МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра загальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ВИДІЛЕННЯ КЛАСІВ ПОВЕРХОНЬ ПОСТІЙНОЇ ВІД’ЄМНОЇ КРИВИНИ»**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Виконала: студентка | | 2 | курсу, групи | 8.1118-з |
| спеціальності | 111 математика | | | |
| (шифр і назва спеціальності) | | | | |
| освітньої програми | |  | математика |  |
| Ю.І. Мокляк | | | | |
| (ініціали та прізвище) | | | | |
| Керівник | старший викладач кафедри загальної  математики, к.ф.-м.н., Гречнєва М.О. | | | |
| (посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) | | | | |
| Рецензент | доцент кафедри фундаментальної математики та механіки, доцент,  к.ф.-м.н.,Ткаченко І.Г. | | | |
|  | (посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) | | | |

Запоріжжя – 2020

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ** | | | |
| **ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ** | | | |
| Факультет | математичний | | |
| Кафедра | загальної математики | | |
| Рівень вищої освіти | | | магістр |
| Спеціальність | | 111 математика | |
|  |  |  | (шифр і назва) |
| Освітня програма | | | математика |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **ЗАТВЕРДЖУЮ**  Завідувач кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н. | | | | |
| Зіновєєв І.В. | | | | |
| (підпис) | | | | |
| « | 30 | » | травня | 2019 р. |

**З А В Д А Н Н Я**

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Мокляк Юлії Іванівні

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. Тема роботи | (прізвище, ім’я та по батькові)  Виділення класів поверхонь постійної від’ємної кривини | | | | | | |
|  |  | | | | | | |
| керівник роботи |  | Гречнєва Марина Олександрівна, к.ф.-м.н. | | | | | |
| (прізвище, ім’я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання) | | | | | | | |
| затверджені наказом ЗНУ від | | « | 29 | » | травня | 2019 року № | 812-с |
| 2. Строк подання студентом роботи | | | 25.12.2019 | | | | |
| 3. Вихідні дані до роботи | 1. Постановка задачі. | | | | | | |
| 2. Перелік літератури. | | | | | | | |
|  | | | | | | | |
| 4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити) | | | | | | | |
| 1. Постановка задачі. | | | | | | | |
| 2. Основні теоретичні відомості. | | | | | | | |
| 3. Підбір відповідного матеріалу та прикладів. | | | | | | | |
| 5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов’язкових креслень) | | | | | | | |
| Презентація | | | | | | | |

1. Консультанти розділів роботи

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Розділ** | **Прізвище, ініціали та посада консультанта** | **Підпис, дата** | |
| **завдання видав** | **завдання прийняв** |
| І | Стєганцева П.Г., доцент кафедри загальної математики, к.ф.-м.н. |  |  |
| ІІ | Стєганцева П.Г., доцент кафедри загальної математики, к.ф.-м.н. |  |  |
| ІІІ | Стєганцева П.Г., доцент кафедри загальної математики, к.ф.-м.н. |  |  |

1. Дата видачі завдання

К А Л Е Н Д А Р Н И Й П Л А Н

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Назва етапів кваліфікаційної роботи** | **Строк виконання етапів роботи** | **Примітка** |
| 1. | Розробка плану роботи. | 28.05.2019 |  |
|  |  |  |  |
| 2. | Збір вихідних даних. | 04.06.2019 |  |
|  |  |  |  |
| 3. | Обробка методичних та теоретичних | 09.07.2019 |  |
|  | джерел. |  |  |
|  |  |  |  |
| 4. | Розробка першого та другого розділу. | 06.08.2019 |  |
|  |  |  |  |
| 5. | Розробка третього розділу. | 08.11.2019 |  |
|  |  |  |  |
| 6. | Оформлення та нормоконтроль | 03.12.2019 |  |
|  | кваліфікаційної роботи. |  |  |
|  |  |  |  |
| 7. | Захист кваліфікаційної роботи. | 09.01.2020 |  |

|  |  |
| --- | --- |
| Студент | Ю.І. Мокляк |
| (підпис) | (ініціали та прізвище) |
| Керівник роботи | М.О. Гречнєва |
| (підпис) | (ініціали та прізвище) |

**Нормоконтроль пройдено**

|  |  |
| --- | --- |
| Нормоконтролер | О.Г. Спиця |
| (підпис) | (ініціали та прізвище) |

# РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Виділення класів поверхонь постійної від’ємної кривини»: 45 с., 11 рис, 10 джерел.

ГАУСОВА КРИВИНА, МІНІМАЛЬНА ПОВЕРХНЯ, ПОВЕРХНЯ ОБЕРТАННЯ, ПОВЕРХНЯ, СЕРЕДНЯ КРИВИНА, ФОРМУЛИ ЕЙЛЕРА.

**Об’єкт дослідження**: двовимірні поверхні тривимірного евклідового простору.

**Предмет дослідження**: класифікація поверхонь за кривиною

**Мета дослідження**: виділення класів поверхонь постійної від’ємної гаусової кривини.

Відповідно до об’єкта, предмета та мети визначено **головні завдання дослідження**:

* розглянути основні поняття теорії двовимірних поверхонь тривимірного евклідового простору;
* класифікувати поверхні за значенням гаусової кривини;
* виділити класи поверхонь постійної від’ємної гаусової кривини.

# SUMMARY

Master’s Qualification Thesis „Distinguishing of classes of the surfaces of constant negative curvature“: 45 p., 11 rites, 10 sources.

GAUSS CURVATURE, MINIMUM SURFACE, SURFACE OF TURN, SURFACE, EULER FORMULA, EULER FORMULA.

**Object of study**: two-dimensional surfaces of the three-dimensional Euclidean space

**Subject of study**: classification of surfaces by the curvature

**The aim of the study**: separation of the classes of surfaces of constant negative Gauss curvature

In accordance with the object, subject and goal, the **main objectives of the study are determined**:

* consider the basic concepts of the theory of two-dimensional surfaces of three-dimensional Euclidean space;
* classification of the surface according to the values of Gauss curvature;
* distinguish the classes of the surfaces of constant negative Gauss curvature.

# ВСТУП

Предметом дослідження даної кваліфікаційної роботи є поверхні постійної від’ємної кривини. Поверхня від’ємної кривини – двовимірна поверхня тривимірного евклідового простору, яка в кожній своїй точці має

від’ємну гаусову кривину *К*  0 . Ці поверхні відносяться до так званих

сідлових поверхонь. Сідлові поверхні детально не вивчаються шкільному курсі геометрії, але в повсякденному житті зустрічаються достатньо часто. В даній роботі буде розглянуто вплив гаусової кривини на зовнішній вид поверхні в просторі та розділено ці поверхні на класи за значенням кривини.

В даній роботі можна ознайомитися з наступними класами поверхонь від’ємної гаусової кривини:

* лінійчаті;
* мінімальні;
* поверхні обертання.

А також ‒ із самими розповсюдженими представниками кожного з даних класів.

Описані також основні поняття теорії поверхонь від’ємної гаусової кривини в тривимірному просторі. Приведені теореми Бельтрамі, Боне.

Вказані основні результати Н.В. Єфімова про поведінку гаусової кривини на повних гладких поверхнях від’ємної кривини.

# 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

В даному розділі коротко ознайомимося з основними поняттями, які безпосередньо необхідні для детального вивчення поставленої задачі кваліфікаційної роботи.

# Задання поверхні

**Означення 1.1** Геометричне місце точок простору, топологічно еквівалентне множині точок кола на площині, називається просторовим шматком поверхні (рис 1.1).

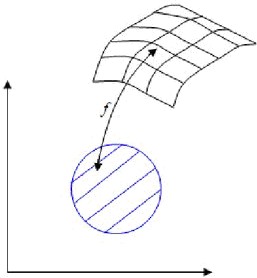


Рисунок 1.1 ‒ Геометричне місце точок простору

**Означення 1.2** Два просторових шматка поверхні називають склеєними, якщо частини їх границь або обидві границі співпадають між собою (рис. 1.2).

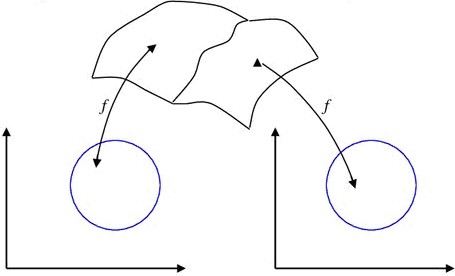


Рисунок 1.2 ‒ Склеєні просторові шматки

**Означення 1.3** Поверхнею називають множину точок, які можуть бути складені зі скінечної або зчисленної множини просторових точок (див рис. 1.3).

