МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра загальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА ДРУГОГО РОДУ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ АЛГОРИТМУ РОМБЕРГА»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1119
спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми математика
(назва освітньої програми)
В.О. Бобко
(ініціали та прізвище)

Керівник завідувач кафедри фундаментальної математики, доцент, д.т.н. Гребенюк С.М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент декан математичного факультету, професор, д.т.н. Гоменюк С.І.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя
2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра загальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика
(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри загальної математики, к.ф.-м.н., доцент
____________ Зіновєєв І.В.
(підпис)

« 22 » травня 2020 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Бобко Валерії Олегівні
(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи Розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду із застосуванням алгоритму Ромберга

керівник роботи (проекту) Гребенюк Сергій Миколайович, д.т.н., доцент
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 20 » травня 2020 року № 576-с

2. Строк подання студентом роботи 02.12.2020

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
   1. Постановка задачі.
   2. Основні теоретичні відомості.
   3. Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду та їх розв'язання із застосуванням алгоритму Ромберга.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 20.05.2020

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	04.06.2020	
2.	Збір вихідних даних.	02.07.2020	
3.	Обробка методичних та теоретичних		
	джерел.	12.08.2020	
4.	Розробка першого розділу.	27.09.2020	
5.	Розробка другого розділу.	26.10.2020	
6.	Оформлення та нормоконтроль		
	кваліфікаційної роботи.	02.12.2020	
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	18.12.2020	

Студент ______________ В. О. Бобко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ______________ С. М. Гребенюк
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ______________ О. Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Розв’язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду із застосуванням алгоритму Ромберга»: 53 с., 5 рис., 9 табл., 9 джерел, 1 додаток.

АЛГОРИТМ РОМБЕРГА, ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА, КВАДРАТУРНА ФОРМУЛА, МЕТОД СІМПСОНА, ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ

Об’єкт дослідження – інтегральні рівняння Фредгольма другого роду.

Предмет дослідження: квадратурний спосіб розв’язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.

Мета роботи: застосувати алгоритм Ромберга чисельного інтегрування для розв’язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.

Метод дослідження – чисельний.

У роботі наведено основні теоретичні відомості про квадратурний метод розв’язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Для його реалізації вивчено квадратурні формули лівих і правих прямокутників, формулу трапецій, формула Сімпсона. Розроблено чисельний підхід до розвязання інтегрального рівняння із застосуванням ітераційного алгоритма Ромберга, який дає можливість підвищити точність розв’язків.

Отримано розв’язки ряда інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду із застосуванням квадратурних формул лівих і правих прямокутників, формулу трапецій, формула Сімпсона. Проведено порівняння отриманих розв’язків інтегрального рівняння з відомими точним аналітичними розв’язками.

SUMMARY

Master’s Qualification Thesis «Solving Fredholm Integral Equations of the Second Kind Using the Romberg Algorithm»: 53 pages, 5 figures, 9 tables, 9 references, 1 supplement.

ROMBERG'S ALGORITHM, FREDHOLM'S INTEGRAL EQUATION, SQUAREING FORMULA, SIMPSON'S METHOD, NUMERICAL INTEGRATION

The object of study is the integral Fredholm equations of the second kind.

Subject of research: quadrature method of solving the integral Fredholm equation of the second kind.

Purpose: to apply the Romberg algorithm of numerical integration to solve the integral Fredholm equation of the second kind.

The research method is numerical.

The paper presents the basic theoretical information about the quadrature method for solving the integral Fredholm equation of the second kind. For its realization the quadrature formulas of the left and right rectangles, the formula of trapezoids, the Simpson’s formula are studied. A numerical approach to solving an integral equation using an iterative Romberg algorithm has been developed, which makes it possible to increase the accuracy of solutions.

Solutions of a number of Fredholm integral equations of the second kind are obtained using the quadrature formulas of the left and right rectangles, the trapezoid formula, and the Simpson formula. The obtained solutions of the integral equation are compared with the known exact analytical solutions.

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія інтегральних рівнянь на теперішній час є одним із найпоширеніших розділів математики. Розвиток цієї теорії зумовлений потребами великої кількості додатків у різних сферах науки, таких як механіка деформівного твердого тіла, фізика, гідравліка, аеродинаміка тощо, водночас ця теорія знаходиться на перетині багатьох інших розділів математики, таких як алгебри, функціональний аналіз, методи обчислень та інші. В першу чергу увагу у цій теорії приділяється розв’язанню задач, що містять інтегральні рівняння Вольтерра та Фредгольма першого і другого роду, або сингулярні інтегральні рівняння.

Значна частина цієї теорії стосується проблемі знаходження розв’язків інтегрального рівняння Фредгольма чисельними методами. Одним із найбільш популярних способів розв’язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду є заміна інтегралу, що входить у рівняння, кінцевою сумою за допомогою чисельного інтегрування. Чисельне інтегрування відбувається на основі тієї чи іншої спеціальної формули, яка називається квадратурною.

Проблема інтегрування полягає в тому, що далеко не завжди обчислення інтеграла може бути виконано аналітичним способом. Зокрема, існують так звані інтеграли, що не беруться, або у випадку, коли підінтегральна функція задана таблично. У цих випадках підінтегральну функцію апроксимують будь-якою більш «зручною» для інтегрування функцією, інтеграл від якої може бути обчислений. Зазвичай як такі «зручні» апроксимуючі функції використовують поліноми. У разі полінома нульового ступеня метод чисельного інтегрування називають методом прямокутників, у разі полінома першого ступеня – методом трапецій, у разі полінома другого ступеня – методом Сімпсона. Всі зазначені методи є окремими випадками квадратурних формул Ньютона-Котеса.

У разі розв’язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду проблема полягає у тому, що під знаком інтеграла взагалі знаходиться невідома функція, інтеграл що її містить взагалі визначити неможливо. Застосування чисельного інтегрування дозволяє позбутися інтегралу у рівнянні, але додає у нього окрім шуканої функції у загальному аналітичному виді ще й дискретні значення шуканої функції. Але послідовна підстановка у отримане рівняння замість незалежної змінної її дискретних значень – вузлів квадратурної формули – дозволяє побудувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно дискретних значень шуканої функції.

Для поліпшення точності розв’язання інтегрального рівняння можна застосувати ітераційну процедуру Ромберга при використанні чисельного інтегрування.

1 ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ ПРО ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ

Інтегральне рівняння – це рівняння, яке містить невідому функцію під знаком інтеграла, наприклад,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt, x \in [a,b]$$

або

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt, x \in [a,b] .$$

Тут $K(x,t)$ і $f(x)$ – задані функції, а $\varphi(x)$ – шукана. Функцію $K(x,t)$ називають ядром інтегрального рівняння, а $f(x)$ – вільним членом; λ – параметр (з $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$). Між інтегральними рівняннями та диференційними рівняннями існує тісний зв'язок, деякі задачі можуть бути сформульовані обома способами [4].

1.1 Основні види інтегральних рівнянь

1.1.1 Лінійні рівняння

Найпростішим типом рівнянь є рівняння Фредгольма першого роду:

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt,$$

де φ є невідомою функцією, f є деякою даною функцією, K є відомою функцією двох змінних, що називається ядром рівняння.

Якщо невідома функція знаходиться як під знаком інтеграла, так і за його межами, то таке рівняння називається рівнянням Фредгольма другого роду:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt,$$

де параметр λ є невідомим і відіграє ту ж роль, що власне значення у лінійній алгебрі.

Якщо межі інтегрування самі є змінними, то таке інтегральне рівняння називається рівнянням Вольтерра. Відповідно рівняння Вольтерра першого і другого роду мають вигляд:

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt,$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt.$$

В усіх поданих вище рівняннях, якщо функція f всюди дорівнює нулю, то рівняння називається однорідним. В іншому випадку – неоднорідним.

1.1.2 Нелінійні рівняння

Рівнянням Урисона називається рівняння виду

$$\varphi(x) = \int_a^b K\big(x, t, \varphi(t)\big)dt,$$

$$K(x, t, \varphi) \in C \ (a \leq x, t \leq b; \ -M \leq \varphi \leq M).$$

Стала M – деяке додатне число, яке не завжди наперед можна визначити.

Рівняння Гаммерштейна є частковим випадком рівнянь Урисона:

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, t)F\big(t, \varphi(t)\big)dt,$$

де $K(x, t)$ – ядро Фредгольма.

Нелінійне рівняння Вольтерра

$$\varphi(x) = \int_a^x F\big(x, t, \varphi(t)\big)dt,$$

де функція $F(x, t, \varphi)$ неперервна за всіма своїми змінними [1].

1.2 Основні відомості про інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

Лінійним інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду називається рівняння виду:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{1.1}$$

де $\varphi(x)$ – невідома функція, $K(x,t)$ і $f(x)$ – відомі функції, x і t – дійсні змінні, які змінюються в інтервалі (a,b), λ – числовий параметр.

Функція $K(x,t)$ називається ядром інтегрального рівняння (1.1); мається на увазі, що ядро $K(x,t)$ визначено в квадраті Ω $\{a \leq x \leq b,\ a \leq t \leq b\}$ на площині (x,t) та неперервно в Ω, або його розриви такі, що подвійний інтеграл

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^3 dxdt$$

має скінчене значення.

Якщо $f(x) \not\equiv 0$, то рівняння (1.1) називається неоднорідним, якщо ж $f(x) \equiv 0$, то рівняння (1.1) приймає вид

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{1.2}$$

і називається однорідним.

Границі інтегрування a і b в рівняннях $(1.1), (1.2)$ можуть бути як скінченними, так і безкінечними.

Розв'язком інтегральних рівнянь $(1.1), (1.2)$ називається будь-яка функція $\varphi(x)$, при підстановці якої в рівняння останні обертаються в тотожності відносно $x \in (a,b)$.

До розв'язання інтегральних рівнянь другого роду може бути зведено більшість крайових задач математичної фізики.

При розв'язанні інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду розглядаються задачі двох типів:

а) безпосереднє відшукання розв'язка неоднорідного рівняння при заданому значенні параметра λ і заданої правої частини;

б) відшукання власних значень і власних функцій ядра $K(x,t)$ однорідного інтегрального рівняння, тобто пошук таких значень параметра λ, при яких однорідне рівняння має нетривіальний розв'язок $\varphi(x)$. Ці значення λ і відповідні їм нетривіальні розв'язки називаються, відповідно, власними значеннями та власними функціями ядра $K(x,t)$.

