**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**Кафедра загальної математики**

**Кваліфікаційна робота магістра**

на тему: **«Геометрія поверхонь з плоскою нормальною зв’язністю евклідова та псевдоевклідова просторів»**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Виконала: студентка | 2 | курсу, групи | 8.1110-з |
|  |  |
| спеціальності | 111 математика |
|  | (шифр і назва спеціальності) |
| освітньої програми | математика |
|  | (назва освітньої програми) |
| А.В. Шокотько |
| (ініціали та прізвище) |
| Керівник | доцент кафедри загальної математики,к.ф.-м.н., Гречнєва М.О. |
| (посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) |
|  |
| Рецензент | доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, к.ф.-м.н. Ткаченко І.Г. |
| (посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) |

 Запоріжжя – 2021

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Факультетматематичний

Кафедра загальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

Освітня програма математика

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач кафедри загальної

математики, к.ф.-м.н., доцент

 Зіновєєв І.В.

 (підпис)

 «\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2021р

# **З А В Д А Н Н Я**

# **НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ**

Шокотько Анастасії Віталіївни

(прізвище, ім’я та по-батькові)

1.Тема роботи Геометрія поверхонь з плоскою нормальною зв’язністю евклідова та псевдоевклідова просторів

керівник роботи Гречнєва Марина Олександрівна, к.ф.-м.н.

(прізвище, ім’я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від «09» \_\_06\_\_ 2021 р. № 850-с

2.Строк подання студентом роботи 02.12.2021 р

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі

 2. Перелік літератури

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

1. Постановка задачі.
2. Основні теоретичні відомості.

3. Дослідження поверхонь з плоскою нормальною зв’язністю

5. Перелік графічного матеріалу ( з точним зазначенням обов’язкових креслень)

 презентація

6.Консультанти розділів роботи

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Розділ**  | **Прізвище, ініціали та посада консультанта**  | **Підпис, дата**  |
| **Завдання видав**  | **Завдання прийняв**  |
| 1 | Стеганцева П.Г. |  |  |
| 2 | Стеганцева П.Г. |  |  |
|  |  |  |  |

7. Дата видачі завдання: \_\_\_\_03.09.2021 р\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№**  | **Назва етапів кваліфікаційної роботи**  | **Строк виконання етапів роботи** | **Примітка**  |
| 1.  | Розробка плану роботи.  | 03.09.21-06.09.21 |  |
|  |  |  |  |
| 2.  | Збір вихідних даних.  | 06.09.21-17.09.21 |  |
|  |  |  |  |
| 3.  | Обробка методичних та теоретичних  | 19.09.21-25.09.21 |  |
|  | джерел.  |  |  |
|  |  |  |  |
| 4.  | Розробка першого і другого розділу.  | 01.10.21-20.10.21 |  |
|  |  |  |  |
| 6.  | Оформлення і нормоконтроль  | 25.10.21-17.11.21 |  |
|  | кваліфікаційної роботи.  |  |  |
|  |  |  |  |
| 7.  | Захист кваліфікаційної роботи.  | 09.12.21 |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Студент А.В. Шокотько

 (підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи М.О. Гречнєва

 (підпис) (ініціали та прізвище)

**Нормоконтроль пройдено**

Нормоконтролер О.Г. Спиця

(підпис) (ініціали та прізвище)

# **РЕФЕРАТ**

Кваліфікаційна робота магістра « Геометрія поверхонь з плоскою нормальною зв’язністю евклідова та псевдоевклідова просторів»: 39с., 1 рис., 18 джерел.

ДВОВИМІРНА ПОВЕХНЯ, ЕВКЛІДІВ ПРОСТІР, НОРМАЛЬНА ЗВ’ЯЗНІСТЬ, ПРОСТІР МІНКОВСЬКОГО, ПРОСТОРОВОРПОДІБНА ПОВЕРХНЯ, ЧАСОПОДІБНА ПОВЕРХНЯ

Об’єкт дослідження - поверхні з плоскою нормальною зв’язністю

Мета роботи : дослідити властивості поверхонь з плоскою нормальною зв’язністю в просторі Мінковського

Метод дослідження – аналітичний

В кваліфікаційній роботі розглядаються:

* двовимірні поверхні чотиривимірного евклідового простору та простору Мінковського;
* отримані розклади Гаусса й Вейнгартена та рівняння Гаусса-Кодацці-Річчі для двовимірних просторовоподібних і часоподібних поверхонь простору Мінковського;
* виділено клас поверхонь з плоскою нормальною зв’язністю;
* досліджені властивості класу поверхонь;
* отримані формули для обчислення кривин поверхонь;
* наведені приклади.

# **SUMMARY**

Master’s Qualifying Thesis "Geometry of the Surfaces with Flat Normal Connection of Euclidean and Pseudo-Euclidean Spaces": 39 pp., 1 pictures, 18 references.

TWO-DIMENSIONAL SURFACE, EUCLIDIAN SPACE, 3NORMAL CONNECTION, MINSKOWSKY SPACE, SPACE-LIKE SURFACE, TIME-LIKE-SURFACE

The object of the study - surfaces with flat normal connection.

The aim of the study: to investigate the properties of surfaces with flat normal connection in the Minskowsky space

The methods of research - analytical.

The following tasks are solved in the qualification work:

- two-dimensional surfaces of the four-dimensional Euclidean space and the Minkowski space;

- obtained Gauss and Weingarten rankings and the Gauss-Kodatzi-Ricci equation for the two-variant surfaces of the Minkowski space;

- A class of surfaces with flat normal connectivity has been identified;

- investigated the properties of the class of surfaces;

- obtained formulas for calculating surface curves;

- the examples are given.

**ЗМІСТ**

[Завдання на кваліфікаційну роботу 2](#_Toc89412646)

[Реферат 4](#_Toc89412647)

[Summary 5](#_Toc89412648)

[Вступ 7](#_Toc89412649)

[1 Простір Мінковського 9](#_Toc89412650)

[1.1 Псевдоевклідовий тривимірний простір 9](#_Toc89412651)

[1.2 Простір Мінковського 13](#_Toc89412652)

[2 Поверхні з плоскою нормальною зв’язністю евклідова простору і простору мінковського 17](#_Toc89412653)

[2.1 Другі квадратичні форми підмноговида в евклідовому просторі 17](#_Toc89412654)

[2.2 РозкладГауса для підмноговидів 17](#_Toc89412655)

[2.3 Розклад Вейнгартена 19](#_Toc89412656)

[2.4 Рівняння Гаусса-Кодаці-Річчі для підмноговидів в евклідовому просторі 22](#_Toc89412657)

[2.5 Паралельне перенесення у нормальному розшаруванні 24](#_Toc89412658)

[2.6 Про існуванні головних направлень 27](#_Toc89412659)

[2.7 Диференціальна геометрія двовимірної поверхні простору Мінковського 29](#_Toc89412660)

[2.8 Поверхні за плоскою нормальною зв’язністю в просторі Мінковського 33](#_Toc89412661)

[2.9 Приклад поверхні з плоскою нормальною зв’язністю в просторі Мінковського 34](#_Toc89412662)

[Висновки 37](#_Toc89412663)

[Перелік посилань 38](#_Toc89412664)

# **ВСТУП**

У матеріалістичній картині світу поняття простору виникло на основі спостереження та практичного використання об’єктів, їх обсягу та протяжності. Поняття часу виникло на основі сприйняття людиною зміни події, послідовної зміни станів предметів та кругообігу різних процесів.

