

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

**на тему: «СХЕМИ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ ПРИ
РОЗВ'ЯЗАННІ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ КВАДРАТУРНО-
ІТЕРАЦІЙНИМ МЕТОДОМ»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1110-з

спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми математика
(назва освітньої програми)

Д. В. Тверденко

(ініціали та прізвище)

Керівник завідувач кафедри фундаментальної та прикладної
математики, доцент, д.т.н. Гребенюк С.М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент декан математичного факультету, професор, д.т.н.
Гоменюк С.І.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної математики,
доцент, д.т.н.

Гребенюк С.М.

(підпис)

« _____ » _____ 2021 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Тверденко Дар'ї Володимирівні

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Схеми чисельного інтегрування
при розв'язанні інтегральних рівнянь квадратурно-ітераційним методом

керівник роботи (проекту) Гребенюк Сергій Миколайович, доцент, д.т.н.
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затвержені наказом ЗНУ від « _____ » _____ 2021 року № _____

2. Строк подання студентом роботи _____

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Основні поняття та властивості інтегральних рівнянь
2. Квадратурні методи розв'язання інтегральних рівнянь

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) _____

Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.		
2.	Збір вихідних даних.		
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.		
4.	Розробка першого розділу.		
5.	Розробка другого розділу.		
6.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.		

Студент _____
(підпис)

Д. В. Тверденко _____
(ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____
(підпис)

С. М. Гребенюк _____
(ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____
(підпис)

О. Г. Спиця _____
(ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Схеми чисельного інтегрування при розв'язанні інтегральних рівнянь квадратурно-ітераційним методом»: 55 с., 4 рис., 10 джерел.

ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ, ІТЕРАЦІЯ, КВАДРАТУРНІ ФОРМУЛИ, РІВНЯННЯ ВОЛЬТЕРА, РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА, РЕЗОЛЬВЕНТА, РЯД НЕЙМАНА, ФОРМУЛА ГАУСА, ФОРСУЛА СІМПСОНА.

Об'єкт дослідження – квадратурно-ітераційним метод розв'язання інтегральних рівнянь.

Мета роботи: дослідити квадратурно-ітераційним метод розв'язання інтегральних рівнянь.

Метод дослідження – аналітичний, чисельний, порівняльний.

В роботі надано визначення та класифікацію інтегральних рівнянь. Більш детально розглянуто інтегральні рівняння Фредгольма та Вольтера. Описано основні методи їх розв'язання. Наведено найпоширеніші квадратурні формули та чисельні методи на їх основі для розв'язання інтегральних рівнянь. Розглянуто квадратурні формули, які дозволяють розв'язувати інтегральні рівняння, такі як формула Гауса, формула Сімпсона, формула квадратурних сум та їх властивості. Детально обговорюється квадратурно-ітераційний метод пошуку резольвент інтегральних рівнянь. Були наведені приклади розв'язання задач за допомогою даної теорії. Застосування цього методу є ефективним та значно прискорює розв'язання багатьох задач.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis « Schemes of numerical integration in solving integral equations by quadrature-iterative method»: 55 pages, 3 figures, 10 referents.

INTEGRAL EQUATION, ITERATORIUM FIRATORIAT, FREDHOLM EQUATION, GAUSSIAN FORMULA, RESOLVENT, SIMPSON'S FORMULA, VOLTER'S EQUATION.

The object of the study is a quadrature-iterative method of solving integral equations.

Purpose: to investigate the quadrature-iterative method of solving integral equations.

Research method - analytical, numerical, comparative.

The paper defines and classifies integral equations. The integral equations of Fredholm and Voltaire are considered in more detail. The main methods of their solution are described. The most common quadrature formulas and numerical methods based on them for solving integral equations are given. Quadrature formulas are considered, which allow solving integral equations, such as the Gaussian formula, Simpson's formula, the formula for quadrature sums and their properties. The quadrature-iterative method of finding the resolvent of integral equations is discussed in detail. Examples of problem solving with the help of this theory were given. Applying this method is effective and significantly speeds up the solution of many problems.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу	2
Реферат	4
Summary	5
Вступ.....	7
1 Інтегральні рівняння та їх властивості.....	9
1.1 Поняття та класифікація інтегральних рівнянь.....	9
1.2 Квадратурні формули розв’язання інтегральних рівнянь	15
1.2.1 Метод простої ітерації	16
1.2.2 Метод квадратурних сум	19
1.2.3 Квадратурні формули інтерполяційного типу	20
1.2.4 Елементарні формули трапецій, середніх прямокутників і парабол 24	
1.2.5 Складені формули трапецій, середніх прямокутників і парабол ..	27
1.2.6 Метод невизначених коефіцієнтів.....	29
1.2.7 Квадратурні формули Гауса.....	32
1.3 Квадратурно – ітераційні методи побудови резольвент.....	34
1.4 Практична оцінка похибки квадратурних формул	40
2 Застосування чисельних схем до знаходження розв’язків інтегральних рівнянь квадратурно-ітераційним методом.....	44
2.1 Приклад застосування квадратурно-ітераційного методу для розв’язання інтегральних рівнянь	44
2.2 Побудови наближення до каркасу резольвенти.....	47
Висновки	52
Перелік посилань.....	53

ВСТУП

Інтегральні рівняння – це один із розділів математики, який стрімко набуває популярності. Рівняння називається інтегральним, коли шукана функція входить до рівняння під знаком інтегралу.

При розв'язуванні математичних, інженерних, фізичних задач досить часто виникає необхідність обчислювати визначені інтеграли. Лише в деяких випадках для їх обчислення можна отримати аналітичні вирази для первісних підінтегральних функцій. Тому в більшості випадків користуються чисельними методами інтегрування.

Теорія інтегральних рівнянь, тобто рівнянь, в яких невідома функція знаходиться під знаком інтегралу, займає суттєвий розділ математичного аналізу та має велике теоретичне та прикладне значення. Хоча окремі інтегральні рівняння зустрічалися вже в першій половині XIX ст., але систематична їх теорія була закладена на рубежі XIX та XX ст. в роботах італійського математика Вольтера, шведського математика Фредгольма, Д. Гільберта та інших математиків. Цей напрям має довгу історію та своїм виникненням зобов'язаний Д. Бернуллі.

В даній кваліфікаційній роботі розглянуто наступні квадратурно-ітераційні схеми чисельного інтегрування: метод простої ітерації; метод квадратурних схем; метод невизначених коефіцієнтів.

Актуальність теми кваліфікаційної роботи полягає в тому, що при розв'язанні низки математичних, фізичних або технічних задач застосовуються визначені інтеграли від функцій, первісні функції яких не виражаються через елементарні функції. Крім того, в окремих задачах доводиться мати справу з визначеними інтегралами, у яких самі підінтегральні функції не являються елементарними. Це приводить до необхідності розробки наближених схем обчислення визначених інтегралів.

Об'єктом дослідження виступає загальна теорія інтегральних рівнянь, а предметом дослідження є квадратурно-ітераційні методи наближеного розв'язання інтегральних рівнянь.

Метою роботи є аналіз схем розв'язання інтегральних рівнянь та оцінки похибок обчислень при застосуванні найбільш уживаних методів наближеного обчислення визначених інтегралів: метод прямокутників, метод трапеції та метод Сімпсона.

Виходячи з мети, визначені основні завдання дослідження, а саме:

- розгляд властивостей інтегральних рівнянь та схем чисельного інтегрування;
- застосування розглянутих схем чисельного інтегрування до розв'язання інтегральних рівнянь.

Робота складається з двох основних розділів. Перший розділ містить теоретичні відомості стосовно властивостей інтегральних рівнянь першого та другого типів, які безпосередньо використовуються у подальших розділах, а також формулювання квадратурно-ітераційних методів розв'язання інтегральних рівнянь, які пов'язані із умовами існування розв'язків такого типу рівнянь.

Другий розділ присвячений застосуванню схем чисельного інтегрування до знаходження розв'язків інтегральних рівнянь квадратурно-ітераційними методами.

1 ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

1.1 Поняття та класифікація інтегральних рівнянь

Інтегральним рівнянням називається рівняння, яке містить невідому функцію під знаком інтеграла.

Наприклад,

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds + f(t), \quad t \in [a; b], \quad (1.1)$$

або

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)\varphi(s)ds + f(t). \quad (1.2)$$

Тут $K(t, s)$, $f(t)$ – задані функції, λ – числовий параметр, $\varphi(t)$ – шуканий розв’язок. Функції $K(t, s)$ та $f(t)$ називаються ядром і вільним членом інтегрального рівняння.

До інтегральних рівнянь приводять багато різних задач, які виходять з різних розділів математики. Історично першою задачею, показаною, як інтегральне рівняння називають задачу Абеля [1]. Суть якої полягає в тому, що крива виду $x = \varphi(t)$, по якій у вертикальній площині Oxz під дією сили тяжіння спадає матеріальна точка так, щоб почавши свій рух без початкової швидкості в точці кривої з аплікатою z , вона досягає осі Ox за заданий час $T = f(z)$.

Іншим прикладом перших відомих інтегральних рівнянь були інтегральні рівняння, пов’язані із інтегральними перетвореннями. Прикладом є рівняння, які визначають перетворення Фур’є

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \varphi(t) dt, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \Phi(\omega) d\omega.$$

Якщо розглядати одне з цих рівнянь як інтегральне рівняння щодо невідомої функції, то інше рівняння дає розв'язок цього рівняння у вигляді інтеграла від відомої функції (оригінал перетворення).

Важливе місце у розв'язанні задач механіки займають парні інтегральні рівняння. У випадку одної незалежної змінної такі рівняння можна представити у вигляді

$$a\varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} K_1(t-s) \varphi(s) ds = f(t); \quad t > 0,$$

$$b\varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} K_2(t-s) \varphi(s) ds = f(t); \quad t < 0,$$

де a і b – сталі.

Такі рівняння, зокрема, є наслідком застосування інтегральних перетворень для розв'язування контактних задач теорії пружності.

