

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА**

на тему: «**АНАЛІТИКО-ЧИСЕЛЬНИЙ ПІДХІД ДО  
РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДНИХ ДИНАМІЧНИХ  
ПРОБЛЕМ ДЛЯ СИСТЕМ ЗІ ЗМІННИМИ  
ПАРАМЕТРАМИ**»

Виконав: студент 2 курсу, групи 8.1130  
Спеціальності 113 прикладна математика  
(шифр і спеціальність)

А.В. Шкатула

(ініціали та прізвище)

Керівник професор кафедри фундаментальної та  
прикладної математики, професор, д.т.н.  
Грищак В.З.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри загальної математики,  
доцент, к.ф.-м.н. Стеганцев Є.В.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Факультет \_\_\_\_\_ математичний  
Кафедра \_\_\_\_\_ фундаментальної та прикладної математики  
Рівень вищої освіти \_\_\_\_\_ магістр  
Спеціальність \_\_\_\_\_ 113 прикладна математика  
\_\_\_\_\_ (шифр і назва)  
Освітня програма \_\_\_\_\_ прикладна математика

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач \_\_\_\_\_ кафедри  
фундаментальної \_\_\_\_\_ та  
прикладної \_\_\_\_\_ математики,  
професор \_\_\_\_\_

Гребенюк С.М.

(підпис)

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2021 р.

**ЗАВДАННЯ**  
**НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ**

Шкатулі Андрію Вадимовичу

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проєкту) \_\_\_\_\_ Аналітико-чисельний підхід до розв'язання прикладних  
\_\_\_\_\_ динамічних проблем для систем зі змінними параметрами

керівник роботи (проєкту) \_\_\_\_\_ Грищак Віктор Захарович, д.т.н., професор

(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 09 » \_\_\_\_\_ червня \_\_\_\_\_ 2021 року № \_\_\_\_\_ 851-с

2. Строк подання студентом роботи \_\_\_\_\_ 02.12.2021 р.

3. Вихідні дані до роботи \_\_\_\_\_ 1) Постановка задачі  
\_\_\_\_\_ 2) Перелік літератури

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

\_\_\_\_\_ 1) Постановка задачі.

\_\_\_\_\_ 2) Основні теоретичні відомості.

\_\_\_\_\_ 3) Аналіз та застосування аналітико-чисельних підходів на базі асимптотичних методів.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) \_\_\_\_\_

Презентація \_\_\_\_\_

## 6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
1			
2			
3			

7. Дата видачі завдання 09.06.2021 р.**КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН**

№	Назва етапів дипломної роботи (проекту)	Строк виконання етапів роботи (проекту)	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	13.06.2021	
2.	Збір вихідних даних.	26.06.2021	
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	20.07.2021	
4.	Розробка першого і другого розділу.	20.08.2021	
5.	Розробка третього розділу.	20.10.2021	
6.	Оформлення і нормоконтроль дипломної роботи.	04.11.2021	
7.	Захист дипломної роботи.	16.12.2021	

Студент

\_\_\_\_\_

(підпис)

А. В. Шкатула

\_\_\_\_\_

(ініціали та прізвище)

Керівник роботи

\_\_\_\_\_

(підпис)

В. З. Грищак

\_\_\_\_\_

(ініціали та прізвище)

**Нормоконтроль пройдено**

Нормоконтролер

\_\_\_\_\_

(підпис)

В.В. Леонтьєва

\_\_\_\_\_

(ініціали та прізвище)

## РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Аналітико-чисельний підхід до розв'язання прикладних динамічних проблем для систем зі змінними параметрами»: 50 с., 6 рис., 34 джерел.

ВКБ, МЕТОД ЗБУРЕНЬ, ГІБРИДНІ МЕТОДИ, ВКБ-ГАЛЬОРКІН, ВКБ-ВАРІАЦІЙНИЙ ПІДХІД.

Об'єкт дослідження – системи зі змінними параметрами.

Мета роботи: дослідити аналітико-чисельний підхід до розв'язання крайових задач динамічних систем, що описуються лінійними та нелінійними диференціальними рівняннями зі змінними коефіцієнтами і параметром при старшій похідній, який дозволяє будувати наближений аналітичний розв'язок задачі високого ступеню точності. Навчитись використовувати їх на практиці.

Метод дослідження – аналітичний, порівняльний.

В даній роботі розглядається аналітико-чисельний підхід до розв'язання крайових задач динамічних систем, що описуються лінійними та нелінійними диференціальними рівняннями зі змінними коефіцієнтами і параметром при старшій похідній, який дозволяє будувати наближений аналітичний розв'язок задачі високого ступеню точності. Підхід припускає спільне використання методів збурень, фазних інтегралів (ВКБ-наближень), гібридного ВКБ-Гальоркін методу, або достатньої умови існування екстремуму функціонала, який реалізує рівняння початкової чи крайової задачі. Наведено приклади застосування аналітико-чисельного підходу на базі асимптотичних методів і комп'ютерних технологій.

## SUMMARY

Master's Qualification Thesis «Analytical and numerical approach to solving applied dynamic problems for systems with variable parameters»: 50 p., 6 figs., 34 sources.

WKB, DISTURBANCE METHOD, HYBRID METHODS, WKB-GALORKIN, VKB-VARIATION APPROACH.

The object of the study is systems with variable parameters.

The aim of the study is to investigate the analytical-numerical approach to solving boundary value problems of dynamical systems described by linear and nonlinear differential equations with variable coefficients and a parameter for the senior derivative, which allows to build an approximate analytical solution of the problem of high accuracy. Learn to use them in practice.

The methods of research are analytical, comparative.

In this paper, an analytical-numerical approach to the solution of boundary problems of dynamic systems, described by linear and nonlinear differential equations with variable coefficients and parameter in a senior derivative, which allows us to build an approximate analytical solution of a high degree integrals (WKB approximations) , hybrid WKB-Galorkin method, or sufficient conditions for the existence of an extrema of the functional, which implements the equation of the initial or boundary problem. Examples of application of an analytical numerical approach based on asymptotic methods and computer technologies are given.

## ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	2
Реферат.....	4
Summary.....	5
Вступ.....	7
1 Сучасний стан проблеми динаміки систем із змінними параметрами	8
2 Розв'язок задач динаміки систем із змінними параметрами на власні значення.....	11
2.1 Методи розв'язання крайових задач.....	12
2.2 Динаміка пружного стріжня, який стискається у випробувальній машині із різною швидкістю навантаження... 12	
2.2.1 Основні рівняння статико-динамічного процесу.....	13
2.2.2 Статичний розв'язок.....	15
2.2.3 Розв'язок методом збурень.....	16
2.2.4 Асимптотичний розв'язок основного рівняння задачі.....	19
2.2.5 Застосування асимптотичного рішення.....	22
2.2.6 Характер коливань досліджуваної системи.....	24
3 Застосування ВКБ-варіаційного підходу при розв'язанні крайових задач на власні значення.....	32
3.1 Модельна задача на власні значення.....	32
3.2 Опис гібридного ВКБ-варіаційного підходу для рівняння $n$ -го порядку.....	37
3.2.1 Розв'язок задачі на власні значення для частинного випадку.....	40
3.3 Власні коливання круглої пластини радіально змінної товщини	43
3.3.1 Варіаційна постановка задачі.....	44
Висновки.....	47
Перелік посилань.....	48

## ВСТУП

В даній роботі розглядається аналітико-чисельний підхід до розв'язання крайових задач динамічних систем, що описуються лінійними та нелінійними диференціальними рівняннями зі змінними коефіцієнтами і параметром при старшій похідній, який дозволяє будувати наближений аналітичний розв'язок задачі високого ступеню точності. Підхід припускає спільне використання методів збурень, фазних інтегралів (ВКБ-наближень), гібридного ВКБ-Гальоркін методу, або достатньої умови існування екстремуму функціонала, який реалізує рівняння початкової чи крайової задачі. Наведено приклади застосування аналітико-чисельного підходу на базі асимптотичних методів і комп'ютерних технологій.

# 1 СУЧАСНИЙ СТАН ПРОБЛЕМИ ДИНАМІКИ СИСТЕМ ІЗ ЗМІННИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Диференціальні рівняння крайових задач механіки зі змінними коефіцієнтами вдається проінтегрувати аналітично лише в окремих випадках. У зв'язку з чим виникає необхідність їх наближеного розв'язання.

Серед наближених підходів, що одержали розвитку в наш час, нарівні з чисельними методами значне місце займають аналітичні підходи: прямі варіаційні методи та неваріаційні (Бубнова-Гальоркіна, збурювань).

Якщо диференціальне рівняння задачі містить безрозмірний параметр  $\varepsilon$  (малий або великий), то наближений розв'язок рівняння зручно шукати у вигляді асимптотичного розвинення в околі одного чи більше спеціальних значень параметра. Знайдені в такий спосіб розв'язки локальні по параметру збурювання  $\varepsilon$ , тобто досягають задовільної точності на вузькому інтервалі зміни параметра. Тому перспективна задача асимптотичної математики полягає у відшуканні засобів, а точніше процедур, які дозволяють поліпшувати наближені розв'язки, побудовані за допомогою класичних асимптотичних методів, розширюючи таким чином область їх ефективного застосування.

Можна назвати ряд підходів (в літературі вони дістали назву гібридних), які базуються на ідеї побудови «уточнюючого» розв'язку, в основі якого лежить послідовність координатних функцій асимптотичного розвинення і невідомі параметри. Якщо спеціальним способом визначити параметри, то «уточнюючий» гібридний розв'язок вихідного рівняння добре узгоджується з «точним» розв'язком на широкому інтервалі зміни параметра збурювання задачі. До гібридних підходів відносяться, наприклад, підходи збурювань-Гальоркіна [2] і ВКБ-Гальоркіна [21]. Окреме місце серед процедур, що дозволяє усувати нерівномірність асимптотичних розвинень займає апроксимація Паде [4, 7].