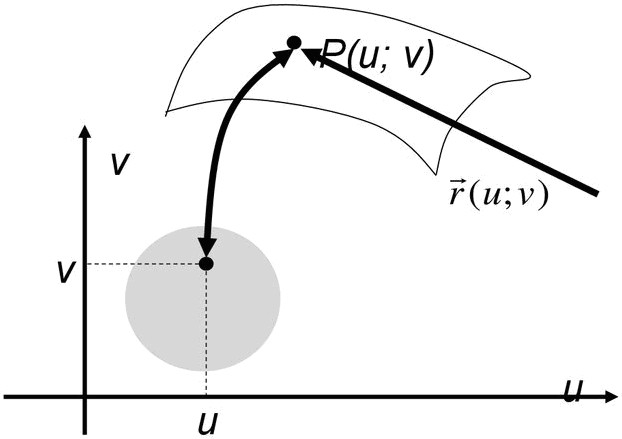


Рисунок 1.3 ‒ Інтерпретація параметричного рівняння

*r*  *r* (*u*,*v*)

‒ радіус вектор точок поверхні в деякій системі координат двох

*u*  *u*(*x*, *y*)



параметрів *u* і *v*,

*v*  *v*(*x*, *y*)

*z*  *z*(*u*,*v*)



‒ параметричне рівняння поверхні.

На відміну від кривих, поверхні параметризуються двома параметрами

*u* і *v*. Матриця *I*

 *x* *y*

 *u* *u*

  *x*

 *y*

 *v* *v*

*z* 



*u*

*z*  називається матрицею Якобі.



*v* 

Будемо позначати

*z*  *f* (*x*, *y*)

поверхню, задану в явному вигляді, а

*F*(*x*, *y*, *z*)  0

– рівняння неявно заданої поверхні.

**Означення 1.4** Розглянемо лінії на поверхні, в кожній точці якої

виконується:

*u*  *u*0  *const*

або

*v*  *v*0  *const* . Такі лінії на поверхні

називаються координатними, а *u* і *v ‒* криволінійними координатами.

**Означення 1.5** Якщо в кожній точці поверхні ранг матриці Якобі дорівнює 2, то система криволінійних координат на поверхні називається правильною.

Далі розглянемо лінію

*v*  *v*0  *const* . Звідси маємо

*r*  *r* (*u*,*v*0 ) ‒

рівняння кривої. Отже

*r*  *r*

‒ дотичний вектор до лінії

*v*  *const*

(див.

рис. 1.4).

*u* *u*

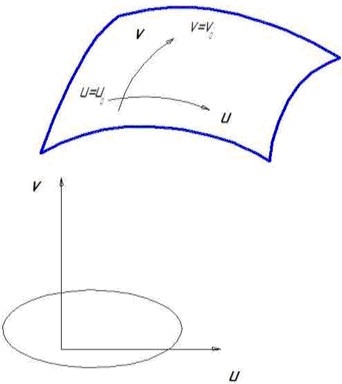


Рисунок 1.4 **‒** Геометрична інтерпретація дотичного вектора до заданої лінії

Розглянемо лінію

*u*  *u*0  *const* . Звідси маємо

*r*  *r* (*u*0 ,*v*)

* рівняння

кривої. Отже *r*

 *r*

* дотичний вектор до лінії *u*  *const* .

*v* *v*

**Означення 1.6** Вектори

*ru* , *rv*

називають координатними векторами.

*r*  *x*

*u*

*u*

, *yu*

, *zu*  і

*r*  *x* , *y*

, *z*  ‒ строки в матриці Якобі.

**Твердження.** Система криволінійних координат правильна тоді і

*v*

*v*

*u*

*v*

тільки тоді, коли вектори *ru* та *rv* не колінеарні.

# Дотична площина поверхні. Нормаль до поверхні

Розглянемо лінію на поверхні, яка проходить через точку *Р* (див.

рис. 1.5). Рівняння

*r*  *r**u*(*t*), *v*(*t*) ‒ рівняння лінії поверхні.

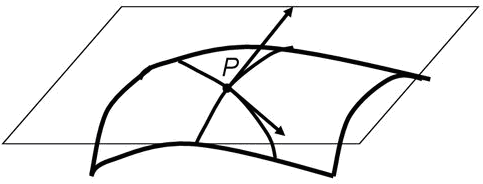


Рисунок 1.5 **‒** Геометрична інтерпретація рівняння лінії поверхні в заданій точці

**Означення 1.7** Дотична площина до поверхні в точці *Р* ‒ це площина,

яка містить дотичні до всіх кривих, які належать даній поверхні і проходять через точку *Р*.

Нехай

*р*  ** ,**,**  ‒ радіус-вектор точок на дотичній площині, а

*р*  *r* ,

*ru* , *rv*

‒ компланарні вектори. Тоді очевидно, що

( *p*  *r* )  *ru*  *rv*  0 . Отже,

**  *x xu xv*

**  *y yu yv*

**  *z*

*zu*  0

*zv*

‒ рівняння дотичної площини поверхні.

**Означення 1.8** Нормаллю до поверхні називають пряму,

перпендикулярну до дотичної площини, яка проходить через точку дотику *Р*.

Нехай вектор *N*  *r* ,*r* 

паралельний нормалі, тоді його координати

матимуть вигляд *N*   *yu*

*u v*

*zu* ; *xu zu* ; *xu yu*  .



*y*

 *v v*

*xv zv xv*



*yv* 

*z*

Враховуючи все вище сказане,

*р*  ** ,**,**  буде радіус вектором точок

нормалі. Тоді відповідно

*р*  *r*

*N* . Враховуючи пропорційність координат

можна записати рівняння нормалі:

**  *x*  **  *y*  **  *z* .

*Nx Ny Nz*

# Перша та друга квадратичні форми поверхні

* + 1. **Перша квадратична форма поверхні**

Нехай крива належить поверхні

*r*  *r* (*u*,*v*) . Тоді

*ds*  *dr* ,

*ds*2  *dr* 2 ,

*dr*  *ru du*  *rv dv* . Піднесемо до квадрата обидві частини останньої рівності:

*ds*2  *r* 2 *du*2  2*r r dudv*  *r* 2 *dv*2 . (1.1)

*u u v v*

Введемо позначення *r* 2  *Е*(*u*,*v*) ,

*r r*  *F* (*u*,*v*), *r* 2  *G*(*u*,*v*) . Тоді

*u*

рівність (1.1) матиме вигляд:

*u v v*

*ds*2  *Edu*2  2*Fdudv* *Gdv*2 . (1.2)

Отже рівняння (1.2) перша квадратична форма поверхні.

Довжина дуги кривої на поверхні від точки з параметром *t*1

параметром *t*2 :

до точки з

*t*2

*S*12  

*t*1

*Edu*2  2*Fdudv*  *Gdv*2 . (1.3)

Нехай *u*  *u*(*t*) ,

*v*  *v*(*t*), тоді

*du*  *u**dt* ,

*dv*  *v**dt* , маємо

*t*2

*S*12  

*t*1

*Eu* 2  2*Fu**v*  *Gv*2 *dt* , (1.4)

 *Edu*2  2*Fdudv* *Gdv*2 , (1.5)

**

1

**  *ds*2 . (1.6)

2

**Означення 1.9** Кутом між двома кривими на поверхні називають кут між дотичними до цих кривих, які проведені в точці їх перетину.

Нехай поверхня задана:

*r*  *r* (*u*,*v*)

на ній задані дві криві, тоді

*dr*  *ru du*  *rv dv*

* нескінченно малий дотичний вектор уздовж одної кривої на

поверхні, а

*r*  *r u*  *r v*

‒ нескінченно малий дотичний вектор вздовж

*u v*

другої кривої (обидва вектори розглядаються в точці перетину кривих).

Ці вектори відрізняються один від одного відношеннями диференціалів від криволінійних координат

cos**  *dr*  *r* *Eduu*  *F* (*duv*  *udu*)  *Gdvv* . (1.7)

*dr*  *r*

*Edu*2  2*Fdudv*  *Gdv*2

*Eu* 2  2*Fuv*  *Gv*2

Розглянемо косинус кута між координатним лініями

cos** *Fvdu* 

*F* . (1.8)

*Edu*2

*Gv*2 *EG*

*S*  *r* ;*r* *dudv*. (1.9)

 *u v*

*D*

Звідси

*r* ;*r*  

. Використавши формулу Лагранжа

*u v*

*a*;*b* 2  *a*;*b* 2  *a* 2  *b* 2 , отримаємо

*N*

*r* ;*r*    .

*u v*

*r*  *r*

2

2

*u v*

 

*r*  *r* 

2

*u v*

*EG*  *F* 2

З матриці  *E F*  отримаємо *g*  *EG*  *F* 2  *r* ;*r* 2  0 . Це означає, що

 

 *F G*  *u v*

перша квадратична форма додатно визначена. Отже її можна знайти наступним чином:

*S*  

*D*

*EG*  *F* 2 *dudv*. (1.10)

# Друга квадратична форма поверхні

**Означення 1.10** Проекція вектора кривини кривої, яка лежить на поверхні, на нормаль до поверхні в даній точці кривої називають нормальною кривиною кривої.