Основою для складання рівнянь зазвичай слугують загальні фізичні закони. Відомі закони збереження маси тіла, імпульсу, енергії мають інтегральне формулювання і приводять до розв'язання інтегральних рівнянь. Інтегральними рівняннями відображають закони газової динаміки, електродинаміки, екології тощо. Перевагами таких моделей є те, що інтегральні рівняння, на відміну від диференціальних, не містять похідної шуканої функції, а це означає, що не накладаються жорсткі обмеження на гладкість рішення.

Інтегральні рівняння поділяють на рівняння I роду та рівняння II роду.

Інтегральними рівняннями першого роду називаються рівняння виду:

$$\int_a^b K(t, s)\varphi(s)ds = f(t). \quad (1.3)$$

Обмежимо розглядом лише одномірних рівнянь другого роду, тобто таких, в яких шукана невідома є скалярною функцією однієї змінної й інтегрування виконується на відрізку $[a, b]$. При цьому будемо мати на увазі тільки інтеграл Рімана, хоча часто для загальності використовують інтеграл Лебега [2]. Розглянемо лінійні інтегральні рівняння в яких підінтегральна функція $K(t, s)\varphi(s)$ показана у вигляді $Q(t, s)\varphi(s)$.

Інтегральними рівняннями другого роду називаються рівняння виду:

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^b K(t, s)\varphi(s)ds = f(t). \quad (1.4)$$

Тут $K(t, s)$, $f(t)$ – задані функції, λ – заданий параметр рівняння, $\varphi(t)$ – шуканий розв’язок. Функції $K(t, s)$ та $f(t)$ називаються ядром і вільним членом інтегрального рівняння.

Лінійні інтегральні рівняння розділяються на рівняння Фредгольма та рівняння Вольтера.

Якщо ядро $K(t, s)$ неперервне для $\forall t \in [a, b]$ та $\forall s \in [a, b]$, або має такі розриви, що інтеграл $\int_a^b \int_a^b K^2(t, s)dt ds$ є обмеженим, то рівняння (1.4) називаються інтегральними рівняннями Фредгольма, відповідно другого та першого роду.

Якщо в рівнянні Фредгольма для ядра $Q(t, s)$ виконується умова: $Q(t, s)=0, \forall s > t$, то рівняння (1.3) та (1.4) називаються інтегральними рівняннями Вольтера. При цьому рівняння Фредгольма буде мати вигляд:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b Q(t, s)\varphi(s)ds + f(t), \quad (1.5)$$

а рівняння Вольтера – вигляд:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t Q(t,s) \varphi(s) ds + f(t). \quad (1.6)$$

Задана функція $f(t)$ – вільний член, $\varphi(t)$ – невідома функція. Розв'язок в цих рівнянь залежить від змінної t , яка змінюється на відрізку $[a,b]$. Функція двох змінних $Q(t,s)$, називається ядром інтегрального рівняння, визначена на множині точок квадрата $[a,b] \times [a,b]$ у випадку інтегральних рівнянь Фредгольма (рис. 1.1) і трикутника $a \leq s \leq t \leq b$ у випадку рівнянь Вольтера (рис. 1.2).

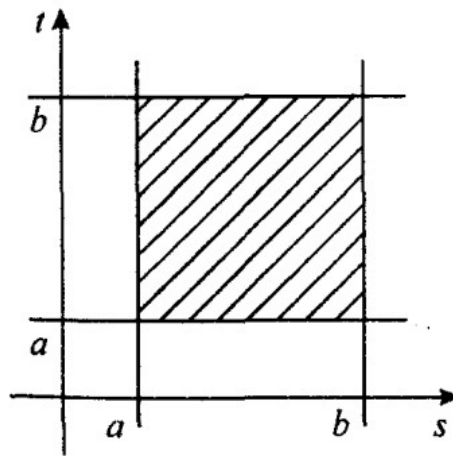


Рисунок 1.1 – Область визначення ядер $Q(t,s)$ інтегральних рівнянь Фредгольма

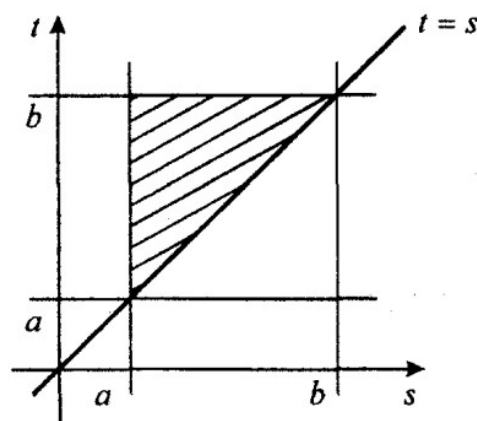


Рисунок 1.2 – Область визначення ядер $Q(t,s)$ інтегральних рівнянь Вольтера

Якщо до визначити ядро $Q(t,s)$ рівняння Вольтера нулем при $a \leq s \leq t \leq b$ (у нештрихованій частині квадрата $[a,b] \times [a,b]$ на рис. 1.1) рівняння

Вольтера можна співвіднести рівнянню Фредгольма та застосувати до нього відомі для рівняння Фредгольма результати. Однак при такому підході втрачається специфіка рівнянь Вольтера, та виникають складності, яких можливо уникнути при окремому вивченню цих рівнянь.

Введення в лінійне інтегральне рівняння числового параметра λ (який можна віднести і до ядра) надає рівнянню більш загальний вигляд та дозволяє встановити теореми існування розв'язків при різних значеннях параметра λ , в той час, як при нейтральному значенню $\lambda=1$ розв'язку може не існувати. На зразок того, як це робиться в теоріях лінійних систем алгебраїчних та лінійних диференціальних рівнянь, існує і єдиний розв'язок лінійних неоднорідних рівнянь (1.5), (1.6). Цей розв'язок досліджується завдяки вивченню відповідних їм однорідним рівнянням при $f \equiv 0$.

Більш складніше з існуванням розв'язків інтегральних рівнянь першого роду:

Фредгольма –

$$\int_a^b Q(t, s)\varphi(s)ds = f(t) \quad (1.7)$$

та Вольтера –

$$\int_a^t Q(t, s)\varphi(s)ds = f(t). \quad (1.8)$$

Такі рівняння, характеризуються відсутністю окремого доданка $\varphi(t)$ (не зв'язаного інтегралом), мають більш обмежену сферу застосування та є найбільш типовими представниками роду некоректних задач. Особливо це стосується рівнянь Фредгольма (1.7) в яких інколи ввіжають, що незалежна змінна (t) змінюється не на проміжку $[a, b]$, а на деякому іншому відрізку $[c, e]$, де $c = a \pm \sigma_1$, $e = b \pm \sigma_2$, тобто ядро $Q(t, s)$ задається на прямокутнику.

Рівняння першого та другого роду можна об'єднати спільним записом

$$h(t)\varphi(t) = \lambda \int_D Q(t,s)\varphi(s)ds + f(t). \quad (1.9)$$

При $h(t) \equiv 0$ формула (1.9) показує рівняння першого роду, при $\varphi(t) \equiv 0$ формула (1.9) показує рівняння другого роду. Якщо ж $h(t)$ перетворюється в нуль в деяких точках проміжка D та (1.9) буде рівнянням третього роду, яке достатньо мало вивчене.

Дуже багато рівнянь, які використовують на практиці, виділяють тим, що їх ядра залежать тільки від різниці $t-s$. Такі рівняння називають рівняннями з різницевим ядром. До них, відповідно, належать наведені на початку розділу рівняння Вольтера (1.1-1.3).

При неперервних функціях $Q(t,s)$ та $f(t)$ достатньо просто встановлюється існування єдиного неперервного рішення $\varphi(t)$ рівняння Вольтера другого роду (1.6) при будь-яких значеннях параметра λ , звідси – несуттєвість введення цього параметру в рівняння. Для рівняння Фредгольма другого роду (1.5) при тих самих вимогах неперервності, існування єдиного неперервного розв'язку можливо встановити, при умові, що

$$|\lambda| < \frac{1}{C(b-a)}, \text{ де } C := \max_{[a, b]} |Q(t, s)|. \quad (1.10)$$

При зниженні вимог до гладкості можливих рішень умова (1.10) послаблюється.

Для деяких рівнянь другого роду з ядрами певної структури є формули, які дозволяють знайти точний розв'язок $\varphi(t)$.

Так, наприклад, вивчаючи рівняння Вольтера (1.6) з $\lambda = 1$ та мультиплікативним ядром

$$Q(t, s) = p(s)q(s).$$

Приводить до розв'язку

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t R(t, s)f(s)ds + f(t) \quad (1.11)$$

з функцією $R(t, s)$, яка рахується за формулою

$$R(t, s) = p(s)q(s)e^{\int_s^t p(\varepsilon)q(\varepsilon)d(\varepsilon)}. \quad (1.12)$$

Розв'язок рівняння Фредгольма (1.5) з виродженим ядром має вигляд

$$Q(t, s) = \sum p(s)q(s). \quad (1.13)$$

З цього виходить, що існування єдиного розв'язку рівня (1.5) з ядром (1.13) прямо пов'язано з однозначністю розв'язку СЛАР, тобто з визначником, який більше за нуль цієї системи, який ще називають визначником Фредгольма [3].

1.2 Квадратурні формули розв'язання інтегральних рівнянь

Окрім згаданого вище методу заміни ядра на вироджене, існує також ряд інших наближено-аналітичних методів розв'язання інтегральних рівнянь. З них можна виділити методи, які тісно пов'язані з аналогічними методами рішення диференціальних рівнянь.

Найбільш універсальними та добре підготовленими для комп'ютерних обчислень є чисельні методи розв'язку інтегральних рівнянь. Їх побудова спирається на заміну інтеграла в інтегральному рівнянні кінцевою сумою на базі будь-якої квадратурної формули, в результаті чого задача зводиться до алгебраїчної системи відносно дискретних значень (каркаса) шуканого рішення, відповідним заданим або визначеним вибором квадратурної формули значенням аргументу (сітки). Такі методи називаються квадратурними методами або методами кінцевих сум. Вони є простими як в

ідеї, так і в реалізації, при чому без будь-яких змін їх можна застосовувати також і до нелінійних інтегральних рівнянь, маючи на увазі, що в цьому випадку і системи скінченномірному порядку, до яких буде приводити дискретизація, також будуть нелінійними.