Так, на перших етапах дослідження нелінійної задачі застосовується метод збурень за параметром при нелінійній складовій диференціального рівняння задачі динаміки, а для отримання наближених аналітичних розв'язків лінійних рівнянь із



системи першого кроку застосовується наближений аналітичний розв'язок за допомогою методу фазних інтегралів. На основі знайденої асимптотичної послідовності функцій ВКБ-розвинення будується новий «уточнюючий» розв'язок. На другому етапі невідомі параметри «уточнюючого» гібридного розв'язку визначаються при дослідженні на екстремум функції кінцевого числа змінних, у яку перетворюється вихідний функціонал при підстановці в нього гібридного розв'язку.

З розвитком обчислювальної техніки в останні десятиріччя зросло значення асимптотичних методів [3, 8, 11-12, 15-17, 22-29], що застосовуються для розв'язання різноманітних задач разом з чисельними методами [34], при цьому доповнюючи один одного. Так, наприклад, в багатьох випадках асимптотичний вираз зручно використовувати як нульове наближення при числових розрахунках. Але найбільш повно взаємозв'язок числових і асимптотичних методів проявляється в тому, що одним із істотних моментів в теорії того чи іншого числового методу є дослідження асимптотичних властивостей деяких рівнянь, які відповідають цьому методу. Так, різницеві схеми для чисельного розв'язку диференціальних рівнянь містять деякий малий параметр  $h$  (крок), і при використанні такої схеми треба бути впевненим, що розв'язок різницевої системи, яка відповідає поданій схемі, при достатньо малих  $h$  близький до розв'язку вихідного диференціального рівняння. Так само, при регуляризації некоректно поставлених задач вводиться допоміжне рівняння, що містить малий регуляризуючий параметр, і питання полягає у встановленні близькості (що розуміється в деякому певному значенні) розв'язку цього допоміжного рівняння до розв'язку вихідної задачі. Ідея поєднання асимптотичних методів з принципом ортогональності по Гальоркіну і чисельними методами із застосуванням систем комп'ютерної алгебри покладена і в основу підходу, наведеного в цій дисертаційній роботі. Асимптотичні методи мають ряд недоліків, головним із яких, як вказувалося вище, є обмежена область застосування розв'язків. При збільшенні малого параметра похибка цих методів різко зростає. Виникає необхідність залучення в розв'язок все більшої кількості членів розвинення, що істотно збільшує складність обчислень. Саме тому виникає

необхідність “поліпшення” існуючого асимптотичного розв’язку без залучення більшого числа членів розвинення.

Значна увага в останній час приділяється методам, які дозволяють наближувати точний розв’язок при різних значеннях параметра. Саме до таких підходів можна віднести Паде - апроксимації, зрощування граничних асимптотик, метод ренормалізації та ін. У кожного з цих методів є свої сильні і слабкі сторони.

Ще одним підходом, який “поліпшує” розв’язки, отримані за допомогою методів збурення, є гібридний асимптотичний метод [15, 30-32]. Він ґрунтується на поєднанні асимптотичного розвинення і методу Гальоркіна, спираючись на ідеї, опис яких міститься в працях американських дослідників Гіра і Андерсена [2, 22-27]. Поєднуючи в собі найкращі сторони методів збурення, фазних інтегралів і методу Гальоркіна, гібридний асимптотичний підхід в значній мірі компенсує їх недоліки.

Метод Гальоркіна (або метод Бубнова – Гальоркіна [2, 19, 21, 31, 34]) був добре відомий в науковій літературі по працям, в яких цей метод застосовувався до задач пружної рівноваги стріжнів, тонких пластин та оболонок [13, 18, 20, 33]. Даний підхід був реалізований в працях Дункана (1937 р.), присвячених динаміці авіаційних конструкцій. В наш час існує велика кількість модифікацій методу Гальоркіна. Так, можна виділити метод Гальоркіна з кінцевими елементами, спектральні методи, метод граничних елементів та ін. Значна кількість прикладних задач розв’язується за допомогою методу Гальоркіна. В [32] цей підхід застосований для інтегрування рівнянь руху аероплану. Модифікований метод Гальоркіна на основі методу кінцевих елементів застосовано в [34] для моделювання напівпровідникових приладів, та інші.

Основним недоліком методу Гальоркіна є складності оптимального вибору базисних функцій, які в більшості випадків вибираються інтуїтивно, тому, що алгоритму побудови таких функцій в загальному вигляді не існує. Гібридний асимптотичний метод вирішує цю проблему, випереджаючи процес оптимізації по методу Гальоркіна знаходженням базисних функцій по одному із асимптотичних методів.

## 2 РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ ДИНАМІКИ СИСТЕМ ІЗ ЗМІННИМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ

Задачі на власні значення – це крайові задачі для системи однорідних диференціальних рівнянь, в якій праві частини залежать від одного або декількох параметрів. Самі ці параметри невідомі, до того ж, розв'язок крайової задачі існує тільки при певних їх значеннях, що називаються власними значеннями крайової задачі. Розв'язки, які відповідають цим власним значенням, називають власними функціями задачі.

Вірна постановка задач на власні значення потребує формулювання кількості граничних умов, що дорівнює сумі кількості рівнянь та кількості власних значень.

Розглянемо рівняння другого порядку:

$$y'' + \lambda r(x)y = 0, x \in [0, l], \quad (2.1)$$

де  $r$  - неперервна додатна на  $[0, l]$  функція;

$\lambda$  - скалярний параметр з крайовими умовами.

$$y(0) = 0, y(l) = 0, \quad (2.2)$$

Задача про пошук тих значень  $\lambda$ , при яких рівняння (2.1) має ненульові рішення, що відповідають крайовим умовам (2.2) разом з задачею про пошук цих рішень називається крайовою задачею Штурма-Ліувілля або крайовою задачею на власні значення.

## 2.1 Методи розв'язання крайових задач

Методи розв'язку крайових задач дуже різноманітні – це точні і наближені методи.

Точні методи вивчаються в курсі диференційних рівнянь. Вони використовуються для розв'язку вузького класу задач. Гарно розвинений цей апарат для розв'язку лінійних диференційних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами, що широко застосовуються в дослідженні різних фізичних процесів (наприклад, в теорії коливань та ін.).

Наближені методи поділяються на групи:

- а) проєкційні методи (метод Рітца, метод Гальоркіна, метод моментів, метод найменших квадратів);
- б) метод кінцевих різниць;
- в) асимптотичні методи (метод малого параметру, ВКБ-метод);
- г) методи зведення до задачі Коші (метод стрільби, метод диференціальної прогонки, метод редукції);
- д) метод колокації.

Наближені асимптотичні методи мають свої плюси, один з яких полягає в лаконічності функціонального представлення розв'язку, а інший - в тому, що деякі з цих методів дають змогу отримувати гарні наближення до узагальненого розв'язку крайової задачі, коли вона не має єдиного розв'язку в класичному розумінні.

## 2.2 Динаміка пружного стержня, який стискається у випробувальній машині із різною швидкістю навантаження

Розглядається задача про статико-динамічний процес у пружному стержні, який досліджується у випробувальній машині в умовах різної швидкості навантаження.

### 2.2.1 Основні рівняння статико-динамічного процесу

Якщо виділити елемент шарнірно опертого стержня на відстані  $dx$ , рівняння його руху у напрямку вісі  $x^*$  буде;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}}, \quad (2.3)$$

де  $E$ —модуль Юнга;

$\mu$  — щільність матеріалу;

$u$ -осьове переміщення;

$t$  - час.

Поперечний рух елемента задається рівнянням

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \left[ EI \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^{*2}} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} P y + \mu A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (2.4)$$

де  $y$  – нормальне переміщення стержня;

$y_0$ —початкове значення  $y$  при  $\gamma = 0$  у ненавантаженому стані;

$E$  – жорсткість стержня на вигин;

$A$  - площа у поперечному розрізі;

$P$  - стискаюча сила.

При цьому вважається, що головна вісь, яка відповідає мінімальному моменту інерції поперечного розрізу, перпендикулярна до площини  $x^* y$ .

На основі залежності

$$P = -EA \frac{\partial u}{\partial x^*}, \quad (2.5)$$

рівняння (2.3) та (2.4) пов'язані співвідношенням (2.5).

Розв'язок цих сумісних рівнянь при заданих початкових і граничних умовах є достатньо складна задача.

Але хвилі стискання, які створюються переміщеннями торців, рухаються із швидкістю значно більшою, ніж швидкість поперечного переміщення стержня. Тому можна вважати стискаючу осьову силу  $P$  постійною вздовж вісі. Цей процес вказує, що рівняння (2.3) и (2.5) можуть бути замінені інтегральним виразом, який пов'язує стискаючу силу з переміщенням  $ct$  траверси, яка навантажує стержень за час  $t$  і із зміною відстані між кінцевими точками стріжня. Якщо поперечні розміри не залежать від координати, то цей вираз має вигляд

$$P = \frac{EA}{L} \left\{ ct - \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial x^*} \right)^2 - \left( \frac{\partial y_0}{\partial x^*} \right)^2 \right] dx^* \right\}. \quad (2.6)$$

Будемо вважати, що жорсткість  $EI$  стала и начальна форма стріжня дається рівнянням

$$y_0 = e\rho \sin \sin \frac{\pi x^*}{L}. \quad (2.7)$$

Початкову швидкість  $dy/dt$  покладемо рівною нулю. При цих умовах функція

$$y = A \sin \sin \frac{\pi x^*}{L}, \quad (2.8)$$

де  $F$  – шукана функція, яка задовольняє рівнянню руху

$$f'' + \Omega \left[ (1 - \xi)f - e + \frac{1}{4}f^3 - \frac{1}{4}e^2f \right] = 0, \quad (2.9)$$

де

$$f = \frac{F}{\rho}, \quad \xi = \frac{1}{\varepsilon_E} \frac{ct}{L}, \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_E = \pi^2 \left( \frac{\rho}{L} \right)^2, \quad \Omega = \pi^2 \varepsilon_E^3 \frac{E}{\mu c^2}.$$

$\Omega$  - число динамічної подібності;

$\rho$  - радіус інерції поперечного перерізу.