Нехай крива на поверхні задана рівнянням:

вектор кривини кривої.

*r*  *r* (*u*(*s*),*v*(*s*)) , тоді *r* **** ‒

Дано вектор нормалі до поверхні

*N*  *r* ;*r* . Тоді

*N* *r* ;*r* 

*N*

*r* ;*r* 

*u v*

*u v*







*n*

*r* ;*r* 

*u v*

‒ одиничний вектор нормалі.

*u v*

*EG*  *F* 2

Розглянемо вектори *r*   *r u*  *r v* ,

*r*  *r* (*u*(*s*), *v*(*s*)) , *r*  *r* (*u*(*s*), *v*(*s*)) .

*u*

Знайдемо першу та другу похідні:

*r*   *r*

*v u u v v*

*u*  *r v*

1. *uu uv*

 2 *r*

*ruu*  *u* 2

 2 *r*

*ruv*  *u**v*

 2 *r*

*rvv*  *v**v*

*r*   *r u*  *r v*

1. *uv vv*

*r* ****  *r* *u*  *r u*****  *r* *v*  *r* *v*****  *r u*2  *r*

*u**v*  *r u*****  *r*

*u**v*  *r v*2  *r v*2  *r v***** 

*u u v v uu uv*

*u vu*

*vv v v*

 *r u*2  2*r u**v*  *r v*2  *r u*****  *r v***** .

*uu uv vv u v*

Назвемо

*kn* нормальною кривиною кривої на поверхні. Вона матиме

вигляд:

*k*  *пр r* ****  *n*  *r* ****  *r nu*2  2*r nu**v*  *r nv*2  *r nu*****  *r nv***** . Оскільки

*n n uu uv vv u v*

*ru n*  *rv n*  0 , то остаточно формула матиме вигляд:

*k*  *пр r* ****  *n*  *r* ****  *r nu*2  2*r nu**v*  *r*

*nv*2 . (1.11)

*n n uu uv vv*

Далі введемо позначення

*об*

*L*  *ruu n* ,

*об*

*M* *ruv n* ,

*об*

*N*  *rvv n* . Враховуючи

останні позначення отримаємо

*n*

*k*  *Lu*2  2*Mu**v*  *Nv*2 . А враховуючи те, що

*u* 

*du* , отримаємо

*ds*

*kn* 

*Ldu*2  2*Mdudv*  *Ndv*2 *ds*2

 *Ldu*2  2*Mdudv*  *Ndv*2 *Edu*2  2*Fdudv*  *Gdv*2

 **2 .

1

**

Отже формула другої квадратичної форми матиме вигляд:

**  *Ldu*2  2*Mdudv* *Ndv*2 . (1.12) Тепер знайдемо коефіцієнт другої квадратичної форми. Оскільки

2

 *L* 



*ruu ru rv EG*  *F* 2

 *r r r*

*M*



 *uv u v* ,



*EG*  *F* 2

 *N* 



*rvv ru rv*

*EG*  *F* 2

а з іншого боку,

*ru n*  *rv n*  0 , то про диференціювавши по *u* отримаємо

*r n*   *r n*  *r n*

 0 і

*u u uu u u*

*L*  *ru nu*



  *ru nv*  *rv n* . (1.13)

*M*

*N*  *r n*

 *v v*

Підставимо (1.13) в формулу другої квадратичної форми та отримаємо

**  *r n du*2  *r n dudv*  *r n dvdu*  *r n dv*2  *r du*  *r dv**n du*  *n dv*. А так

2 *u u u v v u v v u v u v*

як *dr*  *r du*  *r dv* і *dn*  *n du*  *n dv* , то ** матиме вигляд:

*u v u v* 2

**  *drdn* . (1.14)

2

**Твердження.** Нормальні кривини двох кривих на поверхні, які проходять через точку *Р* і мають в цій точці спільну дотичну, в точці *Р* рівні між собою.

Доведемо це твердження. Рівняння нормальної кривини кривої на

поверхні поділимо чисельник і знаменник на *du*2 , отримаємо

*dv*  *dv* 2

*L*  2*M*  *N*  

*k* *du*  *du*  .

*n dv*  *dv* 2

*E*  2*F*  *G* 

*du*  *du* 

Нехай дві криві (1 і 2) на поверхні мають в точці *Р* спільну дотичну (див. рис. 1.6).

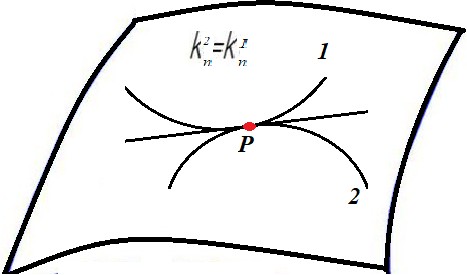


Рисунок 1.6 **‒** Геометрична інтерпретація площини, двох кривих та спільна їх дотична в точці *Р*

*L*, *M*, *N*, *E*, *F*, *G* ‒ функції от *u* і *v*. Позначимо *L*1 , *M*1 , *N*1 , *E*1 , *F*1 , *G*1 функції, які відносяться до першої кривої, а *L* 2 , *M* 2 , *N* 2 , *E* 2 , *F* 2 , *G* 2 функції, які відносяться до другої кривої. Отже в точці *Р L*1 *= L* 2 , *M*1 =*M* 2 , *N*1 *=N* 2 , *F*1 *=F* 2 ,

*G*1 =*G* 2 .

*dv* задає напрям дотичної в дотичній площині. Так як в кривих 1 і 2

*du*

в точці Р спільна дотична, то  *dv* 

 

*du*

 *dv* 

 *du* 



в цій точці, а звідси випливає, що

*k*  *k*

*n*

*n*

1 2

 1  2

. Що і треба було довести.

**Означення 1.11** Нормальна кривина кривої на поверхні в даній точці називається нормальною кривиною поверхні в даній точці в даному напрямі дотичної площини.

# Гауcова та середня кривини поверхні

Враховуючи рівняння першої та другої квадратичної форми (формули (1.11) і (1.12)), гаусова кривина знаходиться за формулою:

*LN*  *M* 2

*K* 

*EG*  *F* 2

. (1.15)

Знак гаусової кривини визначає характер будови поверхні в околі

точки, яку розглядаємо. При

*K*  0, поверхня має форму чаші (сферичні,

еліптичні), при

*K*  0

* форму сідла (гіперболічні), при

*K*  0

* форму

циліндра або конуса (циліндричні, конічні). Також існує змішана кривина, яка складається з ділянок з різною гаусовою кривиною (тороболічні).

Тип точок поверхні:

‒ *LN*  *M* 2  0

‒ *LN*  *M* 2  0

* точка еліптична;
* точка гіперболічна;

‒ *LN*  *M* 2  0

‒ *LN*  *M* 2  0

і *L*2  *N* 2  *M* 2  0

і *L*2  *N* 2  *M* 2  0

* точка параболічна;
* точка сплощення [6].

Середня кривина поверхні знаходиться за формулою [2]:

*H*  *LG*  2*MF*  *EN* .

 2 

2 *EG*  *F*

# Основні рівняння поверхонь. Формули Гаусса і Вейнгартена

До цього часу ми користувалися позначеннями Гаусса для запису рівнянь поверхонь у криволінійних координатах *u*, *v*, їх похідних, коефіцієнтів першої і другої квадратичних форм. Але в сучасній

диференціальній геометрії частіше використовують позначення Річчі, які в багатьох випадках є більш зручними. Позначимо криволінійні координати *u*,

*r*  *r*



*1 2*

*r* 

*r* *r*

 2*r* *r*

 2*r* *r*

*v* через *u*

і *u* , похідні *u*

, *u*  *rv*

через 1 i 2 *,*

*u* 2 = *uu* ,

*u**v = uv* ,

 2 *r* *r*

*r* *r* *r*

2*r*  

*v**v* = *vv*

через 11 , 12 , 22

відповідно*.* Взагалі

*uiu j*

*rij* , де *і*, *j=1*,*2*,

3*r* 

*r* *r*

*ui**u j* *uk*

= *rijk* , *і*, *j*, *k=1*,*2*,*3.* Вектори *ij* , *ijk*

симетричні відносно будь-якої

пари індексів, бо результат диференціювання не залежить від порядку

*m* *m*  2*m* *m*

диференціювання. Аналогічно,

*ui* = *i* ,

*ui**u j*

= *ij*

і т.д.