Розглянемо інтегральні рівняння другого роду, оскільки питання щодо існування і єдиності їхнього розв'язку вирішується набагато простіше за питання щодо існування і єдиності розв'язку рівнянь першого роду. Для наближеного розв'язування інтегральних рівнянь другого роду використовують наближене представлення інтеграла у цих рівняннях, яке надає змогу звести задачу до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Внаслідок розв'язування такої системи можна отримати або коефіцієнти розкладу наближеного розв'язку за якоюсь системою функцій, або значення наближення функції-розв'язку у певному наборі точок. Методи з першого набору традиційно називають обчислювально-аналітичними. Методи ж, які надають змогу отримувати лише числові характеристики розв'язку, без прив'язування до певної додаткової системи функцій, будемо називати суто обчислювальними. При застосуванні обчислювальних методів завжди слід мати на увазі коректність поставленої задачі у сенсі, описаному вище.

1.2.1 Метод простої ітерації

Обчислювально-аналітичний метод, обґрунтування використання цього методу для розв'язування широкого класу інженерних задач надано Дж. Адомяном [5], засновано на представленні розв'язку у вигляді розкладу за сімейством функцій, кожен наступний елемент якого отримується з попереднього застосуванням інтегрального оператора рівняння.

Пояснимо застосування методу на прикладі. Нехай маємо таке інтегральне рівняння Вольтерра другого роду:

$$\varphi(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s)\varphi(s)ds, \quad t \in [a; b].$$

Уведемо послідовність

$$\varphi_k(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s)\varphi_{k-1}(s)ds, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\varphi_0 = f(t), \quad \psi_{k+1}(t) = \int_a^t K(t,s)\psi_k(s)ds.$$

Тоді, формально,

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(t).$$

Цей ряд збіжний, якщо $f(t)$ є неперервною на $[a; b]$, а ядро $K(t, s)$ є неперервним у трикутнику $a \leq s \leq t \leq b$. Причому, якщо позначити

$$N = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|, \quad M = \max_{a \leq s \leq t \leq b} |K(t, s)|.$$

Матимемо

$$|\psi_k(t)| \leq \frac{NM^k(b-a)^k}{k!}.$$

Наближеним розв'язком рівняння будемо вважати часткову суму ряду

$$\varphi_k(t) = \sum_{k=0}^n \psi_k(t).$$

Матимемо оцінку

$$|\varphi(t) - \varphi_n(t)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi_k(t) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{NM^K(b-a)^k}{k!}.$$

Отже, за вказаних обмежень метод простої ітерації є збіжним. Швидкість збіжності залежить від властивостей ядра й правої частини рівняння.

Для простої обчислювальної реалізації інтеграл замінюють на наближену суму. Наприклад, якщо використовувати рівномірну сітку розбиття з кроком h та метод трапецій для наближення інтеграла, то, позначивши $K_{ij} = K(t_i, t_j)$, $\psi_{ki} = \psi_k(t_i)$, дістанемо

$$\begin{aligned} \psi_{k+1}(t_i) &= \int_0^{t_i} K(t_i, s) \psi_k(s) ds \\ &\approx \frac{h}{2} [K_{i0} \psi_{k0} + 2(K_{i1} \psi_{k1} + K_{i2} \psi_{k2} + \dots + K_{i,i-1} \psi_{k,i-1} + K_{ii} \psi_{ki})] \\ &= \psi_{k+1,i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

За обчисленими значенням $\tilde{\psi}_{k,i}$ наближені значення розв'язку у точках t_i визначатимуться так:

$$\varphi_{ni} = \sum \tilde{\psi}_{k,i}.$$

Як умову завершення ітеративного процесу використовують, зазвичай, умову

$$\frac{\|\varphi_k - \varphi_{k-1}\|}{\|\varphi_k\|} \leq \varepsilon,$$

де $\|\varphi\| = \max_{a \leq t \leq b} |\varphi(t)|$.

Звичайно ж, застосування подібної доволі простої інженерної методики розв'язування інтегральних рівнянь не обмежується лише інтегральними рівняннями Вольтерра. За тим самим принципом можна розв'язувати лінійні інтегральні та інтегро-диференціальні рівняння. Втім, у кожному випадку має бути встановлено й перевірено умови збіжності функціонального ряду для розв'язку рівняння.

1.2.2 Метод квадратурних сум

Суть методу квадратурних сум полягає в заміні інтеграла, що фігурує в рівнянні (1.3) однією з квадратурних сум, тобто

$$\int_a^b y(s) ds = \sum_{i=0}^n A_i y(s_i),$$

де $s_i, i=\overline{0, n}$ – вузли сітки на відрізку $[a, b]$;

$A_i, i=\overline{1, n}$, – коефіцієнти квадратурної суми, наприклад, формули трапецій, формули Сімпсона або формули прямокутників.

Розв'язок $\varphi(t)$ рівняння (1.3) на відрізку $[a; b]$ шукається в табличному вигляді, тобто треба знайти значення цієї функції у вузлах сітки $s_i, i=\overline{0, n}$.

З рівняння (1.3) витікає, що наближений розв'язок буде мати вигляд:

$$\varphi(t) = \lambda \sum_{i=0}^n A_i K(t_i, t_i) \varphi(t_i) + f(t).$$

Тут $t_i = s_i = a + i \times h, i = \overline{0, n}, h = \frac{b-a}{n}$, n – кількість проміжків розбиття відрізка $[a, b]$. Тоді для вузлів сітки $s_k, k=\overline{0, n}$ на відрізку $[a, b]$ повинні виконуватись рівняння:

$$\varphi(t_k) = \lambda \sum_{i=0}^n A_i K(t_i, t_i) \varphi(t_i) + f(t_k), k = \overline{0, n}.$$

Таким чином, для знаходження значень $\varphi_i \approx \varphi(t_i), i = \overline{0, n}$, потрібно розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\varphi(t_k) = \lambda \sum_{i=0}^n A_i K(t_i, t_i) \varphi(t_i) + f(t_k), k = \overline{0, n}.$$

Як видно, метод квадратурних сум є прямим чисельним методом та зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Для рівновіддалених вузлів сітки нерідко застосовують формулу трапецій з якої виходить рекурентна формула для знаходження

$$\begin{aligned} \varphi_i &\approx \varphi(t_i), i = \overline{0, n} \\ \varphi(t_0) &= f(a) \\ \varphi(t_i) &= \frac{f(t_i) + h \sum_{j=1}^{i-1} A_j K(t_i, t_j) \varphi(t_j)}{1 - \frac{h}{2} K(t_i, t_j)}, i = \overline{1, n}, \\ &\text{де } A_1 = \frac{1}{2}, A_j = 1 \text{ при } j > 1. \end{aligned}$$

1.2.3 Квадратурні формули інтерполяційного типу

Як функції для апроксимації функцій візьмемо інтерполяційні поліноми Лагранжа $L_n(x)$ [1]. Тоді шуканий інтеграл замінюється лінійною комбінацією значень підінтегральної функції $f(x)$:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) + R = \sum_{i=1}^n c_i f_i + R. \quad (1.14)$$

Виписане співвідношення називається квадратурною формулою (або просто квадратурою), у якій величини x_i називають вузлами, c_i – вагами, а R – похибкою (залишковим членом).

Таким чином, інтеграл приблизно замінюється сумою, схожої на інтегральну суму, при чому вузли і ваги не залежать від $f(x)$.

Розглянемо квадратуру (1.14) прискіпливіше. Нехай вузли x_i утворюють рівномірну сітку із кроком h : $x_{i+1} = x_i + h$, $i = 1, n$. Якщо межі інтегрування a і b входять до складу сітки, то $h = (b - a)/(n - 1)$ і

$$x_1 = a, x_i = x_1 + (i - 1)h, x_n = b.$$

У цьому випадку формула (1.14) називається формулою замкненого типу й має принаймні два вузли. Вихідний відрізок інтегрування розбивається на $n - 1$ підвідрізків довжини h .

Якщо a і b не входять до складу сітки, то $h = (b - a)/(n + 1)$ і $x_i = a + ih$. Тоді формула (1.14) називається формулою відкритого типу й може мати один вузол. Кількість підвідрізків дорівнює $n + 1$. Якщо або a , або b включені до складу сітки, то відповідні квадратури називаються напіввідкритими (або напівзамкненими).

Тепер замінимо $f(x)$ на поліном Лагранжа $L_n(x)$, що інтерполює $f(x)$ у точках (x_i, f_i) на відрізку $[a; b]$:

$$f(x) = L_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i l_i(x) + \frac{\omega_n(x)}{n!} f^{(n)}(\xi), \xi \in [a, b],$$

де $\omega_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$ та

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Функції $l_i(x)$ називають фундаментальними поліномами Лагранжа. Підставивши виписану наближене представлення $f(x)$ до (1.6), одержимо

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b l_i(x) dx \right) f_i + \int_a^b \frac{\omega_n(x)}{n!} f^{(n)}(\xi) dx \\
 &= (b-a) \sum_{i=1}^n c_i f_i + R.
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Якщо сітка x_i не є рівномірною, то формулу (1.15) називають інтерполяційною квадратурною формулою (або квадратурною формулою інтерполяційного типу). Якщо ж (як у розглянутому випадку) сітка рівномірна, то формули типу (1.15) називають квадратурними формулами Ньютона – Котеса, а ваги c_i називають вагами Котеса. Легко бачити, що ваги, відповідно до вузлів, симетричних щодо середини відрізка, рівні. Крім того $\sum_{i=1}^n c_i = 1$, оскільки формула (1.15) точна для $f(x)=1$.

Кажуть, що квадратура (1.14) має алгебраїчний порядок точності p , якщо її залишковий член R дорівнює нулю для всіх алгебраїчних поліномів степеня меншого або рівного p .

Оскільки поліном Лагранжа L_n є алгебраїчним поліномом степеня $n-1$, то за побудовою формула (1.15) має алгебраїчний порядок точності не нижче $n-1$. Однак якщо n непарне, тобто коли середина відрізка $[a; b]$ входить до складу сітки, то формула (1.15) виявляється точною для поліномів степеня n .