Якщо ядро $K(x,t)$ має вигляд $K(x,t)=\sum_{j=1}^{n} a_j(x)b_j(t)$, то воно називається виродженим [5].

1.3 Рівняння Фредгольма другого роду з виродженими ядрами

Розв'язок інтегрального рівняння (1.1) з виродженим ядром зводиться до розв'язання лінійної алгебраїчної системи та може бути легко отримано відомими з дисципліни лінійної алгебри методами.

Для доведення цього введемо змінну $c_j=\int_a^b b_j(t)\varphi(t)dt$ та перепишемо інтегральне рівняння (1.1) у вигляді:

$$\varphi(x)=\lambda\sum_{j=1}^{n} c_j a_j(x)+f(x).$$

Далі, домноживши обидві частини цієї рівності на $b_i(x), i=\overline{1,n}$ та проінтегрувавши від a до b, маємо:

$$c_i=\int_a^b \varphi(x)b_i(x)dx=\lambda\sum_{j=1}^{n} c_j\int_a^b \underbrace{a_j(x)b_i(x)dx}_{k_{ij}}+\underbrace{\int_a^b f(x)b_i(x)dx}_{f_i}.$$

Отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь [10]:

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} k_{ij} c_j = f_i, \overline{1, n.}$$

2 ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ ПРО КВАДРАТУРНІ ФОРМУЛИ

Нехай дано інтегральне рівняння другого роду

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x).$$

Інтеграл, що входить у це рівняння, може за допомогою якої-небудь квадратурної формули бути замінений на деякий вираз, що не містить знаку інтеграла. Дійсно, будь-яка лінійна формула наближеного інтегрування має вид:

$$\int_a^b \psi(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \psi(x_k) + \rho, \tag{2.1}$$

де A_k і x_k – постійні для даного проміжку і для даної формули числа (ваги і вузли квадратурної формули відповідно), а ρ – похибка квадратурної формули [9].

2.1 Вибір квадратурної формули

Більшість завдань доводиться розв'язувати, використовуючи порівняно невелике число вузлів N. Тому для отримання хорошої точності, доцільно вибирати квадратурні формули високого порядку точності, зрозуміло, якщо $K(x,t)$ і $f(x)$ мають достатнє число безперервних похідних.

Зазвичай найкращі результати для досить гладких рішень дають квадратурні формули Гауса, при числі вузлів k їх порядок точності $\rho = 2k$. Можна також використовувати найпростішу формулу трапецій, послідовно згущуючи сітки вдвічі від $N_1 = 2$ до $N_k = 2^k$ і уточнюючи розв'язок способом Рунге, це також дає результат з порядком точності $\rho = 2k$, але вимагає використання істотно більшого числа вузлів, ніж у формулах Гауса.

Нерідко ядро $K(x,t)$ або права частина $f(x)$ недостатньо гладкі і навіть мають розриви. Найбільш типовий розрив ядра або його похідних при $x = t$ (на діагоналі квадрата $a \le x \le b, a \le t \le b$), зустрічаються особливості й на інших лініях у площині (x,t). У цих випадках використовувати формули Гауса недоцільно [2].

2.2 Механічні квадратури

Нехай потрібно знайти значення I інтеграла Рімана $\int_a^b f(x)dx$ для деякої заданої на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$. Відомо, що для функцій, що допускають на проміжку $[a,b]$ кінцеве число точок розриву першого роду, таке значення існує, єдино і може бути формально отримано за визначенням:

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}), \tag{2.2}$$

де $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ довільна упорядкована система точок відрізка $[a,b]$ така, що

$$\max_i\{x_0 - a, x_i - x_{i-1}, b - x_n\} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

де t_i довільна точка елементарного проміжку $[x_{i-1}, x_i]$.

У математичному аналізі обґрунтовується аналітичний спосіб знаходження значення I за допомогою відомої формули Ньютона-Лейбніца

$$I = F(b) - F(a), \tag{2.3}$$

де $F(x)$ – деяка первісна для даної функції $f(x)$.

На жаль, застосування цього підходу до обчислення I наштовхується на кілька серйозних перешкод. Найголовніша з них – це неіснуюча первісна серед елементарних функцій для більшості елементарних функцій $f(x)$, наприклад, таким способом не вдається обчислити:

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx, \int_a^b \frac{dx}{\ln x}, \int_a^b e^{-x^2} dx.$$

Якщо первісна $F(x)$ для заданої функції $f(x)$ все ж знайдена, то обчислення двох її значень $F(a)$ і $F(b)$ може виявитися більш трудомістким, ніж обчислення істотно більшої кількості значень $f(x)$.

Оскільки в загальному випадку значення функцій знаходяться лише наближено, використання точної формули (2.3) призводить до наближеного результату, який може бути більш ефективно отриманий за допомогою спеціальної наближеної формули на основі значень підінтегральної функції $f(x)$. Такі спеціальні наближені формули для обчислення визначених інтегралів називають квадратурними формулами (механічними квадратурами) або формулами чисельного інтегрування.

Перший з цих термінів можна пов'язати з геометричним змістом визначеного інтеграла: обчислення $I \coloneqq \int_a^b f(x)dx$ при $f(x) \geq 0$ рівносильно побудови квадрата, рівновеликої криволінійної трапеції з основою $[a, b]$ і «дахом» $f(x)$ [7].

Прості квадратурні формули можна вивести безпосередньо з визначення інтеграла, тобто з представлення (2.2). Зафіксувавши там деяке $n \geq 1$, матимемо

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{2.4}$$

Цю наближену рівність назвемо загальною формулою прямокутників (площа криволінійної трапеції наближено замінюється площею ступінчатої фігури, складеної з прямокутників, основами яких служать відрізки $[x_{i-1}, x_i]$, а висотами – ординати $f(t_i)$ (див. рис. 2.1).

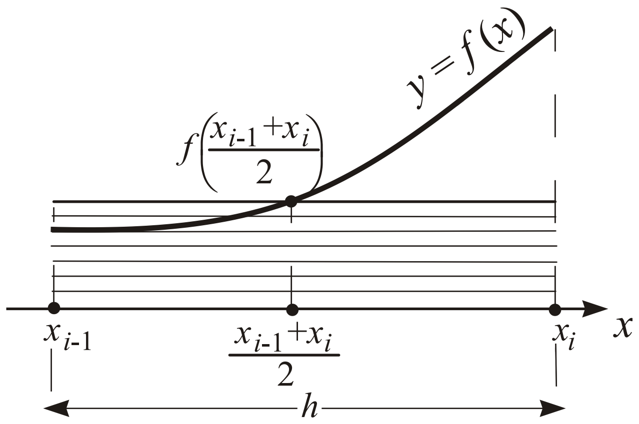

Рисунок 2.1 – Геометрична інтерпретація загальної формули прямокутників

Щоб із загальної формули (2.4) отримати правило наближеного обчислення інтеграла, скористаємося свободою розташування точок x_i, які розбивають проміжок інтегрування $[a, b]$ на елементарні відрізки $[x_{i-1}, x_i]$, і свободою вибору точок t_i на цих відрізках.

Надалі будемо користуватися рівномірним розбиттям відрізка $[a, b]$ на n частин точками x_i з кроком $h = \frac{b-a}{n}$, вважаючи, що

$$x_0 = a, x_i = x_{i-1} + h, x_n = b, i = \overline{1, n-1}. \quad (2.5)$$

При такому розбитті формула (2.4) приймає вид

$$I \approx h \sum_{i=1}^{n} f(t_i), \ \ t_i \epsilon [x_{i-1}, x_i]. \quad (2.6)$$

Розглянемо три випадки розташування точок t_i на елементарних відрізках $[x_{i-1}, x_i]$:

– квадратурна формула лівих прямокутників. Нехай $t_i = x_{i-1}$. Тоді із (2.6) маємо:

$$I \approx I_{\text{пр}}^{\text{л}} = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,; \tag{2.7}$$

– квадратурна формула правих прямокутників. Нехай $t_i = x_i$. Тоді маємо:

$$I \approx I_{\text{пр}}^{\text{п}} = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i); \tag{2.8}$$

– квадратурна формула середніх прямокутників.

Нехай $t_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i), t_i = x_{i-1} + \frac{h}{2}, t_i = x_i - \frac{h}{2}$. Точка t_i береться посередині між точками x_{i-1} і x_i. Звідси маємо:

$$I \approx I_{\text{пр}}^{\text{ср}} = h\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) = h\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i - \frac{h}{2}\right). \tag{2.9}$$

Залишковий член (глобальна похибка) квадратурної формули середніх прямокутників має вид:

$$R_{\text{пр}}(h) = \frac{b-a}{24} f''(t_n)h^2, t_n \epsilon (a,b). \tag{2.10}$$

Як видно з формули (2.10), при збільшенні числа n елементарних проміжків, на які розбивається проміжок інтегрування $[a,b]$ за формулою середньої точки (2.9), спадає пропорційно квадрату кроку h. Неважко переконатися, що похибка чисельного інтегрування безперервно диференціюється за формулами лівих і правих прямокутників (2.7),(2.8) спадає за лінійним законом [3].

2.3 Сімейство квадратурних формул Ньютона-Котеса

Підстановка в інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ замість функції $f(x)$ її інтерполяційного многочлена Лагранжа в тій чи іншій степені n, призводить до сімейства квадратурних формул, званих формулами Ньютона-Котеса. Функція $f(x)$ може бути єдиним чином представлена у вигляді

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x),$$

де $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod_{n+1}(x) y_i}{(x-x_i) \prod'_{n+1}(x_i)}$ – інтерполяційний многочлен Лагранжа, $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \prod_{n+1}(x)$ – залишковий член, $\prod_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$, $t \in (a, b)$.

Тепер запишемо квадратурну формулу Ньютона-Котеса

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^{n} K_i f(x_i), \tag{2.11}$$

де

$$K_i = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-1)!} \frac{1}{n} \int_0^n \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(q-i)} dq \tag{2.12}$$

– коефіцієнти Котеса.

Властивості коефіцієнтів Котеса:

а) $\sum_{i=0}^{n} K_i = 1$, якщо $f(x) = 1$, то $R_n[f] = 0$;

б) $K_i = K_{n-i}$.

Насправді, формули $(2.11), (2.12)$ визначають сімейство квадратурних формул. Параметром цього сімейства є число n – ступінь інтерполяційного многочлена, яким замінюється підінтегральна функція.

