на евклідовій площині R, якщо в якості точок цієї геометрії взяти звичайні точки цього кола, а в якості прямих цієї геометрії взяти дуги кіл, які перетинають межу кола під прямим кутом.

Геометрія, індукована на псевдосфері геометрією R_1^3, називається геометрією Лобачевського, а її модель в колі радіуса ρ на евклідовій площині називається моделлю Пуанкаре геометрії Лобачевського. Сам Лобачевський отримав свою геометрію без псевдоевклідового простору. Якщо $\rho \to \infty$, то геометрія Лобачевського перетворюється в звичайну геометрію Евкліда.

Можна розглядати ще одну геометрію на сфері, в якій «точками» є звичайні точки сфери ρ^2: $(|x| = 1\hat{a}R^2)$, а «прямими» є всілякі екватори сфери R^2 (перетин із усілякими площинами, що проходять через центр сфери). Якщо в якості точок взяти пари $(x, -x)$, де x пробігає всю ρ^2, то в цій геометрії будуть виконані всі постулати Евкліда, крім аксіом порядку і п’ятого постулату.

Підіб’ємо деякі підсумки.

Нехай задано простір (область) з декартовими координатами $(x^1, \dots, x^n)$ і задані нові координати $(z^1, \dots, z^n), x^i = x^i(z^1, \dots, z^n), x = x(z)$, причому нова система координат не має особливих точок.

$$I \neq 0 = \left|\frac{\partial x}{\partial z}\right|$$

– якобіан. Якщо довжина кривої $x^i = x^i(t)$, вимірювалася за формулою

$$\ell = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2}\, dt,$$

то ми маємо справу з евклідовими координатами. У нових координатах (z) маємо $z^i = z^i(t), i = 1, \dots, n$. Довжина тієї ж самої кривої в нових координатах

$$\ell = \int_a^b \sqrt{g_{ij}\frac{dz^i}{dt}\frac{dz^j}{dt}}\,dt\text{, де } x^i = x^i\big(z^1(t),\dots,z^n(t)\big) \text{ і } \sqrt{g_{ij}\frac{dz^i}{dt}\frac{dz^j}{dt}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)};$$

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{dz^j}\frac{dz^j}{dt}.\text{ Тому } g_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^k}{\partial z^j} = \sum_{k,q=1}^{n}\delta_{kq}\frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^q}{\partial z^j}\text{, де } \delta_{ij} = \begin{cases}1, i = j\\ 0, i \neq j\end{cases}.$$

Помітимо, що

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{dz^1}{dt},\dots,\frac{dz^n}{dt}\right)$$

– вектор швидкості кривої в нових координатах.

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx^1}{dt},\dots,\frac{dx^n}{dt}\right)$$

– той же самий вектор в старих координатах:

$$\frac{dx}{dt} = \eta, \frac{dz}{dt} = \varepsilon.$$

Якщо є дві криві $z^i = f^i(t)$ і $z^i = g^i(t), i = 1,\dots,n$, які перетинають в одній точці $t = t_0, \varphi$ – кут між їх векторами швидкості, то

$$\cos\varphi = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{|\varepsilon_1||\varepsilon_2|}\text{, де } \varepsilon_1 = \left(\frac{df^i}{dt}\right)_{t=t_0}, \varepsilon_2 = \left(\frac{dg^i}{dt}\right)_{t=t_0}.$$

У координатах (z) для скалярного добутку маємо формулу: $\varepsilon_1\varepsilon_2 = g_{ij}\varepsilon_1^i\varepsilon_2^j, i = 1,\dots,n$.Ріманова метрика в області простору з регулярними координатами