Справді, при непарному n один з вузлів сітки збігається із серединою відрізка інтегрування $\bar{x} = (a+b)/2$, а інші вузли лежать симетрично відносно \bar{x} . Розглянемо поліном $q(x) = (x - \bar{x})^n$. Цей поліном є непарним відносно \bar{x} ; отже

$$\int_a^b q(x) dx = 0, \sum_{i=1}^n c_i q_i = 0.$$

Звідси $R = 0$, тобто формула (1.15) точна для $q(x)$. Покажемо, що ця формула точна й для будь-якого полінома $p_n(x)$ степеня n :

$$p_n(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots + a_nx + a_{n+1}.$$

Для цього представимо $p_n(x)$ у вигляді

$$p_n(x) = a_1(x-x)^n + p_{n-1}(x) = a_1q(x) + p_{n-1}(x)$$

і підставимо його до (1.15). Оскільки формула (1.15) за побудовою точна для $p_{n-1}(x)$ і точна для $q(x)$, то вона точна й для $p_n(x)$.

Головний член похибки формули Ньютона – Котеса з n вузлами за умови достатньої гладкості $f(x)$ має порядок $O h^{2[(n-1)/2]+3}$, де $[]$ – ціла частина числа. Порядок за h головного члена похибки називається порядком точності (збіжності) квадратурної формули.

Для формул замкненого типу коефіцієнти Котеса c_i додатні при $1 \leq n \leq 8$, а при $n = 9$ і $n \geq 11$ серед них є від'ємні, що призводить до збільшення похибок, що містяться в $f(x)$. Справді, нехай похибка задання функції $f(x)$ у кожному вузлі сітки оцінюється згори за модулем деякої величиною ξ . Похибку, яку можемо отримати у сумі $\sum_{i=1}^n c_i f_i$, можна оцінити величиною $\varepsilon \sum |c_i|$. Оскільки $\sum c_i = 1$, наявність від'ємних c_i призводить до збільшення $\sum |c_i|$. Коефіцієнт збільшення помилок ілюструється наступними числами:

$$\begin{aligned} \sum |c_i| &\approx 1.45, n = 9; \quad \sum |c_i| = 3.1, n = 11; \\ \sum |c_i| &\approx 8.3, n = 15; \quad \sum |c_i| = 560, n = 20. \end{aligned}$$

Значення c_i при великих n швидко ростуть за абсолютною величиною, а c_i буде швидко зростати. Коефіцієнт збільшення похибки стає неприйнятним, а відповідні формули непридатними для розрахунків.

Для формул відкритого типу коефіцієнти Котеса додатні при $n = 1, 2, 4$, а за інших n серед них є від'ємні.

1.2.4 Елементарні формули трапецій, середніх прямокутників і парабол

Розглянемо перші три формули Ньютона – Котеса. Спочатку наблизимо $f(x)$ на $[a; b]$ поліномом Лагранжа $L_2(x)$ з вузлами $x_1 = a$ і $x_2 = b$. Це означає, що замість кривої $f(x)$ ми взяли поліном першого степеня, що проходить через точки $(a; f(a))$ і $(b; f(b))$. Тепер шуканий інтеграл, рівний площі криволінійної фігури, замінимо на площу трапеції з основами $f(a)$ і $f(b)$ і висотою $h = b - a$:

$$I \approx T = h \frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)). \quad (1.16)$$

Ми одержали квадратурну формулу трапецій, яку можна також одержати з (1.14) при $n = 2$ із сіткою для формул замкненого типу. Зазначимо, що алгебраїчний порядок точності цієї формули дорівнює одиниці, оскільки середина відрізка $[a; b]$ не входить до складу сітки.

Якщо на $[a; b]$ взяти єдиний вузол квадратурної формули, то $f(x)$ апроксимується поліномом Лагранжа $L_1(x)$, тобто поліномом нульового степеня. Візьмемо як цей вузол середину відрізка $x^- = (a + b)/2$. Тоді одержимо формулу середніх прямокутників

$$I \approx P = hf(x^-) \quad (1.17)$$

Геометричний сенс цієї формули полягає у тому, що площа криволінійної фігури замінюється на площу прямокутника з основою $h = b - a$ і висотою $f(x^-)$. Ту ж саму формулу можна отримати з (1.14) при $n = 1$ із сіткою для формул відкритого типу. Алгебраїчний порядок формули середніх прямокутників дорівнює одиниці, оскільки середина відрізка інтегрування входить до складу вузлів сітки.

Тепер одержимо вираження для залишкових членів $R^T = I - F$ і $R^P = I - P$. Для цього розкладемо $f(x)$ у ряд Тейлора відносно точки $\bar{x} = (a + b)/2$, припускаючи достатню гладкість функції $f(x)$:

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2}f''(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^3}{6}f'''(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^4}{24}f^{(4)}(\bar{x}) + \dots$$

Скориставшись цим розкладом, дістанемо представлення залишкового члена формули середніх прямокутників:

$$I = hf(\bar{x}) + \frac{h^3}{24}f''(\bar{x}) + \frac{h^4}{1920}f^{(4)}(\bar{x}) + \dots = P + R^P. \quad (1.18)$$

Оскільки

$$\int_a^b (x - \bar{x})^j dx = \begin{cases} h, & j = 0; \\ 0, & j = 1; \\ \frac{h^3}{12}, & j = 2; \\ 0, & j = 3; \\ \frac{h^5}{80}, & j = 4. \end{cases}$$

Підставимо до (1.9) $x = a$ і $x = b$ і врахуємо, що $a - \bar{x} = -h/2$ і $b - \bar{x} = h/2$:

$$f(a) = f(\bar{x}) - \frac{h}{2}f'(\bar{x}) + \frac{(h)^2}{8}f''(\bar{x}) - \frac{(h)^3}{48}f'''(\bar{x}) + \frac{(h)^4}{384}f^{(4)}(\bar{x}) + \dots$$

$$f(b) = f(\bar{x}) + \frac{h}{2}f'(\bar{x}) + \frac{(h)^2}{8}f''(\bar{x}) + \frac{(h)^3}{48}f'''(\bar{x}) + \frac{(h)^4}{384}f^{(4)}(\bar{x}) + \dots$$

Складемо ці дві рівності:

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = f(\bar{x}) + \frac{(h)^2}{8} f''(\bar{x}) + \frac{(h)^4}{384} f''''(\bar{x}) + \dots$$

Звідси дістанемо

$$hf(\bar{x}) = h \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{(h)^3}{48} f''(\bar{x}) - \frac{(h)^5}{384} f''''(\bar{x}) + \dots$$

Підставимо цей вираз $hf(\bar{x})$ до (1.10):

$$I = h \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{(h)^3}{12} f''(\bar{x}) - \frac{(h)^5}{480} f''''(\bar{x}) + \dots = T + R^T. \quad (1.19)$$

Отже, головні члени похибки у формулах середніх прямокутників і трапецій рівні $\frac{(h)^3}{24} f''(\bar{x})$ і $\frac{(h)^3}{-12} f''(\bar{x})$ і мають протилежні знаки. Це означає, що точне значення інтеграла лежить у вилиці між ними.

Поєднуючи (1.10) і (1.11), можна записати (нагадаємо, що тут $h = b - a$):

$$I = P + \frac{(h)^3}{24} f''(\bar{x}) + \frac{(h)^5}{1920} f''''(\bar{x}) + \dots,$$

$$I = T - \frac{(h)^3}{12} f''(\bar{x}) - \frac{(h)^5}{480} f''''(\bar{x}) + \dots$$

Помножимо першу рівність на $2/3$, а другу на $1/3$ і складемо:

$$I = \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}T - \frac{(h)^5}{2880} f''''(\bar{x}) + \dots = S - \frac{(h)^5}{2880} f''''(\bar{x}) + \dots$$

Ми бачимо, що нова формула S , яку називають формулою Сімпсона (або формулою парабол), має вигляд

$$S = \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}T = \frac{h}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right), h = b - a. \quad (1.20)$$

Відзначимо важливу обставину: із самого виведення цієї формули видно, що її залишковий член R^S на рівномірній сітці має розклад за непарними степенями $h = b - a$, починаючи з h^5 . Отже, формула Сімпсона точна для поліномів третього степеня.

Коефіцієнти формули Сімпсона й оцінку залишкового члена можна вивести з (1.14) при $n = 3$ для сітки замкненого типу. Із цієї побудови випливає, що отримана формула повинна бути точна для поліномів другого степеня, однак вона має підвищену точність через свою симетрію.

Змінимо запис формули Сімпсона, розглядаючи її як окремий випадок формули Ньютона – Котеса для рівномірної сітки із трьох вузлів із кроком $h = (b - a)/2$:

$$S = \frac{h}{3} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

1.2.5 Складені формули трапецій, середніх прямокутників і парабол

У загальному випадку довжина відрізка $[a; b]$ не мала, а тому залишковий член у розглянутих формулах може бути великий. Для підвищення точності на відрізку інтегрування вводять досить густу сітку $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, що відповідає розбиттю початкового відрізка на $n - 1$ підвідрізків, які іноді називають елементарними. Через $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, n - 1$, позначимо довжину кожного підвідрізка. Шуканий інтеграл I розбивають на суму інтегралів I_i за кожним елементарним підвідрізком, які обчислюються за формулами з попереднього підпункту.

Таким чином, одержують складені, або узагальнені, квадратурні формули. У нашому випадку це:

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} T_i + \sum_{i=1}^{n-1} R_i^T$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} h_i (f_i + f_{i+1}) - \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{n-1} h_i^3 f''\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) - \frac{1}{480} \sum_{i=1}^{n-1} h_i^5 f''''\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + \dots$$

– складена формула трапецій

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} P_i + \sum_{i=1}^{n-1} R_i^P$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} h_i f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{n-1} h_i^3 f''\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

$$+ 1920 \sum_{i=1}^{n-1} h_i^5 f''''\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + \dots$$

– складена формула середніх прямокутників

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} S_i + \sum_{i=1}^{n-1} R_i^S$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n-1} h_i \left(f_i + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f_{i+1} \right) - \frac{1}{2880} \sum_{i=1}^{n-1} h_i^5 f''''\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + \dots$$

– складена формула Сімпсона.