У випадку, коли жорсткість стрижня  $EI$  є функцією координати, найбільш ефективним аналітико-чисельним підходом є застосування гібридного ВКБ-Гальоркін методу.

У зв'язку з тим, що рівняння (2.9) є нелінійним, у загальному випадку можливо застосувати гібридний підхід на базі методів збурення і фазних інтегралів [1].

З урахуванням наведених параметрів, за умови, що жорсткість  $EI$  стала, отримуємо залежність

$$\frac{P}{P_E} = \xi - \frac{1}{4}(f^2 - e^2), \quad (2.11)$$

де

$$P_E = EA\varepsilon_E. \quad (2.12)$$

### 2.2.2 Статичний розв'язок

Якщо у рівнянні (2.12) знехтувати складовою, яка характеризує прискорення, то статичний розв'язок може у неявному вигляді мати вираз:

$$\xi = 1 - \frac{e}{f_{ст.}} + \frac{1}{4}(f_{ст.}^2 - e^2). \quad (2.13)$$

Відповідна осьове навантаження обчислюється з рівняння (2.11):

$$\left(\frac{P}{P}\right) = 1 - \frac{e}{f_{ст.}}. \quad (2.14)$$

### 2.2.3 Розв'язок за методом збурень

Вважається, що при стандартних швидкостях навантаження вна випробувальні стріжні динамічний процес мало відрізняється від статичного.

Будемо вважати

$$f = f_{\text{ст.}} + \eta . \quad (2.15)$$

Підставим цей вираз в початкове рівняння, вважаючи  $\eta$  малим порівняно з статичним випадком  $f_{\text{ст.}}$ . В результаті отримуємо диференціальне рівняння відносно  $\eta$ :

$$\eta'' + \Omega \left[ 1 - \xi + \frac{1}{4} (3f_{\text{ст.}}^2 - e^2) \right] \eta = -f_{\text{ст.}}'' . \quad (2.16)$$

Як буде показано нижче,  $f_{\text{ст.}}''$  є малою величиною порівняно з  $\eta''$ . Тому рівняння (2.16) може бути замінене наближеним однорідним рівнянням (хоча це спрощення не є принциповим з точки зору розв'язку):

$$\eta'' + h^2 \chi \eta = 0 , \quad (2.17)$$

де

$$h^2 = \Omega, \quad \chi = 1 - \xi + \frac{1}{4} (3f_{\text{ст.}}^2 - e^2) . \quad (2.18)$$

Наближений аналітичний розв'язок рівняння (2.17) на базі методу фазних інтегралів дається у роботі [1] за умови, що коефіцієнт  $h^2 = \Omega$  є функцією координати.

Якщо у рівнянні (2.17) віділити «великий» параметр  $h_0$  отримуємо рівняння у вигляді:

$$\eta'' + h_0^2 f(x) \chi \eta = 0 , \quad (2.19)$$

де

$$h^2(x) = h_0^2 f(x) .$$



Відповідно до методу фазних інтегралів отримуємо розв'язок у формі:

$$h(x) = [f(x)\chi]^{-0.25} \left\{ C_1 \text{Sin} \left[ h_0 \int_0^x \sqrt{f(x)\chi} dx \right] + C_2 \text{Cos} \left[ h_0 \int_0^x \sqrt{f(x)\chi} dx \right] \right\}. \quad (2.41)$$

Для фіксованих параметрів і початкових умов отримуються відповідні розв'язки. В якості приклада розглядається випадок, коли змінний коефіцієнт у розглянутому диференціальному рівнянні має вигляд:

$$h(x) = (1+x). \quad (2.42)$$

При цьому розглядаються початкові умови у формі:

$$h(0) = 0, \quad (2.43)$$

$$h'(0) = 1. \quad (2.44)$$

При заданому параметрі  $\chi = 1$  довільні сталі дорівнюють

$$C_2 = 0, C_1 = 1/h_0. \quad (2.45)$$

Чисельні дані за запропонованим наближеним підходом із застосуванням комп'ютерної алгебри надаються на наступних рисунках в залежності від величини «малого» параметру  $\varepsilon$ .

$A1=Plot[(1/(1+x))*0.1*Sin[10*(x+x^2+x^3/3)],\{x,0,1\},AxesLabel\to\{x,h\}]$

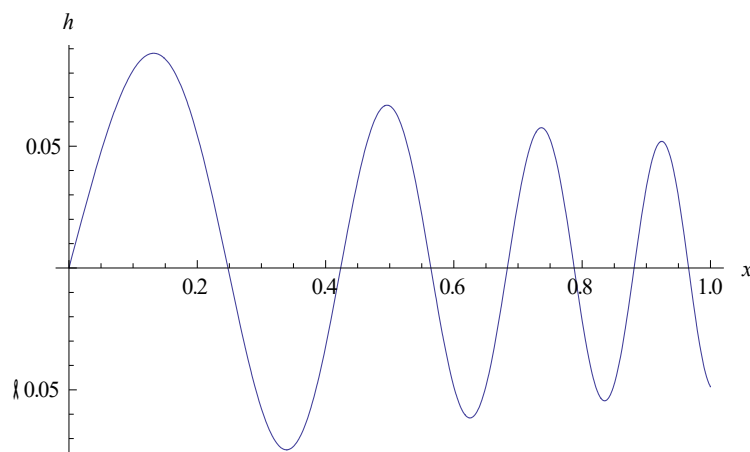


Рисунок 2.1 — величина «малого» параметру  $\varepsilon = 0.1$

$A2=Plot[(1/(1+x))*0.05*Sin[20*(x+x^2+x^3/3)],\{x,0,1\},AxesLabel\to\{x,h\}]$

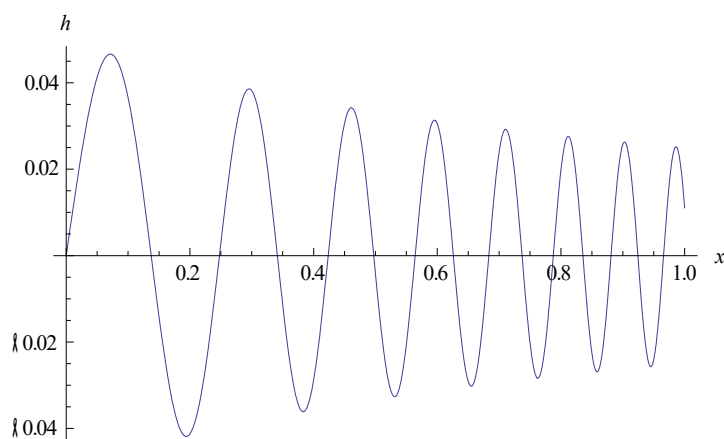


Рисунок 2.2 — величина «малого» параметру  $\varepsilon = 0.05$

$A3=Plot[(1/(1+x))*0.01*Sin[100*(x+x^2+x^3/3)],\{x,0,1\},AxesLabel\to\{x,h\}]$

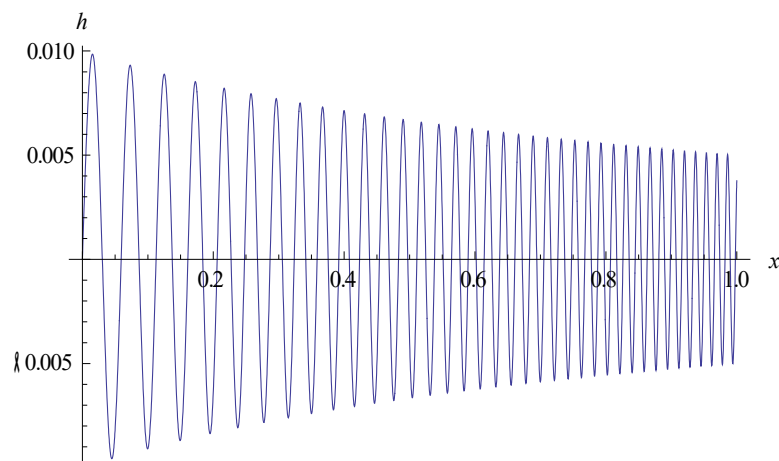


Рисунок 2.3 — величина «малого» параметру  $\varepsilon = 0.01$

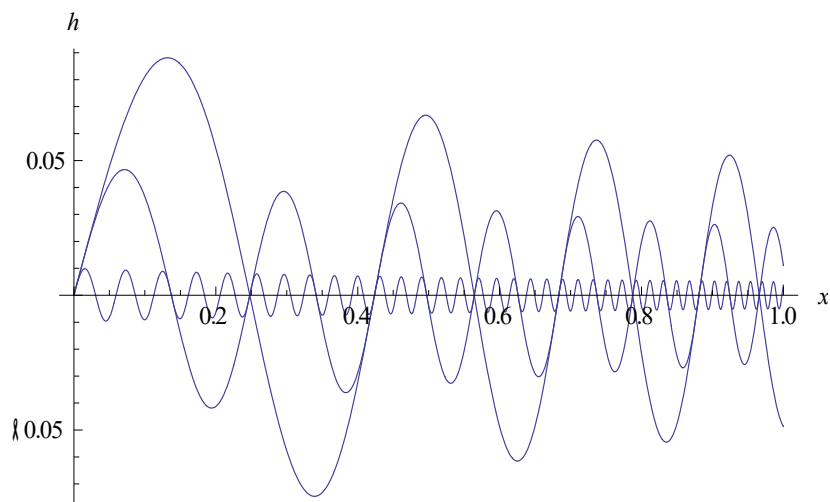


Рисунок 2.4 — ВКБ розв’язок в залежності від величини малого параметру

`Plot3D[(1/(1+x))*e*Sin[e^(-1)*(x+x^2+x^3/3)],{x,0,1},{e,0.01,1},AxesLabel->{e,x,h}]`