$z^1, \dots, z^n$ задається набором функцій $g_{ij}(z) = g_{ij}(z)$, причому, якщо задана крива $z^i = z^i(t), i = 1, \dots, n$, то квадратом довжини її вектора швидкості

$$\nu_z = \left(\frac{dz^i}{dt}\right)_{t=t_0},$$

в точці $t = t_0$ називається число

$$\ell^2 = g_{ij}\frac{dz^i}{dt}\frac{dz^j}{dt}.$$

Набір функцій $g_{ij}(z) = g_{ji}(z)$ задає ріманову метрику (в координатах $(z^1, \dots, z^n)$), якщо при будь-яких $z^1, \dots, z^n$ форма $g_{ij}\eta^i\eta^j$ додатня. Якщо $\det(g_{ij}) \neq 0$, але зазначена форма знакозмінна, то кажуть, що набір задає псевдоріманову метрику. Якщо задані нові координати $y^1, \dots, y^n$, такі що $z^i = z^i(y^1, \dots, y^n)$, $\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \neq 0$, то в нових координатах $y^1, \dots, y^n$, ріманова метрика визначається набором функцій $g_{ij}(y^1, \dots, y^n)$, $g_{ij} = g_{ji}$, де

$$g_{ij} = \frac{\partial z^k}{\partial y^i} g_{kl} \frac{\partial z^l}{\partial y^j} = g_{ij}(y^1, \dots, y^n).$$

На матричній мові $g' = A \circ g \circ A^T$, де

$$A = \left(\frac{\partial z^i}{\partial y^k}\right), g' = (g'_{ij}), g = (g_{ij}).$$

Метрика евклідова, якщо знайдуться нові координати $x^1, \dots, x^n$, $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$,

$$\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \neq 0, \text{такі, що } g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^k}{\partial z^j} = \sum_{k,q=1}^{n} \delta_{kq}\frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^q}{\partial z^j}.$$

У координатах $x^1, \dots, x^n$ маємо $g_{ij=}\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$, і координати $x^1, \dots, x^n$ називаються евклідовими.

Лінійний дійсний простір розмірності n називається псевдоевклідовим простором індексу s, якщо в цьому просторі задана білінійна форма $(\varepsilon, \eta)_s = = -\varepsilon^1\eta^1 - \dots - \varepsilon^s\eta^s + \varepsilon^{s+1}\eta^{s+1} + \dots + \varepsilon^n\eta^n$. Якщо $s = 0$, то отримуємо евклідів простір. Псевдоевклідів простір індекса s позначається S_s^n. Простір R_1^4 є простором спеціальних теорій відносності і називається простором Мінковського. Довжина вектора ε в псевдоевклідовому просторі R_s^n визначається наступною формулою: $|\varepsilon|_s = \sqrt{(\varepsilon\varepsilon)_s}$.

3.2 Рух псевдоевклідового простору

Вивчимо трохи докладніше псевдоевклідів простір. Розглянемо рух псевдоевклідової площини R_1^2. Припустимо, що цей рух залишає нерухомим початок координат. І нехай в n-вимірному просторі задані дві області: $\sum_x$ з координатами $(x^1, \dots, x^n) = (x)$ та $\sum_z$ з координатами $(z^1, \dots, z^n) = (z)$. І нехай кожній точці області $\sum_z$ поставлена у відповідність точка області $\sum_x$, так, що $x^i = x^i(z^1, \dots, z^n)$. Якщо координати $z^1, \dots, z^n$ можна виразити через $x^1, \dots, x^n$, тобто $z^j = z^j(x^1, \dots, x^n), j = 1,2, \dots, n$, то будемо говорити, що задано перетворення області $\sum_z$ в області $\sum_x$. При цьому потрібно, щоб функції $z^i(x)$ і зворотні їм функції $z^j(x)$ були гладкими. Нехай тепер в області $\sum$ є ріманова або псевдоріманова метрика, яка задається в координатах $x^1, \dots, x^n$ симетричною невиродженою матрицею $g_{ij} = g_{ji}(x)$. Якщо задано перетворення $x^i = x^i(z)$ то в координатах (z) ця ж метрика задається матрицею

$$g_{ij} = g_{ji}(z), \text{де } g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial z^i} g_{kl} \frac{\partial x^l}{\partial z^j}.$$

Визначення. Перетворення $x^i = x^i(z)$ називається рухом даної метрики, якщо $g'_{ij}(z) = g_{ij}(x(z))$ [11].

