МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра загальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОНЯТТЯ ВЕКТОРНОГО ДОБУТКУ НА ВИПАДОК БАГАТОВИМІРНОГО ПРОСТОРУ»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1119-з
спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми математика
О. Г. Сафонік
(ініціали та прізвище)
Керівник доцент кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Стєганцев Є.В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри фундаментальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Ткаченко І.Г.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя
2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра загальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри загальної математики, к.ф.-м.н. доцент

_______________ Зіновєєв І.В.

(підпис)

« 21 » 05 2020 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Сафонік Ользі Геннадіївні

(прізвище, ім'я та по батькові)

1. Тема роботи Узагальнення векторного добутку на випадок багатовимірного простору

керівник роботи Стєганцев Євгеній Вікторович, к.ф.-м.н, доцент

(прізвище, ім'я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 20 » 05 2020 року № 577-с

2. Строк подання студентом роботи 23.11.2020

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Векторний добуток двох векторів в тривимірному евклідовому просторі
2. Узагальнення поняття векторного добутку на випадок n-вимірного евклідового простору
3. Знаходження векторного добутку двох векторів у багатовимірному просторі

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) ілюстрації до тексту роботи, презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 21.05.2020

К А Л Е Н Д А Р Н И Й П Л А Н

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	29.05.2020	
2.	Збір вихідних даних.	05.06.2020	
3.	Обробка методичних та теоретичних	15.06.2020	
	джерел.		
4.	Розробка першого та другого розділу.	06.07.2020	
5.	Розробка третього розділу.	07.09.2020	
6.	Оформлення та нормо контроль	09.11.2020	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	10.12.2020	

Студент ____________ О. Г. Сафонік
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ____________ Є. В. Стєганцев
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ____________ О. Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Узагальнення поняття векторного добутку на випадок багатовимірного простору»: 45 с., 4 рис., 21 джерел.

ВЕКТОР, ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК, МЕТРИЧНИЙ ПРОСТІР R^n, МОДУЛЬ ВЕТОРА, МОМЕНТ СИЛИ, М-РОЗЩЕПЛЕННЯ БАЗИСНОГО ВЕКТОРА, N-ВИМІРНИЙ АРИФМЕТИЧНИЙ ТОЧКОВИЙ ПРОСТІР.

Об'єкт дослідження – векторний добуток в багатовимірному просторі.

Мета роботи: надати необхідні теоретичні відомості про векторний добуток, узагальнити в багатовимірному просторі векторний добуток двох векторів декількома способами, порівняти їх результати.

Методи дослідження – аналітичний, синтез, порівняльний, аналіз.

У кваліфікаційній роботі розглядаються необхідні теоретичні відомості про векторний добуток, його властивості. Розглянуто багатовимірний простір, багатовимірні вектори та операції над ними.

На базі дослідженого матеріалу узагальнено в багатовимірному просторі векторний добуток двох векторів декількома способами, а саме, відносно довільних $n-3$ фіксованих векторів, шляхом розщепленням базисного вектора, шляхом повороту координатних 2-площин.

За допомогою цих методів було знайдено векторний добуток двох векторів у багатовимірному просторі та порівняно результати.

Результати роботи можуть бути використанні для практичного розв'язування подібних задач або для подальшого дослідження даної теми.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis «The generalization of the cross product for the many-dimensional space»: 45 pages, 4 figures, 21 references.

VECTOR, CROSS PRODUCT, METRIC SPACE R^n, MODULUS OF THE VECTOR, MOMENT OF FORCE, M-SPLITTANCE OF THE BASIS VECTOR, N-DIMENSIONAL ARITHMETICAL POINT SPACE

The object of the study is the cross product in many-dimensional space.

The aim of the study is to give the necessary theoretical data, connected with the cross product, to generalize the concept of the cross product for the case of such kind of the space, to find the cross product using the different techniques and to compare the results.

The methods of the research are analytical, synthesis, analysis.

The necessary theoretical data connected with the cross product and its properties have been given. The many-dimensional space, many-dimensional vectors and the vector operations have been considered.

One uses the studied material in order to obtain several generalizations of the cross product of two vectors for the case of many-dimensional space. These generalizations enable to find the cross product of the vectors with respect to any $n-3$ chosen vectors, using the splittance of the basis vector and using the rotation of the coordinate 2-planes.

The cross product of two vectors in many-dimensional space has been found with the help of these methods. The results have been compared.

One can use the results of this study for the practical solving of such kind of the problems and for the follow-up study of this theme.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Неможливо на сьогоднішній день стверджувати, що людство живе в тривимірному просторі. Недостатньо вказали лише координати, наприклад, свого місце розташування, потрібно ще конкретизувати коли саме ви перебуваєте там, тобто позначити час. А це вже чотиривимірний простір. Використання багатовимірних просторів дозволяє аналізувати різні складні об'єкти, що мають велику кількість параметрів. А за допомогою векторного добутку розв'язуються задачі в механіці, фізиці та інших науках, тому узагальнення даної операції в багатовимірному просторі є задачею актуальною.

Мета та завдання дослідження: надати необхідні теоретичні відомості про векторний добуток, узагальнити в багатовимірному просторі векторний добуток двох векторів декількома способами, порівняти їх результати.

Об'єкт дослідження – векторний добуток у багатомірному просторі.

Методи дослідження. У роботі використовуються такі методи, як: аналітичний, синтез, порівняльний, аналіз.

Практичне значення одержаних результатів. Результати роботи можуть бути використанні у практичному застосуванні для розв'язування подібних задач або для подальшого дослідження даної теми.

Структура й обсяг кваліфікаційної роботи. Робота складається з трьох розділів. У першому розділі описано основні поняття та властивості векторного добутку двох векторів у тривимірному евклідовому просторі, наведено приклади використання векторного добутку.

У другому розділі подано основні поняття та властивості багатовимірних просторів, узагальнено векторний добуток двох векторів у n-вимірному просторі кількома способами.

У третьому розділі показано знаходження векторного добутку двох векторів у багатовимірному просторі, використовуючи способи, що були описані у другому розділі.

1 ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ У ТРИВИМІРНОМУ ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ

1.1 Основні поняття і властивості

У роботі «Алгебра та геометрія: аналітична геометрія» Зіновєєв І. В. [1] надає наступні два означення.

Означення 1.1 «Вектор – напрямлений відрізок прямої.»

Позначається вектор $\bar{a}$ або $\vec{a}$. Якщо A – початок вектора, а B – кінець, то тоді вектор можна позначати як $\overline{AB}$ або $\overrightarrow{AB}$.

Означення 1.2 «Відстань між кінцем і початком вектора $\bar{a}$ будемо називати довжиною або модулем вектора й позначати одним із символів: $|\bar{a}|$ або $|\vec{a}|$.»

Наступне означення висвітлено у роботі «Курс аналітичної геометрії і лінійної алгебри» Беклемишева Д. В. [2].

Означення 1.3 «Векторним добутком двох ненульових векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, який задовольняє таким умовам:

а) вектор $\bar{c}$ перпендикулярний до площини, в які лежать вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (рис. 1.1)

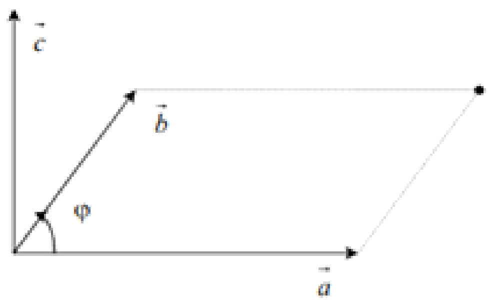

Рисунок 1.1 – Перпендикулярність вектора $\bar{c}$ до векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$

б) вектор $\bar{c}$ направлений в той бік, що якщо дивитися з його кінця, то найкоротший оберт від вектора $\bar{a}$ до вектора $\bar{b}$ буде виконуватись проти годинникової стрілки, тобто вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ утворюють праву трійку векторів;

в) довжина вектора $\bar{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, як на сторонах.»