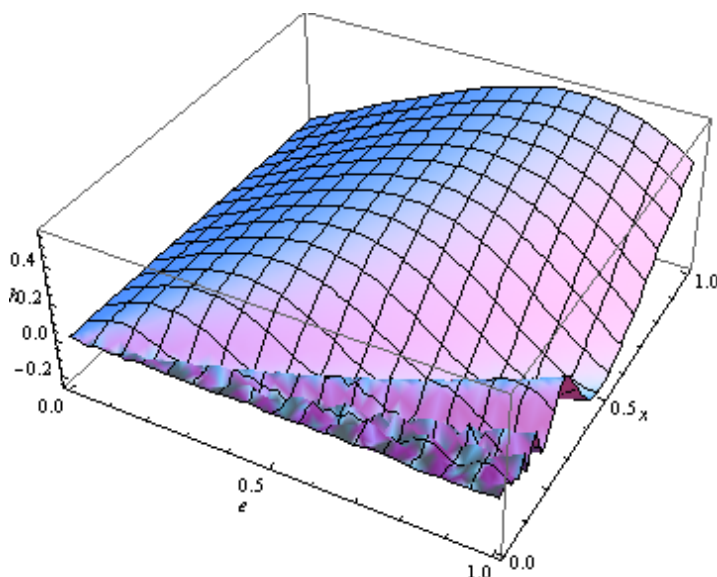


Рисунок 2.5 — Тривимірна залежність розв’язку від заданих параметрів

#### 2.2.4 Асимптотичний розв’язок основного рівняння задачі

При експериментальних випробуваннях стрижнів параметр  $\Omega$  є величиною «великою» (для сталі та алюмінієвих сплавів  $\sqrt{\frac{E}{v\mu}}$  складає біля 500 000 см/сек; при параметрі  $L/\rho = 100$  і швидкості навантажуючої траверси  $e=5 \cdot 10^{-3}$  см/сек  $\Omega \approx 10^8$ ). Значення параметру  $h$  дорівнює порядку  $10^4$ . При таких великих значеннях  $h$

розв'язок можливо представити у вигляді асимптотичного розвинення за обратними степенями цього параметру:

$$\eta = \psi e^{h\omega} \left( 1 + \frac{f_1}{h} + \frac{f_2}{h^2} + \dots \right), \quad (2.25)$$

де  $\psi, \omega, f_1, f_2, \dots$  є функціями  $\xi$ . Друга похідна від  $\eta$  по  $\xi$  має вигляд

$$\eta'' = e^{h\omega} [\psi' \omega'^2 h^2 + (2\psi' \omega' + \psi \omega'' + \psi \omega'^2 f_1) h + O(1)]. \quad (2.26)$$

Підставивши (2.25) и (2.26) у рівняння (2.16) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметру розвинення, отримаємо

$$\psi \omega'^2 + \psi \chi = 0. \quad (2.27)$$

$$2\psi' \omega' + \psi \omega'' + \psi \omega'^2 f_1 + \chi \psi f_1 = 0. \quad (2.28)$$

Рівняння (2.27), можна записати у формі

$$2\psi' \omega' + \psi \omega'' = 0. \quad (2.29)$$

З рівняння (2.27) знайдемо

$$\omega'^2 = -\chi, \quad (2.30)$$

а з рівняння (2.28) отримуємо

$$\frac{\psi'}{\psi} = -\frac{1}{2} \frac{\omega''}{\omega'}. \quad (2.31)$$

Похідна рівняння (2.30) по  $\xi$  з подальшим розв'язком відносно  $\omega''$ , призводить до залежності

$$\omega'' = -\frac{1}{2} \frac{\chi'}{\omega'}. \quad (2.32)$$

Підстановка (2.32) у рівняння (22.25) з урахуванням рівняння (2.30), дає співвідношення

$$\frac{\psi'}{\psi} = -\frac{1}{4} \frac{\chi'}{\chi} . \quad (2.33)$$

Після інтегрування отримуємо

$$\psi = C^* \chi^{-\frac{1}{4}} , \quad (2.34)$$

де  $C^*$  - стала інтегрування.

Якщо залишити лише першу складову у розкладя (2.25) , отримаємо

$$\eta = C^* \chi^{-\frac{1}{4}} e^{\pm i h \int_{\xi_0}^{\xi} \chi^{\frac{1}{2}} d\xi} , \quad (2.35)$$

або

$$\eta = C^* \chi^{-\frac{1}{4}} \sin \sin (h\chi^* - \varphi^*) , \quad (2.36)$$

де

$$\chi^* = \int_{\xi_0}^{\xi} \chi^{\frac{1}{2}} d\xi , \quad (2.37)$$

і  $\varphi^*$  - фазовий кут, залежний від початкових умов.

Головна складова для швидкості коливань буде

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{c}{L\varepsilon_E} \frac{d\eta}{d\xi} = C^* \frac{c}{L\varepsilon_E} h \chi^{-\frac{1}{4}} \sin \sin (h\chi^* - \varphi^*) . \quad (2.38)$$

## 2.2.5 Застосування асимптотичного рішення

Якщо асимптотичне рішення

$$\eta = \chi e^{-\frac{1}{4}e^{ih\chi^*}}, \quad \chi^* = \int_{\xi_0}^{\xi} \chi^{\frac{1}{2}} d\xi .$$

продиференціювати двічі по  $\xi$ , то отримаємо

$$\eta'' = \left( -\frac{1}{4}\chi^{-\frac{5}{4}}\chi'' + \frac{5}{16}\chi^{-\frac{9}{4}}\chi'^2 - h^2\chi^{\frac{3}{4}} \right) e^{ih\chi^*} . \quad (2.39)$$

Порівняння з рівнянням (15) показує, що рішення є хорошим наближенням, якщо перші два члени в дужках малі в порівнянні з третім членом. Звідси випливає умова застосування рішення

$$\frac{1}{4} \frac{\chi''}{\chi^2} - \frac{5}{16} \frac{\chi'^2}{\chi^3} \ll h^2 . \quad (2.40)$$

Функції  $\chi$ ,  $\chi'$ , и  $\chi''$  були дані рівностями (31), (34) и (36) відповідно. Підстановки дають

$$\frac{1}{4} \frac{\chi''}{\chi^2} = \frac{36eq^2}{(q+2e)^5}, \quad (2.41)$$

При

$$q = f_{\text{ст}}^3 . \quad (2.42)$$

Аналогічно

$$\frac{5}{16} \frac{\chi'^2}{\chi^3} = \frac{10q(e-q)^2}{(q+2e)^5}, \quad (2.43)$$

Так як

$$\frac{d}{dq} \frac{1}{4} \frac{\chi''}{\chi^2} = 36 e \frac{4eq-3q^2}{(q+2e)^6}, \quad (2.44)$$

Та

$$\frac{d}{dq} \left( \frac{5}{16} \frac{\chi'^2}{\chi^3} \right) = \frac{20(e-q)(q^2-5eq+e^2)}{(q+2e)^6}, \quad (2.45)$$

то умова для екстремуму виразу в лівій частині нерівності (2.40) має вигляд

$$\left( \frac{q}{e} \right)^3 - 11,4 \left( \frac{q}{e} \right)^2 + 13,2 \frac{q}{e} - 1 = 0. \quad (2.46)$$

Корені цього кубічного рівняння будуть

$$\begin{aligned} \frac{q_1}{e} &= 0,081446, \\ \frac{q_2}{e} &= 1,215263, \\ \frac{q_3}{e} &= 110,103292. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Відповідні екстремуми виражаються у вигляді

$$\begin{aligned} q_1 &= -0,0115e^{-2}, \\ q_2 &= +0,15309e^{-2}, \\ q_3 &= -0,0178e^{-2}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

З цих рівностей випливає, що ліва частина нерівності (2.40) не більше  $0,15309e^{-2}$ . Отже, нерівність задовольняється, якщо

$$h^2 \gg 0,15309e^{-2}. \quad (2.49)$$

Якщо  $e = 10^{-2}$ , то  $h^2$  має перевищувати  $10^4$ , а якщо  $e = 10^{-3}$ , то  $h^2$  має перевищувати  $10^6$ . Ці умови завжди задовольняються при звичайних випробуваннях стріжнів.

## 2.2.6 Характер коливань досліджуваної системи

Як видно з рівностей (2.36) і (2.38), характер коливань визначається функцією  $\chi$ . Підставляя вираження для  $1 - \xi$  из уравнения (2.10) в залежність (2.18), знаходимо

$$\chi = \frac{2e + f_{ст.}^3}{2f_{ст.}}. \quad (2.50)$$

Якщо випробувальна машина запускається у момент, коли для стріжня надається навантаження і параметр  $\xi$  заміряється з моменту, коли  $f_{ст.}$  дорівнює  $e$  можна записати

$$\chi = 1 + \frac{e^2}{2}, \quad (\xi = 0) \quad (2.51)$$

що дорівнює трошки більше одиниці.