Природне уявлення про простір і часу пройшли довгий шлях становлення та розвитку. Найперші з них виникли з очевидного існування в природі і насамперед у макросвіті твердих фізичних тіл, які займають певний обсяг. Тут основними були звичайні уявлення про простір і час як про якісь зовнішні умови буття, в які вміщена матерія і які збереглися б, якби навіть матерія зникла. Такий погляд дозволив сформулювати концепцію абсолютного простору і часу, що отримала своє найвиразніше формулювання в роботі І. Ньютона «Математичні засади натуральної філософії». Ця праця більш ніж на два століття визначила розвиток всієї природної картини світу. У ньому були сформульовані основні закони руху та дано визначення простору, часу, місця та руху.

Сучасне розуміння простору і часу було сформульовано в теорії відносності А. Ейнштейна, що по-новому інтерпретувала реляційну концепцію простору і часу і дала їй природниче обґрунтування. Вихідним пунктом цієї теорії став принцип відносності, класичний принцип відносності сформульовано ще Г. Галілеєм.

80 років тому Герман Мінковський запропонував геометричну інтерпретацію спеціальної теорії відносності. У наші дні знайомство з теорією відносності стало необхідним елементом загальної освіти, проте викладання та розуміння цієї теорії досі утруднене тим, що її математичний опис перебуває у суперечності з тими уявленнями про простір та час, які базуються безпосередньо на чуттєвих сприйняттях та закріплюються у процесі вивчення класичної фізики Геометрія світу Мінковського залишається для нефахівців важкодоступною абстракцією. Тим часом до математичних знань, які тепер дають середня школа і перший курс вузу, треба додати небагато, щоб розвинути уявлення про псевдоевклідовий простір.

Насамперед, потрібно поняття абстрактного лінійного простору та його різновиду – евклідова простору, вміння розрізняти лінійні та метричні властивості простору. Ці поняття є вихідними для побудови геометричної теорії. Без достатньо вільного володіння ними і пов’язаним з ними апаратом алгебри не можна подолати прихильність до звичної наочності образів і проникнути у світ форм, прихованих від безпосереднього зорового сприйняття.

Оскільки математичною моделлю простору-часу в спеціальній теорії відносності служить точковий псевдоевклідів простір індексу 1 (простір Мінковського), то інтерес до вивчення об’єктів цього простору не слабшає вже протягом довгого часу. Питання, пов’язані з вивченням підмноговидів евклідова простору, давно викликають інтерес у геометрів. Геометрія підмноговидів є частиною сучасної геометрії. Вона вивчає факти, які не мають аналогів у класичній теорії поверхонь. Ряд результатів досліджень у геометрії підмноговидів тісно пов’язані з механікою й фізикою.

Метою роботи є дослідження властивостей неізотропних двовимірних поверхонь простору Мінковського, а саме поверхонь з плоскою нормальною зв’язністю. В рамках сучасної диференціальної геометрії поверхнями з плоскою нормальною зв’язністю евклідова простору займались, в тому числі, і відомі вітчизняні математики О.А. Борисенко і Ю.А. Амінов та їх учні Ю.А. Ніколаєвський, В.Т. Лисиця, В.М. Савельєв, В.О. Горькавий, О.В. Ликова та інші.

# **1 ПРОСТІР МІНКОВСЬКОГО**

# **1.1 Псевдоевклідовий тривимірний простір**

Тривимірний псевдоевклідовий простір є різновидом тривимірного лінійного простору. Згадаймо, що лінійний простір має метричні властивості, якщо в ньому визначено операцію скалярного множення його елементів. Метричні властивості простору можуть вичерпно характеризуватись метричними відносинами між векторами базису. Для того щоб метричні властивості лінійного простору були псевдоевклідовими, у базисі простору повинні бути як вектори дійсної довжини, так і вектори уявної довжини. Для тривимірного простору ця умова може бути виконана двома способами:

а) два базисні вектори мають дійсну довжину, а третій – уявну;

б) одні базисний вектор має дійсну довжину, а два – уявну.

Фактично обидва варіанти дають однаковий тип метричних відносин. Достатньо у другому варіанті помножити довжини всіх базисних векторів на уявну одиницю, щоб звести його до першого варіанту. З тієї ж причини простір, в якому всі три базисних вектори мають уявну довжину, має метричні властивості власне евклідового простору.

Отже, на основі тривимірного лінійного простору може бути побудований по суті лише один тип псевдоевклідового простору. Ми описуватимемо його за допомогою ортонормованого базису, що характеризується наступною таблицею скалярних добутків:

 . (1.1)

Формула (1.1) означає, що векториіє одиничними:

 

а вектор –уявний:

 

і будь-які два вектори базису, , , взаємно перпендикулярні.

Ортонормований базис у поєднанні з фіксованою точкою О (полюсом) утворює тривимірну ортонормовану систему координат $OXYZ$ (рис. 1). Координатна площина $OYZ$ має базис, що складається тільки з векторів дійсної довжини і несе на собі власне евклідову метрику. У координатних площинах $OXY і OXZ$ один із базисних векторів () має довжину, що виражається уявним числом, і ці площини несуть на собі псевдоевклідову метрику.

Запишемо розклад довільних векторів $а і b$ тривимірного псевдоевклідового простору по ортонормованому базису:

 ,

  (1.2)

та обчислимо скалярний добуток 

 

 

 

 . (1.3)

Застосовуючи формулу (1.3) до скалярного твору вектора самого себе, знайдемо довжину (модуль) вектора :

 . (1.4)

Координати радіус-вектора в ортонормованій системі координат $OXYZ$ позначатимемо літерами $х, у, z$ і називатимемо їх координатами точки М, що вказується радіус-вектором:

 . (1.5)

Довжина радіус-вектора, згідно (1.5), дорівнює:

 . (1.6)

Вона звертається в нуль, якщо координати задовольняють умову:

 

чи

 . (1.7)

Співвідношення (1.7) визначає тривимірному псевдоевклідовому просторі геометричне місце точок, радіус-вектори яких є ізотропними. Це геометричне місце точок є вже не дві прямі, як у евклідовій площині, а поверхня. Такої поверхні немає у власне евклідовому тривимірному просторі. Для того щоб надати хоча б умовну наочність опису метричних властивостей тривимірного псевдоевклідового простору, ми будемо відображати його на тривимірний власне евклідовий простір, користуючись збігом лінійних властивостей цих просторів. Якщо кожній точці з координатами $х, у, z$ у псевдоевклідовом просторі ми поставимо у відповідність точку з такими ж координатами у просторі власне евклідовому, то отримаємо взаємно однозначне відображення одного простору на інший із збереженням лінійних властивостей. Саме таке відображення подано на рисунку 1. Метричні властивості псевдоевклідового простору можуть бути передані в цьому відображенні лише умовно. Рівняння (1.7), що визначає множину ізотропних радіус-векторів у псевдоевклідовому просторі, відповідає у власне евклідовому просторі, віднесеному до ортонормованої системи координат, поверхню прямого кругового конуса з віссю $OX.$Тому і саму поверхню, що відображається (1.7) в псевдоевклідовому просторі називають конусом, а саме ізотропним конусом.