Позначення векторного добутку: $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = [\bar{a}, \bar{b}]$.

Опираючись на матеріал посилань [3-8], можна виділити, що векторний добуток має геометричні та алгебраїчні властивості.

Геометричні властивості:

а) довжина вектора $\bar{c}$ векторного добутку $\bar{a}$ і $\bar{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, як на сторонах;

Площа паралелограма зі сторонами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ і гострим кутом між ними φ обчислюється за формулою:

$$S = |\bar{a}|\left|\bar{b}\right| sin\varphi,$$

тому векторний добуток подається у вигляді:

$$|\bar{c}| = |\overline{a}| * |\overline{b}| * sin\varphi;$$

б) $|\bar{c}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = |\overline{a}| * |\overline{b}|$, якщо $sin\varphi$ =1, тобто $\varphi = \frac{\pi}{2}$, або $\bar{a} \perp \bar{b}$;

в) $\bar{a} \times \bar{b} = 0$, коли $\varphi = 0$ або $\varphi = \pi$, тобто вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні;

г) вираз $\bar{a} \times \bar{a} = [\bar{a}, \bar{a}] = [\bar{a}]^2$ називається векторним квадратом, який дорівнює нульовому вектору.

Алгебраїчні властивості:

а) якщо множники векторного добутку поміняти місцями знак векторного добутку зміниться на протилежний:

$$[\bar{a},\bar{b}] = -[\bar{b},\bar{a}];$$

б) сполучності множення:

$$\lambda[\bar{a},\bar{b}] = [\lambda\bar{a},\bar{b}] = [\bar{a},\lambda\bar{b}];$$

в) розподільча властивість відносно операції додавання:

$$[\bar{a}+\bar{b},\bar{c}] = [\bar{a},\bar{c}] + [\bar{b},\bar{c}],$$
$$[\bar{c},\bar{a}+\bar{b}] = [\bar{c},\bar{a}] + [\bar{c},\bar{b}];$$

г) обчислення векторного добутку, за допомоги координат векторів.

Опираючись на роботу Постнікова М. М. [9], розглянемо ортонормований базис – $\{\bar{\imath},\bar{\jmath},\bar{k}\}$ (рис. 1.2).

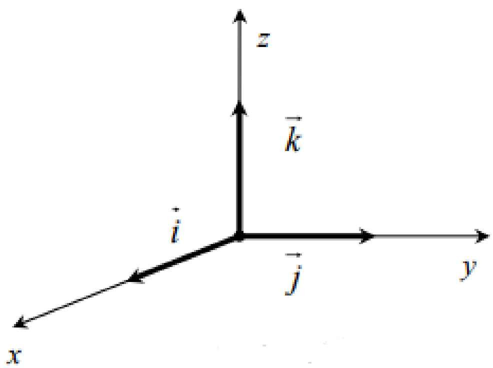

Рисунок 1.2 – Розміщення ортів

Визначимо векторні добутки цих векторів:

$$[\bar{\imath}\bar{\imath}] = [\bar{\imath}]^2 = 0,\ [\bar{\imath}\bar{\jmath}] = \bar{k},\ [\bar{\imath}\bar{k}] = -\bar{\jmath},\ [\bar{\jmath}\bar{\imath}] = -\bar{k},$$
$$[\bar{\jmath}\bar{\jmath}] = [\bar{\jmath}]^2 = 0, [\bar{\jmath}\bar{k}] = \bar{\imath},\ [\bar{k}\bar{\imath}] = \bar{\jmath},$$
$$[\bar{k}\bar{\jmath}] = -\bar{\imath},\ [\bar{k}\bar{k}] = [\bar{k}]^2 = 0. \tag{1.1}$$

На основі розподільчої властивості векторний добуток векторів можна виконати за правилом множення многочлена на многочлен. Тому векторний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ матиме наступний вигляд:

$$\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = \left(X_1\bar{\imath} + Y_1\bar{\jmath} + Z_1\bar{k}\right) \times \left(X_2\bar{\imath} + Y_2\bar{\jmath} + Z_2\bar{k}\right) =$$
$$= X_1X_2[\bar{\imath}\bar{\imath}] + X_1Y_2[\bar{\imath}\bar{\jmath}] + X_1Z_2\left[\bar{\imath}\bar{k}\right] + Y_1X_2[\bar{\jmath}\bar{\imath}] +$$
$$+Y_1Y_2[\bar{\jmath}\bar{\jmath}] + Y_1Z_2\left[\bar{\jmath}\bar{k}\right] + Z_1X_2\left[\bar{k}\bar{\imath}\right] + Z_1Y_2\left[\bar{k}\bar{\jmath}\right] + Z_1Z_2\left[\bar{k}\bar{k}\right]. \qquad (1.2)$$

Підставляючи значення 1.1 у формулу 1.2, одержимо:

$$\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = (Y_1Z_1 - Z_1Y_2)\bar{\imath} - (X_1Z_2 - Z_1X_2)\bar{\jmath} + (X_1Y_2 - Y_1X_2)\bar{k}.$$

Дану формулу можна записати у вигляді визначника третього порядку:

$$\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\bar{\imath} - \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}\bar{\jmath} - \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\bar{k}. \qquad (1.3)$$

1.2 Використання векторного добутку при вирішенні задач

Векторний добуток використовують для обчислень у різних галузях науки. У механіці використовують векторний добуток для знаходження моменту сили $\bar{F}$.

У роботі «Алгебра та геометрія» Тевяшева А. Д. [10], показано знаходження момент сили відносно точки. Нехай у деякій точці B прикладена сила $\bar{F}$.

Означення 1.4 «Моментом сили $\bar{F}(X_2, Y_2, Z_2)$ прикладеної в точці B, відносно довільної точки A (рис. 1.3) називається вектор, який дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\overline{r_B} = \overline{AB}\{X_1, Y_1, Z_1\}$ на вектор сили $\bar{F}$:

$$\overline{M_A}(\bar{F}) = [\overline{r_B}, \bar{F}] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.» \quad (1.4)$$

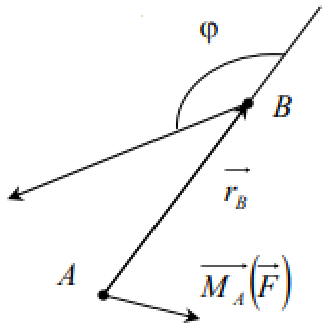

Рисунок 1.3 – Моментом сили $\bar{F}$, прикладеної в точці B

Приклад подано з роботи «Задачі та вправи з аналітичної геометрії» Цубербиллера О. Н. [12].

Приклад 1 «Сила $\bar{F} = \{1; 3; 2\}$ прикладена в точці $B(\ 3\ ; 4;\ 5)$. Знайти момент сили $\bar{F}$ відносно точки $A(\ 1\ ; 2;\ 3)$.»

Розв'язання. Для початку знайдемо $\overline{r_B} = \overline{AB}\{2,2,2\}$. Тоді:

$$\overline{M_A}(\bar{F}) = [\overline{r_B}, \bar{F}] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2\bar{\imath} - 2\bar{\jmath} + 4\bar{k}.$$

Векторний добуток може бути використаний для обчислення моменту сил, що діють на диполь, для обчислення сили, яка діє на провідник зі струмом в магнітному полі, в гіроскопічних ефектах і т.д.

У роботі «Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії» Шестопала А. Ф. [11], висвітлено наступний приклад.

Приклад 2 «Обчислити площу трикутника ABC з вершинами в точках $A(\ 1\ ; 0; 2), B(\ 2; 1; 3), C(\ 0\ ; 1;\ \ 2)$.»

Розв'язання. По,будуємо вектори $\overline{AB}(1; 1; 1)$ і $\overline{AC}(-1; 1; 0)$ (рис. 1.4).