Позначимо *r* , *r*  *g* , *r* , *m*   *r*

, *m*  *b*

. Тоді *r*

, *r*   *g*

 *E* ,

*i j ij i*

*ij ij*

1 1 11

*r*

, *r*   *g*

 *F* , *r*

, *r*   *g*

 *G* і *r*

, *m*   *b*

 *L* , *r*

, *m*   *b*

 *M* ,

1 2 12

2 2 22

11 11

12 12

*r* 22, *m*   *b*22

 *N* . У нових позначеннях

*ds*2  *g* *du*1 2  2*g*

*du*1  *du*2  *g*

*du*2 2  2 2 *g duidv j* ,

11 12

22   *ij i* 1 *j* 2

*L**du*2  2*Mdudv*  *N* *dv*2 

2

2

*g duidv j* .

  *ij*

*i* 1 *j* 2

Якщо один і той же індекс у деякому виразі стоїть один раз внизу, а другий раз вгорі, то по цьому індексу необхідно взяти суму в межах його

зміни.

В кожній звичайній точці *M* *u*1,*u* 2  поверхні *r*  *r**u*1,*u*2 *r* існують три

некомпланарні вектори *r* , *r* , *m* , які можна вибрати за осі просторової

1

2

*r* і

системи координат. За цими векторами можна розкласти їх похідні 

*ij*

*m* *i* і

одержати формули, аналогічні формулам Френе для кривих. Запишемо

розклади векторів  *m* *i* за векторами *r* і *m* у вигляді:

*r* і

*i*

*ij*

 1 

*r*

 *Г r*

11 11 `1

*r*  *Г*1 *r*

2 

11 2

* *Г r*
* *Г* 2 *r*

 *h*11

* *h*

*m* ,

*m* ,

12 12 `1 12 2 12

*r*  *Г*1 *r*  *Г* 2 *r*  *h*

*m* ,

22 22 `1 22 2 22

або

*r*  *Г*1 *r*  *Г* 2*r*  *h m* *.* (1.16)

*ij ij* `1 *ij* 2 *ij*

*m*1  *b*1*r*  *b*2*r*  *h m* ,

1 1 1 2 1

*m*2  *b*1*r*  *b*2*r*  *h m* .

2 2 2 2 1

або

*m**i*  *b j r*  *h m*

(1.17)

*i j i*

де *ij* 2 ,

*Г*

*k*

*hij* , *hi*

*i*,

*j*, *k*  1,2 деякі невідомі коефіцієнти, які необхідно знайти.

Для їх визначення помножимо скалярно обидві частини (1.16) на *m*

*r* , *m*  *Г*1 *r* , *m*   *h* *m* , *m*   *h* бо *r*

, *m*  0 , а *m*, *m*  1*.* Отже, коефіцієнти

*ij ij* `1 *ij ij ij*

*hij*

є коефіцієнтами другої квадратичної форми

*hij*

 *bij*

і розклад (1.16)

приймає вигляд

*r*  *Г*1 *r*  *b m*

(1.18)

*ij ij* `*k ij*

Помножимо обидві частини рівності (1.18) на

1

*r* і

*r* і уведемо

позначення *Г*

 *r* , *r*

, які називаються символами Христофеля першого

*k* ,*ij*

2

`*k ij*

роду. Якщо надавати *і*, *j*, *k* всі можливі комбінації значень 1 і 2, то одержимо

шість суттєво різних величин

*Гk* ,*ij* , бо відносно двох останніх індексів вони

симетричні, тобто

*Гk* ,*ij*

 *Гk* , *ji* . В результаті маємо

*Г*1,*ij*

 *Г*1 *g*  *Г* 2 *g* ,

*ij* 11 *ij* 12

*Г*2,*ij*

 *Г*1 *g*  *Г* 2 *g* .

*ij* 12 *ij* 22

Розв’яжемо цю систему відносно

1 2

*ij ij*

*Г*

*Г* .

і

*Г*1 1 *Г g*  *Г g* ,

*ij*

*g*11

*g*22

 *g*122

1,*ij* 22

2,*ij* 21

*Г* 2 1  *Г*

*g*  *Г*

*g* ,

*ij*

*g*11

*g*22

 *g*122

1,*ij* 12

2,*ij* 11

*2ij =*

*g*

1 *.*

*g*  *g* 2

11 22 12

Для скорочення запису формул уведемо позначення:

*g*11 

*g*22

, *g*12  

*g*12

*g12*,

*g* 22 

*g*11

*.* Маємо

*g*11*g*22

 *g*122

*g*11*g*22

 *g*122

*g*11*g*22  *g*122

*gij*

 * k*

‒ символ Кронекера, рівний одиниці при *і=k* і нулю при *іk.* Дійсно,

 *g*11

*i*

*g*12 

 *g*11

*g*12 

матриця



 21

*g*





22 

*g*





обернена до матриці



 *g* 21

 , бо

*g* 22 

 *g*11

*g*12   *g*11

*g*12  1 0

  



21

22  *=* 

 *.* Використовуючи уведені позначення,

 *g*21

*g*22   *g*

*g*  0 1

одержимо

*Г*

*ij*

1  *g*11 *Г*1,*ij*

* *g*12 *Г*

2,*ij* ,

2

2,*ij*

*Г*

 *g* 21 *Г*1,*ij*

* *g* 22 *Г*

2,*ij*

, або скорочено

*k*  *gk Г*

*Г*

*ij*

** ,*ij*

, ** ,*i*, *j*  1,2 *.* (1.19)

Для знаходження виразів для

*Гk* ,*ij k,ij* використаємо рівності

*r* , *r*  *g* , *r* , *r*  *g* , *r* , *r*   *g*

*.* Диференціюємо першу рівність по

*uk* ,

*i j ij j k jk k i ki*

другу по *ui* , третю по *u j* .

*r*

, *r*

 *r* , *r*

 *gij*

, *r*

, *r*

 *r* , *r*

 *g jk* , *r*

, *r*   *r* , *r*

 *gki .*

*ik j*

1. *jk*

*duk*

*ji k*

1. *ki*

*dui*

*ki i*

1. *ig*

*du j*

Додамо дві останні рівності і віднімемо від суми першу

  *gij*

*gkj*

*gij*

1  *gij*

*gkj*

*gij* 

2*rk* , *rij* 



*du j*

*ui*

* *uk*

*.* Тоді

*Гk* ,*ij*

  

2  *du j*

*ui*

  *.*

*u* 

*k*

Підставимо у (1.19):

*k k*



1 *k*  *gi*

*g j*

*gij* 

*Гij*  *g*

*Г* ,*ij*  2 *g*

 

 *du j*

*ui*

 *u*  *.* (1.20)

Коефіцієнти

*Г*

*k* називаються символами Христофеля другого роду.

Вони виражаються тільки через коефіцієнти першої квадратичної форми і їх похідні.

*ij*

Знайдемо невідомі коефіцієнти

*bij*

і *hi*

у формулі (1.17). Очевидно,

*hi*  0 *,* бо вектор

*m* *i*

перпендикулярний до *m* і розміщений у площині

векторів

*r* і *r* , тобто у дотичній площині. Тому *m* = *b j r* . Помножимо

1 2 *i i j*

обидві частини скалярно на

*r* : *m* , *r*

  *b j* *r* , *r*

*.* Звідси ‒

*b*  *b j g*

, або в

22

*k i k*

*i*

11

*i*

21

*i*2

*i j k*

*ik i jk*

розгорнутому вигляді

*i*

12

*i*

* *bi*1  *b*1*g*
  + *b*2 *g*

,  *b*

 *b*1*g*

* + *b*2 *g .*

Розв’яжемо цю систему відносно

*b*1 і

*b*2 :

*b*1   *bi*1*g*22

 *bi*2 *g*21 ,

*i i i*

*g*11

*g*22

 (*g*12 )2

*b*2   *bi*12 *g*11  *bi*1*g*12

, або

*b*1  *b*

*g*11  *b*

*g* 21 ,

*b*2  *b*

*g*12  *b*

*g* 22 *.*

*i*

*g*11

*g*22

 (*g*12 )2

*i il i*2

*i il i*2

Скорочено *b*1  *b*

*gkj*.

*i ik*

Остаточно,

*r*  *Г k r*  *b m* , (1.21)

*ij ij k ij*

*m* *i*  *bik gkjr* . (1.22)

*j*

Формула (71) зветься формулою Гаусса, а (1.22) ‒ формулою Вейнгартена. Ці формули називаються основними, або дериваційними

рівняннями поверхні. Вони виражають похідні від векторів

*r* ,

*r* , *m* через

коефіцієнти першої і другої квадратичних форм і похідні від коефіцієнтів першої квадратичної форми.