На рівномірній сітці залишкові члени цих квадратурних формул можуть бути представлені у такий спосіб (відкидаємо члени, що містять вищі степені h):

$$R^T \approx -\frac{h^2}{12} \sum_{i=1}^{n-1} h f''\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \approx -\frac{h^2}{12} \int_a^b f''(x) dx;$$

$$R^P \approx -\frac{h^2}{24} \sum_{i=1}^{n-1} h f''\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \approx -\frac{h^2}{24} \int_a^b f''(x) dx;$$

$$R^S \approx -\frac{h^4}{2880} \sum_{i=1}^{n-1} h f''\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \approx -\frac{h^4}{2880} \int_a^b f''(x) dx;$$

Наведені оцінки є асимптотичними, тобто виконуються при $h \rightarrow 0$ з точністю до членів вищого порядку малості. Але для справедливості цих оцінок необхідне існування неперервних похідних підінтегральної функції відповідних порядків. Якщо ці похідні кусковонеперервні, то можна зробити тільки мажорантні оцінки:

$$|R^T| \leq \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2 |R^P| \leq \frac{(b-a)}{24} h^2 M_2 |R^S| \leq \frac{(b-a)}{2880} h^4 M_4,$$

$$M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|, M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f''''(x)|.$$

1.2.6 Метод невизначених коефіцієнтів

Для підвищення точності інтегрування можна збільшувати число точок n , за якими підінтегральна функція апроксимується інтерполяційним поліномом Лагранжа. У цьому випадку коефіцієнти c_i і залишковий член R визначаються з (1.14).

Наочним способом побудовано формули замкненого типу для $n = 2$ і $n = 3$ і формулу відкритого типу для $n = 1$.

Розгляньмо інший спосіб побудови квадратурних формул, який називають методом невизначених коефіцієнтів. Будемо розглядати лише формули замкненого типу.

Нехай $n = 4$. Формула не буде симетричною, оскільки середина відрізка не входить до складу сітки. Побудуємо формулу вигляду

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) + c_4 f(x_4),$$

де $x_1 = a, x_2 = a + \frac{b-a}{3}, x_3 = a + 2\frac{b-a}{3}, x_4 = b$.

Коефіцієнти c_i будемо підбирати так, щоб ця формула була точна для поліномів як можна вищого степеня.

Для спрощення викладення виконаємо стандартну заміну змінних

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t, -1 \leq t \leq 1, a \leq x \leq b,$$

у результаті якої отримаємо

$$\int_a^b f(x)ds = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(x(t))dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(t)dt.$$

Тепер, з урахуванням виконаної заміни, початкова задача звелася до пошуку таких коефіцієнтів d_i , щоб квадратурна формула

$$\int_{-1}^1 g(t)dt \approx d_1g(-1) + d_2g\left(\frac{-1}{3}\right) + d_3g\left(\frac{1}{3}\right) + d_4g(1)$$

була точна для поліномів найвищого можливого степеня.

Похибка квадратури має вигляд

$$\int_{-1}^1 g(t)dt \approx d_1g(-1) + d_2g\left(\frac{-1}{3}\right) + d_3g\left(\frac{1}{3}\right) + d_4g(1).$$

Підставимо до цього виразу поліном $g(t) = \sum_{j=0}^m a_j t^j$ степеня m :

$$R(g) = \sum_{j=0}^n a_j R(t^j).$$

Добором d_i ми спробуємо досягти виконання рівностей

$$R(1) = 0, R(t) = 0, \dots, R(t^m) = 0.$$

при якомога більшому значенні m . Підставимо до цих рівностей послідовно $g(t) \equiv 1, g(t) \equiv t, g(t) \equiv t^2, g(t) \equiv t^3$. Дістанемо систему із чотирьох лінійних рівнянь, розв'язок якої дає такі значення коефіцієнтів квадратурної формули:

$$d_1 = d_4 = \frac{1}{4}, d_2 = d_3 = \frac{3}{4}.$$

Перевіркою переконуємося, що побудована квадратурна формула не буде точна для $g(t) \equiv t^4$. Враховуючи, що $c_i = d_i(b-a)/2$ і $b-a = 3h$, отримаємо шукану квадратурну формулу з уведеними вище вузлами x_i .

$$\int^b f(x)dx \approx \frac{3}{8}h(f_1 + 3f_2 + 3f_3 + f_4).$$

Цю квадратуру називають правилом (або формулою) трьох восьмих. Оскільки вона точна для поліномів третього степеня, то її залишковий член має порядок $O(h^5)$ (тобто той же, що й залишковий член формули Сімпсона), однак розкладається у ряд Тейлора за послідовними степенями h . Ту ж формулу можна одержати з (1.14) при $n = 4$. Похибка формули представляється у вигляді $3h^5 f^{IV}(\xi)/80, \xi [a; b]$.

Складена формула трьох восьмих може бути побудована розбиттям $[a; b]$ на елементарні підвідрізки з наступним застосуванням (1.19) на кожному з них. Ми ж побудуємо її у трохи інший спосіб.

Покладемо кількість елементарних підвідрізків кратною трьом, тобто рівною $3m, m \in \mathbb{N}$. Тоді кількість вузлів отриманої сітки $n = 3\bar{m} + 1$, а її крок $h = (b-a)/(n-1) = (b-a)/3m$. Візьмемо строений відрізок $[a + kh, a + (k+3)h], k = 0, 3, 6, \dots$, і застосуємо на ньому правило (9):

$$\int_{a+kh}^{a+(k+3)h} f(x)dx = \frac{3}{8}h(f_1 + 3f_2 + 3f_3 + f_4) + R_{k+1},$$

де $R_{k+1} = -\frac{5h^5}{80}f^{(5)}(\xi_{k+1}), \xi_{k+1} \in [a + kh, a + (k + 3)h]$.

Хоча формула Сімпсона за точністю й об'ємом обчислень значень підінтегральної функції є кращою, правило трьох восьмих має самостійне значення, оскільки його можна використати для таблично заданої функції й непарної кількості елементарних відрізків, коли формула Сімпсона незастосовна.

1.2.7 Квадратурні формули Гауса

При побудові квадратурних формул Гауса важливу роль відіграють ортогональні поліноми Лежандра, які мають вигляд:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], n = 0, 1, 2, \dots$$

Тепер розглянемо інтеграл на стандартному відрізку $[-1, 1]$:

$$I = \int_{-1}^1 f(t)dt.$$

Поставимо задачу визначення вузлів t_1, t_2, \dots, t_n на $[-1, 1]$ і коефіцієнтів c_1, c_2, \dots, c_n так, щоб квадратурна формула

$$\int_{-1}^1 f(t)dt \approx \sum_{i=1}^n c_i f(t_i)$$

була точною для поліномів якомога вищого степеня.

Формули, що мають таку властивість, називають квадратурними формулами (квдратурами) Гауса. Інша назва – квадратурні формули найвищого алгебраїчного степеня точності. Оскільки у квадратурі Гауса ми маємо $2n$ вільних параметрів t_i c_i , $i = 1, n$, а поліном степеня $2n - 1$ визначається $2n$ коефіцієнтами, можна підібрати ці параметри так, щоб найвищий степінь полінома у загальному випадку дорівнював $N = 2n - 1$.

Для того щоб квадратурна формула була точна для поліномів степеня до $2n-1$ включно, необхідно й достатньо, щоб вона була точна для одночленів

$$f(t) \equiv 1, t, t^2, \dots, t^{2n-1}$$

Будемо підбирати параметри t_i c_i методом невизначених коефіцієнтів, який ми використовували раніше для побудови формул Ньютона – Котеса. Отримаємо систему $2n$ рівнянь із $2n$ невідомими:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i &= 2, \\ \sum_{i=1}^n c_i t_i &= 0, \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n c_i t_i^{2n-2} &= \frac{2}{n-1}, \\ \sum_{i=1}^n c_i t_i^{2n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Ця система нелінійна, тому її розв'язання є складним навіть за невеликих значень n . Крім того, немає ніякої гарантії, що вона взагалі розв'язна, або що її розв'язки t_i дійсні й належать відрізку $[-1, 1]$.

Доведемо можливість розв'язання системи (1.20). Розглянемо сімейство поліномів вигляду

$$f_k(t) = t^k P_n(t), k = 0, 1, \dots, n - 1,$$

де $P_n(t)$ – поліном Лежандра.

Оскільки степені поліномів $f_k(t)$ не перевершують $2n - 1$, якщо ті c_i задовольняють систему (1.14), має бути виконано рівності

$$\int_{-1}^1 t^k P_n(t) dt = \sum_{i=1}^n c_i t_i^k P_n(t_i), k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Через властивість ортогональності поліномів Лежандра мають місце рівності

$$\int_{-1}^1 t^k P_n(t) dt = 0, k < n.$$

Отже,

$$\sum_{i=1}^n c_i t_i^k P_n(t_i) = 0, k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Запропонована квадратурна формула за своєю побудовою точна для кожного з доданків у цьому розкладі, отже, точна й для довільного полінома степеня не вище $2n - 1$.