Так як ми вивчаємо рух псевдоевклідової площині, то рух який розглядається задається матрицею

$$A: \begin{cases} x^0 = ay^0 + by^1, \\ x^1 = cy^0 + dy^1, \end{cases} \tag{3.1}$$

де (x^0, x^1) – псевдоевклідові координати,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Метрика в цих координатах має вигляд: $g_{ij} = (g_{00} = 1, g_{11} = -1, g_{10} = g_{01} = = 0)$. Так як перетворення (3.1) є рухом, то

$$G = (g_{ij}) = A^T G A. \tag{3.2}$$

З огляду на те, що $A^T = \mathrm{det}A$ і визначник добутку дорівнює добутку визначників, отримуємо: $(\mathrm{det}A)^2 = 1, \mathrm{det}A = \pm 1$. Таким чином, з рівності (3.2) маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c \\ b - d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 - c^2 = 1 \\ b^2 - d^2 = -1 \\ ab - cd = 0 \end{cases}, a \neq 0.$$

Нехай

$$\beta = \frac{c}{a}, b = \frac{c}{a}d, \frac{c^2 d^2}{a^2} - d^2 = -1, \beta^2 d^2 - d^2 = -1, d = \pm\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}},$$

$$d = \pm\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}.$$

Розглянемо

$$a^2 - c^2 = 1, c^2 = a^2 - 1, \frac{a^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{a^2}, 1 - \beta^2 = \frac{1}{a^2}, \quad a^2 = \frac{1}{1-\beta^2},$$

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, a^2 - c^2 = 1, c^2 = a^2 - 1, c^2 = \frac{1}{1-\beta^2} - 1 = \frac{1 - 1 + \beta^2}{1-\beta^2},$$

$$c = \pm\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Тут знак *a* співпадає зі знаком *c*, а знак b – зі знаком d.

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} & \pm\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta^2}} \\ \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta^2}} & \pm\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} \end{pmatrix}.$$

Якщо позначимо $\beta = tg\varphi$, тоді

$$ch\varphi = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}, ch\varphi = \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta^2}}.$$

Отже,

$$A = \pm\begin{pmatrix} ch\varphi & \pm sh\varphi \\ sh\varphi & \pm ch\varphi \end{pmatrix}. \qquad (3.3)$$

Множина перетворень (3.1) псевдоевклідової площині з матрицею A виду (3.3) утворює групу, яка називається групою гіперболічних поворотів або псевдоортогональною групою і позначається $O(1{,}1)$:

$$A_0 = \begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix}.$$

Визначення. Перетворення R_1^2 з матрицями A_0, A_3 називаються власними рухами псевдоевклідової площині, а з матрицями A_1, A_2 називаються ортохронними перетвореннями.

Розглянемо перетворення (3.1) у випадку, коли $A = A_0$, тоді

$$x^0 = \frac{y^0 + \beta y^1}{\sqrt{1-\beta^2}}; x^1 = \frac{\beta y^0 + \beta y^1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Так як $x^0 = cr, x^1 = x, y^0 = ct', y^1 = y$, то

$$ct = \frac{ct' + \beta y}{\sqrt{1-\beta^2}} \Longrightarrow t = \frac{t + \frac{\beta}{c} y}{\sqrt{1-\beta^2}}, x = \frac{\beta ct' + y}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Знайдемо вирази y і t' через x і t:

$$t' = t\sqrt{1-\beta^2} - \frac{\beta}{c}y; x\sqrt{1-\beta^2} - \beta ct' = y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t' = t\sqrt{1-\beta^2} - \tfrac{\beta}{c}\left(x\sqrt{1-\beta^2} - \beta ct'\right),$$

$$t'\left(1 - \frac{\beta}{c}\beta c\right) = \left(t - \frac{\beta}{c}x\right)\sqrt{1-\beta^2}, t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Аналогічно можна отримати, що

$$y = -\frac{\beta ct + x}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

З'ясуємо фізичний зміст параметра *β*. Нехай в системі координат *Y* знаходиться в стані спокою задана точка *M* – початок координат. В цьому випадку $y = 0$. А це означає, що