Розглянемо кілька найпростіших окремих випадків, відповідних невеликим значенням n. При цьому конкретні квадратурні формули будемо отримувати як на основі загальних формул (2.11), (2.12), використовуючи для цієї мети властивості коефіцієнтів Котеса, і замість многочлена Лагранжа використати еквівалентний йому (в силу єдиності) перший інтерполяційний многочлен Ньютона:

$$P_n(x_0+qh)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\cdots+\frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (2.13)$$

Квадратурна формула трапецій. Нехай $n=1$, тобто всього дві точки x_0 і $x_1=x_0+h$. Цим точкам відповідають значення 0 та 1 змінної q.

Тоді формули (2.11) дають наступний вираз

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx\approx(x_1-x_0)\left(\frac{1}{2}y_0+\frac{1}{2}y_1\right),$$

$$I\approx\frac{h}{2}(y_0+y_1). \quad (2.14)$$

Отримано найпростішу квадратурну формулу трапецій, до якої легко прийти і з геометричних міркувань.

Квадратурна формула Сімпсона (формула парабол). Покладемо в (2.13) $n=2$, тобто проінтерполюємо функцію $f(x)$ по трьох точках: $x_0, x_1=x_0+h$ і $x_2=x_0+2h$. Тоді

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx\approx\int_0^2\left[y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0\right]hdq=$$

$$=h\left[2y_0+2(y_1-y_0)+\frac{1}{3}(y_2-2y_1+y_0)\right]=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2). \quad (2.15)$$

Отримана наближена рівність називається найпростішою формулою Сімпсона.

Складові квадратурні формули. Застосування формул Ньютона-Котеса високих порядків, тобто при великих значеннях параметра $k \in N$, може бути використано при досить високій гладкості підінтегральної функції $f(x)$.

Більш уживаними є квадратурні формули, що виходять шляхом дроблення проміжку інтегрування на велику кількість дрібних частин, інтегрування на кожному з яких проводиться за допомогою найпростіших формул невисокого порядку (формул трапецій і Сімпсона).

Загальна формула трапецій (див. рис. 2.2).

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i-1}^{x_i} f(x)dx = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1} + y_i) - \frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(t_i),$$

де $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$.

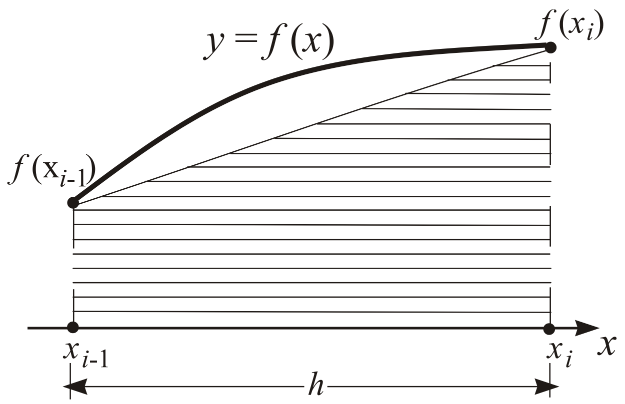

Рисунок 2.2 – Геометрична інтерпретація загальної формули трапецій

Звідси випливає, що шукане значення інтеграла можна наближено знайти за формулою

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left[\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right]. \qquad (2.16)$$

Залишковий член формули

$$R_{\text{пр}} = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(t_i),\ t_i \in [a,b] \to O(h^2). \qquad (2.17)$$

Формула Сімпсона. На основі найпростішої формули Сімпсона та її залишкового члена запишемо рівність

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}) - \frac{h^5}{90} f^{IV}(t_i), \qquad (2.18)$$

де $t_i \in (x_{2i-2}, x_{2i})$.

Виконавши розбиття (2.5) так, щоб число елементарних проміжків $n = 2m$ було парним, вихідний інтеграл представляємо сумою інтегралів виду (2.18):

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx = \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{n}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}) - \frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{m} f^{IV}(t_i).$$

Звідси маємо формулу чисельного інтегрування, яка називається формулою Сімпсона (див. рис. 2.3):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots +$$

$$+\frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}). \qquad (2.19)$$

Залишковий член формули

$$R_{\text{симпс}} = -\frac{h^4}{180}\sum_{i=1}^{m} 2hf^{IV}(t_i) = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{IV}(t_i), \qquad (2.20)$$

де $t_i \in [a,b] \to O(h^4)$ [3].

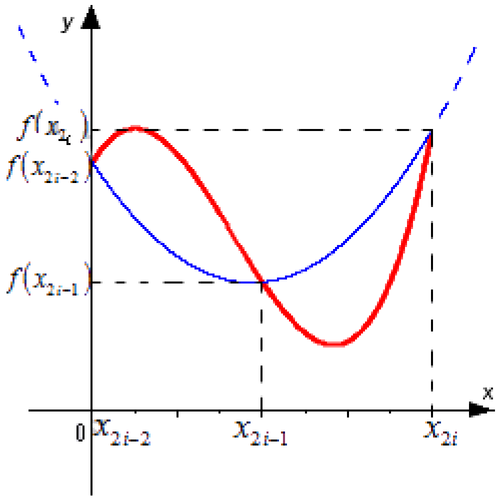

Рисунок 2.3 – Геометрична інтерпретація формули Сімпсона

2.4 Порівняння обчислень за формулами прямокутників, трапецій і Сімпсона

Обчислення інтегралів з потрібною точністю зазвичай роблять за допомогою послідовного дроблення кроку (як правило, поділом навпіл) до виконання деяких критеріїв точності. Розглянемо зв'язки, які виникають між наближеними значеннями I^{Π}, I^{T} і I^{C} інтеграла I у процесі його обчислення за формулами прямокутників, трапецій і Сімпсона з кроком h і кроком $H = 2h$ (див. рис. 2.4).

Розглянемо спочатку наближення до інтегралу

$$I_i = \int_{x_i - h}^{x_i + h} f(x)dx,$$

отримані за формулою прямокутників з кроком $H (I_i^{\Pi}(H))$, за формулою трапецій з кроками H і $h = \frac{H}{2} (I_i^{T}(H)$ і $I_i^{T}(h))$, а також за формулою Сімпсона з кроком $h (I_i^{C}(h))$, через значення

$$y_{i-1} = f(x_i - h), y_i = f(x_i) \text{ і } y_{i+1} = f(x_i + h).$$

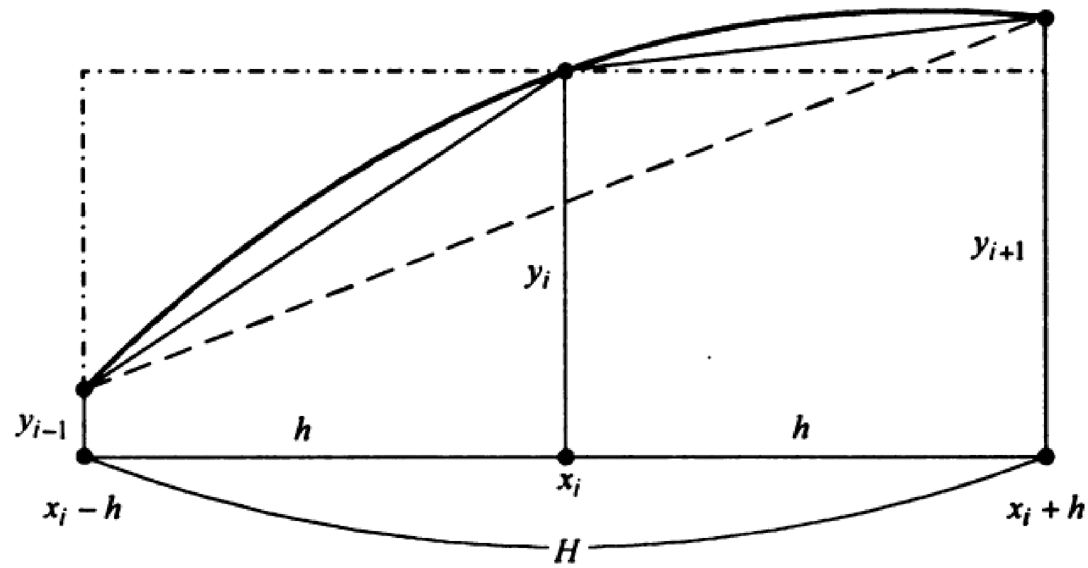

Рисунок 2.4 – До отримання співвідношень між $I_i^{\Pi}(H), I_i^T(H), I_i^T(h)$ і $I_i^C(h)$

Будемо мати:

$$I_i^{\Pi}(H) = Hy_i = 2hy_i;$$

$$I_i^T(H) = \frac{y_{i-1} + y_{i+1}}{2}H = h(y_{i-1} + y_{i+1});$$

$$I_i^T(h) = \frac{y_{i-1} + y_i}{2}h + \frac{y_i + y_{i+1}}{2}h = \frac{h}{2}(y_{i-1} + 2y_i + y_{i+1});$$

$$I_i^C(h) = \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}).$$

Беручи полусуму правих частин перших двох з цих рівностей, отримуємо праву частину третього. Отже,

$$I_i^T(h) = \frac{1}{2}\left(I_i^{\Pi}(H) + I_i^T(H)\right). \tag{2.21}$$

Якщо ж взяти середнє зважене цих же рівностей з вагами $\frac{2}{3}$ і $\frac{1}{3}$ відповідно, то прийдемо до четвертої рівності, тобто

$$I_i^C(h) = \frac{2}{3} I_i^{\Pi}(H) + \frac{1}{3} I_i^T(H). \tag{2.22}$$

Оскільки вихідний інтеграл є $I = \sum_{i=1}^{m} I_i$, де $m = \frac{b-a}{H}$, то індекс i у співвідношеннях (2.21), (2.22) можна відкинути.

Отже, якщо $h = \frac{H}{2}$, то

$$I^T(h) = \frac{1}{2}\Big(I^{\Pi}(H) + I^T(H)\Big), \tag{2.23}$$

$$I^C(h) = \frac{2}{3} I^{\Pi}(H) + \frac{1}{3} I^T(H). \tag{2.24}$$

На базі цих зв'язків можна будувати ефективні алгоритми обчислення інтегралів. Суть в тому, що, роблячи для уточнення значення інтеграла дроблення кроку H навпіл, ми повинні обчислювати нові значення підінтегральної функції в точках, розташованих посередині попередніх елементарних відрізків. Ці нові значення використовуються для обчислення значення $I^{\Pi}(H)$, всі інші значення функції передаються на цей етап з попереднього вже в підсумованому вигляді, тобто як $I^T(H)$. Так можна отримувати або більш точне, ніж $I^T(H)$, значення $I^T(h)$, або $I^C(h)$.