1.3 Квадратурно-ітераційні методи побудови резольвент

Уявимо, що нам необхідно розв'язати серію інтегральних рівнянь другого роду с одним і тим саме ядром $Q(t, s)$ та різними вільними членами

$f(t)$. Для визначеності будемо вважати, що розв'язати треба рівняння Фредгольма (1.5). В цьому випадку, так само, як це робиться для лінійних алгебраїчних систем $Ax=b$, де розв'язок x при різних правих частинах b вираховується через попередньо знайдену обернену до A матрицю A^{-1} по формулі $x=A^{-1} b$, тут також є можливість формально підрахувати відповідні різним $f(t)$ розв'язкам $x(t)$ рівняння (1.5) за формулою виду

$$x(t) = \lambda \int_a^b R(t, \tau, \lambda) f(\tau) d\tau + f(t) \quad (1.21)$$

В цій формулі роль головного оператора (аналога оберненому) займає функція $R(t, \tau, \lambda)$, яка називається резольвентою інтегрального рівняння або, резольвентою ядр $Q(t, s)$ рівняння (1.5). При неперервних ядрах $Q(t, s)$ та значеннях параметра λ , які задовольняють умові (1.10), нескладно встановити існування єдиної неперервної функції $R(t, \tau, \lambda)$, до якої абсолютно та рівномірно при $t, s \in [a, b]$ сходиться ряд Неймана

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} Q_k(t, s), \quad (1.22)$$

який визначається через інтегровані ядра $Q_k(t, s)$ такі, що

$$Q_1(t, s) \equiv Q(t, s) \quad Q_k(t, s) = \int_a^b Q(t, s) Q_{k-1}(\tau, s) d\tau. \quad (1.23)$$

Послідовне визначення інтегрованих ядр за рекурентною формулою (1.12) та підрахунок часткових сум ряду (1.16) дозволяють отримати достатнє наближення до резольвенти $R(t, \tau, \lambda)$. Але ціна такого наближення буде занадто високою (лише за деякими випадками, коли таку операцію можна буде провести аналітично, а не чисельно). Більш продуктивні методи наближеного знаходження резольвенти спираються на прості інтегральні

співвідношення між резольвентою та ядром. Практично в усіх посібниках з інтегральних рівнянь можна знайти вивід таких співвідношень.

$$R(t, \tau, \lambda) = Q(t, s) + \int_a^b Q(t, \tau) R(\tau, s, \lambda) d\tau, \quad (1.24)$$

$$R(t, \tau, \lambda) = Q(t, s) + \int_a^b R(t, \tau, \lambda) Q(\tau, s) d\tau. \quad (1.25)$$

Той факт, що резольвента, відповідно до формул (1.24), (1.25), може розглядатися як розв'язок інтегрального рівняння з одним і тим самим ядром $Q(t, s)$ дозволяє підходити до її чисельної побудови з тих самих позицій, які було закладено при наближеному розв'язку рівнянь Фредгольма другого роду (1.5).

Зупинившись на будь-якій квадратурній формулі, по її вузлах на відрізку $[a, b]$ та, відповідно, на квадраті $[a, b] \times [a, b]$ будемо сітку, вузлами якої слугують точки (t_i, s_j) , які лежать на перетині ліній $t = t_i, s = s_j$ ($i, j=1, 2, \dots, n$) в межах певного квадрату. Застосування обраної квадратурної формули до інтегрального співвідношення (1.23) приводить до рівності

$$R(t, s, \lambda) = Q(t, s) + \lambda \sum_{k=1}^n A_k R(t, \tau_k, \lambda) Q(\tau_k, s) + r(t, s),$$

де $r(t, s)$ — похибка квадратури.

Відкинувши цю похибку перейдемо до наближеного рівняння відносно резольвенти $R(t, s, \lambda)$, яку, в свою чергу, замінимо точним рівнянням відносно наближеної резольвенти $\tilde{R}(t, s, \lambda) \approx R(t, s, \lambda)$:

$$\tilde{R}(t, s, \lambda) = Q(t, s) + \lambda \sum_{k=1}^n A_k \tilde{R}(t, \tau_k, \lambda) Q(\tau_k, s) \quad (1.26)$$

з функціонального рівняння (1.20) фіксуванням змінних $t = t_i, s = s_j$ ($i, j=1, 2, \dots, n$) отримаємо n^2 дискретних рівнянь

$$\tilde{R}(t, s, \lambda) = Q(t_i, s_j) + \lambda \sum_{k=1}^n A_k \tilde{R}(t_i, \tau_k, \lambda) Q(\tau_k, s_j). \quad (1.27)$$

відносно сіткових значень наближеної резольвенти, тобто каркасу $\tilde{R}_{ij}(\lambda) := \tilde{R}(t_i, \tau_k, \lambda)$.

Введем матриці $n \times n$

$$\hat{R}(\lambda) := (\tilde{R}(t_i, \tau_k, \lambda))_{i,j=1}^n, \quad \hat{Q}(\lambda) := (Q(t_i, s_j))_{i,j=1}^n, \quad A := \text{diag} * (A_k)_{i,j=1}^n.$$

Враховуючи співпадіння значень t_i, τ_k, s_j при співпадінні індексів i, j, k , множину рівнянь (1.21) можна переписати у вигляді одного матричного рівняння

$$\hat{R}(\lambda) = \hat{Q} + \lambda R(\lambda) A \hat{Q}, \quad (1.28)$$

в чому неважко переконатися, виконуючи відповідні матричні операції, які фігурують в (1.28).

Формально матричне рівняння (1.28) легко розв'язується відносно шуканого каркасу наближеної резольвенти:

$$R(\lambda) = \hat{Q} (E - \lambda A \hat{Q})^{-1}. \quad (1.29)$$

Відповідно до леми Неймана, матриця $(E - \lambda A \hat{Q})^{-1}$ існує та може бути показана у вигляді матричного ряду

$$(E - \lambda A \hat{Q})^{-1} = E + \lambda A \hat{Q} + \lambda^2 (A \hat{Q})^2 + \lambda^3 (A \hat{Q})^3 + \dots \quad (1.30)$$

тоді і тільки тоді, коли спектральний аналіз радіусу матриці $\lambda A\hat{Q}$ менше за один. Уявимо, що ця умова виконана, тобто

$$\rho(\lambda A\hat{Q}) < 1. \quad (1.31)$$

Тоді шуканий каркас наближеної резольвенти, в силу (1.23), (1.24), також можна записати у вигляді суми матричного ряду:

$$\hat{R}(\lambda) = \hat{Q} + \lambda \hat{Q}A\hat{Q} + \lambda^2 \hat{Q}(A\hat{Q})^2 + \lambda^3 \hat{Q}(A\hat{Q})^3 + \dots \quad (1.32)$$

Замість знаходження наближення до $\hat{R}(\lambda)$ підрахунком часткових сум ряду (1.32), який може сходитись дуже повільно, повернемося до представлення (1.29) та до обернення матриці $E - \lambda A\hat{Q}$ застосуємо швидкозбіжний ітераційний процес Шульца.

Візьмемо за основу найбільш легкий та розповсюджений процес уточнення елементів оберненої матриці B^{-1} по формулам

$$\begin{cases} U_{k+1} = U_k + U_k \psi_k, \\ \psi_k = E - BU_k, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.33)$$

Відомі, що необхідною та достатньою умовою збіжності послідовності матриці $E - \lambda A\hat{Q}$ до матриці B^{-1} є умова

$$\rho(\psi_0) < 1, \quad (1.34)$$

якщо початкове наближення U_0 обрано так, що

$$\|\psi_0\| \leq q < 1,$$

то справедливою оцінка похибки

$$\|B^{-1} - U_k\| \leq \frac{\|U_k \psi_k\|}{1 - \|\psi_k\|} \leq \frac{\|U_0\|}{1 - q} q^{2^k}, \quad (1.35)$$

яка характеризує (1.29) як метод другого порядку.

При оберненні матриці $E - \lambda A \hat{Q}$ у записі ітераційного процесу (1.35) змінюється лише другий рядок, тобто наближення U_k до $(E - \lambda A \hat{Q})^{-1}$ можна знаходити за формулами

$$\begin{cases} U_{k+1} = U_k + U_k \psi_k, & k = 0, 1, 2, \dots, \\ \psi_k = E - (E - \lambda A \hat{Q}) U_k. \end{cases} \quad (1.36)$$

якщо виконується умова (1.34). Враховуючи, що при умові (1.31) матриця $(E - \lambda A \hat{Q})^{-1}$ може бути розкладена в ряд за формулою (1.30), візьмемо за початкову матрицю U_0 в процесі (1.36) перший член цього розкладання, тобто покладемо

$$U_0 := E.$$

Тоді початковий підхил, «величина» якою визначається збіжність методу, буде

$$\psi_0 = E - (E - \lambda A \hat{Q}) U_0 = \lambda A \hat{Q},$$

та, відповідно, в цьому випадку необхідна та достатня умова (1.32) збіжності ітераційного процесу (1.36) співпадає з необхідною та достатньою умовою (1.31) існування шуканої оберненої матриці та її представлення до матричного ряду (1.30).

Таким чином, якщо $\rho(\lambda A \hat{Q}) < 1$, то розпочатий з $U_0 := E$ ітераційний процес (1.36) збігається до матриці $(E - \lambda A \hat{Q})^{-1}$, а це означає, що і послідовність матриць $R_k := \hat{Q} U_k$, в силу рівності (1.29), збігається до

матриці $\hat{R}(\lambda)$ – каркасу наближеної резольвенти $\tilde{R}(t, s, \lambda)$ при будь-якому фіксованому λ , яке відповідає умові $\rho(\lambda A \hat{Q}) < 1$. Якщо, більше того

$$\|\lambda A \hat{Q}\| \leq q < 1, \quad (1.37)$$

то можна скористатися апостеріорною та апріорної оцінками

$$\|\hat{R}(\lambda) - R_k\| \leq \|\hat{Q}\| \frac{\|U_k \psi_k\|}{1 - \|\psi_k\|} \leq \frac{\|\hat{Q}\|}{1 - q} q^{2^k}, \quad (1.38)$$

При будь-яких мультиплікативних нормах таких, що $\|E\| = 1$.

Як висновок, визначу, що при відповідних умовах, наприклад за рахунок зміни сітки, шукана резольвента $R(t, s, \lambda)$ рівняння Фредгольма другого роду з ядром $\lambda Q(t, s)$ при фіксованих значеннях λ може бути скільки завгодно подана функцією $\tilde{R}(t, s, \lambda)$, тобто пхп матрицею $\hat{R}(\lambda)$. Остання в свою чергу може бути наближена матрицями $R_k := \hat{Q} U_k$, за допомогою квадратично збіжного ітераційного процесу (1.36) обчислення матриць U_k (попередньо перевірив умову (1.37)).

1.4 Практична оцінка похибки квадратурних формул

З попереднього розгляду випливає, що чим вищим є степінь полінома Лагранжа $L_n(x)$, що апроксимує задану підінтегральну функцію, тим вищою буде точність відповідної квадратури. Це виконується для досить малих довжин відрізків інтегрування. Крім того, не слід забувати, що для апроксимації, як правило, використовують $L_n(x)$ для n , не більших 4 або 5 тому застосовують апроксимацію на відразу не на всьому відрізку, а кусково-поліноміальну апроксимацію поліномами невисокого степеня, що призводить до побудови складених квадратур. При цьому можливі два способи:

– або беруть досить густу рівномірну сітку й на ній будують

складену формулу;

– або розбивають відрізок на підвідрізки і потім на кожному з них застосовують елементарну квадратуру з одночасним підсумовуванням отриманих наближень інтеграла на цих підвідрізках.