Рисунок 1 – Ізотропний конус

Внутрішня сфера ізотропного конуса (1.7), тобто область, що містить вісь $OX$, описується нерівністю:

 

чи

 . (1.8)

Довжина будь-якого радіус-вектора, що належить внутрішній ділянці ізотропного конуса, виражається уявним числом. Внутрішня область складається із двох порожнин.

Довжина будь-якого радіус-вектора, що належить до зовнішньої області ізотропного конуса, виражається дійсним числом.

 Якщо векторколінеарений деякому ізотропному радіус-вектору, то він є ізотропним.

# **1.2 Простір Мінковського**

Розглянемо множину елементів двох типів – точок й векторів. Під вектором будемо розуміти впорядкований набір  дійсних чисел, під точкою також упорядкований набір  дійсних чисел. Додавання векторів, множення вектора на дійсне число  й скалярний добуток векторів визначаються відповідними формулами:

а) 

б) 

в) 

Крім того кожній парі точок  і  відповідає вектор .Введені операції задовольняють аксіомам груп  і аксіомам  аксіоматики Вейля, а також аксіомі : існує *n* лінійно незалежних вектора, скалярний квадрат одного з яких від’ємний, а кожного іншого – додатний. Ця аксіома є запереченням аксіоми  системи аксіом Вейля евклідова простору. Тим самим побудована найбільш поширена модель псевдоевклідова простору індексу 1. Будемо позначати цей простір символом . Він є математичною інтерпретацією простору-часу спеціальної теорії відносності. Його також називають *простором Мінковського.* Можна показати, що всі псевдоевклідові простори індексу 1 однакової розмірності *n* ізоморфні простору .

Як і в евклідовому просторі, два вектори називаємо ортогональними, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю, а довжину вектора визначаємо формулою .

**Визначення** *Вектори* простору , скалярні квадрати яких додатні (від’ємні), називаються *просторовоподібними* (*часоподібними)*. Ненульові вектори, скалярні квадрати яких рівні нулю, називаються *ізотропними*.

**Зауважимо**, що в просторі  два колінеарних ізотропних вектора ортогональні. У ньому існують вектори з дійсною, уявною та нульовою довжиною. Тому при нормуванні просторовоподібного вектора  будемо використовувати формулу , а при нормуванні часоподібного вектора  – формулу .Нормовані просторовоподібні вектори прийнято називати одиничними, а нормовані часоподібні вектори – уявноодиничними. Усі ізотропні вектори будемо вважати нормованими.

Очевидно, що в просторі  завжди існує ортонормований базис, який складається з одного уявноодиничного й  одиничних векторів. У якості такого базису можна вибрати вектори , де одиниця стоїть на *i*-тому місці. Домовимося уявноодиничний вектор вибирати першим вектором базису. Неважко показати, що всі ортогональні базиси простору  складаються з одного часоподібного й  просторовоподібних векторів, тобто має місце закон інерції ортогональних базисів.

Координати векторів в ортонормованому базисі будемо так само, як і в евклідовому просторі, називати *декартовими*. Формулу із означення скалярного добутку можна записати в матричному вигляді наступним чином

 ,

де – матриця Грамма ортонормованого базису простору , а *t* – символ транспонування матриці.

Будемо відкладати всі вектори простору  від початку координат. Тоді кінці ізотропних векторів будуть лежати на поверхні , яку називають *ізотропним гіперконусом*. Кінці просторовоподібних радіус-векторів лежать у зовнішній області ізотропного гіперконуса, а кінці часоподібних радіус-векторів – у його внутрішній області.

Прямі псевдоевклідова простору  діляться на три типи: *просторовоподібні*, *часоподібні та ізотропні*, якщо довжина напрямного вектора дійсна, уявна та дорівнює нулю відповідно.

Для класифікації двовимірних площин дослідимо властивості ортогональних векторів. У просторі  ортогональними можуть бути пари просторовоподібних векторів, просторовоподібний і часоподібний вектори, просторовоподібний і ізотропний вектори.

**Зауважимо,** що у просторі  не існує пари ортогональних неколінеарних ізотропних векторів, пари ортогональних часоподібного й ізотропного векторів і пари ортогональних часоподібних векторів. Доведення цих фактів методом від супротивного є простою задачею. Неважко також довести, що для будь-яких двох неколінеарних векторів простору  існує така їх лінійна комбінація, яка є просторовоподібним вектором, звідки випливає, що у будь-якій двовимірній площині простору  існує просторовоподібний вектор.

Розглянемо в просторі  двовимірні площини (далі площини), у яких усі вектори просторовоподібні, й площини, у яких є вектори всіх трьох типів. Будемо називати їх відповідно *просторовоподібними* й *часоподібними* площинами. Просторовоподібні й часоподібні площини ще називають *неізотропними*. У просторі  можливі також площини, у яких є тільки просторовоподібні й ізотропні вектори. Вони називаються *ізотропними* площинами. Розглянемо два неколінеарні вектори  в просторі. Вони утворюють напрямний підпростір деякої двовимірної площини. Щоб визначити тип цієї площини, потрібно розглядати всілякі лінійні комбінації векторів . Але якщо на базі цих векторів побудувати ортогональну систему векторів, то у випадку просторовоподібної площини ця система обов’язково складається із просторовоподібних векторів, у випадку часоподібної площини – із часоподібного й просторовоподібного векторів, у випадку ізотропної площини – з ізотропного й просторовоподібного векторів. Тобто тип площини легко розпізнавати по набору із двох ортогональних напрямних векторів.

Зауважимо, що площина, яка містить вершину ізотропного гіперконуса та не має з ізотропним гіперконусом інших спільних точок, є просторовоподібною. Якщо ж вона перетинає ізотропний гіперконус по двом твірним, то така площина часоподібна. Площина, яка дотикається ізотропного гіперконуса по твірній, є ізотропною.

# **2 Поверхні з плоскою нормальною зв’язністю евклідова простору і простору Мінковського**

#

# **2.1 Другі квадратичні форми підмноговида в евклідовому просторі**

Нехай $F^{n}$ **–** підмноговид розмірності *n* в $E^{m}$. *Корозмірністю* називається число $p=m-n$. Розглянемо в кожній точці *х* деякого околу точки $x\_{0}$ нормальний простір $N\_{x}$. Виберемо в кожному нормальному просторі $N\_{x}$ базис з одиничних взаємно ортогональних векторів $n\_{1},…, n\_{p}$, причому так, щоб ці вектор функції від *х* були регулярними функціями від координат *u1,*…,*un.* За допомогою кожного вектора нормалі визначимо другу квадратичну форму:

 $II^{σ}=\left(n\_{σ}r\_{u^{i\_{u^{j}}}}\right)du^{i}du^{j}, σ=1,…,p$

коефіцієнти якої позначимо *Lijσ=(*$n\_{σ}r\_{u^{i\_{u^{j}}}}$*)*

Через точку *х0 ϵ F n* у деякому дотичному напрямку τ проведемо криву γ, що лежить на *Fn.* Нехай *s*– довжина дуги на γ

Розглянемо вектор кривизни $k$кривої *γ:k=rss*

*Вектором нормальної кривизни kN* поверхні *Fn* в напрямку τ у точці *х0* називається проекція вектора кривизни *k* кривої γ на нормальний простір *Nx0*.