Похідна від  $f_{ст.}$  може бути обчислена як:

$$\frac{df_{ст.}}{d\xi} = \frac{2f_{ст.}^2}{2e + f_{ст.}^3}. \quad (2.52)$$

За допомогою цього виразу можна здобути похідну від  $\chi$

$$\frac{d\chi}{d\xi} = \frac{2(f_{ст.}^3 - e)}{f_{ст.}^3 + 2e}. \quad (2.53)$$

Якщо похідна дорівнює нулю, маємо екстремальне значення. Звідки отримуємо

$$f_{ст.}^3 = e, \quad (\chi = \chi_{extr}). \quad (2.54)$$



У зв'язку з тим, що друга похідна від  $\chi$

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} = \frac{36ef_{\text{ст.}}^4}{(2e+f_{\text{ст.}}^3)^3}, \quad (2.55)$$

позитивна, залежність  $\chi$  від  $\xi$  всюди має випуклість у верх і обчислювальне значення  $\chi$  будет мінімумом. Величина якого дорівнює (рис. 2.1)

$$\chi_{\min} = \frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}}. \quad (2.56)$$

Відповідне значення  $\xi$  знаходимо з залежності:

$$\xi = 1 - \frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{4}e^2, \quad (\chi = \chi_{\min}). \quad (2.57)$$

Вказані рівняння дозволяють оцінити характер нарощування коливань досліджуваної системи.

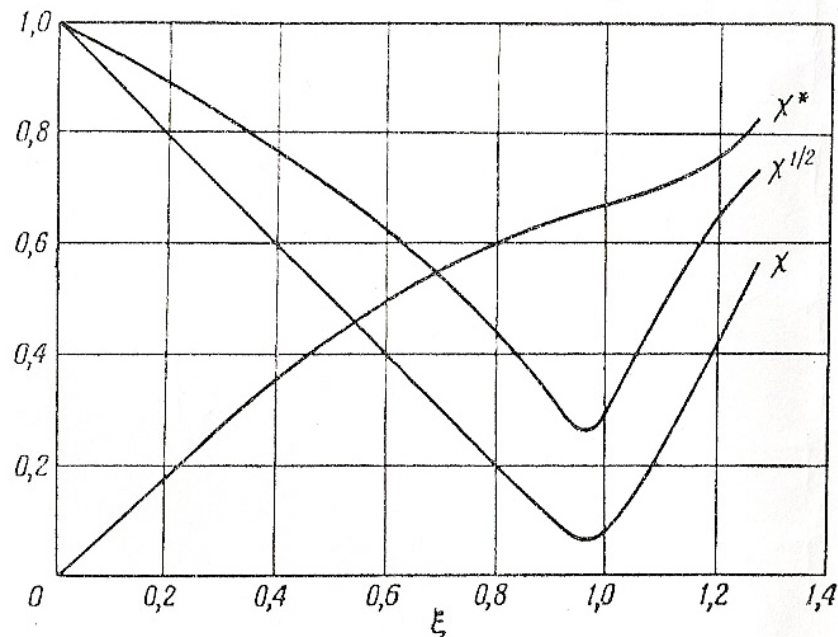


Рисунок. 2.6 — Залежність величин  $\chi$ ,  $\chi^{1/2}$  и  $\chi^*$  від параметру  $\xi$ .

Максимальна амплітуда досягається, звичайно, в той момент, коли  $\chi$  мінімально; отже, максимальне значення величини  $R_a$  може бути обчислено з рівнянь (32), (37) и (28):

$$R_a = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{e^2}{2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{b}}. \quad (2.58)$$

Так як  $\frac{e^2}{2}$  мало в порівнянні з одиницею при всіх випробуваннях стріжнів, то рівняння (2.58) дає гарне наближення

$$R_a \approx 0,9e^{-\frac{1}{b}}. \quad (2.59)$$

Для добре центрованого стріжня значення має порядок  $10^{-3}$ ; тоді

$$R_a \approx 2,85. \quad (2.60)$$

Відрізок безрозмірного часу між двома послідовними максимумами коливань може бути обчислений при визначенні інтеграла з рівняння (29). Так як  $d\xi df_{ст.}$  — монотонна функція, то залежна та незалежна змінні можуть помінятися місцями. Таким чином,  $\chi^*$  може розглядатися як функція  $f_{ст.}$  і як складна функція  $\xi$ . Ми можемо записати

$$\chi^* = \int_e^{f_{ст.}} \chi^2 \frac{d\xi}{df_{ст.}} df_{ст.} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \int_e^{f_{ст.}} \sqrt{\left(\frac{1}{f_{ст.}}\right)^5 (2e + f_{ст.}^3)^3} df_{ст.}. \quad (2.61)$$

Якщо ввести позначення

$$z = \frac{f_{ст.}^3}{2e} \quad \text{або} \quad f_{ст.} = (2ez)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.62)$$

і помітити, що

$$f_{\text{ст.}} = e \quad \text{при} \quad z = \frac{e^2}{2}, \quad (2.63)$$

то підстановка в рівняння (2.61) дає

$$\chi^* = \frac{1}{3\sqrt{2}} \int_{e^2}^z \sqrt{\left(\frac{1+z}{z}\right)^3} dz. \quad (2.64)$$

Невизначений інтеграл буде

$$\int_e^{f_{\text{ст.}}} \sqrt{\left(\frac{1+z}{z}\right)^3} dz = (z-2) \sqrt{\frac{1+z}{z}} + 3 \ln \ln (\sqrt{z} + \sqrt{1+z}). \quad (2.65)$$

При підстановці нижньої межі де  $z = \frac{e^2}{2}$  значення цього інтеграла буде

$$\left(\frac{e^2}{2} - 2\right) \sqrt{1 + \frac{2}{e^2}} + 3 \ln \ln \sqrt{\frac{e}{\sqrt{2}}} + \sqrt{1 + \frac{e^2}{2}}, \quad (2.66)$$

так як  $e$  завжди мало, то можна вважати

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{2} - 2 &\approx -2, & \frac{e}{\sqrt{2}} + \sqrt{1 + \frac{e^2}{2}} &\approx 1, \\ 1 + \frac{2}{e^2} &\approx \frac{2}{e^2}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Таким чином, наближене значення інтеграла при підстановці нижньої межі має вигляд

$$-2 \frac{\sqrt{2}}{e} + 3 \ln \ln 1 = -\frac{2\sqrt{2}}{e}.$$

Отже,

$$\chi^* = \frac{2}{3} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \left[ (z-2) \sqrt{\frac{1+z}{z}} + 3 \ln \ln (\sqrt{z} + \sqrt{1+z}) \right]. \quad (2.68)$$

Цей вираз можна переписати в попередніх позначеннях  $f_{ст}$  :

$$\chi^* = \frac{2}{3} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{f_{ст.}^3}{2e} - 2 \right) \sqrt{1 + \frac{2e}{f_{ст.}^3}} + 3 \ln \ln \left( \sqrt{\frac{f_{ст.}^3}{2e}} + \sqrt{1 + \frac{f_{ст.}^3}{2e}} \right) \right]. \quad (2.69)$$

Крім того, маємо

$$\xi = 1 - \frac{e}{f_{ст.}} + \frac{1}{4} (f_{ст.}^2 - e^2). \quad (2.70)$$

Якщо  $e$  дано, то значення  $f_{ст.}$  можна вибрати, а відповідні значення  $\chi^*$  і  $\xi$  можуть бути обчислені. Це було зроблено для  $e = 0,01$ ; результати зображені графічно на фіг. 1. Зазначимо, що мінімум  $\chi$  настає при  $(f_{ст.}/e) = 21,6$ .

Поблизу  $\chi_{min}$  (і  $\xi=1$ ) значення  $d\chi^*/d\xi$  складає близько 0,3; тому з рівняння (2.70) випливає, що відрізок безрозмірного часу  $X$ , укладений між послідовно наступаючими максимумами коливання, незадовго перед втратою стійкості дорівнює

$$X = \frac{2\pi}{0,3h} \approx \frac{20}{h}. \quad (2.71)$$

Час  $T$  дорівнює

$$T = \frac{\varepsilon_E L}{c} X. \quad (2.72)$$

Коли  $h=10^4$ , рівняння (2.71) дає  $X = 2 \cdot 10^{-3}$ . Якщо прийняти  $L = 25$  см,  $\varepsilon_E = 10^{-3}$  та  $c=5 \cdot 10^{-3}$  см/сек, то рівняння (2.72) дає

$$T = 0,01 \text{ сек}. \quad (2.73)$$

Зазначимо, що ця величина не буде дійсним періодом, оскільки інтервал між сусідніми максимумами повільно змінюється з часом.

Виходячи з отриманих даних, ми укладаємо, що рух ідеально пружного стержня в випробувальній машині можна уявити як статичну рівновагу, на яку накладені швидкі коливання. Частота цього коливання велика і повільно змінюється у процесі навантаження; амплітуда зростає від початку процесу приблизно до досягнення ейлерового переміщення  $\zeta = 1$ , а потім починає зменшуватися, але відношення амплітуд у звичайних умовах випробування, по-видимому, не може перевищити 3.

Наведемо доказ того, що  $f_{ст.}$  є малою величиною в порівнянні з параметром  $\eta$ .