$$x - \beta ct = 0, \beta c = \frac{x}{t}, \text{але } \frac{x}{t} = \nu$$

є швидкість точки *M* в системі координат *X*, що дорівнює швидкості в системі координат *Y* щодо *X*. Значить

$$\beta = \frac{\nu}{\text{c}}.$$

Отже,

$$t = \frac{t' + \frac{\nu}{c^2}y}{\sqrt{1-\frac{\nu^2}{c^2}}}; x = \frac{\nu t' + y}{\sqrt{1-\frac{\nu^2}{c^2}}}; t' = \frac{t - \frac{\nu}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{\nu^2}{c^2}}}; y = \frac{-\nu t + x}{\sqrt{1-\frac{\nu^2}{c^2}}}$$

– перетворення Лоренца.

Можна зробити деякі висновки.

а) уповільнення часу.

Нехай в системі координат X на нерухомих годинах відбувається час $\Delta t = t_2 - t_1$. Знайдемо значення t_1' і t_2', що відповідають t_1 і t_2, в одній і тій же точці з абсцисою y в системі координат Y. З формул перетворення Лоренца маємо, що

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{v}{c^2}y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2}y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\ \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Звідси випливає, що $\Delta t' < \Delta t$. Таким чином, рухомий годинник йде повільніше нерухомого годинника.

б) скорочення довжин.

Нехай в системі координат X знаходиться стрижень, довжина якого ℓ, де x_1 – координати початку стрижня, x_2 – координати кінця стрижня, тобто $\ell = x_2 - x_1$. Якщо координати кінців цього стрижня в системі координат Y виміряні в один і той же момент часу t', рівний, y_1 і y_2, то, використовуючи формули перетворення Лоренца, маємо, що

$$x_1 = \frac{vt' + y_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\ x_2 = \frac{vt' + y_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \ell = x_2 - x_1 = \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\ell'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Таким чином, довжина ℓ' стрижня в тій системі відліку, щодо якої цей стрижень рухається, менше, ніж його довжина ℓ в тій системі відліку, щодо якої він знаходиться в стані спокою.

3.3 Криві в псевдоевклідовому просторі

Параметризованою кривою в евклідовому просторі R^3 називається відображення $r: I \longrightarrow R^3$, де $t \longrightarrow (x(t), y(t), z(t))$ [1].

Нехай задано тривимірний псевдоевклідів простір R^3. Вектори ортонормованного репера $\{0; \overrightarrow{a_0}; \overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}\}$ задовольняють умові: $\overrightarrow{a_0 a_0} = -1$, $\overrightarrow{a_\iota a_J} = 0$, $i, j = 0, 1, 2$, $\overrightarrow{a_\iota a_\iota} = 1$, $i = 1, 2$.

Координати будь-якої точки в цьому репері будемо позначати так: $a = (x^0, x^1, x^2), x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y$, так як $\overrightarrow{R_1^3}$ – підпростір Мінковського. У векторному просторі $\overrightarrow{R_1^3}$, пов'язаним з точковим простором R_1^3, існують часоподібні, простроподібні і ізотропні вектори. Залежно від того, яким буде в кожній точці кривої вектор дотичної, криві в просторі R_1^3 також будемо називати часоподібними, простроподібними і ізотропними.

Визначення. Відображення $r: I \longrightarrow R_1^3 : t \longrightarrow (x^0(t), x^1(t), x^2(t))$ будемо називати параметризованою кривою в псевдоевклідовому просторі R_1^3 і позначати $\vec{r}(t) = (x^0(t), x^1(t), x^2(t))$[11].

Визначення. Параметризована крива називається часоподібною n-параметризрваною кривою, якщо $\vec{r}'(t)\vec{r}(t) = -1$. Будемо позначати через σ натуральний параметр, а n-параметризовану криву будемо записувати у вигляді: $\vec{r}(\sigma) = (x^0(\sigma), x^1(\sigma), x^2(\sigma))$[11].