# **2.2 Розклад Гауса для підмноговидів**

У кожній регулярній точці $x\_{0}\in F^{n}$*n*дотичних векторів $r\_{u^{1}},…,r\_{u^{n}}$ і *p* нормальних *n1*,…,*np* разом утворюють базис об’ємлючого простору *En+p.* Запишемо розклад других похідних радіус-вектора за векторами цього базису:

 $r\_{u^{i}u^{j}}=Г\_{ij}^{k}r\_{u^{k}}+A\_{ij}^{σ}n\_{σ}$.

По *k* і σ у правій частині проводиться підсумовування. Коефіцієнти при $n\_{σ}$ є символами Крістоффеля другого роду. Коефіцієнти $A\_{ij}^{σ}$ знаходимо, помножуючи праву та ліву частину цього рівняння скалярно на *np*. Тоді отримаємо:

 $L\_{ij}^{ρ}=\left(r\_{u^{i}u^{j}}n\_{ρ}\right)=A\_{ij}^{ρ}$,

тобто $A\_{ij}^{ρ}$ є коефіцієнтами другої квадратичної форми по відношенню до нормалі. За допомогою коваріантних похідних, які будемо відзначати комою, розклад Гауса можна записати так:

 $r\_{ij}=L\_{ij}^{σ}n\_{σ}$. (2.1)

Використаємо розклад Гауса для знаходження вираження вектора геодезичної кривизни *kg* лінії γ на підмноговиді. Вектор кривизни *k* кривої γ має вигляд:

 $k=r\_{ss}=r\_{u^{i\_{u^{j}}}}\frac{du^{i}}{ds}\frac{du^{j}}{ds}+r\_{u^{i}}\frac{d^{2}u^{i}}{d^{2}s}$.

За допомогою розкладу Гауса можемо записати:

 $k=\left(Г\_{ij}^{k}r\_{u^{k}}+L\_{ij}^{σ}n\_{σ}\right)\frac{du^{i}}{ds}\frac{du^{j}}{ds}+r\_{u^{k}}\frac{d^{2}u^{k}}{d^{2}s}=$

 $=\left(Г\_{ij}^{k}\frac{du^{i}}{ds}\frac{du^{j}}{ds}+\frac{d^{2}u^{k}}{d^{2}s}\right)r\_{u^{k}}+L\_{ij}^{σ}\frac{du^{i}}{ds}\frac{du^{j}}{ds}n\_{σ}=k\_{g}+k\_{N}$,

де *kg* –вектор, до дотичної $E^{n}$; *kN* – нормальний вектор.

Тому вектор геодезичної кривизни кривої γ має вигляд:

 $k\_{g}=(Г\_{ij}^{k}\frac{du^{i}}{ds}\frac{du^{j}}{ds}+\frac{d^{2}u^{k}}{d^{2}s})r\_{u^{k}}$.

Якщо γ - геодезична крива підмноговида, то виконується система рівнянь:

 $\frac{d^{2}u^{k}}{d^{2}s}+Г\_{ij}^{k}\frac{du^{i}}{ds}\frac{du^{j}}{ds}=0, k=1,…,n$.

# **2.3 Розклад Вейнгартена**

Запишемо розклад похідних по *ui* нормальних векторів *nσ* за векторами базису $r\_{u^{1}},…,r\_{u^{n}}, n\_{1},…, n\_{p}$:

 $n\_{σu^{i}}=B\_{i}^{σk}r\_{u^{k}}+μ\_{ρσ/i}n\_{ρ}$, (2.2)

де $B\_{i}^{σk},μ\_{ρσ/i}$ – деякі коефіцієнти.

Помножуючи це рівняння скалярно на *nα*, отримуємо:

 $μ\_{σα/i}=(n\_{σu^{i}},n\_{α})$.

Коефіцієнти $μ\_{σα/i}$ називаються коефіцієнтами скруту. Так як вектори *n1,*…,*np* одиничні і взаємно ортогональні, то (*nα*,*nσ*)=*const*. Диференціюючи це співвідношення, отримуємо:

 $μ\_{σα/i}+μ\_{ασ/i}=0$,

тобто коефіцієнти скруту кососиметричні за першими двома індексами. Тому $μ\_{σσ/i}=0$ . Набір цих коефіцієнтів утворює тензор за індексом *i* на *Fn*. Справді, якщо є перетворення координат *ui* = *ui* (*uk`* ), то

 $μ\_{\frac{σα}{k}}^{'}=\left(n\_{σu^{'k}}n\_{α}\right)=\left(n\_{σu^{i}}n\_{α}\right)\frac{du^{i}}{du^{'k}}=μ\_{\frac{σα}{i}}\frac{du^{i}}{du^{'k}}$,

тобто ці величини перетворюються за тензорним законом. Називаються вони коефіцієнтами скруту за аналогіє зі скрутом κ кривої в *E3*. Розглянемо одну з формул Френе: вираз похідної від головної нормалі кривої ν по довжині дуги

 $v\_{s}=-kτ+kβ$, (2.3)

де *τ*– одиничний дотичний вектор, *β* - бінормаль.

Розклад (2.2) абсолютно аналогічний формулі (2.3). В обох формулах похідна від нормального вектора розбита на два доданки – на дотичний до підмноговида вектор і на нормальний вектор, причому у формулі (2.3) коефіцієнтом при одиничному нормальному векторі *β* стоїть скрут *κ*, а в (2.2) коефіцієнтом при одиничній нормалі *np* є $μ\_{ρσ/i}$. Лінійну формулу $μ\_{ρσ/i}du^{i}$ називатимемо *формою скруту.*

Знайдемо тепер величини $B\_{i}^{σk}$ . Помножимо (2.2) на $r\_{u^{j}}$ . Отримаємо у лівій частині:

 $\left(n\_{σu^{i}}r\_{u^{j}}\right)=\frac{d}{du^{i}}n\_{σ}r\_{u^{i}}-\left(n\_{σ}r\_{u^{i}u^{j}}\right)=-L\_{ij}^{σ}$.

У правій частині маємо:

 $B\_{i}^{σk}\left(r\_{u^{k }}r\_{u^{j}}\right)=B\_{i}^{σk}g\_{kj}$.

Маємо систему рівнянь для визначення $B\_{i}^{σk}$:

 $-L\_{ij}^{σ}=B\_{i}^{σk}g\_{kj}$. (2.4)

Використаємо коефіцієнти ($g^{ij}$) зворотньої матриці до матриці метричної тензора ($g^{ij}$).Так як виконуються рівняння $g\_{kj}g^{jl}=δ\_{k}^{l}$, то після згортання (2.4) з$ g^{jl}$отримаємо:

 $-\frac{∂u\_{\frac{στ}{k}}}{∂u^{i}}+\sum\_{ρ}^{}(μ\_{τρ/i}μ\_{ρσ/k}-μ\_{τρ/k}μ\_{ρσ/i})$.

Умова набуває вигляду:

 $a^{τ}T\_{στ/ki}=0-L\_{ij}^{σ} g^{jl}=B\_{i}^{σl}$.