1

2

Запишемо формулу (1.20) в розгорнутому вигляді

*Г*1  1  *g*11 *g*11



 *g*11

 *g*11   1  *g*12  *g*21

 *g*21

 *g*11  ,

11 2  *u*1

*u*1

*u*1  2  *u*1

*u*1

*u*2 

*Г*1  1  *g*11 *g*11









 *g*12

 *g*12   1  *g*12  *g*21

 *g*22

 *g*12  ,

12 2  *u*2

*u*1

*u*1  2  *u*2

*u*1

*u*2 

*Г*1  1  *g*11 *g*12









 *g*12

 *g*22   1  *g*12  *g*22

 *g*22

 *g*22 ,

22 2  *u*2

*u*2

*u*1  2  *u*2

*u*1

*u*2 

*Г* 2  1  *g* 21 *g*11









 *g*11

 *g*11   1  *g* 22  *g*21

 *g*21

 *g*11  ,

11 2  *u*1

*u*1

*u*1  2  *u*1

*u*1

*u*2 

*Г* 2  1  *g* 21 *g*11









 *g*12

 *g*12   1  *g* 22  *g*21





 *g*22

 *g*12 ,

12 2  *u*2

*u*1

*u*1  2  *u*2

*u*1

*u*2 

*Г* 2  1  *g* 21 *g*12









 *g*12

 *g*22   1  *g* 22  *g*22

 *g*22

 *g*22  .

22 2  *u*2



*u*2

*u*1  2  *u*2

*u*2

*u*2 

Якщо в умові задачі необхідно знайти гаусову і середню кривину в деякій точці, то необхідно задати спочатку матрицю метричного тензора

 *E g*  

 *F*

*F*  , підставивши значення точок. Тоді знайти матрицю

*G* 



відображення Вейнгартена **  *g* 1 *L*

****

 *M*

*M*  . Звідси середня і повна (гаусова)

*N* 

****

кривини в точці будуть відповідно дорівнювати

*H*  *tr* ,

*K*  det** [10].

# Формули Ейлера

Рівняння індикатриси кривини, як і будь-яке рівняння всякої центральної кривої другого порядку, можна привести до головних векторів,

тобто замість базисних векторів

*r* і

*r* можна вибрати два інших базисних

вектори так, щоб вони були взаємно ортогональними і одиничними і щоб в рівнянні індикатриси кривини був відсутнім член з добутком координат. Для цього необхідно щоб нові вектори були направлені по головних осях індикатриси кривини. Ці два напрямки будемо називати головними напрямками нашої поверхні в даній точці.

*u*

*v*

При такому виборі системи координат в дотичній площині рівняння

індикатриси має вигляд

*px*2  *qy*2  1.

Нехай ** ‒ кут між головним напрямком, прийнятим за напрямок вісі *х*,

і довільним нормальним перерізом. Тоді *x* 

*R*

cos** , *x* 

sin ** , де *R* ‒

радіус кривини даного нормального перерізу. Підставимо значення *х* і *у*

*R*

рівняння індикатриси, отримаємо

*p* cos2 **  *q*sin 2 **  1

*R*

 *k* .

Назвемо головними кривинами

*k*1  1

*R*1

і *k*2  1

*R*2

поверхні в даній

точці нормальної кривини, які відповідають головним напрямкам

індикатриси в цій точці. В декартовій системі координат це напрямок **  0 і

**  **

2

, тому

*k*1  *р* і

*k*2  *q* . Таким чином отримаємо

*k*  *k*1 cos2 **  *k*2 sin 2 ** , (1.23)

або

1  1

*R R*1

cos2 ** 

1 sin 2 ** . (1.24)

*R*2

Останні дві формули називають формулами Ейлера. Вони дають вираз нормальної кривизни поверхні за будь-яким напрямком через головні кривини.

Із формули Ейлера бачимо, що головні кривини ‒ це екстремальні значення нормальної кривини. Екстремальні властивості головних кривин дають зручний спосіб їх фактичного розрахунку.

Далі встановимо за якими формулами можна обчислити головні

кривини поверхні.

Із формули Ейлера (1.23) випливає, що нормальна кривина

*k*** 

залежить від напрямку ** . Графік залежності *k* від ** зображений на рис. 1.9.

Із нього видно, що при кожному заданому

*k*0 ,

*k*1  *k*0  *k*2

існує чотири

значення кута ** , при яких

*k***   *k*0 . Так як кути відрізняються на ** ,

визначають один і той самий нормальний перетин, то кожному *k*0

відповідає

два нормальних перетини, для яких нормальна кривина дорівнює

*k*0 . Але

якщо

*k*0  *k*1

або

*k*1  *k*2 , то ці два нормальних перетини співпадають.

Іншими словами, головні кривини ‒ це ті значення нормальної кривини, кожному із яких відповідає один і тільки один нормальний перетин даної поверхні. Формулу другої квадратичної функції для визначення нормальної кривини як функції напрямку можна переписати так:

*b*11  *kg*11 *du*2  2*b*12  *kg*12 *dudv*  *b*22  *kg*22 *dv*2  0 ,

де *b*11  *r* , *n*, *b*  *r* , *n*, *b*  *r* , *n* .

*uu* 12 *uv* 22 *vv*

Або, поділивши на переріз, отримаємо

*dv*2

і припускаючи, що

*du*  *t* , де *t* визначає

*dv*

*b*11  *kg*11 *t* 2  2*b*12  *kg*12 *t*  *b*22  *kg*22   0 . (1.25)

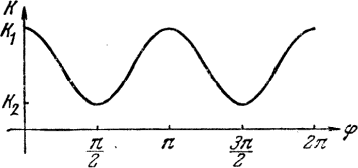


Рисунок 1.9 ‒ Графік залежності *k* від **

Рівняння (1.25) є квадратичним рівнянням для *t*, яке відповідає головним напрямкам і тільки для них можна отримати не два, а лише один корінь. Для цього необхідно і достатньо щоб дискримінант рівняння (1.25) дорівнював нулю. Отже для знаходження головних кривин ми отримаємо рівняння

*b*11  *kg*12 2  2*b*11  *kg*11 *b*22  *kg*22   0, (1.26)

або

*b*11  *kg*11 *b*12  *kg*12

*b*12  *kg*12 *b*22  *kg* 22

 0 . (1.27)

Гаусова кривина буде мати вигляд

*K*  *k*1*k*2 , а середня кривина ‒

*H*  1 *k*1  *k*2 . Із квадратичного рівняння (1.27) можна отримати формули:

2



*K*  *b*11*b*22

2

12 ,

* *b*

*H*  *g*11*b*22

 2*g*12*b*12

 *g*22*b*11 .

*g*11*g*22 2

* *g*
* *g*

12

12

2*g*11*g*22 2

# 2 ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ

Поверхнею обертання називають поверхню, яка утворюється обертанням деякої кривої, яка лежить на площині, навколо прямолінійної осі, яка належить тій самій площині. Цю криву називають меридіаном поверхні обертання [2].

Вивчення поверхонь постійної від’ємної гаусової кривини в тривимірному евклідовому просторі історично тісно пов’язано з проблемою інтерпретації геометрії Лобачевського. Ще в 1868 році Е. Бельтрамі показав, що на поверхнях постійної від’ємної кривини виконується локальна планіметрія Лобачевського. Вкажемо поверхні обертання постійної гаусової кривини, які знайдені Ф. Міндінгом і Е. Бельтрамі[8].

Якщо в евклідовому трьохвимірному просторі ввести прямокутні декартові координати *Oxyz* так щоб початок координат в точці *О* лежав на

вісі обертання, а вісь *Oz* співпадала з віссю обертання, то рівняння поверхні

обертання можна записати в вигляді

*x*  **(*u*)cos*v* ,

*y*  **(*u*)sin *v* ,

*z*  *u* , де для

визначеності будемо вважати, що *u* належить деякому числовому відрізку

(*u*1,*u*2 ) , а *v* змінюється від *0* до

2** . Функція

*r*  **(*z*)

визначає форму

меридіана в площині з координатами *Orz* . Вважається, що константа. Знайдемо рівняння меридіана як функцію від *r* :

*K*   1

*a*2

, *а* ‒

*r*

(1  **)*a*2  ** 2

*a*2**  ** 2

*z*   

*r*0

*d* , (2.1)

де *r* 0

‒ значення радіуса паралелі поверхні обертання при

*z*  0 , ** ‒

довільне число,

**  1. Форму меридіана можна дослідити по рівнянню (2.1).

При

**  0

чисельник підінтегрального виразу може бути додатнім,

тому ** повинно бути менше одиниці, а параметр *r* повинен змінюватися в

1  **

межах

0  *r*  *a*

. Дана крива зображена на рис 2.1, а.

Точка *А* найбільшого віддалення від осі *Oz* є точкою обертання для меридіана з дотичній віссю *Or*. У точках *B* і *B*' меридіан перетинає вісь *Oz* під гострим кутом. Дві частини меридіана (дуга *АВ* і дуга *АВ*') відповідають знакам плюс і мінус у правій частині формули (2.1).