Знайдемо похідну:

$$\frac{d\vec{r}}{d\sigma} = \vec{r}'(\sigma) = \vec{\tau}(\sigma),$$

де $\vec{\tau}(\sigma)\vec{\tau}(\sigma) = -1$.

Із цієї рівності отримуємо, що $(d\vec{r})^2 = -(d\sigma)^2$. З іншого боку $(d\vec{r})^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2$. Отже $(d\sigma)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2$. Так як $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y$, то $(d\sigma)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2$. З цього витікає

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = c^2 - \left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right),$$

де

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Тоді

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = c^2 - \nu^2 \Longrightarrow \sigma = \mathrm{c}\int_a^b \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2} dt}$$

– довжина дуги часоподібної кривої, $\frac{\sigma}{c}$ в теорії спеціальної відносності називається власним часом частки.

Визначення. Часоподібна крива $\vec{r}(\sigma)$ називається регулярною, якщо $\vec{r}'(\sigma) \neq 0$ і бірегулярною, якщо $\vec{r}'(\sigma) \neq \lambda \vec{r}'''$.

Визначення. Вектором кривини часоподібної n-параметризованої кривої в точці σ називається вектор $\vec{k}(\sigma) = \vec{r}''(\sigma)$, а кривиною – величина $\vec{k}(\sigma) = |\vec{r}''(\sigma)|$.

До кожної точки часоподібної кривої прикріпимо правий ортонормований репер:

$$\vec{\tau}(\sigma) = \vec{r}'(\sigma), \vec{\nu}(\sigma) = \frac{\vec{r}''(\sigma)}{|\vec{r}''(\sigma)|} = \frac{\vec{k}(\sigma)}{k(\sigma)}.$$

Третій вектор $\vec{\beta}(\sigma)$ повинен бути ортогональним векторам $\vec{\tau}$ і $\vec{\nu}$, $|\vec{\beta}| = 1$. Щоб його визначити, введемо в просторі R_1^3 векторний добуток двох векторів так, щоб для векторів ортонормованого базису виконувалися наступні умови: $[\vec{a}_0, \vec{a}_1] = \vec{a}_2$; $[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = -\vec{a}_0$; $[\vec{a}_2, \vec{a}_0] = \vec{a}_1$ (див. рис. 3.8).

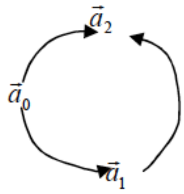

Рисунок 3.8 – Умови для векторів ортонормованого базиса

Для векторів $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ повинні виконуватися співвідношення (див. рис. 3.9):

Рисунок 3.9 – Співвідношення для векторів $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$

Репер $\left\{\vec{r}(\sigma); \vec{\tau}(\sigma); \vec{\nu}(\sigma); \vec{\beta}(\sigma)\right\}$ називається репером Френе кривої $r = r(\sigma)$ в точці σ, де $\vec{\tau}$ – вектор дотичної, $\vec{\nu}$ – головна нормаль, $\vec{\beta}$ – бінормаль. Площина, що містить вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{\nu}$, будемо називати дотичною, площину, яка містить вектори $\vec{\nu}$ і $\vec{\beta}$, – нормальною, а вектора $\vec{\beta}$ і $\vec{\tau}$ – спрямними:

$L(\vec{\tau}, \vec{\nu})$ – дотична площини,

$L\left(\vec{\nu}, \vec{\beta}\right)$ – нормальна площини,

$L\left(\vec{\beta}, \vec{\tau}\right)$ – спрямна площини.