Зауважимо, що значення $I^C(h)$ можна обчислити також за формулою

$$I^C(h) = I^T(h) + R^T(h), \tag{2.25}$$

де $R^T(h) = \frac{1}{3}(I^T(h) - I^T(H))$ – так звана поправка Річардсона.

Дійсно, повертаючись до інтегралу I_i, безпосередньо (справа наліво) перевіряємо справедливість –го фрагмента формули (2.25):

$$I_i^T(h) + R_i^T(h) = I_i^T(h) + \frac{1}{3}\left(I_i^T(h) - I_i^T(H)\right) = \frac{4}{3}I_i^T(h) - \frac{1}{3}I_i^T(H) =$$

$$= \frac{4h}{6}(y_{i-1} + 2y_i + y_{i+1}) - \frac{h}{3}(y_{i-1} + y_{i+1}) = \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}) = I_i^C(h)\,.$$

з адитивності інтеграла тепер випливає (2.25).

Таким чином, обчислення поправки Річардсона дозволяє уточнити наближене значення $I^T(h)$ інтеграла I, отримане за формулою трапецій [6].

2.5 Принцип Рунге практичного оцінювання похибок

Нехай до наближеного обчислення значення I даного інтеграла застосовується якась квадратурна формула p–го порядку точності I^p з сімейства складових формул Ньютона-Котеса. За умови неперервності p–ої похідної підінтегральної функції це означає існування такої постійної C, що

$$I = I^p(h) + Ch^p. \tag{2.26}$$

При зменшенні вдвічі кроку h чисельного інтегрування за тією ж формулою p –го порядку можна записати таку ж рівність, але з іншою постійною C_1:

$$I = I^p\left(\frac{h}{2}\right) + C_1\left(\frac{h}{2}\right)^p. \tag{2.27}$$

Вважаючи, що при малому h постійні C і C_1 близькі, з (2.26) і (2.27) маємо

$$I^p(h) + Ch^p = I^p\left(\frac{h}{2}\right) + C_1\left(\frac{h}{2}\right)^p \approx I^p\left(\frac{h}{2}\right) + C\left(\frac{h}{2}\right)^p$$

і, отже,

$$C \approx C_1 \approx \frac{I^p\left(\frac{h}{2}\right) - I^p(h)}{h^p - \left(\frac{h}{2}\right)^p}.$$

Підставивши це значення C_1 в (2.27), отримуємо вираз

$$I \approx I^p\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{I^p\left(\frac{h}{2}\right) - I^p(h)}{2^p - 1}. \qquad (2.28)$$

До наближеної рівності (2.28) можна ставитися двояко. З одного боку, переписавши її у вигляді

$$I - I^p\left(\frac{h}{2}\right) \approx \frac{I^p\left(\frac{h}{2}\right) - I^p(h)}{2^p - 1}, \qquad (2.29)$$

отримуємо можливість хоча б грубо контролювати точність чисельного інтегрування на основі подвійного рахунку (з кроком h і з кроком $\frac{h}{2}$). У цьому і полягає широко застосовуваний принцип Рунге практичного оцінювання похибок. Його застосування вважається правомочним, якщо виконується нерівність

$$\left| 2^p \frac{I^p\left(\frac{h}{2}\right) - I^p(h)}{I^p(h) - I^p(2h)} - 1 \right| < 0.1.$$

З іншого боку, другий доданок у формулі (2.28) дозволяє уточнити «дешевим» способом наближене значення $I^p\left(\frac{h}{2}\right)$ інтеграла I. Зауважимо, що при $p = 2$ формула (2.26) є формула трапецій:

$$I = I^T(h) + Ch^2,$$

і вираз (2.29) в цьому випадку збігається з визначеною у попередньому розділі поправкою Річардсона $R^T\left(\frac{h}{2}\right)$, а права частина формули (2.28) є значення $I^C\left(\frac{h}{2}\right)$, відповідне формулі Сімпсона. Природно назвати узагальненою поправкою Річардсона одержувану за допомогою подвійного рахунку величину [8]

$$R^p\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{I^p\left(\frac{h}{2}\right) - I^p(h)}{2^p - 1}.$$

Таким чином, скориставшись вище наведеними відомостями можна запропонувати, такий алгоритм обчислення інтеграла I на основі формул прямокутників-трапецій із заданою точністю ε:

Крок 1 Вважаємо $n = 1, H = b - a, I^T(H) = \frac{H}{2}[f(a) + f(b)]$.

Крок 2 Обчислюємо $h = \frac{H}{2}, x_1 = a + h, x_i = x_{i-1} + H\ (i = 2, \dots, n)$,

$$y_i = f(x_i)(i = 1,2,..,n), I^\Pi(H) = H\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Крок 3 Обчислюємо $I^T(h) = \frac{1}{2}[I^\Pi(H) + I^T(H)]$,

$$R^T(h) = \frac{1}{3}[I^T(h) - I^T(H)].$$

Крок 4 Порівнюємо $|R^T(h)|$ з ε. Якщо $|R^T(h)| > \varepsilon$, то вважаємо

$$n = 2n, H = h, I^T(H) = I^T(h)$$

і повертаємося до пункту 2.

Крок 5 Обчислюємо $I^C(h) = I^T(h) + R^T(h)$ і приймаємо $I \approx I^C(h)$.

Якщо є підстави вважати, що підінтегральна функція має досить високий ступінь гладкості, то для обчислення інтеграла можна застосувати алгоритм, запропонований шведським математиком Ромбергом. Базується цей алгоритм на зв'язках між складовими квадратурними формулами Ньютона-Котеса парних порядків типу встановленого вище зв'язку (2.25) між формулами трапецій і Сімпсона через поправку Річардсона. Так, можна показати, що права частина відповідного (2.28) при $p = 4$ наближеної рівності

$$I \approx I^4\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{I^4\left(\frac{h}{2}\right) - I^4(h)}{15},$$

де $I^4(h) \equiv I^C(h)$, згідно з попереднім, збігається зі значенням $I^6\left(\frac{h}{2}\right)$, яке могло б бути пораховано за складовою формулою Ньютона-Котеса, що відповідає рядку $k = 4$ в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Параметри деяких формул Ньютона-Котеса

k	B_k	$a_0^{(k)}$	$a_1^{(k)}$	$a_2^{(k)}$	$a_3^{(k)}$	$a_4^{(k)}$	$a_5^{(k)}$	$\dots$	$r_k(h)$
1	$\frac{1}{2}$	1	1						$-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$
2	$\frac{1}{3}$	1	4	1					$-\frac{h^5}{90}f^{IV}(\xi)$
3	$\frac{3}{8}$	1	3	3	1				$-\frac{3h^5}{80}f^{IV}(\xi)$
4	$\frac{2}{45}$	7	32	12	32	7			$-\frac{8h^7}{945}f^{VI}(\xi)$
5	$\frac{5}{288}$	19	75	50	50	75	19		$-\frac{275h^7}{12096}f^{VI}(\xi)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Таким чином, алгоритм Ромберга визначається наступною сукупністю формул:

$$h_0 = b - a, h_i = \frac{h_{i-1}}{2}, I^{(0)}(h_0) = I^T(h_0), I^{(0)}(h_i) = I^T(h_i),$$
$$R^{(k-1)}(h_i) = \frac{1}{2^{2k} - 1}\left[I^{(k-1)}(h_i) - I^{(k-1)}(h_{i-1})\right], \tag{2.30}$$
$$I^{(k)}(h_i) = I^{(k-1)}(h_i) + R^{(k-1)}(h_i),$$

де i має значення 1,2,3, ..., а k змінюється від 1 до i, рахунок закінчується при виконанні умови $\left|R^{(k-1)}(h_i)\right| \le \varepsilon$, після чого вважають

$$I \approx I^{(k)}(h_i).$$

Послідовність уточнень значення інтеграла в алгоритмі Ромберга зручно простежити по таблиці 2.2.

Таблиця 2.2 – Схема послідовних уточнень інтеграла алгоритму Ромберга

i	h_i	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	…
0	h_0	1 $I^{(0)}(h_0)$					
1	h_1	2 $I^{(0)}(h_1)$	3 $I^{(1)}(h_1)$				
2	h_2	4 $I^{(0)}(h_2)$	5 $I^{(1)}(h_2)$	6 $I^{(2)}(h_2)$			
3	h_3	7 $I^{(0)}(h_3)$	8 $I^{(1)}(h_3)$	9 $I^{(2)}(h_3)$	10 $I^{(3)}(h_3)$		
4	h_4	11 $I^{(0)}(h_4)$	12 $I^{(1)}(h_4)$	13 $I^{(2)}(h_4)$	14 $I^{(3)}(h_4)$	15 $I^{(4)}(h_4)$	
…	…	…	…	…	…	…	…

Тобто будується наступний трикутник

$$
\begin{gathered}
R(1,1)\\
R(2,1)R(2,2)\\
R(3,1)R(3,2)R(3,3)\\
R(4,1)R(4,2)R(4,3)R(4,4)\\
R(5,1)R(5,2)R(5,3)R(5,4)R(5,5)\\
\dots,
\end{gathered}
$$

в якому перший стовпець складається зі значень інтеграла, отриманих при послідовному подвоєнні числа інтервалів. Другий стовпець – результат уточнення значень першого стовпчика за рекурентною формулою (2.30). Третій стовпець – уточнені значення інтеграла на основі другого стовпця і так далі.

3 РОЗВ’ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА ДРУГОГО РОДУ З ІТЕРАЦІЙНИМ УТОЧНЕННЯМ

Приклад 3.1 Розв’язати рівняння за формулою Сімпсона:

$$y(x) + \int_0^1 xe^{xt}y(t)dt = e^x.$$

Випадок 1 Розглянемо число елементарних проміжків $n = 2m = 2$, тоді кількість дріблень проміжку $[0,1]$ $m = 1$ з кроком розбиття $h = \frac{b-a}{2m} = \frac{1}{2}$.