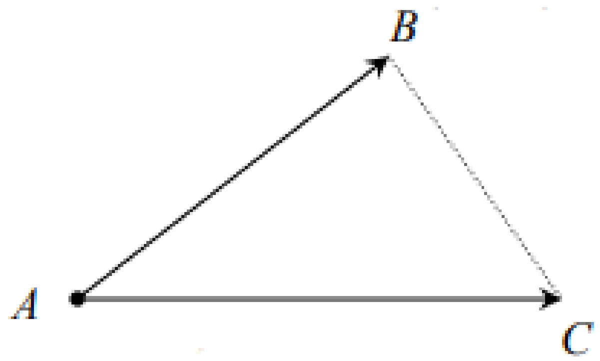

Рисунок 1.4 – Трикутник ABC

Знайдемо векторний добуток $[\overline{AB}, \overline{AC}]$:

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\bar{\imath} - \bar{\jmath} + 2\bar{k}.$$

За геометричною властивістю, довжина вектора векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма побудованого на векторах, як на сторонах. А площа трикутника дорівнює половині площі відповідного паралелограма. Отже,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|[\overline{AB}, \overline{AC}]| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}\ (\text{од}^2.).$$

Приклад подано з роботи «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» Травкіна Ю. І. [12].

Приклад 3 «Обчислити синус кута A трикутника ABC з вершинами $A(1;0;2), B(2;1;3), C(0;1;2)$.»

Розв'язання. Синус кута A трикутника ABC можна обчислити за формулою:

$$\sin A = \frac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{|\overline{AB}| * |\overline{AC}|}.$$

Кут A слід взяти гострим, якщо $BC^2 < AB^2 + AC^2$ і тупим, якщо $BC^2 > AB^2 + AC^2$. Ці нерівності безпосередньо випливають із теореми косинусів.

Отже, $\overline{AB}(1,1,1)$, $\overline{AC}(-1,1,0)$, $\overline{AB}(-2,0,0)$, тоді $|\overline{AB}|^2 = 3, |\overline{AC}|^2 = 2$, $|\overline{BC}|^2 = 5$. Для нашого випадку виконується $|\overline{BC}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2$, отже кут $A = 90°$.

До цього висновку можна прийти, якщо обчислити скалярний добуток вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$, який буде дорівнювати нулеві.

1.3 Доведення тотожності Якобі та його застосування

У роботі Базилєва В. Т. за посиланням [6], висвітлено наступне означення.

Означення 1.5 «Потрійний векторний добуток або подвійний векторний добуток $[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$ векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – векторний добуток вектора $\bar{a}$ на векторний добуток векторів $\bar{b}$ і $\bar{c}$:

$$[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}] = [\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]].»$$

За цим посиланням, цей добуток трьох векторів називається як потрійним (за числом векторів), так і подвійним (за числом операцій добутку).

Для подвійного векторного добутку справедлива формула Лагранжа:

$$\left[\bar{a}, \left[\bar{b}, \bar{c}\right]\right] = \bar{b}(\bar{a}, \bar{c}) - \bar{c}\,(\bar{a}, \bar{b}), \tag{1.5}$$

яку можна запам’ятати по мнемонічному правилу «бац мінус цаб».

Будемо доводити формулу 1.5, опираючись на роботи Базилєва В. Т. за посиланням [6,7] та роботи Ніколаєва О. Г. та Рибицької О. М. за посиланнями [14] та [15] відповідно.

Доведення. Нехай $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}$ - правий ортонормований базис такий, що:

$$\bar{a} = \alpha_1\bar{e_1} + \alpha_2\bar{e_2} + \alpha_2\bar{e_3},$$
$$\bar{b} = \beta_1\bar{e_1} + \beta_2\bar{e_2},$$
$$\bar{c} = \gamma_1\bar{e_1}.$$

Тоді, підставляючи вищевказані дані у праву частину формули 1.5, отримаємо:

$$\left[\bar{b}, \bar{c}\right] = (0, 0, -\beta_2\gamma_1),$$
$$\left[\bar{a}, \left[\bar{b}, \bar{c}\right]\right] = (-\alpha_2\beta_2\gamma_1, \alpha_1\beta_2\gamma_1, 0).$$

А також використовуючи обраний ортонормований базис у ліву частину формули 1.5, маємо:

$$\bar{b}(\bar{a}, \bar{c}) - \bar{c}\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = \alpha_1\gamma_1\bar{b} - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)\bar{c} =$$
$$= (-\alpha_2\beta_2\gamma_1, \alpha_1\beta_2\gamma_1, 0).$$

Для подвійного векторного добутку виконується тотожність Якобі:

$$[\bar{a},\bar{b},\bar{c}] + [\bar{b},\bar{c},\bar{a}] + [\bar{c},\bar{a},\bar{b}] = \bar{0}. \tag{1.6}$$

Дана тотожність 1.6 доводиться розкриттям дужок за формулою Лагранжа під номером 1.5:

$$[\bar{a},\bar{b},\bar{c}] + [\bar{b},\bar{c},\bar{a}] + [\bar{c},\bar{a},\bar{b}] = \bar{b}(\bar{a},\bar{c}) - \bar{c}\,(\bar{a},\bar{b}) +$$
$$+\bar{c}(\bar{b},\bar{a}) - \bar{a}\,(\bar{b},\bar{c}) + \bar{a}(\bar{c},\bar{b}) - \bar{b}\,(\bar{c},\bar{a}) = \bar{0}.$$

1.4 Висновок до першого розділу

У даному розділі подано визначення векторного добутку для тривимірного евклідового простору. Висвітлено геометричні (довжина векторного добутку векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнює площі паралелограма зі сторонами $|\bar{a}|$ і $|\bar{b}|$ та кутом між ними) та алгебраїчні (антикомутативність, сполучність множення, розподільність відносно додавання) властивості векторного добутку. Описано знаходження векторного добутку за допомогою координат у вигляді визначника третього порядку. Наведено приклади використання векторного добутку: знаходження моменту сили, площ плоских фігур, синуса кута між двома векторами. А також представлено доведення тотожності Якобі, використовуючи векторний добуток.

2 УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОНЯТТЯ ВЕКТОРНОГО ДОБУТКУ НА ВИПАДОК БАГАТОВИМІРНОГО ЕВКЛІДОВОГО ПРОСТОРУ

2.1 Визначення та приклади n-вимірних просторів

При вивченні багатьох фізичних процесів часто доводиться мати справу з такими функціональними залежностями, в яких числове значення однієї з них повністю визначається значеннями декількох інших. Наприклад, температура T тіла в даний момент часу t може змінюватися від точки до точки. Кожна точка визначається трьома координатами x, y, z. Якщо при цьому враховувати час, то температура в загальному випадку залежить від чотирьох змінних $T = T(x, y, z, t)$. Також, при вивченні звукових коливань газу щільність ρ і його тиск P визначаються значеннями змінних x, y, z, t. Об'єм паралелепіпеда є функцією трьох змінних x, y, z, тобто $V = V(x, y, z)$.

Для вивчення таких закономірностей вводиться поняття функції декількох змінних і розглядається апарат для дослідження таких функцій. У роботі Кононюка А. Є. «Дискретно-неперервна математика» за посиланням [16], висвітлено наступні означення.

Означення 2.1 «N-вимірним арифметичним точковим простором називається множина всіх упорядкованих наборів $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ дійсних чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ і позначається R^n, а його елементи - точками або векторами простору R^n, (n-вимірним точками або n-вимірним векторами).»

Означення 2.2 «Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ називаються координатами точки (вектора) $(x_1; x_2; \dots; x_n)$.»

Точки простору R^n позначаються $M\ (x_1; x_2; \dots; x_n)$ або $x\ (x_1; x_2; \dots; x_n)$.

Означення 2.3 «Точка $O\ (0; 0; \dots; 0)$ називається початком координат.

Для n-вимірного простору (n-довільне) вводиться поняття відстані між двома точками.»