**

1  **

При *λ*<0 з рівняння (1.16) знаходимо *a*

 *r*  *a*

. Дана крива

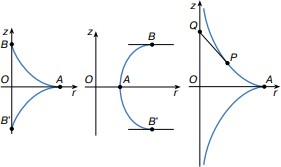
складається з двох дуг, зображених на рис. 2.1, б. Дуга *АВ* відповідає знаку плюс у формулі (2.1), а дуга *АВ*' ‒ знаку мінус. У точках *В* і *В*' дотична до меридіану паралельна осі *Or*, а в точці *А* ‒ паралельна осі *Oz*.

Випадок *λ*=0 являє собою перехідний тип. При

**  0, *λ*> 0 точки *В* і *В*'

на (рис. 2.1 а) віддаляються по осі *Oz* в нескінченність і меридіан набирає вигляду, зображеного на рис. 2.1, в, який називають трактрисою [2].

Поверхні обертання з вказаними на рис. 1.7 меридіанами називають відповідно волчком Міндінга, катушкой Міндінга і псевдосферою (або поверхнею Бельтрамі) [6].



а) б) в)

Рисунок 2.1 ‒ Графіки меридіан поверхні обертання постійної від’ємної кривини

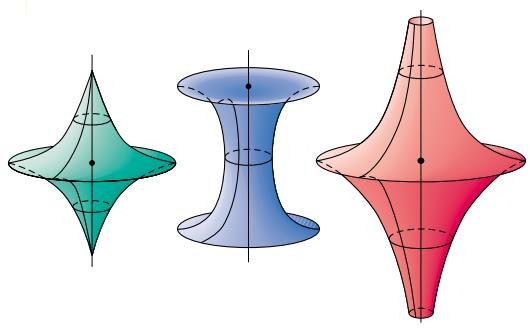
Трактриса характеризується постійністю довжини

*PQ*  *A*

для будь-

якої точки *P*. Точка *А* є точкою обертання, і вісь *Or* дотична до трактриси в точці *А*.

Поверхні обертання з зазначеними на рис. 2.1 меридіанами зображені на рис. 2.2.



а) б) в)

Рисунок 2.2 ‒ Поверхні обертання постійної від’ємної кривини: а) вовчок Миндінга, б) катушка Міндінга, в) псевдосфера

Аналізуючи отримані поверхні обертання постійної від’ємної кривини, помічаємо, що вони або мають точки порушення гладкості поверхні, або є поверхнями з краєм. Наприклад, паралелі в котушці Міндінга, які

1  **

відповідають значенню

*r*  *a*

, є краєм котушки Міндінга. Будемо

вважати, що всі точки розглянутих поверхонь є внутрішніми точками поверхні, тобто мають окіл точки, гомеоморфний відкритому колу. У такому випадку слід виключити з розгляду випадок, коли в котушці Міндінга

паралелі зі значенням будуть мати вигляд

*r*  *a*

. А при виключенні

випадку

1  **

*r*  *a*

котушка Міндінга стає неповною поверхнею.

Порушення гладкості, наявність краю або неповнота отриманих поверхонь є перешкодами до реалізації в цілому на них всій площині Лобачевського (доведення можна знайти в [2, 105]).

1  **

Особливу роль серед наведених на рис. 1.8 поверхонь грає псевдосфера, її рівняння можуть бути представлені у вигляді



*x*  sin *u*  cos*v*,

*r**u*,*v*   *y*  sin *u*  sin *v*,



 *u*

*z*  ln *ctg*

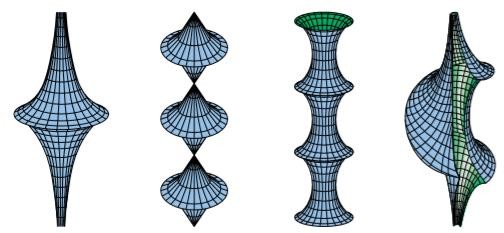
 2

* cos*u*,

де 0  *u*  ** ,    *v*   .

Поглиблений аналіз псевдосфери був проведений Е. Бельтрамі в 1868 р Він встановив, що геометрія псевдосфери збігається з геометрією певній галузі на площині Лобачевського ‒ орікруга. Якщо точкам і прямим в цій області площині Лобачевського зіставити точки і найкоротші лінії (геодезичні) на псевдосфері, а руху на площині Лобачевського зіставити переміщення фігури по псевдосфері з згинанням (деформацією, що зберігає довжини), то будь-якої теоремі (твердженням) в геометрії Лобачевського відповідатиме відповідний факт, який має місце на псевдосфері. Таким чином, завдяки появі перших псевдосферичних поверхонь, і в першу чергу псевдосфері, геометрія Лобачевського отримала наочний, реальний сенс: довжини, кути, площі змогли тепер розумітися в сенсі їх природного звичного виміру (наприклад, на псевдосфері). Результати Міндінг і дослідження Бельтрамі поклали початок розвитку нового розділу диференціальної геометрії ‒ дослідження та побудови поверхонь негативною

кривизни, і перш за все псевдосферичних. Наступним класичним прикладом стала гвинтова псевдосферична поверхня, побудована Діні (див. рис. 2.3, г).



а) б) в) г) Рисунок 2.3 **‒** Класичні псевдосферичні поверхні: а) псевдосфера,

б) дзиги, в) котушки; г) фрагмент гвинтової поверхні Діні (вид з розрізом)

# 3 ВИДІЛЕННЯ КЛАСІВ ПОВЕРХОНЬ ПОСТІЙНОЇ ВІД’ЄМНОЇ ГАУСОВОЇ КРИВИНИ

Спираючись на статтю [2] і монографії [3], [4] можна виділити наступні класи серед поверхонь постійної від’ємної гаусової кривини: лінійчаті поверхні, мінімальні поверхні та поверхні обертання.

Якщо необхідно визначити тип точок деякої заданої поверхні, то в

випадку

*K*  0 вони будуть гіперболічними.

Розглянемо детальніше лінійчатий клас.

Лінійчатою поверхнею називається поверхня, утворена з прямих ліній, які називаються її прямолінійними твірними.

Найпростіші приклади лінійчатих поверхонь від’ємної гаусової кривини: однопорожнинний гіперболоїд, гіперболічний параболоїд, катеноїд, гелікоїд.

Можна познайомитися з усіма відомими на даний час видами лінійчатих поверхонь постійної від’ємної кривини (див. рис. 3.1).

В даній роботі познайомимося з самими розповсюдженими

поверхнями, які зустрічаються в житті [5].

Властивості лінійчатих поверхонь *K*  0:

а) лінійчата поверхня характеризується тим, що її асиметрична лінія ‒ напівгеодезична;

б) **теорема Бельтрамі**. Лінійчату поверхню завжди можна і при тому єдиним способом вигнути так, щоб довільна лінія на ній стане асимптотичною;

в) **теорема Бонне.** Якщо лінійчата поверхня *F* , що не розгортається *K*  0, згинається в лінійчату поверхню *F* , то їх твірні

відповідають одна одній або обидві вони вигинаються в квадріку, на якій сімейство твірних, ‒ асимптотичне;

г) єдина мінімальна лінійчата поверхня ‒ гелікоїд;

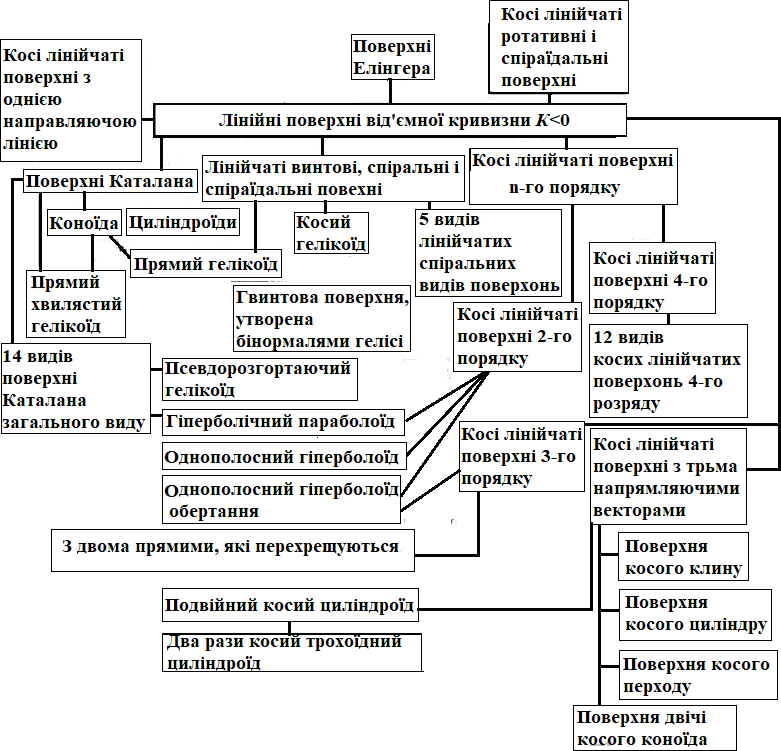


Рисунок 3.1 ‒ Схема основних видів лінійних поверхонь від’ємної гаусової кривини

д) лінійчата поверхня обертання ‒ однопорожниний гіперболоїд, може вироджуватися в циліндр, конус або площину [8];

е) існують приклади гладких лінійчатих поверхонь, які не



допускають гладких параметризацій виду

*r*(*u*,*v*) 

*R*(*u*) 



*vl* (*u*)

, де

   *u*   ,



*R*(*u*) ‒ рівняння направляючої кривої,



*l* (*u*) ‒ одиничний

вектор, в напрямі якого через точку направляючої проходить пряма, яка називається твірною поверхні. Для такого виду поверхонь коефіцієнт гаусової кривини знаходиться наступним чином

  2

*K*  

 

*R* ,*l*



,*l* .