Вузли для формули Сімпсона $t_i = x_i = a + ih$ для $i = 0,1,2,$ будуть такими:

$$t_0 = x_0 = 0, t_1 = x_1 = \frac{1}{2}, t_2 = x_2 = 1.$$

Вагові коефіцієнти:

$$A_0 = A_2 = \frac{h}{3} = \frac{1}{6}, A_1 = \frac{4h}{3} = \frac{2}{3}.$$

Підставляючи відомі значення у формулу

$$y(x) = e^x - \sum_i A_i f(x_i), \tag{3.1}$$

маємо:

$$y(x) + \frac{1}{6}[xe^{0x}y_0 + 4xe^{0.5x}y_1 + xe^{1x}y_2] = e^x. \tag{3.2}$$

Далі підставляємо значення $x = x_i, i = 0,1,2$ у (3.2):

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ y_1 + \dfrac{0,5}{6}(y_0 + 4e^{0,25}y_1 + e^{0,5}y_2) = e^{0,5}, \\ y_2 + \dfrac{1}{6}(y_0 + 4e^{0,5}y_1 + e^1 y_2) = e^1. \end{cases}$$

Спрощуємо систему, розкривши дужки:

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ y_1 = 1,56538794 - 0,42800847y_1 - 0,13739344y_2, \\ y_2 = 2,55161516 - 1,09914751y_1 - 0,45304697y_2. \end{cases}$$

Зводимо подібні:

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ y_1 = 1,09620354 - 0,09621332y_2, \\ y_2 = 1,75604451 - 0,75644321y_1. \end{cases}$$

Підставивши друге рівняння в третє, потім, обчисливши y_2, підставляємо значення в рівняння від останнього до першого, отримаємо:

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ y_1 = 1,00003082, \\ y_2 = 0,99957799. \end{cases}$$

Підставляємо знайдені значення y_i $(i = 0,1,2)$ у (3.2) і знаходимо таким чином точний розв'язок рівняння:

$$y(x) \equiv 1$$

та наближений:

$$y(x) = e^{x} - \frac{x}{6}(1 + 4{,}00012328e^{0{,}5x} + 0{,}99957799e^{x}).$$

Оскільки

$$y(x) = f(x) - \lambda\left(I^{(k)}(h_i)\right), \tag{3.3}$$

то ітераційним уточненням буде :

$$I^{0}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{x}{6}(1 + 4{,}00012328e^{0{,}5x} + 0{,}99957799e^{x}).$$

Випадок 2 Розглянемо число елементарних проміжків $n = 2m = 4$, тоді кількість дріблень проміжку $[0,1]$ $m = 2$ з кроком $h = \frac{b-a}{2m} = \frac{1}{4}$.

Вузли для формули Сімпсона $t_i = x_i = h + x_{i-1}$ для $i = 0,1,2,3,4$ будуть такими:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1.$$

Вагові коефіцієнти:

$$A_0 = A_4 = \frac{h}{3} = \frac{1}{12}, A_1 = A_3 = \frac{4h}{3} = \frac{1}{3}, A_2 = \frac{2h}{3} = \frac{1}{6}.$$

Підставляючи відомі значення у формулу (3.1) маємо:

$$y(x) = e^{x} - \frac{x}{12}\left[e^{x*0}y_0 + 4e^{\frac{x}{4}}y_1 + 2e^{\frac{x}{2}}y_2 + 4e^{\frac{3x}{4}}y_3 + e^{x}y_4\right]. \tag{3.4}$$

Підставляємо значення $x = x_i$ для $i = 0,1,2,3,4$ у (3.4):

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ y_1 = e^{\frac{1}{4}} - [\frac{1}{48} + \frac{1}{12} e^{\frac{1}{16}} y_1 + \frac{1}{24} e^{\frac{1}{8}} y_2 + \frac{1}{12} e^{\frac{3}{16}} y_3 + \frac{1}{48} e^{\frac{1}{4}} y_4], \\ y_2 = e^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{1}{24} + \frac{1}{6} e^{\frac{1}{8}} y_1 + \frac{1}{12} e^{\frac{1}{4}} y_2 + \frac{1}{6} e^{\frac{3}{8}} y_3 + \frac{1}{24} e^{\frac{1}{2}} y_4\right], \\ y_3 = e^{\frac{3}{4}} - \left[\frac{1}{16} + \frac{1}{4} e^{\frac{3}{16}} y_1 + \frac{1}{8} e^{\frac{3}{8}} y_2 + \frac{1}{4} e^{\frac{9}{16}} y_3 + \frac{1}{16} e^{\frac{3}{4}} y_4\right], \\ y_4 = e^{1} - \left[\frac{1}{12} + \frac{1}{3} e^{\frac{1}{4}} y_1 + \frac{1}{6} e^{\frac{1}{2}} y_2 + \frac{1}{3} e^{\frac{3}{4}} y_3 + \frac{1}{12} e^{1} y_4\right]. \end{cases}$$

Спрощуємо систему, розкривши дужки:

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ y_1 = 1{,}26319 - 0{,}08871 y_1 - 0{,}04722 y_2 - 0{,}10052 y_3 - 0{,}02675 y_4, \\ y_2 = 1{,}60706 - 0{,}18886 y_1 - 0{,}10700 y_2 - 0{,}24249 y_3 - 0{,}06869 y_4, \\ y_3 = 2{,}0545 - 0{,}30156 y_1 - 0{,}18187 y_2 - 0{,}43876 y_3 - 0{,}13231 y_4, \\ y_4 = 2{,}63494 - 0{,}42801 y_1 - 0{,}27479 y_2 - 0{,}70567 y_3 - 0{,}22652 y_4. \end{cases}$$

Робимо прості арифметичні дії над рівняннями системи:

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ y_1 = 1{,}16026306 - 0{,}04337243 y_2 - 0{,}09232945 y_3 - 0{,}02457036 y_4, \\ y_2 = 1{,}45172538 - 0{,}17060524 y_1 - 0{,}21905149 y_3 - 0{,}06205059 y_4, \\ y_3 = 1{,}42796575 - 0{,}20959715 y_1 - 0{,}12640746 y_2 - 0{,}09196113 y_4, \\ y_4 = 2{,}14830578 - 0{,}34896292 y_1 - 0{,}22404037 y_2 - 0{,}57534325 y_3. \end{cases}$$

Далі друге рівняння підставляємо в третє, четверте і п’яте:

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ y_1 = 1{,}16026756 - 0{,}04336748 y_2 - 0{,}09232889 y_3 - 0{,}0245709 y_4 \quad , \\ y_2 = 1{,}25377842 + 0{,}007399564 y_2 + 0{,}01575189 y_3 + 0{,}004191832 y_4 \\ \qquad -0{,}21905149 y_3 - 0{,}06205059 y_4, \\ y_3 = 1{,}18477792 + 0{,}009090738 y_2 + 0{,}01935199 y_3 + 0{,}005149877 y_4 \\ \qquad -0{,}12640746 y_2 - 0{,}09196113 y_4, \\ y_4 = 1{,}74341699 + 0{,}01513537 y_2 + 0{,}03221955 y_3 + 0{,}008574145 y_4 \\ \qquad -0{,}22404037 y_2 - 0{,}57534325 y_3. \end{cases}$$

Спрощуємо отриману систему шляхом зведення подібних:

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ y_1 = 1{,}16026756 - 0{,}04336748y_2 - 0{,}09232889y_3 - 0{,}0245709y_4, \\ y_2 = 1{,}26312499 - 0{,}2048151y_3 - 0{,}05829008y_4, \\ y_3 = 1{,}20815819 - 0{,}1196318y_2 - 0{,}08852437y_4, \\ y_4 = 1{,}75849458 - 0{,}2107117y_2 - 0{,}5478208y_3. \end{cases}$$

Тепер третє рівняння нової системи підставляємо в четверте і п'яте:

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ y_1 = 1{,}16026756 - 0{,}04336748y_2 - 0{,}09232889y_3 - 0{,}0245709y_4, \\ y_2 = 1{,}26311773 - 0{,}2048226y_3 - 0{,}05829598y_4, \\ y_3 = 1{,}05704827 + 0{,}0245024y_3 + 0{,}006973347y_4 - 0{,}08852437y_4, \\ y_4 = 1{,}49233937 + 0{,}04315694y_3 + 0{,}0122824y_4 - 0{,}5478208y_3. \end{cases}$$

Спрощуємо систему простими арифметичними діями:

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ y_1 = 1{,}16026756 - 0{,}04336748y_2 - 0{,}09232889y_3 - 0{,}0245709y_4, \\ y_2 = 1{,}26311773 - 0{,}2048226y_3 - 0{,}05829598y_4, \\ y_3 = 1{,}08359905 - 0{,}08359941y_4, \\ y_4 = 1{,}51089681 - 0{,}5109395y_3. \end{cases}$$

Підставляємо четверте рівняння в п'яте й виписуємо його окремо:

$$y_4 = 0{,}95724325 + 0{,}04271424y_4.$$

Обчисливши значення y_4, підставляємо його в попереднє рівняння, і так, рухаючись до першого рівняння, знайдемо значення інших змінних:

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ y_1 = 0{,}99998218, \\ y_2 = 1{,}0002171, \\ y_3 = 1{,}00000335, \\ y_4 = 0{,}99995559. \end{cases}$$

Отримані значення підставляємо у (3.4) та знаходимо точний розв'язок:

$$y(x) \equiv 1$$

та наближений:

$$y(x) = e^x - \frac{x}{12}[1 + 3{,}99992872e^{\frac{x}{4}} + 2{,}0004342e^{\frac{x}{2}} + 4{,}0000134e^{\frac{3x}{4}} +$$
$$+0{,}99995559e^x].$$

Ітераційне уточнення згідно (3.3):

$$I^0\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{x}{12}[1 + 3{,}99992872e^{\frac{x}{4}} + 2{,}0004342e^{\frac{x}{2}} + 4{,}0000134e^{\frac{3x}{4}} +$$
$$+0{,}99995559e^x].$$

Випадок 3 Розглянемо число елементарних проміжків $n = 2m = 8$, тоді кількість дріблень проміжку $[0,1]$ $m = 4$ з кроком $h = \frac{b-a}{2m} = \frac{1}{8}$.