Виведемо аналог формул Френе для часоподібної кривої. Так як $\vec{\tau}(\sigma) = \vec{r}'(\sigma)$, то $\vec{\tau}'(\sigma) = \vec{r}''(\sigma) = k\vec{\nu}, \vec{\tau}(\sigma) = k\vec{\nu}$. Так як репер Френе правий ортонормований репер, то для нього здійснені рівності: $\vec{\tau}\vec{\tau} = -1$; $\vec{\nu}\vec{\nu} = 1$; $\vec{\beta}\vec{\beta} = 1$; $\vec{\tau}\vec{\nu} = \vec{\nu}\vec{\beta} = \vec{\tau}\vec{\beta} = 0$. Потрібно знайти $\vec{\beta}'$. Вектор $\vec{\beta}'$ ортогональний векторам $\vec{\beta}$ і $\vec{\tau}$, тобто він колінеарний вектору $\vec{\nu}$: так як $\vec{\beta}\vec{\beta} = 1 \Longrightarrow 2\vec{\beta}\vec{\beta} = 0$, тобто $\vec{\beta} \perp \vec{\beta}'$; $\vec{\tau}\vec{\beta} = 0 \Longrightarrow \underbrace{\vec{\tau}'}_{k\nu}\vec{\beta} + \vec{\tau}\vec{\beta}' = 0$. Значить, що $\vec{\tau}' = k\vec{\nu} \Longrightarrow \underbrace{k\vec{\nu}\vec{\beta}}_{0} + \vec{\tau}\vec{\beta}' = = 0 \Longrightarrow \vec{\tau} \perp \vec{\beta}'$.

Таким чином, $\vec{\tau}' = k\vec{\nu}$; $\vec{\beta}' = æ\vec{\nu}$. Так як $\vec{\nu} = [\vec{\beta}, \vec{\tau}]$, то $\vec{\nu}' = [\vec{\beta}', \vec{\tau}'] = -æ[\vec{\nu}, \vec{\tau}] + k[\vec{\beta}, \vec{\nu}] = k\vec{\tau} + æ\vec{\beta}$.

Отже,

$\vec{\tau}' = k\vec{\nu}$

$\vec{\nu}' = k\vec{\tau}' + æ\vec{\beta}$ – формули Френе часоподобної n-параметризрваної

$\vec{\beta}' = æ\vec{\nu}$ кривої.

У цих формулах функції $k(\sigma)$ і $æ(\sigma)$ назвемо кривиною і скрутом. Знайдемо формули для їх обчислення: $\vec{r}' = \vec{\tau}$; $\vec{r}'' = \vec{k}\vec{\nu}'$; $\vec{r}''' = k^2\vec{\tau} + kæ\vec{\beta}$. Знайдемо векторний добуток: $[\vec{r}', \vec{r}''] = [\vec{\tau}, k\vec{\nu}] = k\beta \Longrightarrow k = |[\vec{r}', \vec{r}'']|$, тобто $k(\sigma) = |[\vec{r}'(\sigma), \vec{r}''(\sigma)]|$.

Знайдемо тепер добуток

$$[\vec{r}', \vec{r}]\vec{r}''' = [\vec{\tau}, k\vec{\nu}]\left(k^2\vec{\tau} + kæ\vec{\beta}\right) = k^3 \underbrace{[\vec{\tau}, \vec{\nu}]}_{0} \vec{\nu} + k^2æ \underbrace{[\vec{\tau}, \vec{\nu}]\vec{\beta}}_{1} = 0 + k^2æ\vec{\beta}\vec{\beta} = k^2æ.$$

Таким чином,

$$æ(\sigma) = \frac{\vec{r}^{\,'}(\sigma), \vec{r}^{\,''}(\sigma)}{\left|\left[\vec{r}^{\,'}(\sigma), \vec{r}^{\,''}(\sigma)\right]\right|^2}.$$

Нехай крива $\vec{r}(\sigma)$ має іншу еквівалентну параметризацію, відмінну від n-параметризації, тобто нехай $\vec{\rho}(t) = (x^0(t), x^1(t), x^2(t))$, де $t = t(\sigma)$ – функція переходу, тобто $\vec{r}(\sigma) = \vec{\rho}\big(t(\sigma)\big)$. Тоді

$$\vec{r}'(\sigma) = \frac{d\vec{\rho}}{dt}\frac{dt}{d\sigma} = \vec{\rho}' t';$$

$$\vec{r}''(\sigma) = \vec{\rho}''(t')^2 + \vec{\rho}' t''; \; \vec{r}'''(\sigma) = \vec{\rho}'''(t')^3 + 3\vec{\rho}'' t' t'' + \vec{\rho}' t'''.$$