Отже, можемо записати *розклад Вейнгартена:*

$n\_{σu^{i}}=-L\_{ij}^{σ} g^{jk}r\_{u^{k}}+μ\_{ρσ/i}n\_{ρ}$. (2.5)

Для гіперповерхні є одна нормаль *n* і одна друга квадратна форма. Рівняння (2.5) запишемо за допомогою коваріантних похідних на *Fn*. Оскільки в (2.5) кожен компонент векторів *r* і *nσ* розглядається як функція на *Fn*, то $n\_{σu^{i}}=n\_{σ^{i}}, r\_{u^{i}}=r\_{i}$ . Тому (2.5) можемо переписати у такому вигляді:

 $n\_{σ^{i}}=-L\_{ij}^{σ}g^{jk}r\_{k}+μ\_{ρσ/i}n\_{p}$.

Нехай *n(x)* – нормальне поле на *Fn*. Позначимо $\overbar{∇}n$ – похідну у $E^{n+p}$ цього поля у точці *x*, $∇n$ – її проекція на *Tx і* $∇^{˔}n$– її проекцію на *Nx*. Можемо записати

 $\overbar{∇}n=∇n+∇^{⊥}n$.

Якщо в дотичному просторі існує напрям $dr$, таке, що для будь-якого поля одиничних нормалей $∇\_{dr}n=λ\left(n\right)dr$, воно називається *головним*. Підмноговиди з корозмірністю *p >1*, що мають головні напрями, повинні задовольняти спеціальним умовам. Лінія на підмноговидах, що стосується кожної точки головного напрямку, називається *лінією кривини.*

#

# **2.4 Рівняння Гаусса-Кодаці-Річчі для підмноговидів в евклідовому просторі**

 У цьому розділі виведемо основні рівняння теорії підмноговидів. Вони узагальнюють добре відомі рівняння Гаусса-Кодацці для поверхонь в *Е3*.

 Запишемо розклад Гаусса:

 *r,ij = Lσijnσ*.

Коваріантно диференціюючи по *uk*, отримуємо:

 $r,\_{ijk} = L\_{ijk}^{σ},n\_{σ}+L\_{ij}^{σ}n\_{σk}$.

Замінимо *nơ,k*, використовуючи розклад Вейнгартена:

 $r\_{ijk}=L\_{ij,k}^{σ}n\_{σ}+L\_{ij}^{σ}\left(-L\_{kl}^{σ}g^{lα}r\_{α}-μ\_{σρ/k}n\_{σ}\right)=$

 $=-L\_{ij}^{σ}L\_{kl}^{σ}g^{lα}r\_{α}+(L\_{ij,k}^{ρ}-L\_{ij}^{σ}μ\_{σρ/k}) n\_{ρ}$.

В отриманому виразі для *r,ijk* змінимо місцями індекси *j* i *k*, і запишемо різницю:

 $r\_{,ijk}-r\_{,ikj}=\left(L\_{ik}^{σ}-L\_{jl}^{σ}-L\_{ij}^{σ}L\_{kl}^{σ}\right)g^{lα}r\_{α}+ $

 $+\left(L\_{ij,k}^{σ}-L\_{ik,j}^{σ}-L\_{ij}^{σ}μ\_{\frac{σρ}{k}}+L\_{ik}^{σ}μ\_{σρ/j)}\right)n\_{ρ}$. (2.6)

Крім того, із властивостей других коваріантних похідних випливає, що

 $r\_{,ijk}-r\_{,ikj}=R\_{,ijk}^{α}r\_{,α}$. (2.7)

Замінимо ліву частину (2.6) виразом, що стоїть у правій частині (2.7). Потім помножимо обидві частини отриманого рівняння на *r,β*. Внаслідок ортогональності векторів *nρ i r,β* отримуємо:

 $R\_{βijk0}=\sum\_{σ=1}^{ρ}(L\_{ik}^{σ}L\_{jβ}^{σ}-L\_{ij}^{σ}L\_{kβ}^{σ})$. (2.8)

Рівняння (2.8) називається *рівнянням Гаусса* підмноговиду в *En+p*. Воно встановлює взаємозв’язок внутрішньої та зовнішньої геометрії підмноговидів.

 Ліва частина в (2.6) являє собою вектор, дотичний до *Fn*. Тому нормальна складова виразу, що стоїть у правій частині виразу (2.7), перетворюється в нуль, тобто:

 $L\_{ij,k}^{ρ}-L\_{ik,j}^{ρ}=L\_{ij}^{σ}μ\_{σρ/k}-L\_{ik}^{σ}μ\_{σρ/j}$.(2.9)

Це рівняння називається *рівнянням Кодацці*. Індекс *ρ* тут фіксований, а по *σ* йде сумування.

Нарешті, виведемо *рівняння Річчі.* Для цього розглянемо розклад Вейнгартена:

 $n\_{σ,i}=-L\_{il}^{σ}g^{lj}r\_{,j}-μ\_{σρ/i}n\_{ρ}$.

Диференціюючи коваріантно по *uk*, отримуємо:

$n\_{σ,ik}=-L\_{il,k}^{σ}g^{lj}r\_{,j}-L\_{il}^{σ}g^{lj}r\_{,jk}-μ\_{σρ/jk}n\_{ρ}-μ\_{σρ/i}n\_{ρ,k}$.

Замінимо *r,jk i nρ,k* їх виразами з розкладів Гаусса-Кодацці. Тоді

 $n\_{σ,ik}=-L\_{il,k}^{σ}g^{lj}r\_{,j}-L\_{il}^{σ}g^{lj}L\_{jk}^{ρ}n\_{,ρ}-μ\_{σρ/jk}n\_{ρ}-μ\_{σρ/i}(-L\_{kj}^{ρ}g^{jl}r\_{,l}-μ\_{ρα/k}n\_{α})$.

В останньому рівнянні розгляд дотичної складової не дасть нам нових співвідношень. Тому звернемося до нормальної складової. Замінюючи в останньому доданку *ρ* на *α* та *α на ρ*, маємо:

 $n\_{σ,ik}=…+n\_{ρ}(-L\_{il}^{σ}L\_{jk}^{σ}g^{lj}-μ\_{σρ/i,k}+μ\_{σα/i}μ\_{αρ/k}$,

де крапками позначена дотична компонента.

Змінимо місцями індекси *k та j,* і запишемо різницю *nσ,ik – nσ,ki*. Зауважимо, що кожна координата *nσ* є функцією для *Fn*. Відомо, що для будь-якої функції *φ* на рімановому підмноговиду виконується рівність *φ,ik = φ,ki*. Дійсно:

 $φ\_{,ik}=\frac{∂^{2}φ}{∂u^{i}∂u^{k}}-Г\_{ik}^{α}φ\_{,α}=φ\_{,ki}$,

так, як *Гαik = Гαki та φukul = φuluk.* Тому *nσ,ik = nσ,ki*. Таким чином, приходимо до наступного рівняння:

 $μ\_{\frac{ρσ}{i},k}-μ\_{\frac{ρσ}{k}.i}+\sum\_{α}^{}(μ\_{\frac{σα}{i}}μ\_{\frac{αρ}{k}}-μ\_{\frac{σα}{k}}μ\_{\frac{αρ}{i}})$

 $+(L\_{kl}^{σ}L\_{ji}^{ρ}-L\_{il}^{σ}L\_{jk}^{ρ})g^{ij}=0$. (2.10)

яке називається *рівнянням Річчі* підмноговида *Fn*

# **2.5 Паралельне перенесення у нормальному розшаруванні**

Нехай на підмноговиді $F^{n}⊂ V^{n+p}$ задано регулярне нормальне векторне поле 𝛏. Коваріантною похідною ($∇\_{x}ξ)^{˔}$ цього поля в нормальному розшаруванні в напрямку вектору називатимемо проекцію його коваріантною похідною $\overbar{∇}\_{x}ξ $в об’ємному просторі на нормальний простір *N*:

 $(∇\_{x}ξ)^{⊥}=(\overbar{∇}\_{x}ξ)^{N}$,

де *()N*- проекція на простір *N.*

Якщо заданий базис *нормалей 𝛏1,…,𝛏p* та вектор 𝛏 має вигляд $ξ=α^{σ}ξ\_{σ}$, то, використовуючи розклад Вейнгартену, можемо записати:

 $(∇\_{x}ξ)^{⊥}=(da^{σ}+α^{τ}μ\_{\frac{στ}{i}}du^{i})ξ\_{σ}$,

де *dui* відповідають вектору *Х.*

Нехай *ui=ui(t)* – рівняння кривої γ на *Fn*. Поле нормалей 𝛏 називається *паралельно переносним* вздовж γ, якщо його коваріантна похідна в нормальному розшаруванні дорівнює нулю:

 $(\overbar{∇}\_{x}ξ)^{⊥}=0$.

Для визначення такого поля вздовж кривої за його початковими даними треба знайти функції *aσ* із системи рівнянь:

 $da^{σ}+a^{τ}μ\_{στ/i}du^{i}=0$. (2.11)

*Нормальне перенесення не змінює довжину вектору та кути між векторами.*

 Дійсно, нехай векторне поле$ b=b^{α}ξ\_{α}$ теж паралельно переноситься, і для нього виконана система:

 $db^{σ}+b^{τ}μ\_{στ/i}du^{i}=0$. (2.12)

Помножуючи рівняння (2.11) на *bσ* , а рівняння (2.12) на *aσ* додавши і підсумовуючи по *σ*, отримуємо:

 $d\left(\sum\_{σ=1}^{n}a^{σ}b^{σ}\right)=0$,

тобто $\sum\_{σ=1}^{n}a^{σ}b^{σ}=const$, що доказує твердження.

З вибраної точки *P0* по кривій γ вектор 𝛏 можна перенести паралельно до іншої точки *P1*. Результат перенесення, взагалі кажучи, залежить від вибору γ. Для того щоб перенесення не залежало від вибору γ, необхідно і достатньо, щоб виконувалася система рівнянь:

 $\frac{∂a^{τ}μ\_{τσ/i}}{∂u^{k}}=\frac{∂a^{τ}μ\_{τσ/k}}{∂u^{i}}$. (2.13)

Дійсно, якщо існує паралельне переносне поле 𝛏, то його компоненти задовольняють системі (2.11) вздовж будь-якої кривої, в тому числі і вздовж координатних ліній *ui*. Отже, компоненти *aτ* задовольняють системі

 $\frac{∂a^{σ}}{∂u^{i}}=\frac{∂a^{τ}μ\_{τσ/k}}{∂u^{i}}$. (2.14)

Записуючи умови рівності приватних похідних функцій *aσ*, приходимо до рівняння (2.13).

Введемо наступний тензор на *Fn*:

 $T\_{στ/ki}=\frac{∂μ\_{στ/i}}{∂u^{k}}$.

Отже, умовою незалежності паралельного перенесення будь-якого нормального вектора від шляху буде система рівнянь:

 $T\_{στ/ki}=0$. (2.15)

Тензор $T\_{στ/ki}$ називається *тензором скруту*. Навпаки, якщо виконано рівняння (2.15) , то система (2.14) цілком інтегрована і паралельне перенесення не залежить від шляху. Так як паралельне перенесення зберігає довжину і кути, то можна побудувати ортонормований базис нормалей, що складається з паралельно переносних векторів, то:

 $(∇ξ\_{σ})^{⊥}=μ\_{\frac{ρσ}{i}}du^{i}ξ\_{ρ}=0$

для будь-якого *σ*. Оскільки вектори$ ξ\_{ρ}$ лінійно незалежні, то $μ\_{ρσ/k}=0$.

Отже, якщо базис нормалей складено з паралельних векторів, то всі його коефіцієнти скруту дорівнюють нулю.

Підмноговиди *Fn* з нульовим тензором кручення називають також *підмноговидом з нормальною плоскою зв’язністю.*

# **2.6 Про існуванні головних направлень**

Нехай *Fn* – підмноговиди з плоскою нормальною зв’язністю в евклідовому або рімановому просторі постійної кривизни. Рівняння Річчі за допомогою тензора скруту можна записати так:

 $T\_{σv/ik}=g^{ji}(L\_{ij}^{σ}L\_{kl}^{v}-L\_{kj}^{σ}L\_{il}^{v})$.

Якщо на *Fn* є базис нормалей, що паралельно переноситься в нормальному розшаруванні, то коефіцієнти скрут цього базису дорівнюють нулю: *μτσ/i = 0*. Візьмемо другі квадратичні форми щодо цього базису. Тоді

*Тσυ/іk* ≡ 0 і рівняння Річчі дає:

 $g^{jl}\left(L\_{ij}^{σ}L\_{kl}^{v}-L\_{kj}^{σ}L\_{il}^{v}\right)=0$. (2.16)

Виберемо координати так, що *gij (P0) = δij* в якійсь точці *Р0* і координатні лінії *ui* торкаються в точці *Р0* головних напрямків однієї квадратичної форми, наприклад$L\_{ij}^{1}du^{i}du^{j}$. Рівняння (2.16) в точці *Р0* дають:

 $L\_{kj}^{τ}\left(L\_{kk}^{1}-L\_{jj}^{1}\right)=0$. (2.17)

Припускатимемо, що квадратична форма*II1*має різні головні кривини. Тоді із (2.17) випливає, що $L\_{kj}^{τ}=0 $для будь-яких *τ* і *k ≠ j*. Це означає, що всі другі квадратичні форми тримають одні й ті самі головні напрямки.

 Припустимо, що при деяких значеннях індексів *k, i, j* виконується рівність

 $L\_{kk}^{1}=L\_{jj}^{1} k\ne j L\_{kj}^{1}=0 $. (2.18)

У площині векторів $r\_{u^{i}} та r\_{u^{k }}$повернемо координатні лінії так, щоб коефіцієнти другої квадратичної форми *ІІ2* для нормалі *n2* задовольняли умові $\overbar{L}\_{kj}^{2}=0.$Тоді умова (2.18) зберігатиметься. Справді, введемо координати *uk i uj* наступним чином:

$u\_{k}=cosφū\_{k}+sinφū\_{j}$,

 $u\_{j}=-sinφū\_{k}+cosφū\_{j}$.

Тоді

 $\overbar{L}\_{kk}^{1}=\left(n\_{1}r\_{ū\_{k}ū\_{k}}\right)=L\_{kk}^{1}cos^{2}φ-2L\_{kj}^{1}cosφsinφ+L\_{jj}^{1}sin^{2}φ=L\_{kk}^{1}$

 $\overbar{L}\_{kj}^{1}=\left(n\_{1}r\_{ū\_{k}ū\_{j}}\right)=\left(L\_{kk}^{1}-L\_{jj}^{1}\right)cosφsinφ+L\_{kj}^{1}cos2φ=0$

 $\overbar{L}\_{jj}^{1}=\left(n\_{1}r\_{ū\_{j}ū\_{j}}\right)=L\_{kk}^{1}sin^{2}φ+L\_{kj}^{1}sin2φ+L\_{jj}^{1}cos^{2}φ=L\_{kk}^{1}$.