Вузли для формули Сімпсона $t_i = x_i = h + x_{i-1}$ для $i = \overline{0,8}$ будуть такими:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{8}, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = \frac{3}{8}, x_4 = \frac{1}{2}, x_5 = \frac{5}{8}, x_6 = \frac{3}{4}, x_7 = \frac{7}{8}, x_8 = 1.$$

Вагові коефіцієнти:

$$A_0 = A_8 = \frac{h}{3} = \frac{1}{24}, A_1 = A_3 = A_5 = A_7 = \frac{4h}{3} = \frac{1}{6}, A_2 = A_4 = A_6 = \frac{2h}{3} = \frac{1}{12}.$$

Підставляючи відомі значення у формулу (3.1) маємо:

$$y(x) = e^x - \frac{x}{24}[e^{x*0}y_0 + 4e^{\frac{x}{8}}y_1 + 2e^{\frac{x}{4}}y_2 + 4e^{\frac{3x}{8}}y_3 + 2e^{\frac{x}{2}}y_4 + 4e^{\frac{5x}{8}}y_5 + $$
$$+2e^{\frac{3x}{4}}y_6 + 4e^{\frac{7x}{8}}y_7 + e^x y_8]. \qquad (3.5)$$

Підставляємо значення $x = x_i$ для $i = \overline{0,8}$ у (3.5):

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ y_1 = e^{1/8} - \frac{1}{8*24}\left[\begin{matrix} y_0 + 4e^{\frac{1}{64}}y_1 + 2e^{\frac{1}{32}}y_2 + 4e^{\frac{3}{64}}y_3 + 2e^{\frac{1}{16}}y_4 + 4e^{\frac{5}{64}}y_5 + \\ +2e^{\frac{3}{32}}y_6 + 4e^{\frac{7}{64}}y_7 + e^{\frac{1}{8}}y_8 \end{matrix}\right], \\ y_2 = e^{1/4} - \frac{1}{4*24}\left[\begin{matrix} y_0 + 4e^{\frac{1}{32}}y_1 + 2e^{\frac{1}{16}}y_2 + 4e^{\frac{3}{32}}y_3 + 2e^{\frac{1}{8}}y_4 + 4e^{\frac{5}{32}}y_5 + \\ +2e^{\frac{3}{16}}y_6 + 4e^{\frac{7}{32}}y_7 + e^{\frac{1}{4}}y_8 \end{matrix}\right], \\ y_3 = e^{3/8} - \frac{3}{8*24}\left[\begin{matrix} y_0 + 4e^{\frac{3}{64}}y_1 + 2e^{\frac{3}{32}}y_2 + 4e^{\frac{9}{64}}y_3 + 2e^{\frac{3}{16}}y_4 + 4e^{\frac{15}{64}}y_5 + \\ +2e^{\frac{9}{32}}y_6 + 4e^{\frac{21}{64}}y_7 + e^{\frac{3}{8}}y_8 \end{matrix}\right], \\ y_4 = e^{1/2} - \frac{1}{2*24}\left[\begin{matrix} y_0 + 4e^{\frac{1}{16}}y_1 + 2e^{\frac{1}{8}}y_2 + 4e^{\frac{3}{16}}y_3 + 2e^{\frac{1}{4}}y_4 + 4e^{\frac{5}{16}}y_5 + \\ +2e^{\frac{3}{8}}y_6 + 4e^{\frac{7}{16}}y_7 + e^{\frac{1}{2}}y_8 \end{matrix}\right], \\ y_5 = e^{5/8} - \frac{5}{8*24}\left[\begin{matrix} y_0 + 4e^{\frac{5}{64}}y_1 + 2e^{\frac{5}{32}}y_2 + 4e^{\frac{15}{64}}y_3 + 2e^{\frac{5}{16}}y_4 + 4e^{\frac{25}{64}}y_5 + \\ +2e^{\frac{15}{32}}y_6 + 4e^{\frac{35}{64}}y_7 + e^{\frac{5}{8}}y_8 \end{matrix}\right], \\ y_6 = e^{3/4} - \frac{3}{4*24}\left[\begin{matrix} y_0 + 4e^{\frac{3}{32}}y_1 + 2e^{\frac{3}{16}}y_2 + 4e^{\frac{9}{32}}y_3 + 2e^{\frac{3}{8}}y_4 + 4e^{\frac{15}{32}}y_5 + \\ +2e^{\frac{9}{16}}y_6 + 4e^{\frac{21}{32}}y_7 + e^{\frac{3}{4}}y_8 \end{matrix}\right], \\ y_7 = e^{7/8} - \frac{7}{8*24}\left[\begin{matrix} y_0 + 4e^{\frac{7}{64}}y_1 + 2e^{\frac{7}{32}}y_2 + 4e^{\frac{21}{64}}y_3 + 2e^{\frac{7}{16}}y_4 + 4e^{\frac{35}{64}}y_5 + \\ +2e^{\frac{21}{32}}y_6 + 4e^{\frac{49}{64}}y_7 + e^{\frac{7}{8}}y_8 \end{matrix}\right], \\ y_8 = e^1 - \frac{1}{24}\left[\begin{matrix} y_0 + 4e^{\frac{1}{8}}y_1 + 2e^{\frac{1}{4}}y_2 + 4e^{\frac{3}{8}}y_3 + 2e^{\frac{1}{2}}y_4 + 4e^{\frac{5}{8}}y_5 + 2e^{\frac{3}{4}}y_6 + \\ +4e^{\frac{7}{8}}y_7 + e^1 y_8 \end{matrix}\right]. \end{cases}$$

Спрощуємо систему, розкривши дужки:

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ 1{,}12794012 = 1{,}02116141y_1 + 0{,}01074733y_2 + 0{,}02183315y_3 + 0{,}01108848y_4 + \\ +0{,}0225262y_5 + 0{,}01144047y_6 + 0{,}02324126y_7 + 0{,}005901815y_8, \\ 1{,}27360875 = 0{,}04298931y_1 + 1{,}02217697y_2 + 0{,}04576188y_3 + 0{,}02360726y_4 + \\ +0{,}04871327y_5 + 0{,}0251298y_6 + 0{,}051855y_7 + 0{,}01337526y_8, \\ 1{,}43936641 = 0{,}06549944y_1 + 0{,}03432141y_2 + 1{,}07193706y_3 + 0{,}0376947y_4 + \\ +0{,}0790074y_5 + 0{,}04139952y_6 + 0{,}08677266y_7 + 0{,}02273424y_8, \\ 1{,}62788794 = 0{,}08870787y_1 + 0{,}04721452y_2 + 0{,}10051919y_3 + 1{,}05350106y_4 + \\ +0{,}11390316y_5 + 0{,}06062464y_6 + 0{,}12906919y_7 + 0{,}03434836y_8, \\ 1{,}84220429 = 0{,}11263102y_1 + 0{,}06089159y_2 + 0{,}131679y_3 + 0{,}07118948y_4 + \\ +1{,}15394835y_5 + 0{,}08322893y_6 + 0{,}17998386y_7 + 0{,}04865224y_8, \\ 2{,}08575002 = 0{,}13728564y_1 + 0{,}0376947y_2 + 0{,}1655981y_3 + 0{,}09093696y_4 + \\ +0{,}19974943y_5 + 1{,}10969092y_6 + 0{,}24094381y_7 + 0{,}06615625y_8, \\ 2{,}36241696 = 0{,}16268884y_1 + 0{,}09074626y_2 + 0{,}20246953y_3 + 0{,}11293554y_4 + \\ +0{,}2519774y_5 + 0{,}14055055y_6 + 1{,}31359095y_7 + 0{,}087459y_8, \\ 2{,}67661516 = 0{,}18885808y_1 + 0{,}10700212y_2 + 0{,}24249857y_3 + 0{,}13739344y_4 + \\ +0{,}31137433y_5 + 0{,}17641667y_6 + 0{,}39981255y_7 + 1{,}11326174y_8. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь та отримуємо значення змінних:

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ y_1 = 0{,}9997659638, \\ y_2 = 0{,}9994840721, \\ y_3 = 0{,}9991475321, \\ y_4 = 0{,}9987487506, \\ y_5 = 0{,}9982791461, \\ y_6 = 1{,}035404413, \\ y_7 = 0{,}9970881022, \\ y_8 = 0{,}9963439101. \end{cases}$$

Отримані значення підставляємо у (3.5) та знаходимо точний розв'язок:

$$y(x) \equiv 1$$

та наближений:

$$y(x) = e^x - \frac{x}{6}[\frac{1}{4} + 0{,}9997659638e^{\frac{x}{8}} + 0{,}49974204e^{\frac{x}{4}} + 0{,}991475321e^{\frac{3x}{8}} +$$

$$+0{,}49937432e^{\frac{x}{2}} + 0{,}9982791461e^{\frac{5x}{8}} + 0{,}51770221e^{\frac{3x}{4}} +$$

$$+0{,}9970881022e^{\frac{7x}{8}} + +0{,}24908598e^{x}].$$

Ітераційне уточнення згідно (3.3):

$$I^0\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{x}{6}[\frac{1}{4} + 0{,}9997659638e^{\frac{x}{8}} + 0{,}49974204e^{\frac{x}{4}} + 0{,}991475321e^{\frac{3x}{8}} +$$

$$+0{,}49937432e^{\frac{x}{2}} + 0{,}9982791461e^{\frac{5x}{8}} + 0{,}51770221e^{\frac{3x}{4}} +$$

$$+0{,}9970881022e^{\frac{7x}{8}} + +0{,}24908598e^{x}].$$

```
> plot({I02, I04, I08}, x = 0..1, y = 0..1.1, xtickmarks = 10, ytickmarks = 10);
```

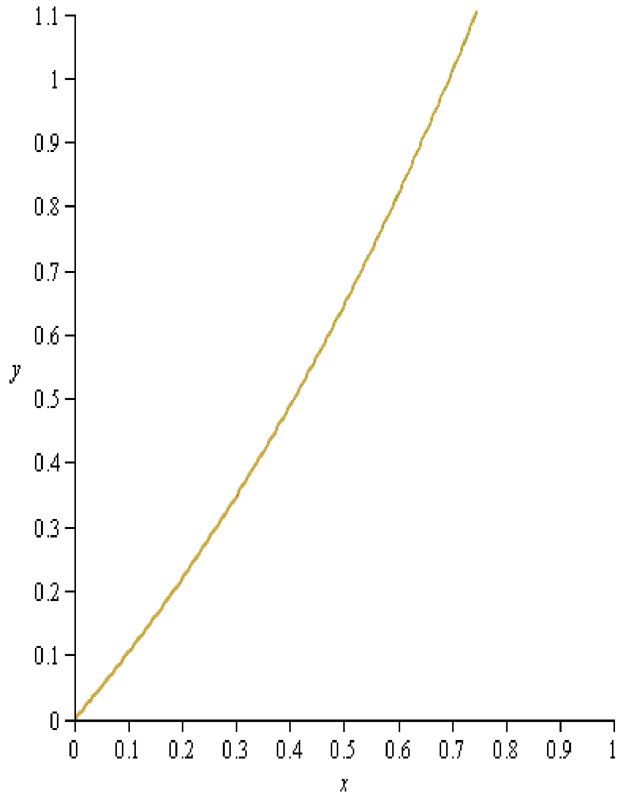

Рисунок 3.1 – Значення інтеграла I^0 при різних h

Оскільки за правилом Рунге

$$I = I_{2n} + \frac{I_{2n} - I_n}{2^n - 1},$$

то уточнене значення інтегралу запишеться таким чином:

$$I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=I^0\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{I^0\left(\frac{1}{4}\right)-I^0\left(\frac{1}{2}\right)}{15}=$$
$$=\frac{7}{90}xy_0+\frac{16}{45}xe^{0,25x}y_2+\frac{2}{15}xe^{0,5x}y_4+\frac{16}{45}xe^{0,75x}y_6+\frac{7}{90}xe^{x}y_8.$$