Крок сітки й довжини підвідрізків слід підбирати з тієї вимоги, щоб значення інтеграла обчислювалося з деякою заздалегідь вказаною точністю. Для оцінки досягнутої при обчисленні інтеграла точності ми маємо поки тільки асимптотичні або мажорантні оцінки залишкових членів квадратурних формул, які або важко використовувати на практиці, або вони є такими, що дають надто малі значення для кроку інтегрування й довжини підвідрізків.

Тому застосовують інший практично ефективний і легко реалізований спосіб контролю точності інтегрування, заснований на оцінці головного члена похибки квадратури за допомогою правила Рунге. Цей метод називають ще методом подвійного перерахунку або екстраполяцією за Річардсоном.

Нехай на $[a; b]$ використано рівномірну сітку x_i із кроком h . Обчислимо на цій сітці наближене значення I_h інтеграла I за якоюсь складеною квадратурною формулою, що має алгебраїчний порядок точності $p - 1$. Це означає, що має місце рівність

$$I - I_h = ch^p + O(h^{p+1}),$$

де у правій частині стоїть розклад залишкового члена за степенями h .

Тепер побудуємо сітку із кроком $h/2$ і обчислимо $I_{h/2}$ за тією ж квадратурною формулою. Тоді маємо

$$I - I_{h/2} = \tilde{c} \left(\frac{h}{2}\right)^p + O\left(\left(\frac{h}{2}\right)^{p+1}\right).$$

Будемо вважати, що $c \approx \tilde{c}$ через достатню малість h . Із цих двох рівностей ми можемо виразити головний член похибки ch^p через I_h і $I_{h/2}$ з точністю до $O(h^{p+1})$:

$$ch^p = \frac{I_{h/2} - I_h}{1 - 2^{-p}} + O(h^{p+1}). \quad (1.39)$$

Рівність (1.39) називають *першою формулою Рунге*.

Таким чином, можна сформулювати найпростіший алгоритм обчислення інтеграла із заданою точністю ε за обраною квадратурною формулою: якщо $\delta = |ch^p| \leq \varepsilon$, то інтеграл обчислений із заданою точністю; якщо $\delta > \varepsilon$, то крок h ще раз ділиться навпіл і процедура повторюється.

Підставимо тепер (1.23) до (1.21). У результаті одержимо нову квадратурну формулу $I_{h/2}$ з головним членом похибки порядку h^{p+1} , а не h^p , тобто знову отримана формула буде мати порядок точності на одиницю більше, ніж початкова формула I_h :

$$I = \underbrace{I_h + \frac{I_{h/2} - I_h}{1 - 2^{-p}}}_{\tilde{c} \left(\frac{h}{2}\right)^p} + c_1(h^{p+1}). \quad (1.40)$$

Виписане представлення інтеграла називають *другою формулою Рунге*. Таким чином, ми описали ще один спосіб побудови квадратурних формул, який може бути використаний поряд з методом невизначених коефіцієнтів і апаратом інтерполяції.

Оскільки можна очікувати, що наближення $I_{h/2}$ є точнішим за I_h , варто як нове наближення брати оцінку

$$\tilde{c} \left(\frac{h}{2}\right)^p \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{2^p - 1}.$$

Повторивши процес із удвічі меншим кроком, одержимо формулу з головним членом похибки порядку h^{p+2} тощо. Таким чином, ми одержали

не тільки спосіб контролю точності при обчисленні інтеграла, що дає можливість вибору належної величини кроку h , але й простий метод побудови точніших квадратурних формул (без явного виписування їх у вигляді квадратурної суми з коефіцієнтами Котеса). Як початкову формулу можна взяти просту формулу невисокої точності (наприклад, трапецій або середніх прямокутників).

Покажемо, що операція побудови формули $I_{h,h/2}$ (що носить ім'я Річардсона) є операцією екстраполявання. Для цього треба показати, що, якщо $I = I_{h/2}$, то $I_{h,h/2}$ завжди лежить поза відрізком із межами I_h і $I_{h/2}$.

Справді, якщо $I_{h/2} > I_h$, то

$$I_{h,h/2} = I_{h/2} + \frac{I_{h/2} - I_h}{2^p - 1} > I_{h/2},$$

оскільки $p \geq 1$. Якщо $I_{h/2} < I_h$, то

$$I_{h,h/2} = I_{h/2} - \frac{I_h - I_{h/2}}{2^p - 1} < I_{h/2}.$$

Якщо ж $I_{h/2} = I_h$, то $I_{h,h/2} = I_{h/2} = I_h$ збільшення точності не буде.

Найбільш ефективна екстраполяція за Річардсоном (або, іншими словами, застосування другого правила Рунге), якщо як початкову формулу I_h взяти симетричну формулу, у якій залишковий член розкладається за парними степенями h . Тоді кожне застосування другого правила Рунге дозволяє одержувати формулу, порядок точності якої збільшується на два, а не на одиницю, як це має місце у випадку несиметричних формул.

Цей варіант алгоритму забезпечує механізм одержання усе більш точних результатів без втрати раніше обчислених значень підінтегральних функцій. Якщо заданої точності так і не вдалося досягти, початковий відрізок $[a; b]$ можна розбити на два відрізки і на кожному з них застосувати описаний алгоритм.

2 ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛЬНИХ СХЕМ ДО ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ КВАДРАТУРНО- ІТЕРАЦІЙНИМ МЕТОДОМ

2.1 Приклад застосування квадратурно-ітераційного методу для розв'язання інтегральних рівнянь

Приклад 1

Припустимо, що нам необхідно розв'язати наступне інтегральне рівняння, за допомогою резольвенти

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^1 ts\varphi(s)ds + f(s).$$

У цьому випадку $K(t, s) = ts$, $a = 0$; $b = 1$; $M = \max_{0 \leq t, s \leq 1} |K(t, s)| = 1$.

Послідовно знайдемо

$$\begin{aligned} K_1(t, s) &\equiv K(t, s) = ts, \\ K_2(t, s) &\equiv \int_0^1 t\tau tsd\tau = \frac{ts}{3}, \\ K_3(t, s) &\equiv \int_0^1 t\tau \frac{1}{3} \tau sd\tau = \frac{ts}{3^2}. \end{aligned}$$

Для розв'язку цього рівняння позначимо наступний вираз, використовуючи резольвенту інтегрального рівняння (1.21)

$$R(t, s, \lambda) = ts + \frac{\lambda}{3} ts + \dots + \frac{\lambda^n}{3^n} ts = \frac{3t}{3-\lambda}, |\lambda| < 3.$$

З формули (1.21)

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^1 \frac{3ts}{3-\lambda} ds + f(t).$$

З останньої формули видно, що розв'язок початкового рівняння існує й є єдиним за усіх значень $\lambda \neq 3$. Умова $|\lambda| < 3$ забезпечує збіжність ряду (1.21) для резольвенти і гарантує існування розв'язку початкового рівняння $\forall \lambda, |\lambda| < 3$. Але розв'язок, як помітно, існує й у набагато більшій області зміни λ .

Приклад 2

Нехай необхідно розв'язати інтегральне рівняння квадратурним методом

$$\varphi(t) = \int_0^1 ts^2 \varphi(s) ds + t^2.$$

Виберемо три вузли $t_0 = 0, t_1 = 0,5, t_2 = 1$, та обчислимо значення функції $f(t) = t^2$ та ядра $K(t, s) = ts^2$ у них:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0, & f(0,5) &= 0,25, & f(1) &= 1; \\ K(0,0) &= 0, & K(0,0,5) &= 0, & K(0,1) &= 0, \\ K(0,5,0) &= 0, & K(0,5,0,5) &= 0,125, & K(1,1) &= 1. \end{aligned}$$

Для заміни інтеграла скінченою сумою використаємо формулу трапецій

$$\int_0^1 F(s) ds \approx \frac{1}{6} \left(F(0) + 4F\left(\frac{1}{2}\right) + F(1) \right).$$

У результаті отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \bar{y}_0 - \frac{0 * \bar{y}_0 + 4 * 0 * \bar{y}_1 + 0 * \bar{y}_2}{6} = 0. \\ \bar{y}_1 - \frac{0 * \bar{y}_0 + 4 * 0.125 * \bar{y}_1 + 0.5 * \bar{y}_2}{6} = 0.25. \\ \bar{y}_2 - \frac{0 * \bar{y}_0 + 4 * 0.25 * \bar{y}_1 + 1 * \bar{y}_2}{6} = 1 \end{cases}$$

Її розв'язком є $\bar{y}_0 = 0, \bar{y}_1 = 0,389, \bar{y}_2 = 1,278$. Отже $\bar{y} = t^2 + \frac{1*0*0+4*0,25t*0,389+1t*1,278}{6} = t^2 + 0,278 t$.

Відзначимо, що похибка такого наближення на відрізку $[0;1]$ дорівнює приблизно $0,01$. Для досягнення більшої точності можна вибрати більшу кількість вузлів або використати точніші квадратурні формули, наприклад, формулу кубічних парабол

$$\int_0^1 F(s) ds \approx \frac{1}{8} \left(F(0) + 3F\left(\frac{1}{3}\right) + 3F\left(\frac{2}{3}\right) + F(1) \right).$$

Для вузлів $t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = \frac{2}{3}, t_3 = 1$.

Наведемо загальну формулу Сімпсона для наближеного обчислення інтегралів при розбитті відрізка $[a, b]$ на $n = 2k$ рівних частин точками

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{2k} = b:$$

$$\begin{aligned} \int_a^b F(s) ds \approx \frac{b-a}{6k} & \left((F(t_0) + F(t_{2k})) + 2(F(t_2) + F(t_4) + \dots + F(t_{2k-2})) \right. \\ & \left. + 4(F(t_1) + F(t_3) + \dots + F(t_{2k-1})) \right). \end{aligned}$$

Похибка цієї формули

$$R(F) = \frac{(b-a)^5}{180n^4} F^4(\xi), a \leq \xi \leq b.$$

Як бачимо, похибка у вибраних вузлах не перевищує $0,002$.