2   2 2

 *R R*

2*v R l*

*v l l R* ,*l* 

При фіксованому значенні параметра *u* та при

*v*  , маємо

*К*  0 .

**Теорема Єфімова**. Для будь-якого скільки завгодно малого додатного

числа

**  0

на повній

*С* 2 ‒гладкій поверхні від’ємної кривини в *Е* 3

знайдеться точка *М* така, що гаусова кривина в цій точці буде задовольнять

нерівність

 **  *K* (*M* )  0 .

Єфімов також дослідив задачу про швидкість наближення до нуля

гаусової кривини на повній поверхні з

*K*  0 [2].

Далі розглянемо мінімальні поверхні.

Мінімальні поверхні – це поверхні у яких середня кривина дорівнює нулю. В своїх дослідах Ж. Плато фізично реалізував мінімальні поверхні в вигляді мильних плівок, натягнутих на проволочені каркаси різних форм [5].

Відмінною властивістю мінімальної поверхні є умова

*k*1  *k*2 , де

*k*1, *k*2

– головні кривини поверхні. Це означає, що

*K*  *k*1*k*2  (*k*2 )2  0 , причому

рівність нулю гаусової кривини можливо тільки в точках сплощення, тобто в

точках, для яких площиною.

*k*1  *k*2  0 . Поверхня, всі точки якої є точками сплощення, є

Наведемо приклад мінімальної поверхні обертання негативної

кривизни. Розглянемо ланцюгову лінію, тобто криву провисання важкого ланцюга з рівномірно розподіленою масою. Якщо прийняти горизонтальну пряму за вісь *Oz* , вертикальну за вісь *Or* , то рівняння ланцюгової лінії можна записати у вигляді

*a*  *z*  *z* 

*r*   *a*  *e a* 

2

*e*

,









   *z*  ,

*a*  *const*,*a*  0.

Поверхня, утворена обертанням ланцюгової лінії навколо осі *Oz* , називається катеноїд. Безпосередній підрахунок показує, що для катеноїда

середня кривина

*H*  0. Катеноїд є єдиною мінімальною поверхнею

обертання від’ємної кривизни

*K*  0 .

Найпростіші приклади мінімальних поверхонь від’ємної гаусової кривини: гелікоїд, поверхня Еннепера.

Властивості мінімальних поверхонь:

а) асимптотичні лінії мінімальної поверхні утворюють ізотермічну

сітку;

б) мінімальна поверхня з краєм може не мати мінімальної площини

серед всіх поверхонь з даним контуром. Але будь-яка точка мінімальної поверхні міститься на диску мінімізуючої площини при даному контурі;

в) якщо компактна мінімальна поверхня є графіком функції

*z*  *f* *x*, *y* гладкої функції, яка визначена на випуклій області в *x*, *y*  ‒

площини, то вона мінімізує площину серед всіх поверхонь при даному контурі [7].

г) **формула монотонності**. Це класична теорема про мінімальні поверхні. Вона стверджує зокрема, що площа перетину мінімальної поверхні без границі з кулею з центром на поверхні не може бути менше площі кола того ж радіуса [7].

В додатку А зображені рівняння поверхонь та їх аналітичне формулювання, які використовуються в розв’язанні задач.

Розглянемо наступні приклади.

**Приклад 1** Для поверхні

*z*  2*xy*

знайти першу та другу квадратичні

форми, визначити середню і гаусову кривину в точці 0,0,0.

В якості локальних координат на поверхні вибираємо *х*, *у* :



*r*  



*х* 



*у*  .

 2*ху* 

  1 

 

  0 

*r*



Знайдемо дотичні вектора:

*r*



  *r*

*х* *х*

 

 0  ,

  *r*

*у* *у*

 

 1  . Тоді

 2 *у*   2*х* 

   

*E*  *r* 2 1  4*y*2 ,

*x*

*F*  *r*

 *r*

 4*xy* ,

*G*  *r*

2  1  4*x*2 . Отже перша квадратична

форма матиме вигляд

*x*

*y*

*y*

*ds*2  1 4*у*2 *dх*2  8*хуdхdу*  1 4*х*2 *dу*2 .

Далі знаходимо:

 2*r*

 2*r*

0,



 0

  0 ,

 2*r*



0 . Знаходимо одиничний



*х*2

*х**у*

  *у* 2

 2

 

 *r* , *r*

  2 *y*,2*x*,1

вектор нормалі для заданої поверхні: *n* 

*EG*  *F* 2

*x y* 

.

2*r* 

1  4*x*2  4 *y* 2

Знаходимо коефіцієнти для другої квадратичної форми:

*L*  *x*2  *n*  0 ,

2*r*  2 2*r* 

1  4*x*2  4 *y* 2

*M*  *x**y*  *n*  , *N*  *y*2  *n*  0 . Отже друга квадратична

форма матиме вигляд: ** 2 

1  4*x*2  4 *y*2

2 *dxdy* .

В точці 0,0,0

матриця метричного тензора має вигляд:

 *E F*  1 0

*q*  ****

*F*

****  ****

*G* 0

****. Тоді матриця відображення Вейнгартена дорівнює

1

 

1  *L*

 

*M*   0 2

**  *q*  ****

*M*

****  **** **** .

*N* 2 0

   

Знайдемо коефіцієнти повної та середньої кривини в заданій точці:

*H*  *tr*  0 , *K*  det**  4 .

Оскільки

*K*  0

в будь-якій точці , то маємо гіперболічний тип кривої.

Поверхня

*z*  2*xy*

відноситься до класу мінімальних поверхонь від’мної

гаусової кривини, адже її середня кривина дорівнює нулю.

**Приклад 2** Розглянемо в

*Е* 3 гіперболічний параболоїд, заданий в

декартовій системі координат *Oxyz* рівнянням

*   *y*   . Знайти коефіцієнт гаусової кривини.

*z*  *x*2  *y*2 ,

   *x*   ,

Робимо аналогічні послідовні дії як і в прикладі 1. Радіус-вектор

 *х* 

  1 

поверхні має вигляд

*r*   *у*

2





 . Дотичні вектора:

2

  *r*

*х* *х*

 

 0  ,

 *х*  *у* 

*r*



 2*х* 

   

  0 

  *r*

*r*



*x*

*x*

*y*

*y*

*у* *у*

 

 1  . Тоді

*E*  *r* 2 1  4*х*2 ,

*F*  *r*

 *r*

 4*xy* ,

*G*  *r* 2  1  4 *у* 2 .

 2 *у* 

 

Перша квадратична форма:

*ds*2  1  4*х*2 *dх*2  8*хуdхdу*  1  4*у*2 *dу*2 .

Далі знаходимо:

2*r*

 0

  0 ,

2*r*

 2*r*

0 ,



 0

  0 . Знаходимо одиничний

*х*2

  *х**у*

*у* 2  

 2  2

   

вектор нормалі для заданої поверхні

 *r* , *r*

  2*х*,2 *у*,1

*n*  *x y*  .

*EG*  *F* 2

1  4 *у* 2  4*х*2

Знаходимо коефіцієнти для другої квадратичної форми:

2*r*  2

1  4 *y* 2  4*x*2

2*r* 

 2 *r* 2

*L*  *x*2  *n* 

, *M*  *x**y*  *n*  0 ,

*N*  *y* 2  *n*  .

Отже друга квадратична форма матиме вигляд: ** 2 

1  4*x*2  4 *y*2

1  4*x*2  4 *y*2

2 *dxdy* .

Знайдемо гаусів коефіцієнт

*К*  

1

1  4*х*2  4 *у* 2 2

Звідси випливає, що гаусова кривина *К* наближається до нуля при

.

*x*2  *y*2  

швидка.