При підстановці останнього інтегралу в інтегральне рівняння приходимо до рівняння

$$y(x)+I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=e^x,$$

у яке послідовно підставляємо значення вузлових точок $x=0$; $x=0,25$; $x=0,5$; $x=0,75$; $x=1$. В результаті приходимо до СЛАР, розв'язок якої представлено в таблиці 3.1.

$$I\left(\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{180}xy_0+\frac{8}{45}xe^{0,125x}y_1+\frac{1}{15}xe^{0,25x}y_2+$$
$$+\frac{8}{45}xe^{0,375x}y_3+\frac{7}{90}xe^{0,5x}y_4+\frac{8}{45}xe^{0,625x}y_5+\frac{1}{15}xe^{0,75x}y_6+$$
$$+\frac{8}{45}xe^{0,875x}y_7+\frac{7}{180}xe^{x}y_8.$$

При підстановці останнього інтегралу в інтегральне рівняння приходимо до рівняння

$$y(x)+I\left(\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)=e^x,$$

у яке послідовно підставляємо значення вузлових точок $x=0$; $x=0,125$; $x=0,25$; $x=0,375$; $x=0,5$; $x=0,625$; $x=0,75$; $x=0,875$; $x=1$. В результаті приходимо до СЛАР, розв'язок якої представлено в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Розв’язок інтеграла I

y_i, $i = 0,\ldots,8$	$I^0\left(\frac{1}{4}\right)$	$I^0\left(\frac{1}{8}\right)$	$I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$	$I\left(\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$
y_0	1	1	1	1
y_1	–	0,9997659638	–	1,000000002
y_2	0,99998218	0,9994840721	1,000000016	1,000000006
y_3	–	0,9991475321	–	1,000000009
y_4	1,0002171	0,9987487506	1,000000039	1,000000013
y_5	–	0,9982791461	–	1,000000019
y_6	1,00000335	1,035404413	0,9999999842	1,000000026
y_7	–	0,9970881022	–	1,000000032
y_8	0,99995559	0,9963439101	0,9999992868	0,9999992694

Похибка розв’язків при застосуванні квадратурної формули Сімпсона та правила Рунге оцінки похибки наведена в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2 – Похибка ε

$\varepsilon = \left\lvert\frac{y_т - y_{пр}}{y_т}\right\rvert * 100\%$				
y_0	0	0	0	0
y_1	–	0,02340362	–	0,0000002
y_2	0,001782	0,05159279	0,0000016	0,0000006
y_3	–	0,08524679	–	0,0000009
y_4	0,02171	0,12512494	0,0000039	0,0000013
y_5	–	0,17208539	–	0,0000019
y_6	0,000335	3,5404413	0,00000158	0,0000026
y_7	–	0,29118978	–	0,0000032
y_8	0,004441	0,36560899	0,00007132	0,00007306

Можна зробити висновок, що при застосуванні тієї чи іншої квадратурної формули в інтегральному рівнянні результат маємо гірший, ніж при застосуванні правила Рунге оцінки похибки чисельного інтегрування при розв’язанні інтегральних рівнянь.

Приклад 3.2 Розв’язати рівняння із застосуванням ітераційного процесу Ромберга:

$$y(x) - \int_{0.5}^{1,5} (1 + 2xt)y(t)dt = -\frac{1}{6}(x + 3).$$

Розв’язання.

Скористаємось для знаходження дискретних значень шуканої функції програмним забезпеченням, розробленим для чотирьох квадратурних формул – лівих і правих прямокутників, формулу трапецій, формула Сімпсона. (Додаток А).

Результати розрахунків для квадратурної формули лівих прямокутників в залежності від кількості ітерації зведемо в таблицю 3.3.

Таблиця 3.3 – Метод лівих прямокутників

	X(I)	**Y(I)**					
		Кількість ітерацій					
		k=1	**k=2**	**k=3**	**k=4**	**k=5**	**k=6**
1.	0,5	1,1666667	0,33333333	0,15646259	0,093333333	0,066250434	0,053665911
2.	0,53125						0,069538927
3.	0,5625					0,098508498	0,085411943
4.	0,59375						0,10128496
5.	0, 625				0,16	0,13076656	0,11715797
6.	0, 65625						0,13303099
7.	0, 6875					0,16302463	0,1489040
8.	0, 71875						0,1647770
9.	0, 75			0,29931973	0,22666667	0,19528269	0,1806500
10.	0, 78125						0,1965230
11.	0,8125					0,22754076	0,21239607
12.	0, 84375						0,22826909

13.	0, 875				0,29333333	0,25979882	0,24414210

Продовження таблиці 3.3

	X(I)	Y(I)					
		Кількість ітерацій					
		k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6
14.	0,90625						0,26001512
15.	0, 9375					0,29205689	0,27588813
16.	0,96875						0,29176115
17.	1		0,66666667	0,44217687	0,36	0,32431495	0,30763416
18.	1,03125						0,32350718
19.	1,0625					0,35657301	0,33938020
20.	1,09375						0,35525321
21.	1,125				0,42666667	0,38883108	0,37112623
22.	1,15625						0,38699924
23.	1,1875					0,42108914	0,40287226
24.	1,21875						0,41874528
25.	1,25			0,58503401	0,49333333	0,45334721	0,43461829
26.	1,28125						0,45049131
27.	1,3125					0,48560527	0,46636432
28.	1,34375						0,48223734
29.	1,375				0,56	0,51786334	0,49811036
30.	1,40625						0,51398337
31.	1,4375					0,55012140	0,52985639
32.	1,46875						0,54572940

Результати розрахунків для квадратурної формули правих прямокутників в залежності від кількості ітерації зведемо в таблицю 3.4

Таблиця 3.4 – Метод правих прямокутників

	X(I)	Y(I)					
		Кількість ітерацій					
		k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6
1.	0,53125						0,045601578
2.	0,5625					0,049586777	0,060986193
3.	0,59375						0,076370809

4.	0, 625				0,057670127	0,079889807	0,091755424

Продовження таблиці 3.4

	X(I)	Y(I)					
		Кількість ітерацій					
		k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6
5.	0, 65625						0,10714004
6.	0, 6875					0,11019284	0,12252465
7.	0, 71875						0,13790927
8.	0, 75			0,074074074	0,11649366	0,14049587	0,15329389
9.	0, 78125						0,16867850
10.	0,8125					0,17079890	0,18406312
11.	0, 84375						0,19944773
12.	0, 875				0,17531719	0,20110193	0,21483235
13.	0,90625						0,23021696
14.	0, 9375					0,23140496	0,24560158
15.	0,96875						0,26098619
16.	1		0,10666667	0,18518519	0,23414072	0,26170799	0,27637081
17.	1,03125						0,29175542
18.	1,0625					0,29201102	0,30714004
19.	1,09375						0,32252465
20.	1,125				0,29296424	0,32231405	0,33790927
21.	1,15625						0,35329389
22.	1,1875					0,35261708	0,36867850
23.	1,21875						0,38406312
24.	1,25			0,29629630	0,35178777	0,38292011	0,39944773
25.	1,28125						0,41483235
26.	1,3125					0,41322314	0,43021696
27.	1,34375						0,44560158
28.	1,375				0,41061130	0,44352617	0,46098619
29.	1,40625						0,47637081
30.	1,4375					0,47382920	0,49175542
31.	1,46875						0,50714004
32.	1,5	0,16666667	0,30666667	0,40740741	0,46943483	0,50413223	0,52252465

Результати розрахунків для квадратурної формули трапеції в залежності від кількості ітерації зведемо в таблицю 3.5.

Таблиця 3.5 – Метод трапеції

	X(I)	Y(I)					
		Кількість ітерацій					
		k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6
1.	0,5	-0,04166666	0,020833333	0,036458333	0,040364583	0,041341146	0,041585286
2.	0,53125						0,057210286
3.	0,5625					0,72591146	0,072835286
4.	0,59375						0,088460286
5.	0, 625				0,10286458	0,10384115	0,10408529
6.	0, 65625						11971029D
7.	0, 6875					0,13509115	13533529D
8.	0, 71875						15096029D
9.	0, 75			0,16145833	0,16536458	0,16634115	16658529D
10.	0, 78125						18221029D
11.	0,8125					0,19759115	19783529D
12.	0, 84375						0,21346029
13.	0, 875				0,22786458	0,22884115	0,22908529
14.	0,90625						0,24471029
15.	0, 9375					0,26009115	0,26033529
16.	0,96875						0,27596029
17.	1		0,27083333	0,28645833	0,29036458	0,29134115	0,29158529
18.	1,03125						0,30721029
19.	1,0625					0,32259115	0,32283529
20.	1,09375						0,33846029
21.	1,125				0,35286458	0,35384115	0,35408529
22.	1,15625						0,36971029
23.	1,1875					0,38509115	0,38533529
24.	1,21875						0,40096029
25.	1,25			0,41145833	0,41536458	0,41634115	0,41658529
26.	1,28125						0,43221029
27.	1,3125					0,44759115	0,44783529
28.	1,34375						0,46346029
29.	1,375				0,47786458	0,47884115	0,47908529
30.	1,40625						0,49471029
31.	1,4375					0,51009115	0,51033529
32.	1,46875						0,52596029

33.	1,5	0,45833333	0,52083333	0,53645833	0,54036458	0,54134115	0,54158529

Результати розрахунків для квадратурної формули Сімпсона в залежності від кількості ітерації зведемо в таблицю 3.6.