Друга похідна від  $f_{ст.}$

$$\frac{d^2 f_{ст.}}{d\xi^2} = \frac{4f_{ст.}^3(4e - f_{ст.}^3)}{(2e + f_{ст.}^3)^3}, \quad (2.74)$$

має екстремум, якщо

$$f_{ст.}^6 - 12ef_{ст.}^3 + 8e^2 = 0. \quad (2.75)$$

Перший екстремум-максимум настає, коли

$$f_{ст.} = 0,891e^{\frac{1}{3}}. \quad (2.76)$$

Його величина

$$(f_{ст.}'')_{max} = 0,469e^{-1}. \quad (2.77)$$

Відповідне значення  $\xi$

$$\xi = 1 - 0,924e^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{4}e^2. \quad (2.78)$$

буде трохи менше одиниці для значень  $c$ , звичайних при випробуванні стріжнів. Другий екстремум буде порядку  $\xi$  і не представляє практичного інтересу при звичайних випробуваннях стріжнів.

Максимум  $f''_{ст.}$  слід порівняти з мінімумом  $\eta''$ . Диференціюючи рівняння (28) по  $\xi$ , отримуємо

$$\eta'' = -C^* h^2 \chi^{\frac{3}{4}} \sin \sin (h\chi^* - \varphi^*) + O(h). \quad (2.79)$$

Символ  $O(h)$  позначає члени, які містять  $h$ ,  $\chi$ ,  $\chi'$  и  $\chi''$ . Оскільки максимум останнього

$$\chi''_{max} = 1,45e^{-\frac{2}{3}}, \quad (2.80)$$

при

$$f_{ст.}^3 = \frac{8}{5} e. \quad (2.81)$$

а максимальні значення  $\chi$  і першої її похідної рівні наближено до одиниці, то можна знехтувати членами, представленими  $O(h)$  в рівнянні (2.79), коли досліджується порядок величини  $\eta''$  для звичайного випробування стріжня.

Мінімум  $\chi$  було визначено раніше. З рівняння (37) маємо

$$\chi_{min}^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}} e^{\frac{1}{2}}, \quad (2.82)$$

отже, мінімум амплітуди  $\eta''$  буде:

$$1,306h^2 e^{\frac{1}{2}} C^* .$$

Якщо початкове обурення буде порядку  $e$ , то умова, щоб  $\eta''$  було завжди велике в порівнянні  $f''_{ст.}$ , виражається так:

$$1,306h^2 e^{\frac{3}{2}} \gg 0,469e^{-1}, \quad (2.83)$$

це можна записати у наступній формі:

$$2,78h^2e^{\frac{5}{2}} \gg 1. \quad (2.84)$$

Нерівність задовольняється, якщо  $e=10^{-3}$  и  $h^2 \geq 10^{-9}$ , а також, якщо  $e = 10^{-2}$  та  $h \geq 10^6$ .

### 3 ЗАСТОСУВАННЯ ВКБ-ВАРІАЦІЙНОГО ПІДХОДУ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ

#### 3.1 Модельна задача на власні значення

Розглянемо задачу про власні коливання неоднорідної системи з однією ступеню свободи. Для побудови її наближених розв'язків – власних значень (частот) та власних функцій (форм коливань) застосуємо ВКБ-варіаційний підхід.

Почнемо із варіаційної задачі на екстремум функціоналу

$$V[u(x)] = -\frac{1}{2} \int [(u')^2 - \lambda^2 f(x)u^2] dx, \quad (3.1)$$

де  $f(x) > 0$  при  $x \in [k; 1]$ ;

$\lambda$ - власне значення (частота коливань системи),

$u = u(x)$  - власна функція (відхилення системи від положення рівноваги),

Функція  $u(x)$  задовольняє на кінцях інтервалу  $[k; 1]$  граничним умовам, які будуть сформульовані нижче.

Диференціальне рівняння, яке необхідно проінтегрувати є рівнянням Ейлера для функціоналу (3.1) і має в даному випадку вигляд:

$$u'' + \lambda^2 f(x)u = 0. \quad (3.2)$$

Граничні умови для рівняння (3.2) оберемо, наприклад, такими:

$$u'(k) = 0, u(1) = 0. \quad (3.3)$$

Перше з умов (3.3) відповідає вільному «краю» системи (відсутність повороту нормалі), друге – закріпленню (відсутність переміщень).

Рівняння (3.2) лише в ряді випадків має точні аналітичні розв'язки, а в загальному випадку при довільності функції  $f(x)$  їх не існує.



Виявляється, що в задачах на власні значення «малим» параметром при похідних доцільно обирати зворотну до власного значення величину. Так перепишемо (3.2) в нашому випадку у вигляді:

$$\varepsilon^2 u'' + f(x)u, \quad (3.4)$$

де

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (3.5)$$

Наявність у рівнянні (3.4) параметру  $\varepsilon$  при старшій похідній дає можливість будувати його наближений розв'язок за допомогою ВКБ методу у вигляді розвинення [19]:

$$u(x) = \exp \int_k^x (\varepsilon^{-1} \psi_0 + \psi_1 + \dots) dt, \quad (3.6)$$

де координати функції  $\psi_i$   $i=0,1,\dots$  підлягають визначенню.

Підстановка двочленного розвинення (3.6) у рівняння (3.4) та розщеплення по  $\varepsilon$  приводить до рекурентної системи рівнянь відносно невідомих функцій  $\psi_0$  та  $\psi_1$ . Її розв'язками будуть:

$$\psi_0 = \pm i f^{\frac{1}{2}}(x), \quad (3.7)$$

$$\psi_1 = -\frac{1}{4} [\ln(f(x))]' . \quad (3.8)$$

Наближений ВКБ-розв'язок вихідного рівняння (3.2) тоді набуде вигляду:

$$u_{WKB} = f^{-\frac{1}{4}}(x) [C_1 \cos(\lambda \int_k^x f^{\frac{1}{2}} dt) + C_2 \sin(\lambda \int_k^x f^{\frac{1}{2}} dt)], \quad (3.9)$$

де  $C_1, C_2$  – довільні постійні.

Підкоримо розв'язок (3.9) граничним умовам задачі (3.3), що дасть характеристичне рівняння для визначення власних чисел  $\lambda$ :

$$\lambda \operatorname{ctg} \left( \int_k^x f^{\frac{1}{2}} dx \right) = -\frac{1}{4} f'(k) f^{-\frac{3}{2}}(k), \quad (3.10)$$

а також залежність між довільними постійними, наприклад, у вигляді:

$$C_2 = -C_1 \operatorname{ctg} \left( \int_k^1 f^{\frac{1}{2}} dx \right).$$

Остаточно наближений ВКБ-розв'язок (власні функції) крайової задачі (3.2), (3.3) набуває вигляду:

$$u_{WKB} = \frac{C_1}{f^{\frac{1}{4}}(x)} \cdot \frac{\sin \left( \lambda_m \int_x^1 f^{\frac{1}{2}} dt \right)}{\sin \left( \lambda_m \int_k^1 f^{\frac{1}{2}} dt \right)}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3.11)$$

де відповідні власні значення  $\lambda_m$  визначаються рівнянням (3.10).

Як показує практика, точність ВКБ-розв'язків для власних значень  $\lambda$  значно залежить від величини нижньої границі  $k$ . При малих  $k$  отримані за допомогою ВКБ методу результати мають незадовільну точність порівняно з результатами, що знайдені, наприклад, чисельним методом.

З метою поліпшення власних значень  $\lambda_m$ , знайдених на попередньому кроці, застосуємо методику ВКБ-варіаційного підходу.

Гібридне розвинення зобразимо у вигляді:

$$\bar{u}(x) = \exp \int_k^x (\delta_0 \psi_0 + \delta_1 \psi_1) dt, \quad (3.12)$$

де  $\delta_0, \delta_1$  – невідомі параметри;

$\psi_0$  та  $\psi_1$  - визначені формулами (3.7).

Загальний гібридний розв'язок, побудований на основі розвинення (3.12) набуває вигляду:

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{f^{\delta_1/4}} [A_1 \cos(\delta_0 \int_k^x f^{\frac{1}{2}} dt) + A_2 \sin(\delta_0 \int_k^x f^{\frac{1}{2}} dt)], \quad (3.13)$$

де  $A_1, A_2$  – довільні постійні.

Параметри  $\delta_0, \delta_1$ , нагадаємо, поки що невідомі. Вони мають бути саме такими, щоб гібридний розв'язок (3.13) як найближче відповідає «точному» розв'язку крайової задачі.

Помітимо також, що при  $\delta_0 = \lambda, \delta_1 = 1$ , розв'язок (3.13) з точністю до довільних постійних співпадає із ВКБ-розв'язком (3.9). Тобто ВКБ-розв'язок є частковим випадком гібридного розв'язку.

Підкоривши (3.13) граничним умовам задачі (3.3) отримаємо рівняння типа характеристичного (3.10), яке в даному випадку пов'язує параметри  $\delta_0, \delta_1$ :

$$\delta_0 \operatorname{ctg}(\delta_0 \int_k^1 f^{\frac{1}{2}} dx) = -\frac{\delta_1}{4} f'(k) f^{-\frac{3}{2}},$$

звідки

$$\delta_1 = \frac{4\delta_0 \operatorname{ctg}(\delta_0 \int_k^1 f^{\frac{1}{2}} dx)}{f'(k) f^{-\frac{3}{2}}(k)}. \quad (3.14)$$

Крім того, з граничних умов також встановлюємо залежність постійних  $A_1, A_2$  розв'язку (3.13). Так, наприклад:

$$A_2 = -A_1 \operatorname{ctg}\left(\int_k^1 f^{\frac{1}{2}} dx\right).$$

Отже, остаточно, гібридний розв'язок (1.11) набуває вигляду:

$$\bar{u}_H(x) = \frac{1}{f^{\frac{\delta_1}{4}}(x)} \cdot \frac{\sin(\delta_0 \int_x^1 f^{\frac{1}{2}} dt)}{\sin(\delta_0 \int_k^1 f^{\frac{1}{2}} dx)}, \quad (3.15)$$

де  $\delta_1 = \delta_1(\delta_0)$  визначається виразом (3.14).