2.2 Побудови наближення до каркасу резольвенти

Розглянемо поведінку описаного процесу побудови наближення до каркасу резольвенти, взявши ядро

$$Q(t, s) = t^2s - ts^2, 0 \leq t, s \leq 1 \quad (1.41)$$

та параметр $\lambda = 4$.

Скористаємося квадратурною формулою Гаусса з двома вузлами

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \approx 0.5\varphi(0.211325) + 0.5\varphi(0.788675)$$

при $a=0$, $b=1$, $n=2$, та відповідно до неї задамо на квадраті $[0,1] \times [0,1]$ 2×2 -сітку вузлів (t_i, s_j) шуканого каркасу так, як це показано на рис. 2.3, де для зручності співставлення сіткових значень та елементів матриць вісь $O t$ перевернена.

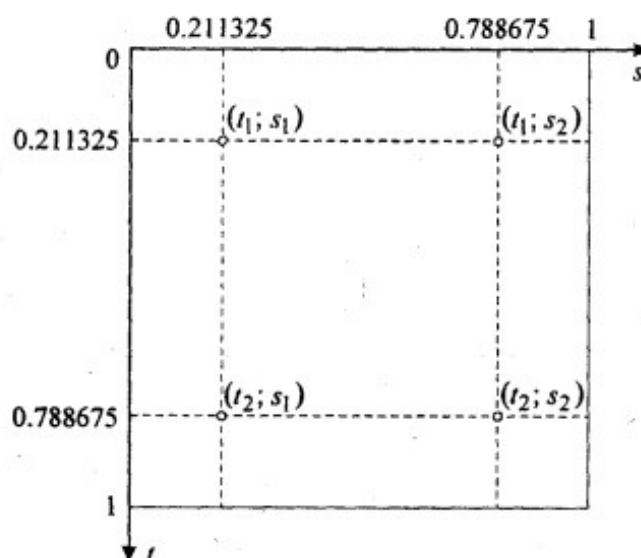


Рисунок 2.3 – Сітка для підрахунку каркасу резольвенти на основі квадратурної формули Гауса

В цьому випадку маємо

$$\hat{Q} \approx \begin{pmatrix} 0 & -0.0962 \\ 0.0962 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, U_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Та відповідно, при заданому $\lambda = 4$

$$\psi_0 = \lambda A \hat{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -0.1925 \\ 0.1925 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переконавшись в малості $\|\psi_0\|$, що означає виконання вимог (1.31) та (1.28), далі продовжимо підрахунок за формулами (1.30):

$$\begin{aligned} U_1 \begin{pmatrix} 0 & -0.1925 \\ 0.1925 & 0 \end{pmatrix}, \psi_1 \begin{pmatrix} -0.0370 & 0 \\ 0 & -0.0370 \end{pmatrix} \\ U_2 \begin{pmatrix} 0.9630 & -0.1853 \\ 0.1853 & 0.9630 \end{pmatrix}, \psi_2 \begin{pmatrix} 0.0014 & 0 \\ 0 & 0.0014 \end{pmatrix} \\ U_3 \begin{pmatrix} 0.9643 & -0.1856 \\ 0.1856 & 0.9643 \end{pmatrix}, \psi_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що використовуючи таку кількість десяткових знаків, подальшого уточнення значень елементів матриці U_k , наближаючих матрицю $(E - \lambda A \hat{Q})^{-1}$, виконуватись не буде. Це означає, що шуканий каркас резольвенти ядра (1.35) з $\lambda = 4$ на заданій сітці може бути наближено показаний матрицею

$$\begin{aligned} R_3 = \hat{Q} U_3 = \begin{pmatrix} 0 & -0.0962 \\ 0.0962 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9643 & -0.1856 \\ 0.1856 & 0.9643 \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} -0.0179 & -0.0928 \\ 0.0928 & -0.0179 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отримані значення матриці R_3 подставимо до рівняння (1.27), отримаємо

$$x_1 = 0, \quad x_2 \approx 0.010017, \quad x_3 \approx 0.040068, \quad x_4 = 0.090155.$$

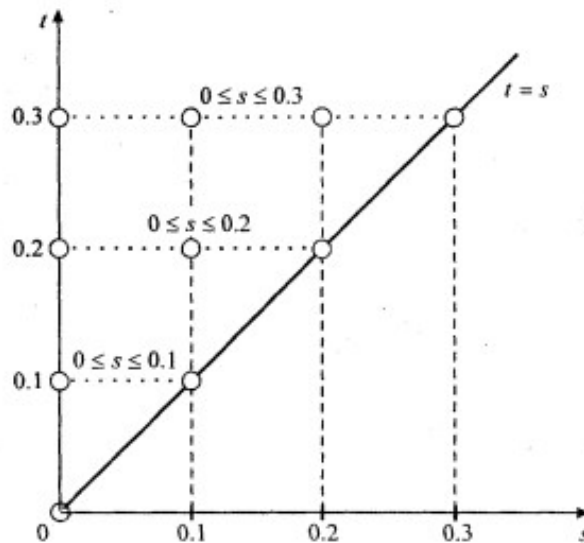


Рисунок 2.4 – Вузли та проміжки послідовного інтегрування при чисельному розв'язанні рівняння методом Гауса

Отримані значення x_i , добре согласуються з відповідними значеннями $x(t)=t^2$. При цьому, точність зменшується.

Взявши за основу перші вузли отримаємо

$$x(t_1) \approx R_3(t) = x_i + \frac{\Delta x_1}{h}(t - t_1) + \frac{\Delta^2 x_1}{2h^2}(t - t_1)(t - t_2) = 1.0017t^2.$$

Аналогічно знайдемо $x(t_2)$.

Наскільки отримана матриця R_3 була близькою до істинного каркасу резольвенти на даній сітці, можна з'ясувати для цього ядра точну резольвенту, підставивши отримані значення до формули (1.28):

$$R(t, s, 4) = \frac{1}{8}ts(15t - 10ts - 6).$$

Підрухувавши її каркас (з чотирма знаками після коми)

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} -0.0183 & -0.0937 \\ 0.0867 & -0.0303 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо похибку наближення R_3 :

$$\bar{R} - R_3 = \begin{pmatrix} -0.0004 & -0.0009 \\ -0.0059 & -0.0124 \end{pmatrix}.$$

Остання матриця каже нам про те, що каркас резольвенти знайдений з точністю до сотих, та ця точність практично досягається вже на першій ітерації, тобто можна застосувати

$$\bar{R} \approx R_3 = \hat{Q}U_1 = \begin{pmatrix} -0.0185 & 0.0962 \\ 0.0962 & -0.0118 \end{pmatrix}.$$

З матрицею похибок

$$\bar{R} - R_3 = \begin{pmatrix} 0.0002 & 0.0025 \\ -0.0095 & -0.0118 \end{pmatrix}.$$

Підставимо значення ядер матриці R_3 в формулу (1.27)

$$\tilde{R}(t, s, \lambda) = Q(t_i, s_j) + \lambda \sum_{k=1}^n A_k \tilde{R}(t_i, \tau_k, \lambda) Q(\tau_k, s_j),$$

отримаємо:

$$\tilde{R}(t, s, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -0.1925 \\ 0.1925 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянутий приклад з відомою резольвентою показує, що при побудові каркасу резольвенти квадратурно-ітераційним методом точність ітераційного обернення матриці $E - \lambda \hat{A} \hat{Q}$ визначається точність зведення

інтегральної задачі до матричної та легко регулюється вказанням малості величини $\|\psi_k\|$ або $\|U_k - U_{k-1}\|$. Через проблеми з реальним отриманням гарантованих оцінок похибки дискретизації, тут видається раціональним для контролю цих похибок квадратур використовувати механізм збігаючихся рівномарних сіток, спільними вузлами яких повинні слугувати вузли заданої сітки шуканого каркасу.

ВИСНОВКИ

У даній роботі було розглянуто схеми чисельного інтегрування для розв'язання інтегральних рівнянь квадратурно-ітераційним методом. Були наведені формули Гауса, трапецій та парабол (Сімпсона) та описана процедура побудови резольвент для рівнянь Вольтера та Фредгольма. Застосування цих формул показано на прикладах.

Зважаючи на те, що при знаходженні інтегралів за допомогою формул чисельного інтегрування, отримуємо наближені значення інтегралів, розглянуто питання вибору методу та параметрів обраних співвідношень для розв'язання інтегрального рівняння. Розглянуто процедуру квадратурно-ітераційного методу та особливостей його застосування для розв'язання інтегральних рівнянь.

Наведені приклади розв'язання наочно показують, процедуру побудови каркасу резольвенти інтегрального рівняння, з заданим ядром, використовуючи квадратурні формули для обчислення інтегралів. Наведено приклад побудови резольвенти у ітераційному процесі та обчислення дискретних значень розв'язку. Проведено оцінку абсолютних похибок методу у наведених прикладах порівнянням із відомими аналітичними розв'язками інтегральних рівнянь.

Таким чином, у роботі показана важливість та ефективність чисельних методів при розв'язанні інтегральних рівнянь.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Бойко Л. Т. Основи чисельних методів: навчальний посібник. Москва : ДНУ, 2011. 244 с.
2. Вержбицкий В. М. Чисельні методи: навчальний посібник. Москва : Высш. шк., 2002. 840 с.
3. Давидов Н. А. Курс математичного аналізу: конспект лекцій. Київ : Вид-во "Вища школа", 1976. 378 с.
4. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. Москва : Изд-во „Наука”, Физматлит". 1979. 664 с.
5. Канторович А. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Москва : Изд. Физико-математической литературы, 1962. 708 с.
6. Конет І. М. Теорія ймовірностей та математична статистика. Москва–Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський державний педагогічний університет, інформаційно- видавничий відділ, 2009. 214 с.
7. Крылов В. И. Вычислительные методы : учебное пособие. Москва : «Наука», 1977. Т. 2. 399 с.
8. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. Схемы, таблицы. Москва : "Наука". 1977. 456 с.
9. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Москва : «Наука». 1970. Т. 2. 800 с.
10. Шнейдер В. Е. Краткий курс высшей математики. Москва : «Наука». 1972. 386 с.