Таблиця 3.6 – Метод Сімпсона

	X(I)	**Y(I)**					
		Кількість ітерацій					
		k=1	**k=2**	**k=3**	**k=4**	**k=5**	**k=6**
1.	0,5	0,21052632	0,11415525	0,075899458	0,058372267	0,049926969	0,045774899
2.	0,515625						0,053635792
3.	0,53125					0,065749289	0,061496684
4.	0,546875						0,069357577
5.	0,5625				0,090442406	0,081571609	0,077218469
6.	0,578125						0,085079362
7.	0,59375					0,097393930	0,092940254
8.	0,609375						0,10080115
9.	0,625			0,14194184	0,12251255	0,11321625	0,10866204
10.	0,640625						0,11652293
11.	0,65625					0,12903857	0,12438382
12.	0,671875						0,13224472
13.	0,6875				0,15458268	0,14486089	0,14010561
14.	0,703125						0,14796650
15.	0,71875					0,16068321	0,15582739
16.	0,734375						0,16368829
17.	0,75		0,25570776	0,20798423	0,18665282	0,17650553	0,17154918
18.	0,765625						0,17941007
19.	0,78125					0,19232785	0,18727096
20.	0,796875						0,19513186
21.	0,8125				0,21872296	0,20815017	0,20299275
22.	0,828125						0,21085364
23.	0,84375					0,22397249	0,21871453
24.	0,859375						0,22657543
25.	0,875			0,27402661	0,25079310	0,23979481	0,23443632
26.	0,890625						0,24229721
27.	0,90625					0,25561713	0,25015810
28.	0,921875						0,25801900
29.	0,9375				0,28286324	0,27143945	0,26587989
30.	0,953125						0,27374078

31.	0,96875					28726177	0,28160167

Продовження таблиці 3.6

	X(I)	Y(I)					
		Кількість ітерацій					
		k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6
32.	0,984375						0,28946257
33.	1	0,55263158	0,39726027	0,34006900	0,31493338	0,30308409	0,29732346
34.	1,015625						0,30518435
35.	1,03125					0,31890641	0,31304524
36.	1,046875						0,32090614
37.	1,0625				0,34700352	0,33472874	0,32876703
38.	1,078125						0,33662792
39.	1,09375					0,35055106	0,34448881
40.	1,109375						0,35234971
41.	1,125			0,40611138	0,37907366	0,36637338	0,36021060
42.	1,140625						0,36807149
43.	1,15625					0,38219570	0,37593238
44.	1,171875						0,38379328
45.	1,1875				0,41114380	0,39801802	0,39165417
46.	1,203125						0,39951506
47.	1,21875					0,41384034	0,40737595
48.	1,234375						0,41523685
49.	1,25		0,53881279	0,47215377	0,44321394	0,42966266	0,42309774
50.	1,265625						0,43095863
51.	1,28125					0,44548498	0,43881952
52.	1,296875						0,44668042
53.	1,3125				0,47528407	0,46130730	0,45454131
54.	1,328125						0,46240220
55.	1,34375					0,47712962	0,47026309
56.	1,359375						0,47812399
57.	1,375			0,53819616	0,50735421	0,49295194	0,48598488
58.	1,390625						0,49384577
59.	1,40625					0,50877426	0,50170666
60.	1,421875						0,50956756
61.	1,4375				0,53942435	0,52459658	0,51742845
62.	1,453125						0,52528934
63.	1,46875					0,54041890	0,53315023
64.	1,484375						0,54101113
65.	1,5	0,89473684	0,68036530	0,60423854	0,57149449	0,55624122	0,54887202

ВИСНОВКИ

У роботі наведено основні теоретичні відомості про інтегральне рівняння Фредгольма другого роду та основні аналітичні та чисельні методи розв'язання цього рівняння, їх переваги та недоліки.

Для розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду більш детально розглянуто один із чисельних методів – квадратурний метод розв'язання. Для його реалізації вивчено основні види квадратурних формул, таких як формула лівих і правих прямокутників, формулу трапецій, формула Сімпсона. В процесі виконання роботи було застосовано як традиційну для ітераційного алгоритма Ромберга квадратурну формулу трапецій, так й інші вказані квадратурні формули.

В ході виконання роботи в ітераційному процесі отримано розв'язки ряда інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду як у наближеному аналітичному виді, так і у вигляді дискретних значень шуканої функції. Проведено порівняння отриманих розв'язків інтегрального рівняння з відомими точним аналітичними розв'язками.

Із аналізу розрахунків можна зазначити, що похибка розв'язання інтегрального рівняння при застосуванні ітераційного процесу Ромберга зменьшується із збільшенням кількості ітерацій.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Арушанян И. О. Численное решение интегральных уравнений методом квадратур. Москва : Изд-во МГУ, 2012. 71 с.
2. Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. 160 с.
3. Вержбицкий В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения) : Учеб. пособие для вузов. Москва : Высш. шк., 2001. 382 с.
4. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев : Наукова думка, 1986. 544 с.
5. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 1968. 192 с.
6. Мысовских И. П. Об оценке ошибки, возникающей при решении интегрального уравнения способом механических квадратур. Москва : Вестник ЛГУ, 1956. 72 с.
7. Волков Е. А. Численные методы : Учеб. Пособие для вузов. Москва : Наука, 1987. 248 с.
8. Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений. Москва : Наука, 1965. 128 с.
9. Полянин А. Д., Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. 608 с.

ДОДАТОК А

Програма для знаходження дискретних значень шуканої функції

```
      PROGRAM FREDGOLM
C      ********************************************
C      РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ
C      ********************************************
C      A - ЛЕВАЯ ГРАНИЦА ИНТЕРВАЛА
C      B - ПРАВАЯ ГРАНИЦА ИНТЕРВАЛА
C      N - КОЛИЧЕСТВО ОТРЕЗКОВ РАЗБИЕНИЯ
C      H - ШАГ СЕТКИ РАЗБИЕНИЯ
C      X(I) - УЗЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СЕТКИ РАЗБИЕНИЯ
C      F(X),R(X) - ФУНКЦИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
C      Y(I) - УЗЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ
C      C,D - ВСПОМАГАТЕЛЬНЫЕ МАССИВЫ
C
       DOUBLE PRECISION DLAM,A,B,H,X,F,R,Y,C,D,AK
       DIMENSION X(100),Y(100),C(100,100),D(100),AK(100)
       WRITE(*,*) 'ВВЕДИТЕ ЛЕВУЮ ГРАНИЦУ ИНТЕРВАЛА'
       READ(*,*) A
       WRITE(*,*) 'ВВЕДИТЕ ПРАВУЮ ГРАНИЦУ ИНТЕРВАЛА'
       READ(*,*) B
       WRITE(*,*) 'ВВЕДИТЕ НОМЕР КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ'
       WRITE(*,*) '1 - КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ЛЕВЫХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ'
       WRITE(*,*) '2 - КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ПРАВЫХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ'
       WRITE(*,*) '3 - КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ТРАПЕЦИЙ'
       WRITE(*,*) '4 - КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА СИМПСОНА'
       READ(*,*) M
       WRITE(*,*) 'ВВЕДИТЕ НАЧАЛЬНОЕ КОЛИЧЕСТВО ОТРЕЗКОВ РАЗБИЕНИЯ'
       READ(*,*) N
       WRITE(*,*) 'ВВЕДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ИТЕРАЦИЙ'
       READ(*,*) K
       DLAM=1.D0
       DO 7 KM=1,K
       H=(B-A)/N
       IF(M.EQ.1) NN=N
       IF(M.EQ.2) NN=N
       IF(M.EQ.3) NN=N+1
       IF(M.EQ.4) NN=2*N+1
       DO 1 I=1,NN
       IF(M.EQ.1) X(I)=A+(I-1)*H
       IF(M.EQ.2) X(I)=A+I*H
       IF(M.EQ.3) X(I)=A+(I-1)*H
       IF(M.EQ.4) X(I)=A+(I-1)*H/2.D0
     1 CONTINUE
       DO 4 I=1,NN
       IF(M.EQ.1) AK(I)=H
       IF(M.EQ.2) AK(I)=H
     4 CONTINUE
       DO 9 I=1,NN
       AK(I)=H
       IF(M.EQ.3.AND.I.EQ.1) AK(I)=0.5D0*H
       IF(M.EQ.3.AND.I.EQ.NN) AK(I)=0.5D0*H
     9 CONTINUE
```

```
      IF(M.EQ.4) AK(1)=H/6.D0
      IF(M.EQ.4) AK(NN)=H/6.D0
      DO 8 I=3,NN-2,2
      IF(M.EQ.4) AK(I)=2.D0*H/3.D0
    8 CONTINUE
      DO 10 I=2,NN-1,2
      IF(M.EQ.4) AK(I)=1.D0*H/3.D0
   10 CONTINUE
      DO 2 J=1,NN
      DO 3 I=1,NN
      IF(I.NE.J) C(J,I)=-DLAM*AK(I)*R(X(J),X(I))
      IF(I.EQ.J) C(J,I)=1.D0-DLAM*AK(I)*R(X(J),X(I))
    3 CONTINUE
      D(J)=F(X(J))
    2 CONTINUE
      CALL GAUSSPLUS(C,NN,D,Y)
      WRITE(4,*) ‘  РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ’
      IF(M.EQ.1) WRITE(4,*) ‘1 - ФОРМУЛА ЛЕВЫХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ’
      IF(M.EQ.2) WRITE(4,*) ‘2 - ФОРМУЛА ПРАВЫХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ’
      IF(M.EQ.3) WRITE(4,*) ‘3 - ФОРМУЛА ТРАПЕЦИЙ’
      IF(M.EQ.4) WRITE(4,*) ‘4 - ФОРМУЛА СИМПСОНА’
      DO 5 K=1,NN
      WRITE(4,6) X(K),Y(K)
    5 CONTINUE
    6 FORMAT(5X,’X=‘,D15.8,’Y=‘,D15.8)
      N=2*N
    7 CONTINUE
      END
C     **************************
C     ПЕРЕМЕННАЯ ЧАСТЬ ПРОГРАММЫ
C     **************************
      DOUBLE PRECISION FUNCTION F(X)
C     ***********************************************
C     ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ F(X)
C     ***********************************************
      DOUBLE PRECISION X,PI
      PI=4.D0*DATAN(1.D0)
      F=-(X+3.D0)/6.D0
      RETURN
      END
      DOUBLE PRECISION FUNCTION R(X,Y)
C     *****************************************************
C     ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ P(X)
C     *****************************************************
      DOUBLE PRECISION X,Y,PI
      PI=4.D0*DATAN(1.D0)
      R=(1.D0+2.D0*X*Y)
      RETURN
            END
```