Гібридний розв'язок (3.15) задовольняє граничним умовам задачі (3.3), а також априорі є наближеним розв'язком рівняння (3.2). Він, таким чином, попадає до одно параметричного сімейства припустимих кривих (тобто вибір кривої сімейства визначається лише параметром  $\delta_0$ ) варіаційної задачі для функціонала (3.1).

Підстановка  $\bar{u}_H(x)$  у функціонал (3.1) при кожному відомому власному значенні  $\lambda_m$  (корені рівняння (3.10)) перетворює останній на функцію параметру  $\delta_0$ , тобто

$$V[\bar{u}_H(x)] = \varphi(\delta_0),$$

а достатня умова існування екстремуму  $\partial V = 0$  функціоналу (3.1) перетворюється на рівняння:

$$\phi'(\delta_0) = 0. \quad (3.16)$$

Розв'язком рівняння (3.16) при конкретному значенні  $\lambda_m$ , визначеному на першому кроці при застосуванні методу ВКБ-наближень (позначимо його  $\lambda_{WKB}$ ), саме і буде «уточнене» власне значення  $\delta_0$  (позначимо його  $\lambda_H$ ). Тобто

$$\lambda_H = \delta_0. \quad (3.17)$$

### 3.2 Опис гібридного ВКБ-варіаційного підходу

Розв'язується крайова задача для лінійного диференціального рівняння порядку  $n$  зі змінними коефіцієнтами і безрозмірним параметром збурення  $\varepsilon$

$$\varepsilon^n [y^{(n-1)} + \dots + p_1 y'] + q(x, \varepsilon)y = 0, \quad (3.18)$$

де функція  $q(x, \varepsilon) \neq 0$  на інтервалі  $x \in [a; b]$ .

Граничні умови задачі:

$$\begin{aligned} y(a) = A_0, y'(a) = A_1, \dots, y^{n/2-1}(a) = A_{n/2-1}, \\ y(b) = B_0, y'(b) = B_1, \dots, y^{n/2-1}(b) = B_{n/2-1}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

До рівнянь вигляду (1.2) може бути зведена значна кількість задач статичного і динамічного деформування неоднорідних тонкостінних конструкцій. Безрозмірний параметр  $\varepsilon$  виникає в рівнянні задачі природно при введенні безрозмірних змінних, представляючи собою, наприклад, власну частоту коливань, відношення найменшого до найбільшого лінійних розмірів конструкції, і т.п. Малими параметрами в теорії оболонок можуть виступати такі величини, як відношення товщини оболонки до радіуса, відношення нормального прогину до радіуса, відношення згінних жорсткостей конструктивно-ортотропної оболонки.

Метод фазних інтегралів (ВКБ-наближень) є ефективним засобом побудови наближених розв'язків рівнянь зазначеного типу. Відповідно до методу розв'язок рівняння (1.2) шукається у вигляді формального розвинення:

$$y(x) \exp \int \sum_{j=0} \varepsilon^{j-1} \psi_j dx, \quad (3.20)$$

де  $\{\psi_j\}$  – послідовність функцій, члени якої можна визначити після підстановки розвинення (1.3) у вихідне рівняння (1.1) та подальшого розв'язання рекурентної системи рівнянь відносно  $\{\psi_j\}$ .

Треба відзначити, що у випадку рівнянь вищих порядків визначення членів  $\{\psi_j\}$ ,  $j > 1$  розвинення (1.3) є досить трудомістким. Тому в прикладних задачах звичайно обмежуються визначенням нульового і першого членів ВКБ-розвинення (1.3), що при малих  $\varepsilon$  забезпечує задовільну точність побудованого на основі розвинення (1.3) ВКБ-розв'язку рівняння (1.1).

При розв'язанні задачі (1.1), (1.2) методом ВКБ-наближень виникають по меншій мірі два важливих питання:

а) яка область ефективного застосування отриманих ВКБ-розв'язків за параметром  $\varepsilon$  ;

б) як поліпшити ВКБ-розв'язки, якщо  $\varepsilon$  перестає бути малим.

Згідно з [9] «Якщо при  $\varepsilon \rightarrow 0$  має місце змістовна асимптотика, тоді при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  також можна одержати деякий розумний асимптотичний процес».

Отже, спроба відповісти на поставлені питання у сукупності із даним принципом саме і наводять на ідею гібридного підходу, який запропоновано у даній роботі.

Наведемо методику поліпшення розв'язків крайової задачі (3.18), (3.19), що побудовані на основі використання методу ВКБ-наближень.

Формальне «уточнююче» розвинення розв'язку задачі (3.18), (3.19) (назвемо його гібридним) задамо у вигляді:

$$\bar{y}(x) = \exp \int \sum_{j=0}^N \delta_j \psi_j dx , \quad (3.21)$$

де  $\{\psi_j\}$  знайдені  $N+1$  «координатних» функцій розвинення (3.20);

$\{\delta_j\}$  – невідомі параметри, що підлягають визначенню.

Вони мають бути саме такими, що розв'язок  $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N)$  побудований на основі розвинення (3.21), «якнайближче відповідав би точному розв'язку вихідної задачі». Сформулюємо принцип визначення параметрів  $\{\delta_j\}$ ,  $j=0..N$  гібридного розв'язку.

В основі цього принципу лежить ідея заміни вихідної крайової задачі (3.18),

(3.19) варіаційною задачею про екстремум функціонала, для якого рівняння (3.18) є в загальному випадку рівнянням Ейлера-Пуассона.

Отже, якщо функціонал  $V[y(x), \varepsilon]$  є функціоналом, дослідження якого на екстремум реалізує рівняння (3.18), а гібридний розв'язок  $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N)$  є розв'язком крайової задачі (3.18), (3.19), то при будь-яких невідомих значеннях  $\delta_0, \dots, \delta_N$  розв'язок  $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N)$  потрапляє до  $N$ -параметричного сімейства припустимих функцій варіаційної задачі, тобто функцій на яких функціонал  $V[y(x), \varepsilon]$  може досягати екстремуму.

При підстановці  $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N)$  у функціонал  $V[y(x), \varepsilon]$ , останній стає функцією  $N$  змінних

$$V[\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N), \varepsilon] = \varphi(\delta_0, \dots, \delta_N). \quad (3.22)$$

Дослідження на екстремум  $V[y(x), \varepsilon]$  перетворюється на дослідження екстремуму функції  $\varphi(\delta_0, \dots, \delta_N)$ . Необхідна умова існування екстремуму функціонала

$$\delta V[y(x), \varepsilon] = 0,$$

таким чином, еквівалентна системі рівнянь

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \delta_0} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial \delta_1} = 0, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial \delta_N}. \quad (3.23)$$

Розв'язавши систему (3.23) можна одержати набір  $\delta_0^*, \delta_1^*, \dots, \delta_N^*$ , при якому на функції  $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N)$  досягається екстремум функціонала  $V[y(x), \varepsilon]$ . Сама функція  $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N)$  при цьому буде шуканим гібридним розв'язком крайової задачі (3.18), (3.19), який збігається із точним розв'язком незалежно від величини параметру  $\varepsilon$ .

Тут необхідно зробити зауваження. У випадку коли задача (3.18), (3.19) являє собою крайову задачу на власні функції і власні значення наведена вище методика побудови «уточнюючого» гібридного розв'язку потребує модифікації [6].

### 3.2.1 Розв'язок задачі на власні значення для частинного випадку

Розглянемо розв'язок задачі на власні значення для функції  $f(x)=x^2$ :

Рівняння, яке необхідно проінтегрувати має вигляд:

$$u'' + \lambda^2 x^2 u = 0. \quad (3.24)$$

Граничні умови для рівняння (1.1) оберемо, наприклад, такими:

$$u'(k) = 0, u(1) = 0. \quad (3.25)$$

Перше з умов (3.25) відповідає вільному «краю» системи (відсутність повороту нормалі), друге – закріпленню (відсутність переміщень).

Перепишемо (3.24) у вигляді:

$$\varepsilon^2 u'' + x^2 u, \quad (3.26)$$

де

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Наявність у рівнянні (3.26) параметру  $\varepsilon$  при старшій похідній дає можливість будувати його наближений розв'язок за допомогою ВКБ методу у вигляді розвинення:

$$\bar{u}(x) = \exp \int_k^x (\delta_0 \psi_0 + \delta_1 \psi_1) dt \quad (3.27)$$

де координати функції  $\psi_i$   $i=0, 1, \dots$  підлягають визначенню.

Підставим двочленне розвинення (3.27) у рівняння (3.26):

$$\varepsilon^2 [\varepsilon^{-2} \psi_0^2 + 2\varepsilon^{-1} \psi_0 \psi_1 + \psi_1^2 + (\varepsilon^{-1} \psi_0 + \psi_1')] + x^2 = 0.$$



Спростуючи, одержимо:

$$\psi_0^2 + 2\varepsilon\psi_0\psi_1 + \varepsilon^2\psi_1^2 + \varepsilon\psi_0' + \varepsilon^2\psi_1' + x^2 = 0.$$

Розщеплення по  $\varepsilon$  приводить до рекурентної системи рівнянь відносно невідомих функцій  $\psi_0$  та  $\psi_1$ :

$$\begin{cases} \psi_0^2 + x^2 = 0, \\ 2\psi_0\psi_1 + \psi_0' = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

З (3.28) виразимо  $\psi_0$  та  $\psi_1$ :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \pm ix, \\ \psi_1 &= -\frac{\psi_0'}{2\psi_0} = -\frac{1}{4}[\ln x^2]. \end{aligned}$$

Тоді наближений ВКБ-розв'язок вихідного рівняння (3.24) набуде вигляду:

$$u_{\text{ВКБ}} = x^{-\frac{1}{2}} \left[ C_1 \cos \left( \lambda \int_0^x (t^2)^{\frac{1}{2}} dt \right) + C_2 \sin \left( \lambda \int_0^x t^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right] = x^{-\frac{1}{2}} \left[ C_1 \cos \left( \frac{\lambda x^2}{2} \right) + C_2 \sin \left( \frac{\lambda x^2}{2} \right) \right], \quad (3.29)$$

де  $C_1, C_2$  – довільні постійні.