Означення 2.4 «Відстанню (метрикою) $\rho(x; x')$ між двома точками

$x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ та $x' = (x'_1; x'_2; \dots; x'_n)$ n-вимірного простору називається число:

$$\rho(x; x') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2} =$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x'_i)^2}.»$$

Відстань $\rho(x; x')$ між двома точками $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ та $x' = (x'_1; x'_2; \dots; x'_n)$ n-вимірного простору R^n має властивості:

а) рефлективність: $\rho(x; x') = 0$, тоді та тільки тоді, коли $x = x'$;

б) симетричність: $\rho(x; x') = \rho(x'; x)$;

в) транзитивність: $\rho(x; x'') \leq \rho(x; x') + \rho(x'; x'')$.

Якщо покласти $n = 1$, то виходить формула відстані між двома точками на прямій (у просторі R^1):

$$\rho(x; x') = |x_1 - x'_1|.$$

При $n = 2$ отримуємо формулу для обчислення відстані між двома точками на площині (в просторі R^2):

$$\rho(x; x') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2},$$

а при $n = 3$ – у просторі R^3:

$$(x; x') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}.$$

Означення 2.5 «Арифметичний n-вимірний простір, в якому визначено відстань між двома точками, називають метричними простором R^n (евклідовим простором).»

При $n = 1,2,3$ між точками простору R^n і числової прямої R (координатної площиною R^2, координатним простором R^3) встановлена взаємно однозначна відповідність, яка дозволяє вивчати реальні геометричні об'єкти аналітично.

При $n > 3$ простір R^n є абстракцією, при якій можна розглядати довільні підмножини цього простору, що задовольняють деяким умовам, як певні «фігури». Вони задаються аналітично так само, як R^2 і R^3, тобто за допомогою рівнянь, нерівностей та їх систем, яким задовольняють координати цих точок.

Розглянемо приклад при $n = 4$. Чотиривимірний простір (R^4) – в математиці абстрактне поняття, вироблене шляхом узагальнення правил тривимірного простору. Він вивчався математиками і філософами протягом майже двох століть як заради простого інтересу, так і заради можливостей, які це поняття відкриває в математиці і суміжних областях [19].

Алгебраїчно воно отримано шляхом застосування правил векторів і координатної геометрії до простору з чотирма вимірами. Зокрема, вектор з чотирма компонентами може бути використаний для подання позиції в чотиривимірному просторі. Це Евклідів простір, тому має метрику і норму, і таким чином всі виміри розглядаються однаково: додатковий вимір не відрізняється від трьох інших.

У сучасній фізиці простір і час об'єднані в єдиний чотиривимірний континуум, званий простором Міньковського, метрика якого розглядає часовий вимір інакше, ніж просторові виміри. Таким чином, простір Маньківського є псевдоевклидовим, а не евклідовим.

2.2 Багатовимірні вектори та операції над ними

У роботі Короткова А. В. за посиланням [17] висвітлено основні означення цього розділу.

Означення 2.6 «N-вимірним вектором $\bar{x}$ називається упорядкований набір з n дійсних чисел, записуваних у вигляді рядка $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ або стовпця $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.»

Означення 2.7 «Число x_i називають i-ту координатою вектора $\bar{x}$.»

Означення 2.8 «Кількість координат у вектора $\bar{x}$. називають його розмірністю.»

Означення 2.9 «Добутком вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ на дійсне число λ називається вектор $\lambda\bar{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$, тобто при множені вектора на число кожна його координата множиться на це число.»

Знаючи вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, можна отримати протилежний йому вектор $-\bar{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

Означення 2.10 «Сумою векторів $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ називається вектор $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$, тобто при додаванні векторів однієї і тієї ж розмірності їх відповідні координати почлено складаються.»

Використовуючи поняття протилежного вектора, можна визначити операцію віднімання векторів:

$$\bar{x} - \bar{y} = \bar{x} + (-\bar{y}) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n).$$

Лінійні операції над багатовимірними векторами задовольняють наступним властивостям:

а) $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$;

б) $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$;

в) $\lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda\bar{x} + \lambda\bar{y}$;

г) $(\alpha+\beta)\bar{x}=\alpha\bar{x}+\beta\bar{x}$;

д) $(\alpha\beta)\bar{x}=\alpha(\beta\bar{x})$;

е) Для $\forall\ \bar{x}\ \exists\ \bar{x}'$такий, що $\bar{x}=\bar{x}'=\bar{0}$;

є) $1*\bar{x}=\bar{x}$ для $\forall\ \bar{x}$;

ж) $\exists$ нульовий елемент $\bar{0}$ такий, що $\bar{x}+\bar{0}=\bar{x}$ для $\forall\ \bar{x}$.

Означення 2.11 «Скалярним добутком двох n-вимірних векторів $\bar{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ і $\bar{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ називається число, що позначається $\overline{xy}$ і яке дорівнює загальній кількості добутків відповідних координат векторів $\bar{x}$ і $\bar{y}$:

$$\overline{xy}=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n.»$$

Скалярний добуток багатовимірних векторів має такі властивості:

а) $\overline{xx}\geq 0$, при чому $\overline{xx}=0$ тоді та тільки тоді, коли $\bar{x}=0$;

б) $\overline{xy}=\overline{yx}$;

в) $(\bar{x}+\bar{y})\bar{z}=\bar{x}\bar{z}+\bar{y}\bar{z}$;

г) $(\lambda\bar{x})\bar{y}=\lambda(\overline{xy})$.

2.3 Визначення векторного добутку двох векторів відносно довільних $n-3$ фіксованих векторів у n-вимірному просторі

На сьогодні, існують різні узагальнення векторного добутку двох векторів на випадок багатомірних просторів. Для початку розглянемо один із відомих методів визначення векторного добутку в багатовимірному просторі, опираючись на теоретичні відомості роботи «Методи узагальнень в математиці» Кужеля О. В. за посиланням [18].

Аналізуючи формулу 1.3 знаходження векторного добутку двох векторів для R^3 у вигляді визначника третього порядку, можна обчислити векторний добуток у просторі R^4 відносно довільного фіксованого вектора, представивши його, як визначник четвертого порядку.

Розглянемо вектора $\bar{x} = \sum_{k=1}^{4} x_k \bar{e}_k$ і $\bar{y} = \sum_{k=1}^{4} y_k \bar{e}_k$. Знайдемо векторний добуток цих двох векторів відносно довільного вектора $\bar{a} = \sum_{k=1}^{4} a_k \bar{e}_k$:

$$[\bar{x}, \bar{y}] = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 & \bar{e}_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \bar{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \\ a_1 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \bar{e}_2 +$$
$$+ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ a_1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} \bar{e}_3 - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \bar{e}_4. \qquad (2.1)$$

Очевидно, що і для n-вимірного простору, де $n > 3$, так само можна визначити векторний добуток відносно деяких $n - 3$ фіксованих векторів. Для розв’язання визначника, у якого порядок вище за три, використовують різні методи, наприклад, теорема Лапласа, зведення визначника до трикутного вигляду, розклад визначника за елементами рядка чи стовпця.

2.4 Визначення векторного добутку шляхом m-розщеплення базисного вектора

Опиратись будемо на теоретичні відомості з роботи Попова І. П. за посиланням [20].

Теорема 2.1 «Для двох лінійно незалежних векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ в R^n існує їх векторний добуток $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$.»

Доведення. Нехай три лінійно незалежних вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{g}$ мають інваріантний опис, що включає в себе довжини векторів, кути між ними і їх взаємну орієнтацію. Для кожного з цих трьох векторів однозначно визначена їх проекція на будь-який інший вектор. Іншими словами, визначені їх попарно скалярні добутки.

У зв'язку з цим вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{g}$ можуть мати однозначно координатний опис в базисах будь-якої розмірності, починаючи з 3. При координатному описі вони зберігають розміри, кути між ними і взаємну орієнтацію, оскільки в базисі будь-якої розмірності їх попарні скалярні добутки залишаються незмінними. Тобто, координатний опис тієї чи іншої розмірності при пасивній точці зору не змінює сутність векторів і їх відносин один до одного.