Підставивши отримані формули в вирази для обчислення кривини і скруту, отримуємо: $\left(\vec{r}''(\sigma)\right)^2 = (\vec{\rho}')^2(t')^2$.

$$(t')^2 = \frac{1}{(\vec{\rho}')^2},$$

тобто

$$t' = \frac{1}{\sqrt{-(\vec{\rho}')^2}},$$

т. я. $\vec{r}'(\sigma) \cdot \vec{r}'(\sigma) = -1.$ Тоді

$$k(\sigma) = |[\vec{r}'(\sigma)\vec{r}''(\sigma)]| = |[\vec{\rho}'t', \vec{\rho}''(t')^2 + \vec{\rho}'t'']| = (t')^3|[\vec{\rho}', \vec{\rho}'']| =$$
$$= \frac{|[\vec{\rho}', \vec{\rho}'']|}{\left(\sqrt{1 -}\,(\vec{\rho}')^2\right)^3},$$
$$æ(\sigma) = \frac{\vec{r}'(\sigma)\vec{r}''(\sigma)\vec{r}'''(\sigma)}{|[\vec{r}', \vec{r}'']|^2} = \frac{[\vec{r}', \vec{r}'']\vec{r}'''}{|[\vec{r}', \vec{r}'']|^2} =$$
$$= \frac{(t')^3[\vec{\rho}', \vec{\rho}''](\vec{\rho}'''(t')^3 + 3\vec{\rho}'''t't'' + \vec{\rho}'t''')}{((t')^3|[\vec{\rho}', \vec{\rho}'']|)^2} = \frac{(t')^6\vec{\rho}'\vec{\rho}''\vec{\rho}'''}{(t')^6|[\vec{\rho}', \vec{\rho}'']|^2} = \frac{\vec{\rho}'\vec{\rho}''\vec{\rho}'''}{[\vec{\rho}', \vec{\rho}'']^2}.$$

Отже, кривина:

$$r(t) = \frac{|[\vec{r}'(t), \vec{r}''(t)]|}{\left(\sqrt{1 - \left(\vec{r}'(t)\right)^2}\right)^3},$$

скрут:

$$æ(t) = \frac{\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\vec{r}'''(t)}{[\vec{r}'(t), \vec{r}''(t)]}.$$

ВИСНОВКИ

В кваліфікаційній роботі були розглянуті лише деякі питаннях теорії метричних просторів. Цілий ряд методичних задач виникає при організації вивчення в метричних просторах відкритих і замкнутих множин, збіжність послідовностей точок, неперервних відображень і т.д. [8].

Як правило, будь-яке завдання з курсу вищої математики зводиться до розв'язання послідовності завдань елементарної математики. Важливим методичним завданням є виділення тих понять і властивостей, що вивчаються в шкільній математиці, які застосовуються при вивченні відповідної теми. Це дозволяє ефективно організувати пропедевтику [14]. Огляд поняття множини та її властивостей, метрики, метричного простору дозволяє уніфіковано проводити перевірку аксіом для метрик певного виду, що й було продемонстровано в кваліфікаційної роботі.

Довели залежність системи аксіом метрики і леми Коші-Буняковського та Мінковського які корисні для перевірки аксіоми трикутника. Виявили, що досить прийняти тільки аксіоми тотожності і нерівність трикутника, так як аксіоми невід'ємності і симетрії є їх наслідками.

Розглянули арифметичний евклідів простір, метрику Хемінга та рівномірну метрику і виявили, що на основі однієї і тієї ж множини можна, задаючи різні метрики, будувати різні метричні простори.

Побудували метричні простори C на множині комплексних чисел, $C_2[a,b]$ на множині неперервних функцій і l_2 на множині числових послідовностей. Наведені приклади показують, що поняття метрики і метричного простору дозволяють розглядати з єдиних позицій такі несхожі на перший погляд об'єкти, як дійсні і комплексні числа, вектора, неперервні функції і числові послідовності.