Якщо $\overbar{L}\_{kk}^{2}=\overbar{L}\_{jj}^{2}$, то можемо взяти другу квадратичну форму для вектора *n3* і так далі. Якщо ж $\overbar{L}\_{kk}^{2}\ne \overbar{L}\_{jj}^{2}$, то використовуємо рівність нулю компонент тензора скруту: *Тτ2/kj* ≡ 0. Аналогічно викладеному вище отримаємо:

$\overbar{L}\_{kj}^{τ}\left(\overbar{L}\_{kk}^{2}-\overbar{L}\_{jj}^{2}\right)=0$.

Звідси випливає, що $\overbar{L}\_{kj}^{τ}=0 $при *k ≠ j* для решти *τ*.

 Отже, *підмноговид Fn з плоскою нормальною зв’язністю має n головних напрямків.*

 Навпаки, нехай *Fn* має у кожній точці *n* головних напрямів. Виберемо координати так, що у фіксованій точці *Р0 : gik = Lτik = 0 при i ≠ k*. Тоді з рівняння (2.16) отримуємо, що *Тσυ/ik* = 0. Отже, тензор кручення дорівнює нулю у кожній точці. Тому *підмноговид з n головними напрямками, має плоску нормальну зв’язність.*

# **2.7 Диференціальна геометрія двовимірної поверхні простору Мінковського**

 Будемо розглядати такі двовимірні поверхні простору  або такі області на цих поверхнях, у яких тип дотичної площини зберігається в кожній точці.

**Визначення 3.1** Двовимірна поверхня простору  називається *просторовоподібною (часоподібною, ізотропною)*, якщо дотична площина до неї в кожній точці є просторовоподібною (часоподібною, ізотропною).

Нехай  – гладка поверхня класу  в , задана векторним рівнянням . Вектори  є дотичними до поверхні. Розглянемо в кожній точці  нормальну площину . Виберемо в нормальній площині  лінійно незалежні вектори  й  так, щоб четвірка векторів  була ортонормованою в . Якщо поверхня просторовоподібна, то нормальні площини в кожній точці до цієї поверхні будуть часоподібними, якщо ж поверхня часоподібна, то нормальні площини – просторовоподібні. У випадку ізотропної поверхні нормальні площини у всіх точках ізотропні, причому ізотропний вектор дотичної та нормальної площин буде спільним.

За допомогою кожного базисного вектора нормальної площини визначимо другі квадратичні форми

 ,

де  – індекси підсумовування. Коефіцієнти позначимо .

Поверхню будемо вивчати за допомогою рухомого репера . Частинні похідні від векторів базису цього репера, тобто вектори , можна розкласти по векторах цього ж базису. Розклади Гаусса мають вигляд

 .

 Нехай  – просторовоподібна поверхня. У розкладах Гаусса коефіцієнти  – це символи Крістоффеля другого роду. Коефіцієнти  знаходимо, помноживши праву й ліву частини рівностей на . Одержимо

  .

Таким чином, розклади Гаусса для просторовоподібної поверхні мають вигляд:

 .

Розклади Вейнгартена для похідних від нормалей мають такий самий вигляд, як і для поверхні евклідова простору [7, с.96]:

 .

Нехай тепер – часоподібна поверхня. Після аналогічних перетворень можемо записати розклади Гаусса й Вейнгартена у вигляді

 ,

 .

відповідно.

 Ці розклади визначають наступний вигляд тензора кривини просторовоподібної поверхні. Використовуючи розклади Гаусса й Вейнгартена, можна вивести рівняння Гаусса у вигляді

 . (2.19)

Для часоподібної поверхні одержимо

 . (2.20)

Запишемо істотне рівняння Гаусса, яке одержимо з (2.19), підставивши в нього .

. (2.21)

Будемо кривину поверхні відносно нормалі  позначати . Тоді відносно часоподібної нормалі  визначимо  відповідно до [44, с.97] формулою

 . (2.22)

Отже, гауссова кривина поверхні  у формулі (2.21) є сумою кривин цієї поверхні відносно кожної з нормалей.

Запишемо істотне рівняння Гаусса, яке одержимо з (2.20), підставивши в нього . Тоді гауссова кривина часоподібної поверхні має вигляд

 . (2.23)

Для поверхонь простору Мінковського можна отримати систему рівнянь Гаусса-Кодацці-Річчі тим самим шляхом, як і аналогічну систему рівнянь для поверхні евклідова простору, з урахуванням метрики простору Мінковського та метрики поверхонь.

Для часоподібної поверхні вона буде мати вигляд:

$R\_{βijk}=\sum\_{σ=1}^{2}(L\_{ik}^{σ}L\_{jβ}^{σ}-L\_{ij}^{σ}L\_{kβ}^{σ})$,

$L\_{ij,k}^{ρ}-L\_{ik,j}^{ρ}=L\_{ij}^{σ}μ\_{σρ/k}-L\_{ik}^{σ}μ\_{σρ/j}$,

 $μ\_{ρσ/i,k}-μ\_{ρσ/k.i}+\sum\_{α}^{}(μ\_{σα/i}μ\_{αρ/k}-μ\_{σα/k}μ\_{αρ/i})+(L\_{kl}^{σ}L\_{ji}^{ρ}-L\_{il}^{σ}L\_{jk}^{ρ})g^{ij}=0$,

а для просторово подібної

 $R\_{βijk}=-L\_{ik}^{1}L\_{jβ}^{1}+L\_{ij}^{1}L\_{kβ}^{1}-L\_{ij}^{2}L\_{kβ}^{2}+L\_{ik}^{2}L\_{jβ}^{2}$,

$L\_{ij,k}^{ρ}-L\_{ik,j}^{ρ}=L\_{ij}^{σ}μ\_{σρ/k}-L\_{ik}^{σ}μ\_{σρ/j}$,

$μ\_{ρσ/i,k}-μ\_{ρσ/k.i}+\sum\_{α}^{}(μ\_{σα/i}μ\_{αρ/k}-μ\_{σα/k}μ\_{αρ/i})+(L\_{kl}^{σ}L\_{ji}^{ρ}-L\_{il}^{σ}L\_{jk}^{ρ})g^{ij}=0$.

# **2.8 Поверхні за плоскою нормальною зв’язністю в просторі Мінковського**

В роботі вказано на те, що поняття нормальної зв’язності підмноговиду ріманового многовиду, було введене Е. Картаном і що підмноговиди з плоскою нормальною зв’язністю є підмноговидами з нульовим скрутом. Важливою властивістю поверхонь з плоскою нормальною зв’язністю є існування параметризації, відносно якої першу та обидві другі квадратичні форми можна одночасно звести до діагонального виду.

Враховуючи цю властивість і рівність нулю коефіціентів скруту система рівнянь Гаусса-Кодацці-Річчі запишеться у вигляді

 $Kg=L\_{11}^{1}L\_{22}^{1}+L\_{11}^{2}L\_{22}^{2}$,

 ,

 , (2.24)

 ,

 ,

де  - символи Крістофеля другого роду.

Рівняння Річчі виконуються тотожно.