Отже, якщо в якості вектора $\bar{g}$ розглядати вектор $\bar{c}$, що є при інваріантному описі векторних добутком векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, то його сутність в цій якості не зміниться при координатному описі в R^n.

У подальшому, в роботі будуть необхідні визначення взяті з посилання [20].

Означення 2.12 «m-розщепленням базисного вектора $\bar{e}_i$ є трансформація R^n в R^{n+m-1} шляхом заміни $\bar{e}_i$ на m векторів $\bar{e}_{i1}, \dots, \bar{e}_{ij}, \dots, \bar{e}_{im}$ ортогональних один одному і всім іншим базисним векторах вихідного базису, при цьому

$$\bar{e}_i = \sum_{j=1}^{m} k_{ij} \bar{e}_{ij},$$

де k_{ij} – направляючі косинуси $\bar{e}_i$ в базисі $\bar{e}_{i1}, \dots, \bar{e}_{ij}, \dots, \bar{e}_{im}$.»

Вибір направляючих косинусів k_{ij} може бути пов'язаний зі довільністю. Довільність мінімізується при симетричному m-розщепленні.

Означення 2.13 «Симетричне m-розщеплення базисного вектора – це m-розщеплення, при якому $\forall\, j \in [1, m] | k_{ij} = \frac{|\sqrt{m}|}{m}$.»

Теорема 2.2 «Векторний добуток $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$ може бути представлено в R^n.»

Доведення. Нехай в R^3 є два лінійно незалежних вектора $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Їх координати дорівнюють:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ в R^3 визначено векторний добуток $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$. Він має координати:

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Базисний вектор $\bar{e}_3$ піддається симетричному (n-2)-розщепленню. В утвореному R^n просторі (в базисі ${}^1\bar{e}_1, {}^1\bar{e}_2, \dots, {}^1\bar{e}_n$) мають місце всі три вектора (пасивна точка зору) координати яких, відповідно, дорівнюють:

$${}^1\bar{a} = \begin{pmatrix} {}^1a_1 \\ {}^1a_2 \\ 0_3 \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}, {}^1\bar{b} = \begin{pmatrix} {}^1b_1 \\ {}^1b_1 \\ 0_3 \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}, {}^1\bar{c} = \begin{pmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ {}^1c_3 \\ \vdots \\ {}^1c_n \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Для формули 2.2

$$\forall\, i \in [3, n]| \ {}^1c_i = \frac{|\sqrt{n-2}|}{n-2} c_3. \tag{2.3}$$

Довільна квадратна матриця відображення $T_{[2]}$ дозволяє отримати координати всіх трьох векторів в іншому базисі цієї ж розмірності ${}^2\bar{e}_1, {}^2\bar{e}_2, \dots, {}^2\bar{e}_n$:

$${}^2\bar{a} = T * {}^1\bar{a} = \begin{pmatrix} {}^2a_1 \\ \vdots \\ {}^2a_n \end{pmatrix}, {}^2\bar{b} = T * {}^1\bar{b} = \begin{pmatrix} {}^2b_1 \\ \vdots \\ {}^2b_n \end{pmatrix},$$

$$^{2}\bar{c} = T * {}^{1}\bar{c} = \begin{pmatrix} ^{2}c_1 \\ \vdots \\ ^{2}c_n \end{pmatrix}. \qquad (2.4)$$

Таким чином, в довільному базисі $^{2}\bar{e}_1, {}^{2}\bar{e}_2, \dots, {}^{2}\bar{e}_n$ для двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ має місце їх векторний добуток $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$ з координатами за формулою 2.4.

Тим самим вирішена деяким чином обернена задача – при відомому векторному добутку визначення координат всіх трьох векторів в просторі R^n.

2.5 Визначення векторного добутку шляхом повороту координатних 2-площин

Використовувати будемо матеріал роботи Чурсанова О. С. за посиланням [21].

У просторі R^n вектор $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$ лежить на лінії перетину площин, нормалями яких є вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ або в термінах багатовимірного простору – в 1-площині, утвореної при перетині 2-площин. У цій 1-площині можна побудувати два протилежно направлених вектора, величина яких дорівнює модулю векторного добутку, і ортогональних векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Формально кінці цих векторів утворюють в 1-площині 0- сферу.

У просторі R^4 вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ служать нормалями двом 3-площинах, перетином яких є 2-площина, усі вектори якої ортогональні векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Кінці векторів, величина яких дорівнює модулю векторного добутку, утворюють у цій 2-площині 1-сферу (коло).

У просторі R^n вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ служать нормалями двом (n-1)-площинам, перетином яких є (n-2)-площина. Кінці векторів, величина яких дорівнює модулю векторного добутку, і ортогональних векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$, утворюють у цій (n-2)-площині (n-3)-сфери.

І в R^3 і в R^n має місце невизначеність при виборі напрямку векторного добутку двох векторів. У просторі R^3 доводиться обирати з векторів, обмежених 0-сферою, в R^n – з векторів, обмежених (n-3)-сферою.

У просторі R^3 невизначеність долається умовою, що в якості напрямку вектора $\bar{c}$ вибирається вектор правий щодо векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Невизначеність в R^n може бути подолана також, як і в R^3 – вибором одного найбільш відповідного варіанту.

За аналогією із взаємним розташуванням вектора $\bar{c}$ і вектора $\bar{e}_i$, що є сумою базисних ортів, що має місце для окремого випадку формули 2.3, для довільного базису можна прийняти наступну умову: векторний добуток $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$ в просторі R^n лежить на одній прямій з проекцією суми базисних ортів на (n-2)-площині, перпендикулярній векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Векторний добуток у просторі R^3 формально задовольняє даній умові.

Розглянемо повороти координатних 2-площин опираючись на теорію з посилання [21].

Нехай в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ вектор $\bar{d}$ має координати d.

Повороту ij-й координатної 2-площини відповідає наступна матриця переходу:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1_{11} & 0_{12} & \cdots & 0_{1i} & \cdots & 0_{1j} & \cdots & 0_{1n} \\ 0_{21} & 1_{22} & \cdots & 0_{2i} & \cdots & 0_{2j} & \cdots & 0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0_{i1} & 0_{12} & \cdots & \cos\varphi & \cdots & \sin\varphi & \cdots & 0_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0_{j1} & 0_{j2} & \cdots & -\sin\varphi & \cdots & \cos\varphi & \cdots & 0_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n1} & 0_{n2} & \cdots & 0_{ni} & \cdots & 0_{nj} & \cdots & 1_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2.5)$$

При цьому $\cos\varphi$ і $\sin\varphi$ знаходяться з умови:

$$d_i \cos\varphi + d_i \sin\varphi = d_i^1,$$

$$-d_i \sin\varphi + d_i \cos\varphi = d_j^1.$$

$d_i^1 = 0$, якщо

$$\cos\varphi = \frac{d_i}{\sqrt{d_i^2 + d_j^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{d_j}{\sqrt{d_i^2 + d_j^2}}.$$

При цьому

$$^1d_i = \sqrt{d_i^2 + d_j^2}.$$

Всі інші координати залишаються без змін. Таким чином, поворотом ij-ї координатної 2-площини відповідно до матриці переходу T_{ij} можна змінювати координати i і j вектора $\bar{d}$, наприклад, обнулити координату j.

Визначимо векторний добуток двох векторів в R^n.