Розглянули псевдоевклідів простір, дослідили його перетворення і виявили, що при русі цього простору уповільнюється час та зменшується довжина стрижня. Вивчили параметризовану криву превдоевклідового простору, вивели аналог формул Френе для часоподібної кривої та обчислили кривину і скрут.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Андреева З. И., Шеремет Г. Г. Псевдоевклидова плоскость: учеб. пособие. Орел : Изд. ОГУ, 2002. 140 с.
2. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. Ижевск : Ин-т компютерных исследований, 2004. 512 с.
3. Васильев Н. Метрические пространства // *Квант*. 1970. № 10. С. 11-22.
4. Васильев Н. Метрические пространства // *Квант*. 1990. № 1. С.16-23.
5. Вечтомов Е. М. Математика: основные математические структуры: учеб. пособие для СПО. 2-е изд. Москва : Издательство Юрайт, 2018. 296 с.
6. Голод П. І., Клімик А. У. Математичні основи теорії симетрій. Київ : Наукова Думка, 1992. 336 с.
7. Завало С. Т. Елементи аналізу. Алгебра многочленів. Київ : Радянська школа, 1972. 464 с.
8. Климов Е. А. Психолого-педагогические проблемы профессиональной консультации. Москва : Знание, 1983. 95 с.
9. Кузьмина Н. В. Методы исследования педагогической деятельности. Ленинград : Изд-во ЛГУ, 1970. 116 с.
10. Кутузов А. С. Метрические пространства: учебное пособие. Троицк : Ин-т физики высоких давлений им. Л. Ф. Верещагина, 2012. 100 с.
11. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. Москва : Наука, 1969. 548 с.
12. Скворцов В. А. Примеры метрических пространств. // *Математическое просвящение*. Москва : МЦНМО, 2001. № 9. С. 21.

13. Скворцов В. А. Примеры метрических пространств. *Математическое просвящение*. Москва : МЦНМО, 2002. № 16. С. 24.
14. Стеганцев Е. В., Ткаченко И. Г. Организация пропедевтики темы «Метрические пространства». *Вісник Запорізького національного унаверситету.* Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2010. № 2 (3). С. 240-245.
15. Успенский В. А. Что такое аксиоматический метод? Ижевск : Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика». 2001, 96 с.
16. Харламов В. М., Виро О. Я. Элементарная топология Москва : Изд-во МЦНМО, 2008. 354 с.
17. Шрейдер Ю. А. Что такое расстояние? // *Популярные лекции по математике*. Москва : Физматгиз, 1963. № 38. С. 76.
18. Stone M. H. Boolean algebras and their applications to topology // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 1934. № 20. P. 197-202.
19. Hazewinkel M. Metric space. Encyclopedia of Mathematics. Springer, 2001. 546 с.

Декларація

академічної доброчесності

здобувача ступеня вищої освіти ЗНУ

Я, ______________ Панкратова Юлія Олександрівна ______________

студент(ка) __2_ курсу, _____заочної_______ форми навчання, математичного факультету, спеціальності _______111 математика______________________, адреса електронної пошти _____________julka.alex.88@gmail.com_________,

– підтверджую, що написана мною кваліфікаційна робота магістра на тему «Особливості побудови метричної структури на непорожній множині» відповідає вимогам академічної доброчесності та не містить порушень, що визначені у ст. 42 Закону України «Про освіту», зі змістом яких ознайомлений/ознайомлена;

– заявляю, що надана мною для перевірки електронна версія роботи є ідентичною її друкованій версії;

– згоден/згодна на перевірку моєї роботи на відповідність критеріям академічної доброчесності у будь-який спосіб, у тому числі за допомогою інтернет-системи, а також на архівування моєї роботи в базі даних цієї системи.

Студент

		Панкратова Ю.О.
(дата)	(підпис)	(прізвище, ініціали)

Науковий керівник

		Стєганцев Є.В.
(дата)	(підпис)	(прізвище, ініціали)