не складно помітити, що швидкість наближення достатньо

**Приклад 3** Знайти першу та другу квадратичні форми поверхні

*r*(*u*,*v*)  *u*  *p*(*v*) , де *v* ‒ параметр на кривій

поверхні від’ємну гаусову кривину?

*r*  *p*(*v*) . Чи має дане рівняння

Знаходимо дотичні вектори:

** *u*  *p* ,

** *v*  *up*  *u* , де ** ‒ одиничний

дотичний вектор до кривої *p* . Тоді

*E*  *p*2 ,

*F*  *up* ** , *G*  *u*2 , де

*p*  *p* .

2*r*  

 2*r*

 **

2*r*  **  

Далі,

*u* 2

0 , *u**v*

,

*v*2

*u*  *ukv* , де *k* і *v*

* кривина і вектор

головної нормалі до кривої *p* .

Знайдемо одиничний вектор нормалі до даної в умові поверхні:

*n*  *p*,** . Тоді

 

*p*,** 

*L*  0 ,

***p***

*M*  *p*,**

 0 ,

*ukv**p***

*N*  *p*,**  0 . Повна кривина

*K*  0.

Дане рівняння поверхні не має від’ємної гаусової кривини, так як

*K*  0.

**Приклад 4** Знайти другу квадратичну форму, гаусову та середню кривини для поверхні прямого гелікоїда заданої параметрично

*u* cos*v*

*f* (*u*,*v*)   , де *b*  0 , *u*  0 . Визначити тип точок даної поверхні.

*u* sin *v*

*bv*



 cos*v*   *u* sin *v*  0

Знайдемо координати векторів:

*f*    , *f*    , *f* ****   ,



****

*fvv*

 *u* cos*v*

  *u* sin *v* ,





*b*





*fuv*

****

 sin *v*





cos*v* .



0



1. sin *v*



0



1. *u* cos*v*



*b*



*uu* 0



0



  

*i*

cos*v*

*j*

sin *v*



*k*

0  *b*sin *v*,*b* cos*v*,*u*,

    .

*fu* , *fv*

* + *u* sin *v*

*b*2  *u*2

*u* cos*v b*

*fu fv*

Знайдемо вектор нормалі поверхні:

*n* 

1 *b*sin *v*,*b*cos*v*,*u*. Тоді

маємо

*L*(*u*,*v*) 



*fuu*

 *n*  0,

*M* (*u*,*v*) 



*fuv*

*b*2  *u*2

 *n*   *b*

, *N* (*u*,*v*) 



*fvv*

 *n*  0 .

Отже друга квадратична форма матиме вигляд : ** 2 

*b*2  *u*2

*b*2  *u*2

2*b dudv*.

Розглянемо коефіцієнт гауса:

*b*2

0  *u* 2  *b*2

*K* 

*u* 2  *b*2

  *b*2

*u* 2  *b*



2 2 .

Очевидно, що

*K*  

*u* 2



*b*2

 *b*2 2

 0 , при будь-яких значеннях *b* і *u* .

Отже тип точок для прямого гелікоїда ‒ гіперболічний.

**Приклад 5** Знайти повну і середню кривину для гіперболічного

параболоїда

*z*  *x*2  *y*2 , використавши формули Ейлера. Знайти значення

кривин на початку координат. Вказати тип точок.

Знаходимо коефіцієнти

*g*11 1  4*x*2 ,

*g*12  4*xу* ,

*g*22

1  4*у*2 . Тоді

*b*11  2 ,

*b*12  0 ,

*b*22

 2 . Отже маємо:

*К*  

4 ,

1  4*х*2  4 *у*2

4*х*2  *у*2 

*Н*  1  4*х*2  4 *у*2 .

На початку координат кривини матимуть значення

*К*  4,

*Н*  0. Так

як *К*  0 , то точки є гіперболічними.

**Приклад 6** Показати, що поверхня Еннепера є мінімальною поверхнею

постійної від’ємної кривини.

1 *u*(1  *v*2  1 *u* 2 ),

2



2 3

Поверхня Еннепера має вигля

*r* (*u*,*v*)   1 *v*(1  *u* 2  1 *v*2 ) , де

(*u*,*v*)  *R*2. Для нееї знайдемо

 3

 1 (*u* 2  *v*2 ),

 2

1  *v*2  *u* 2 ,





*ru* 2*uv*,

2*u*,



*uv*,

*r*  1 1  *u* 2  *v*2 ,

2

*v*



 *v*,

тоді

2*u* ,

 1  *u* 2  *v*2



*n*  ****2*v* ,



1  *u* 2

* *v*2

 1  *u* 2  *v*2

 1  *u* 2  *v*2 .



Знайдемо коефіцієнти першої і другої квадратичних форм:

*E*  1 1  *u*2  *v*2 2 ,

4

*F*  0 , *G*  1 1  *u*2  *v*2 2 ,

4

*L* 1,

*M*  0,

*N*  1.

Отже гаусова і середня кривина матимуть вигляд:

*K*  

8

1  *u* 2  *v*2 4

*H*  0. Так як гаусова кривина від’ємна, а нормальна кривина дорівнює нулю, то стверджуємо, що поверхня Еннепера є мінімальною поверхнею постійної від’ємної кривини.

,

# ВИСНОВКИ

В даній роботі розглянуто наступні класи поверхонь від’ємної гаусової кривини:

* лінійчаті;
* мінімальні;
* поверхні обертання. Наведені:
* всі можливі варіанти існуючих лінійчатих поверхонь;
* найпростіші приклади мінімальних поверхонь;
* всі можливі приклади поверхонь обертання з від’ємною гаусовою кривиною;
* приклади знаходження коефіцієнтів гаусової (повної) та середньої кривини двома способами (завдяки коефіцієнтам першої та другої квадратичної форми та формулам Ейлера).

Вивчення поверхонь постійної гаусової кривини в тривимірному Евклідовому просторі історично пов’язано з проблемою інтерпретації геометрії Лобачевського. Ще в 1868 році Е. Бельтрамі показав, що на поверхнях постійної від’ємної кривизни виконується локальна планиметрія Лобачевського. При цьому геодезичні лінії і їх відрізки на поверхні від’ємної кривизни грають роль прямих і їх відрізків на площині Лобачевського.

Зазначимо, що поверхні обертання постійної від’ємної кривини, знайдені Ф. Міндінг і Е. Бельтрамі.

# ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Норден А. П. Теория поверхностей. Москва : ГИТТЛ, 1956. 260 с.
2. Фоменко В. Т. Поверхности отрицательной кривизны //

*Соросовский образовательный журнал*, 1999. 12. С. 103–108.

1. Гаусс К. Ф. Общие исследования о кривых поверхностях, пер. с лат., в сб.: Об основаниях геометрии. Москва, 1956. С. 123–161.
2. Математика, ее содержание, методы и значение. Т. 2. / редкол.: А. Д. Александрова, А. Н. Колмогорова, М. А. Лаврентьева. Москва: Академия наук СССР, 1956. 397 с.
3. Архитектурно-строительные конструкции: учебник для академического бакалавриата / редкол.: С. Н. Кривошапко, В. В. Галишкинова. Москва : Юрайт, 2015. 475 с.
4. Позняк Э. Г, Шикин Е. В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство. Москва : МГУ, 1990. 384 с.
5. Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Москва ‒ Ленинград, 1947. 513 с.
6. Кайдасов Ж. Физико-математические науки: о трех видах катушкообразных поверхностей // *Достижение науки и образования*, 2006. 1. С. 6–8.
7. Зелевський В. Й., Зелевський С. В. Курс лекцій з диференціальної геометрії: для студентів фізико-математичного факультету. Частина 2. Київ: КТУУ, 2013. 81 с.
8. Попов А. Г. Псевдосферические поверхности. // *Соросовский образовательний журнал*. МГУ имени М. В. Ломоносова, 2004. 2. С. 119– 125.

# ДОДАТОК А

**Рівняння деяких поверхонь та їх графіки**

Таблиця А.1 – Рівняння деяких поверхонь та їх графіки

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Поверхня** | **Аналітичний опис** | **Графік** |
| **Однопорожнинний гіперболоїд** | *x* 2  *y* 2  *z* 2     1,  *a* 2 *b* 2 *c* 2  де *a* і *b* – дійсні осі, а  *с* – уявна |  |
| **Гіперболічний параболоїд** | *z*  *tx* 2  *uy*2 **,**  де *t* і *u –* дійсні числа і *t>0*, *u<0*  або *t<0*, *u>0* |  |
| **Катеноїд** | *r*  *ach x* ,  *b*  де *r* ‒ радіус паралелі, *u* – параметр, *а* ‒ вісь поверхні по напрямку *r* , *b* **‒** уявна вісь |  |

Продовження таблиці А.1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Гелікоїд** | *x*  *u* cos*v*   *y*  *u* sin *v* **,**    *z*  *av*    де *а* - стала |  |