Нехай в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ мають координати

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Координати суми базисних ортів $\bar{s}$ дорівнюють:

$$\bar{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для переходу до нового базису ${}^*\bar{e}_1,\ {}^*\bar{e}_2, \dots,\ {}^*\bar{e}_n$, в якому вектори $\bar{a}, \bar{b}$ і $\bar{s}$ будуть мати координати

$$^*\bar{a} = \begin{pmatrix} ^*a_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix},\ ^*\bar{b} = \begin{pmatrix} ^*b_1 \\ ^*b_2 \\ 0_3 \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix},\ ^*\bar{s} = \begin{pmatrix} ^*s_1 \\ ^*s_2 \\ ^*s_3 \\ \vdots \\ ^*s_n \end{pmatrix},$$

$$\forall i \in [3, n]|\ ^*s_i = \frac{\sqrt{n - \ ^*s_1^2 - \ ^*s_2^2}}{n-2},$$

слід виконати $3n - h - l - 3$ поворотів координатних 2-площин. Тут h – число ненульових координат обох векторів в новому базисі, l – число нульових координат у вихідному базисі. У даному випадку $h = 3$. Кожному повороту відповідає своя матриця T_k типу за формулою 2.5.

Матриця переходу від базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ до базису $^*\bar{e}_1,\ ^*\bar{e}_2, \ldots,\ ^*\bar{e}_n$, довірнює:

$$T = \prod_{k=3n-h-l-3}^{1} T_k,$$

тобто множення виконується у зворотній послідовності. При цьому

$$^*a = Ta,\ ^*b = Tb,\ ^*s = Ts.$$

Координати вектора $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$ в новому базисі $^*\bar{e}_1,\ ^*\bar{e}_2, \ldots,\ ^*\bar{e}_n$ відповідно до умови, векторний добуток $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$ в просторі R^n лежить на одній прямій з проекцією суми базисних ортів на (n-2)-площині, перпендикулярній векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$, дорівнює:

$$^*\mathrm{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ^*c_3 \\ \vdots \\ ^*c_n \end{pmatrix}, \qquad (2.6)$$

$$\forall i \in [3,n] \mid {}^*c_i = \frac{\sqrt{a^2b^2 - (a \cdot b)^2}}{n-2}, i \in [3,n].$$

Знак радикала у формулі 2.6 вибирається таким чином, щоб вектор $\bar{c}$ утворював з векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ праву трійку векторів.

Координати вектора $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$ в вихідному базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ дорівнюють:

$$\bar{c} = T^{-1} \cdot {}^*\bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Якщо $\forall i \in [3,n] \mid {}^*s_i = 0$, тобто сума базисних ортів $\bar{s}$ лінійно залежна від векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, то їх векторний добуток відповідно до умови, що зазначена вище невизначено.

2.6 Висновки до другого розділу

У другому розділі подано основні поняття з теми «Багатовимірні простори», їх приклади. Розглянуто n-вимірні вектори та операції над ними, а також скалярний добуток двох n-вимірних векторів та його властивості. Визначено векторний добуток двох векторів у n-вимірному просторі:

а) відносно довільних $n-3$ фіксованих векторів;

б) шляхом розщепленням базисного вектора;

в) шляхом повороту координатних 2-площин.

3 РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ВПРАВ НА ЗНАХОДЖЕННЯ ВЕКТОРНОГО ДОБУТКУ ДВОХ ВЕКТОРІВ У БАГАТОВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ

3.1 Знаходження векторного добутку двох векторів відносно довільних $n-3$ фіксованих векторів у n-вимірному просторі

Для початку розглянемо простір R^4. Знайдемо векторний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ відносно довільного фіксованого вектора $\bar{c}$, адже за теорією ми можемо використовувати лише один вектор.

Дано координати векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$:

$$\bar{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix}, \bar{b}=\begin{pmatrix}-1\\5\\2\\0\end{pmatrix}, \bar{c}=\begin{pmatrix}6\\-2\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Використовуючи формулу (2.1), відставимо наші значення та отримаємо:

$$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 & \bar{e}_4\\ 2 & 3 & 0 & 1\\ -1 & 5 & 2 & 0\\ 6 & -2 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 0 & 1\\ 5 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 3\end{vmatrix}\bar{e}_1-\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 6 & 1 & 3\end{vmatrix}\bar{e}_2+$$

$$+\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 5 & 0\\ 6 & -2 & 3\end{vmatrix}\bar{e}_3-\begin{vmatrix}2 & 3 & 0\\ -1 & 5 & 2\\ 6 & -2 & 1\end{vmatrix}\bar{e}_4=27\bar{e}_1+\bar{e}_2+11\bar{e}_3-57\bar{e}_4.$$

Отже, отримали векторний добуток двох векторів у вигляді:

$$[\bar{a},\bar{b}]=(27, 1, 11, -57).$$

Тепер, знайдемо векторних добуток тих самих векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, але вже відносно іншого довільного фіксованого вектора $\bar{d}$. Задано такі координати векторів:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{d} = \begin{pmatrix} 0{,}32 \\ 1{,}07 \\ 8{,}13 \\ 5{,}15 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Використовуючи формулу (2.1), отримуємо такі результати:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 & \bar{e}_4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 0 \\ 0{,}32 & 1{,}07 & 8{,}13 & 5{,}15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1{,}07 & 8{,}13 & 5{,}15 \end{vmatrix} \bar{e}_1 -$$

$$- \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0{,}32 & 8{,}13 & 5{,}15 \end{vmatrix} \bar{e}_2 + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0{,}32 & 1{,}07 & 5{,}15 \end{vmatrix} \bar{e}_3 -$$

$$- \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0{,}32 & 1{,}07 & 8{,}13 \end{vmatrix} \bar{e}_4 = 69{,}41\bar{e}_1 - 11{,}83\bar{e}_2 + 64{,}28\bar{e}_3 - 103{,}33\bar{e}_4.$$

Отримали векторний добуток двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ з координатами:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = (69{,}41;\ -11{,}83; 64{,}28;\ -103{,}33).$$

Видно, що векторний добуток двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ завжди буде різним, в залежності від вибору вектора, відносно якого виконуємо дію.

Далі розглянемо простір R^5. Знайдемо векторний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ відносно довільних фіксованих векторів $\bar{c}$ і $\bar{d}$, за теорією у пункті 2.3 ми повинні використовувати два вектора.

Дано координати векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ і $\bar{d}$:

$$\bar{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\3{,}1\\7\end{pmatrix},\bar{b}=\begin{pmatrix}0{,}31\\7\\1\\2\\-2\end{pmatrix},\bar{c}=\begin{pmatrix}1\\4{,}01\\0\\8\\0\end{pmatrix},\bar{d}=\begin{pmatrix}1{,}08\\-1\\2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Для знаходження векторного добутку векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ відносно векторів $\bar{c}$ і $\bar{d}$, будемо використовувати теорему Лапласа. Будемо розкладати даний визначник за другим та четвертим рядком:

$$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 & \bar{e}_4 & \bar{e}_5\\ 2 & 0 & 0 & 3{,}1 & 7\\ 0{,}31 & 7 & 1 & 2 & -2\\ 1 & 4{,}01 & 0 & 8 & 0\\ 1{,}08 & -1 & 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0\\1 & 4{,}01\end{vmatrix}*(-1)^{2+4+1+2}*$$