 Система рівнянь Гаусса-Кодацці для просторовоподібної поверхні з плоскою нормальною зв’язністю відрізняється від системи (2.24) лише рівнянням Гаусса, яке має вигляд

 $-L\_{11}^{1}L\_{22}^{1}+L\_{11}^{2}L\_{22}^{2}=Kg$. (2.25)

# **2.9 Приклад поверхні з плоскою нормальною зв’язністю в просторі Мінковського**

Однією з властивостей поверхонь з плоскою нормальною зв’язністю є те, що матриці їх других квадратичних форм комутують між собою. Доведемо аналогічне твердження для поверхонь простору Мінковського.

**Твердження** Якщо поверхня $F^{2}⊂ $має плоску нормальну зв’язність, то матриці $А\_{1} та А\_{2}$ її других квадратичних форм задовольняють умові: $А\_{1}А\_{2}=А\_{2}А\_{1}$.

Доведення. Нехай поверхня $F^{2}⊂ $ задана рівняння $\overbar{r}=\overbar{r}(u\_{1},u\_{2})$. Тоді $\overbar{r}\_{u1}^{'}, \overbar{r}\_{u2}^{'}$ - дотичні вектори до неї. Розглянемо одиничні нормальні $\overbar{n}\_{1 }та \overbar{n}\_{2}$ і відносно цих нормалей запишемо дві другі квадратичні форми:

 $II^{k}= L\_{ij}^{k}du\_{i}du\_{j} i,j,k=1,2$.

Оскільки поверхня має плоску нормальну зв’язність, то параметризацію поверхні можна вибрати таким чином, що $L\_{12}^{k}=0$. Тоді матриці других квадратичних форм будуть мати вигляд:

 $А\_{1}=\left(\begin{matrix}L\_{11}^{2}&0\\0&L\_{22}^{1}\end{matrix}\right) і A\_{2}=\left(\begin{matrix}L\_{11}^{2}&0\\0&L\_{22}^{2}\end{matrix}\right)$.

Запишемо добутки $A\_{1}A\_{2} та A\_{2}A\_{1}$:

 $A\_{1}A\_{2}=\left(\begin{matrix}L\_{11}^{1}L\_{11}^{2}&0\\0&L\_{22}^{1}L\_{22}^{2}\end{matrix}\right)$,

$A\_{2}A\_{1}=\left(\begin{matrix}L\_{11}^{1}L\_{11}^{2}&0\\0&L\_{22}^{2}L\_{22}^{1}\end{matrix}\right)$.

Як бачимо, ці матриці комутують.

Розглянемо, наприклад, поверхню з радіус-вектором , яку можна вважати аналогом тора Кліффорда в просторі Мінковського. Дотичні вектори до цієї поверхні мають вигляд , . Ці вектори є просторовоподібними та ортогональними, а значить поверхня буде просторовоподібною. У якості нормалей до поверхні можна обрати вектори  та . Обчислимо коефіцієнти других квадратичних форм відносно нормалей  та :

 , , , .

Матриці других квадратичних форм мають вигляд

  і .

Очевидно, що вони комутують.

Для гауссової кривини поверхні за формулою (2.21) отримаємо .

# **Висновки**

 На основі чотиривимірного псевдоевклідового простору індексу 1 може бути побудована така модель миру, котра всеціло погоджується зі спеціальною теорією відносності, навіть пояснює її, і при цьому ні в чому не протирічить тій картині світу, яку малюють нам чуттєві сприйняття.

 Своєрідність геометрії простору Мінковського визначається тим, що відстань між двома точками ( подіями) визначається квадратами складових чотиривимірного вектора на тимчасові та просторові осі з різними знаками. В наслідок цього чотиривимірний простір з відмінними від нуля складовими може мати нульову довжину.Геометрія простору Мінковського дозволяє наочно інтерпретировати кінематичні ефекти спеціальної теорії відносності (змінення довжини і швидкості течії часу при переході від однієї інерційної системи відліку до іншої) і лежить в основі сучасного математичного апарату теорії відносності.

 В роботі досліджувалась геометрія поверхонь з плоскою нормальною зв’язністю в просторі Мінковського. На відміну від евклідового аналогу, проблема у псевдоевклідовому варіанті – для поверхонь в просторі Мінковського потребувала більш детального та кропіткого аналізу, зважаючи на різноманітність типів поверхонь. Оскільки в цьому просторі існують поверхні різних типів, то дослідження кожної поверхні є окремою змістовною задачею.

# **Перелік посилань**

1. Сазанов А. А. Четырехмерный мир Минковского. Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1988. 224 с.
2. Акивис М. А. К дифференциальной геометрии грассманова многообразия. *Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии*. *Труды геометрического семинара»* 1982. № 38. C.273–282.
3. Аминов Ю. А. О грассмановом образе двумерной поверхности в четырёхмерном евклидовом пространстве. *Украинский геометричсекий сборник*. 1980. (23). C.3–16.
4. Аминов Ю. А. Определение поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу. *Математический сборник*. 1982. № 2 (117). C.147-160.
5. Аминов Ю. А. Геометрия подмногообразий. Київ : Наукова думка, 2002. 467 с.
6. Борисенко А. А., Николаевский Ю. А. Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий. УМН. 1991. № 278. C.41–83.
7. Борисенко А.А. Об однозначной определенности многомерных подмногообразий в евклидовомпространстве по грассманову образу. *Математические заметки*. 1992. № 1 (51). C.8–15.
8. Величко И. Г., Гургенидзе М. А., Стеганцева П. Г. Подмногообразия грассманового многообразия плоскостей псевдоевклидова пространства. *Збірник Праць Інституту математики НАН України*. 2009. № 2 (6). C.56–76.
9. Горькавый В. А. О конформных преобразованиях поверхностей в пространстве Минковского с сохранением грассманова образа. *Известие вузов Математики*. 2006. № 7. C.13–24.
10. Борисенко А. А. Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий. Москва : Экзамен, 2003. 670 с.
11. Аминов Ю. А. О погружении евклидовой плоскости в Е4 с нулевым гауссовым кручением. *Математическая физика, анализ, геометрия*. 1994. № 3/4 (1). C.380–391.
12. Борисенко А. А., Николаевский Ю. А. О поверхностях с максимальной кривизной грассманова образа. *Математические заметки*. 1990. № 48 (3). C.12-19.
13. Гречнева М. А., Стеганцева П. Г. О поверхностях со стационарными значениями стационарной кривизны грассманова образа. *Proceedings of the International Geometry Centre*. 2016. № 9 (2). C.42-48.
14. Лисица В. Т. Многомерные поверхности с плоской нормальной связностью с постоянной кривизной грассманова образа. *Известие вузов Математики* 2004. № 5. C.47–51.
15. Люмисте Ю. Г., Чеказян А. В. Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространстве постоянной кривизны*. Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии*. *Труды геометрического семинара»* 1981. № 12. С.3-30.
16. Маазикас И. К римановой геометрии грассмановых подмногообразий неизотропных подпространств псевдоевклидова пространства. *Ученые записки Тартурсского университета*. 1974. № 342. C.76–82.
17. Стеганцева П. Г., Гречнева М. А. Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства. *Известие вузов Математика*. 2017. № 2. C.65–75.
18. Фоменко В. Т. Двумерные поверхности с плоской нормальной связностью в пространстве постоянной кривизны, несущие геодезические постоянной кривизны. *Математические заметки*. 2000. № 68 (4). C.579–586.