$$*\begin{vmatrix}\bar{e}_3 & \bar{e}_4 & \bar{e}_5\\1 & 2 & -2\\2 & -2 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 0\\1 & 0\end{vmatrix}*(-1)^{2+4+1+3}*\begin{vmatrix}\bar{e}_2 & \bar{e}_4 & \bar{e}_5\\1 & 2 & -2\\-1 & -2 & 1\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}2 & 3{,}1\\1 & 8\end{vmatrix}*(-1)^{2+4+1+4}*\begin{vmatrix}\bar{e}_2 & \bar{e}_3 & \bar{e}_5\\7 & 1 & -2\\-1 & 2 & 1\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}2 & 7\\1 & 0\end{vmatrix}*(-1)^{2+4+1+5}*\begin{vmatrix}\bar{e}_2 & \bar{e}_3 & \bar{e}_4\\7 & 1 & 2\\-1 & 2 & -2\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}0 & 0\\4{,}01 & 0\end{vmatrix}*(-1)^{2+4+2+3}*\begin{vmatrix}\bar{e}_1 & \bar{e}_4 & \bar{e}_5\\0{,}31 & 2 & -2\\1{,}08 & -2 & 1\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}0 & 3{,}1\\4{,}01 & 8\end{vmatrix}*(-1)^{2+4+2+4}*\begin{vmatrix}\bar{e}_1 & \bar{e}_3 & \bar{e}_5\\0{,}31 & 1 & -2\\1{,}08 & 2 & 1\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}0 & 7\\4{,}01 & 0\end{vmatrix}*(-1)^{2+4+2+5}*\begin{vmatrix}\bar{e}_1 & \bar{e}_3 & \bar{e}_4\\0{,}31 & 1 & 2\\1{,}08 & 2 & -2\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}0 & 3{,}1\\0 & 8\end{vmatrix}*(-1)^{2+4+3+4}*\begin{vmatrix}\bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_5\\0{,}31 & 7 & -2\\1{,}08 & -1 & 1\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} * (-1)^{2+4+3+5} * \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_4 \\ 0,31 & 7 & 2 \\ 1,08 & -1 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} 3,1 & 7 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} * (-1)^{2+4+4+5} * \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 0,31 & 7 & 1 \\ 1,08 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Деякі визначники другого порядку будуть дорівнювати нулю, зменшиться кількість доданків. Після розрахунків отримуємо такі результати:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = -8,02 * (-2\bar{e}_3 - \bar{e}_4 + 6\bar{e}_5) - 12,9 * (5\bar{e}_2 - 5\bar{e}_3 + 15\bar{e}_5) - 7(-6\bar{e}_2 +$$
$$+12\bar{e}_3 + 15\bar{e}_4) - 12,431 * (5\bar{e}_1 - 2,47\bar{e}_3 - 0,46\bar{e}_5) - 28,07(-5\bar{e}_1 + 2,78\bar{e}_3 -$$
$$-0,46\bar{e}_4) + 56 * (15\bar{e}_1 + 0,46\bar{e}_2 - 7,87\bar{e}_3) = 918,195\bar{e}_1 + 3,26\bar{e}_2 -$$
$$-491,51003\bar{e}_3 - 84,0678\bar{e}_4 - 235,90174\bar{e}_5.$$

Отримали векторний добуток двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ з координатами:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = (918,195;\ 3,26; -491,51003;\ -84,0678;\ -235,90174).$$

3.2 Знаходження векторного добутку шляхом розщепленням базисного вектора

Знайдемо векторний добуток двох векторів в R^4 шляхом перетворення тривимірного базису в чотиривимірний, який був описано у розділі 2.4 вище.

Нехай у тривимірному базисі координати векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнюють:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Для початку, знайдемо векторний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ у тривимірному просторі. Отже, координати вектора $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$ мають такий вигляд:

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Базисний вектор $\bar{e}_3$ піддається симетричному 2-розщепленню. Використовуючи формулу 2.3 для координат вектора $\bar{c}$, в утвореному R^4 просторі координати векторів дорівнюють:

$${}^1\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ {}^1\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ {}^1\bar{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7{,}071 \\ 7{,}071 \end{pmatrix}.$$

Довільна квадратна матриця відображення T задана у вигляді:

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}497 & 0{,}628 & 0{,}287 & -0{,}527 \\ 0{,}47 & 0{,}22 & -0{,}814 & 0{,}262 \\ -0{,}147 & 0{,}604 & 0{,}296 & 0{,}72 \\ 0{,}709 & -0{,}439 & 0{,}41 & 0{,}369 \end{pmatrix}.$$

За допомоги даної матриці, ми отримуємо координати всіх трьох векторів в іншому базисі цієї ж розмірності:

$${}^2\bar{a} = T * {}^1\bar{a} = \begin{pmatrix} 2{,}876 \\ 1{,}599 \\ 1{,}47 \\ 0{,}101 \end{pmatrix},\ {}^2\bar{b} = T * {}^1\bar{b} = \begin{pmatrix} 3{,}138 \\ 1{,}099 \\ 3{,}02 \\ -2{,}197 \end{pmatrix},$$

$${}^2\bar{c} = T * {}^1\bar{c} = \begin{pmatrix} -1{,}695 \\ -3{,}902 \\ 7{,}184 \\ 5{,}503 \end{pmatrix}.$$

Координати вектора $^2\bar{c}$ можна вважати як векторний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, тобто:

$$\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}] = (-1{,}695;\ -3{,}902; 7{,}184; 5{,}503).$$

3.3 Знаходження векторного добутку шляхом повороту координатних 2-площин

Знайдемо векторний добуток двох векторів в R^4 шляхом повороту координатних 2-площин, який був описано у розділі 2.5 вище.

У просторі R^4 за відомими значеннями $\bar{a}$ і $\bar{b}$ будемо обчислювати координати вектора $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$.

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 3{,}37 \\ 2{,}762 \\ -2{,}395 \\ -0{,}532 \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 3{,}289 \\ 1{,}539 \\ -5{,}697 \\ 1{,}834 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Для початку, визначимо матрицю переходу для вектора $\bar{a}$, використовуючи формулу 2.5:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0{,}815 & 0 & -0{,}579 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}579 & 0 & 0{,}815 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

За допомоги даної матриці переходу отримуємо координати вектора $\bar{a}$ в іншому базисі цієї розмірності. При цьому, одна з координат вектора $\bar{a}$ обнуляється:

$$^{1}\bar{a} = T_1\bar{a} = \begin{pmatrix} 4,134 \\ 2,762 \\ 0 \\ -0,532 \end{pmatrix}.$$

Знову визначаємо матрицю переходу, використовуючи формулу 2.5 для нового вектора $^{1}\bar{a}$:

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0,831 & 0,556 & 0 & 0 \\ -0,556 & 0,831 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо нові координати для вектора $^{1}\bar{a}$:

$$^{2}\bar{a} = T_2 \cdot {}^{1}\bar{a} = \begin{pmatrix} 4,972 \\ 0 \\ 0 \\ -0,532 \end{pmatrix}.$$

Повторюємо ці операції ще раз, визначаємо нову матрицю переходу для вектора $^{2}\bar{a}$:

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0,994 & 0 & 0 & -0,106 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,106 & 0 & 0 & 0,994 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо нові координати вектора $^{2}\bar{a}$:

$$^{3}\bar{a} = T_3 \cdot {}^{2}\bar{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

На цьому етапі ми отримали нові координати для початкового вектора $\overline{a}$, у якого залишилась одна ненульова координата.

Далі знаходимо матрицю переходу від старого базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ до нового базису ${}^3\bar{e}_1,\ {}^3\bar{e}_2,\ {}^3\bar{e}_3,\ {}^3\bar{e}_4$:

$$T_{31} = T_3 T_2 T_1 = \begin{pmatrix} 0{,}674 & 0{,}552 & -0{,}479 & -0{,}106 \\ -0{,}453 & 0{,}831 & 0{,}322 & 0 \\ 0{,}579 & 0 & 0{,}815 & 0 \\ 0{,}072 & 0{,}059 & -0{,}051 & 0{,}994 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо у новому базисі координати вектора $\overline{b}$, використовуючи знайдену матрицю переходу:

$${}^3\overline{b} = T_{31}\overline{b} = \begin{pmatrix} 5{,}6 \\ -2{,}043 \\ -2{,}738 \\ 2{,}443 \end{pmatrix}.$$

Проводимо ті ж самі операції для вектора $\overline{b}$, що раніше робили для вектора $\overline{a}$. Використовуючи формулу 2.5, знайдемо нову матрицю переходу для вектора ${}^3\overline{b}$

$$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}641 & 0 & 0{,}767 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}767 & 0 & -0{,}641 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо координати для вектора ${}^3\overline{b}$:

$${}^4\overline{b} = T_4 \cdot {}^3\overline{b} = \begin{pmatrix} 5{,}6 \\ 3{,}185 \\ -2{,}738 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Знову визначаємо матрицю переходу, використовуючи формулу 2.5 для нового вектора ${}^4\bar{b}$:

$$T_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,758 & -0,652 & 0 \\ 0 & 0,652 & 0,758 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отримуємо координати вектора ${}^4\bar{b}$ у новому базисі:

$${}^5\bar{b} = T_5 \cdot {}^4\bar{b} = \begin{pmatrix} 5,6 \\ 4,2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Далі знаходимо матрицю переходу від старого базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ до нового базису ${}^5\bar{e}_1$, ${}^5\bar{e}_2$, ${}^5\bar{e}_3$, ${}^5\bar{e}_4$:

$$T_{51} = T_5 T_4 T_{31} = T_5 T_4 T_3 T_2 T_1 = \begin{pmatrix} 0,674 & 0,552 & -0,479 & -0,106 \\ -0,115 & -0,37 & -0,718 & 0,578 \\ 0,665 & -0,318 & 0,458 & 0,497 \\ 0,301 & -0,676 & -0,214 & -0,638 \end{pmatrix}.$$

Сума ортів вихідного базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ в базисі ${}^5\bar{e}_1$, ${}^5\bar{e}_2$, ${}^5\bar{e}_3$, ${}^5\bar{e}_4$ має координати:

$${}^5\bar{s} = T_{51}\bar{s} = T_{51} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,641 \\ -0,625 \\ 1,302 \\ -1,226 \end{pmatrix}.$$

Знову визначаємо матрицю переходу, використовуючи формулу 2.5 для нового вектора ${}^5\bar{s}$:

$$T_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0297 & -0{,}9996 \\ 0 & 0 & 0{,}9996 & 0{,}0297 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо нові координати для вектора ${}^5\bar{s}$:

$${}^6\bar{s} = T_6 \cdot {}^5\bar{s} = \begin{pmatrix} 0{,}641 \\ -0{,}625 \\ 1{,}265 \\ 1{,}265 \end{pmatrix}.$$

Матриця переходу від вихідного базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ до базису ${}^6\bar{e}_1$, ${}^6\bar{e}_2$, ${}^6\bar{e}_3$, ${}^6\bar{e}_4$ дорівнює:

$$T_{61} = T_6 T_{51} = T_6 T_5 T_4 T_3 T_2 T_1 = \begin{pmatrix} 0{,}674 & 0{,}552 & -0{,}479 & -0{,}106 \\ -0{,}115 & -0{,}37 & -0{,}718 & 0{,}578 \\ -0{,}281 & 0{,}666 & 0{,}228 & 0{,}652 \\ 0{,}673 & -0{,}338 & 0{,}451 & 0{,}478 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що

$${}^6\bar{a} = T_{61}\bar{a} = {}^3\bar{a}, \qquad {}^6\bar{b} = T_{61}\bar{b} = {}^5\bar{b}, \qquad {}^6\bar{s} = T_{61}\bar{s}.$$

Координати вектора $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$ в останньому базисі ${}^6\bar{e}_1$, ${}^6\bar{e}_2$, ${}^6\bar{e}_3$, ${}^6\bar{e}_4$ відповідно до формули (2.6) дорівнюють:

$${}^6\bar{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14{,}849 \\ 14{,}849 \end{pmatrix}.$$

Координати вектора $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$ в вихідному базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ дорівнюють:

$$\bar{c} = T_{61}^{-1} \cdot {}^{6}\bar{c} = \begin{pmatrix} 5{,}822 \\ 4{,}869 \\ 10{,}081 \\ 16{,}786 \end{pmatrix}.$$

Порядок обнулення координат i, відповідно, значення проміжних матриць можуть бути іншими. При цьому неважко переконатися, що підсумкова матриця $T(T_{61})$ і значення вектора $\bar{c}$ у вихідному базисі не змінюються.

3.4 Висновки до третього розділу

У даному розділі було показано розв'язання завдань на знаходження векторного добутку двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ у багатовимірних просторах, а саме у просторах R^4 та R^5 різними способами:

а) відносно довільних $n-3$ фіксованих векторів;

б) шляхом розщепленням базисного вектора;

в) шляхом повороту координатних 2-площин.

Отримавши результати кожного способу, видно, що вони залежать від вибору чи то вектора, чи то матриці переходу, дивлячись який обрано спосіб. Тому векторний добуток буде відрізнятися.

ВИСНОВКИ

У даній роботі було розглянуто необхідні теоретичні відомості про векторний добуток та багатовимірний простір. Узагальнено в багатовимірному просторі векторний добуток двох векторів декількома способами, а саме, відносно довільних $n-3$ фіксованих векторів, шляхом розщепленням базисного вектора, шляхом повороту координатних 2-площин.

На основі викладеного в роботі матеріалу було знайдено векторний добуток двох векторів у багатовимірному просторі способами, що описано вище та порівняно їх результати.

Результати роботи можуть бути використанні для практичного розв’язування подібних задач або для подальшого дослідження даної теми.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Зіновєєв І. В., Манько Н. І.-В., Спиця О. Г. Алгебра та геометрія: аналітична геометрія : навч.-мет. пос. для студ. / Запоріжжя : ЗНУ, 2014. 116 с.

2. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учеб. 7-е изд., стер. Москва : Высшая школа, 1998. 320 с.

3. Дымков М. П. Высшая математика. Курс лекций : науч. пос. Минск, 2014. 145 с.

4. Ильин В. А., Лозняк Э. Г. Аналитическая геометрия. Москва : Наука, 1981. 224 с.

5. Ильин В. А., Лозняк Э. Г. Линейная алгебра. Москва : Наука, 1999. 296 с.

6. Базылев В. Т., Дуничев К. И., Иваницкая В. П. Геометрия. Ч. 1 : учебн. пос. Москва : Просвощение, 1974. 351 с.

7. Базылев В. Т., Дуничев К. И., Иваницкая В. П. Геометрия. Ч. 2 : учебн. пос. Москва : Просвощение, 1975. 367 с.

8. Марчук Р. А. Курс аналітичної геометрії та лінійної алгебри: підручник для студ. вищ. навч. закл. ХНУ, 2005. 225 с.

9. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия. Москва : Наука, 1986. 416 с.

10. Тевяшев А. Д. Алгебра і геометрія: навч. пос. для студ. І-т змісту і методів начвання. Харків : Прикладна математика, 2000. 386 с.

11. Шестопал А. Ф. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії. Київ : Ін-т математики НАН України, 1998. 164 с.

12. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. Москва : Наука. 2003. 326 с.

13. Травкін Ю. І. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. пос. Харків : Майдан, 2009. 416 с.

14. Ніколаєв О. Г. Аналітична геометрія та лінійна алгебра: навч. пос. Харків : Основа, 2000. 223 с.

15. Лінійна алгебра та аналітична геометрія / Рибицька О. М. [та ін.]. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2013. 124 с.

16. Кононюк А. Е. Дискретно-непрерывная математика. (Пространства). Кн.8. ч.1. Киев : Освіта України, 2016. 620 с.

17. Многомерная математическая физика и многомерные приложения: монография / Коротков А. В. [и др.]. Новочеркаск: ‹‹НОК››, 2016. 193 с.

18. Кужель А. В. Методы обобщений в математике: учебн. пос. Симферополь : СГУ, 1983. 97 с.

19. Щуров Ил., Hise J. Многомерные пространства. URL : http://sneg5.com/nauka/fizika-i-matematika/mnogomernye-prostranstva-3d-4d.html (дата звернення: 10.10.2020).

20. Попов И. П. 2017. Операторы типа набла: поверхностный, нулевой и мнимый нулевой. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика*. № 6(255). Вып. 46. С. 44–53.

21. Чурсанова А. С. 2017. Оценка собственных значений матриц. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика*. № 6(255). Вып. 46. С. 59–61.