Підкоримо розв'язок (3.29) граничним умовам задачі (3.25):

$$u(1) = 0:$$

$$C_1 \cos \left( \frac{\lambda}{2} \right) + C_2 \sin \left( \frac{\lambda}{2} \right) = 0; \quad (3.30)$$

$$u'(k) = 0:$$

$$\left[ -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \left[ C_1 \cos\left(\frac{\lambda x^2}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\lambda x^2}{2}\right) \right] + x^{-\frac{1}{2}} \left[ -C_1 \lambda \sin\left(\frac{\lambda x^2}{2}\right) + C_2 \lambda \cos\left(\frac{\lambda x^2}{2}\right) \right] \right] \Big|_{x=k} =$$

$$= C_1 \times \left[ -\frac{1}{2}k^{-\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\lambda k^2}{2}\right) - k^{\frac{1}{2}} \lambda \sin\left(\frac{\lambda k^2}{2}\right) \right] + C_2 \left[ -\frac{1}{2}k^{-\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{\lambda k^2}{2}\right) + k^{\frac{1}{2}} \lambda \cos\left(\frac{\lambda k^2}{2}\right) \right] = 0. \quad (3.31)$$

Складемо визначник з (3.30) і (3.31):

$$\left| -\frac{1}{2}k^{-\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\lambda k^2}{2}\right) - k^{\frac{1}{2}} \lambda \sin\left(\frac{\lambda k^2}{2}\right) - \frac{1}{2}k^{-\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{\lambda k^2}{2}\right) + k^{\frac{1}{2}} \lambda \cos\left(\frac{\lambda k^2}{2}\right) \right| = 0.$$

Розв'язуючи його і застосовуючи тригонометричні формули для синуса різниці та косинуса різниці, отримаємо:

$$\left[ -\frac{1}{2}k^{-\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\lambda k^2}{2}\right) - k^{\frac{1}{2}} \lambda \sin\left(\frac{\lambda k^2}{2}\right) \right] \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \left[ -\frac{1}{2}k^{-\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{\lambda k^2}{2}\right) + k^{\frac{1}{2}} \lambda \cos\left(\frac{\lambda k^2}{2}\right) \right] \cos\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{1}{2}k^{-\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{\lambda k^2}{2} - \frac{\lambda}{2}\right) - k^{\frac{1}{2}} \lambda \cos\left(\frac{\lambda k^2}{2} - \frac{\lambda}{2}\right) = 0,$$

$$k^{\frac{1}{2}} \lambda \cos\left(\frac{\lambda k^2}{2} - \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{1}{2}k^{-\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{\lambda k^2}{2} - \frac{\lambda}{2}\right).$$

Розділимо обидві частини рівняння на  $\sin\left(\frac{\lambda k^2}{2} - \frac{\lambda}{2}\right)$ , отримаємо:

$$k^{\frac{1}{2}} \lambda \operatorname{ctg}\left(\frac{\lambda k^2}{2} - \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{1}{2}k^{-\frac{3}{2}},$$

$$\lambda \operatorname{ctg}\left(\frac{\lambda k^2}{2} - \frac{\lambda}{2}\right) - \frac{1}{2k^2} = 0. \quad (3.32)$$

Знайдемо корені цього рівняння:  $k \neq 0, k \neq 1$ , при  $k = 2$  отримаємо

$$\lambda_1 = 3,11485$$

$$\lambda_2 = 5,22003$$

Остаточно наблизений ВКБ розв'язок крайової задачі (3.16), (3.25) набуде вигляду:

$$u_{WKB,1} = \frac{C_1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sin\left(\lambda_1 \int_x^1 t dt\right)}{\sin\left(\lambda_1 \int_k^1 x dx\right)} = \frac{C_1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sin\left(3,11485\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right)\right)}{\sin\left(3,11485\left(\frac{1}{2} - \frac{k^2}{2}\right)\right)},$$

$$u_{WKB,2} = \frac{C_1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sin\left(\lambda_2 \int_x^1 t dt\right)}{\sin\left(\lambda_2 \int_k^1 x dx\right)} = \frac{C_1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sin\left(5,22003\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right)\right)}{\sin\left(5,22003\left(\frac{1}{2} - \frac{k^2}{2}\right)\right)}.$$

### 3.3 Власні коливання круглої пластини радіально змінної товщини

В даному підрозділі розглянемо постановку крайової задачі про власні поперечні коливання круглої пластини із центральним отвором та радіально змінною товщиною і можливість застосування ВКБ-варіаційного підходу до її розв'язання.

Задача у варіаційній постановці може бути зведена до крайової задачі для диференціального рівняння четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами [5, 14]. У такого рівняння за винятком окремих випадків не існує замкнутого аналітичного розв'язку.

Ефективність використання в цьому випадку ВКБ-варіаційного підходу полягає в тому, що він дозволяє одержати наблизений аналітичний розв'язок задачі (власні функції і власні частоти) для будь-якого невідомого закону зміни товщини, оцінити вплив цього закону на форми і частоти коливань, забезпечуючи при цьому необхідну точність результатів.

### 3.3.1 Варіаційна постановка задачі

Отже, потенціальна та кінетична енергія власних коливань круглої пластини змінної товщини із зовнішнім радіусом  $a$  та центральним отвором радіусу  $b$  як функціонали від функції поперечного прогину  $W = W(r, \theta, t)$  відповідно мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Pi_1 = \frac{1}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} D(r) \{ (\nabla^2 W)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \left( \frac{\partial W}{r \partial r} + \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} \right) - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \theta} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial W}{r \partial \theta} \right)^2 \right] \} r dr d\theta, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\Pi_2 = \frac{\rho}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} h(r) \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 r dr d\theta, \quad (3.34)$$

де  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2}$  – оператор Лапласу в полярних координатах;

$D(r) = \frac{Eh^2(r)}{12(1-\nu^2)}$  – змінна циліндрична жорсткість;

$h(r) = h_0 \varphi(r)$  – змінна уздовж радіальної координати  $r$  товщина пластини;

$h_0$  – номінальна товщина пластини, для якої виконується умова теорії тонких пластин  $\frac{h_0}{a} < \frac{1}{5}$ ;

$\varphi(r)$  – додатна функція зміни товщини, така що  $\varphi(r) < 1$  для  $r \in [b; a]$ ;

$E$  – модуль Юнга;

$\nu$  – коефіцієнт Пуассона;

$\rho$  – щільність матеріалу пластини.

Варіаційний принцип Остроградського – Гамільтона

$$\delta \Phi[W(r, \theta, t)] = \delta \int_{t_0}^{t_1} (\Pi_1 - \Pi_2) dt = 0, \quad (3.35)$$

дозволяє отримати рівняння коливань пластини та природні граничні умови.

Здійснимо стандартну процедуру переходу до безрозмірних змінних:

$$\tilde{W} = \frac{W}{a}, x = \frac{r}{a}, t = \frac{t}{T},$$

де  $T$  – характерний параметр часу, який визначається рівнянням

$$12\rho a^4(1 - v^2)/ET^2h_0^2 = 1.$$

Розподілення змінних у функції безрозмірного прогину

$$\tilde{W}(x, \theta, t) = U(x)e^{in\theta}e^{i\omega t},$$

де  $\omega$  - власна безрозмірна частота;

$n$  – кількість вузлових діаметрів, призведе до трансформації варіації (3.35) у

$$\delta\Phi[U(x)] = 0. \quad (3.36)$$

Функціонал  $\Phi[U(x)]$  у (3.36) з точністю до множника має вигляд

$$\begin{aligned} \Phi[U(x)] = \frac{1}{2} \int_{b/a}^1 [\varphi^3(ax) \{ & \left( U'' + \frac{U'}{x} - \frac{n^2 U}{x^2} \right)^2 - 2(1 - v) \left[ U'' \left( \frac{U'}{x} - \frac{n^2 U}{x^2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{n^2}{x^2} \left( U' - \frac{U}{x} \right)^2 \right] + \omega^2 \varphi(ax) U^2] x dx. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Варіація (3.36) реалізує для функціонала (3.37) рівняння Ейлера-Пуассона вигляду:

$$\varepsilon^4 [U^{(4)} + \alpha_2 U''' + \alpha_3 U'' + \alpha_4 U'] - [\omega^2 \varphi^{-2}(ax) - \alpha_5(x)] U = 0, \quad (3.38)$$

де

$$\varepsilon^4 = \frac{1}{\omega^2},$$

$$\alpha_2(x) = 2x^{-1} + \frac{[\varphi^3(ax)]'}{\varphi^3(ax)},$$

$$\alpha_3(x) = -(2n^2 + 1)x^{-2} + (2 + \nu)x^{-1} \frac{[\varphi^3(ax)]'}{\varphi^3(ax)} + \frac{[\varphi^3(ax)]''}{\varphi^3(ax)},$$

$$\alpha_4(x) = -(2n^2 + 1)x^{-3} + (2n^2 + 1)x^{-2} \frac{[\varphi^3(ax)]'}{\varphi^3(ax)} + \nu x^{-1} \frac{[\varphi^3(ax)]''}{\varphi^3(ax)},$$

$$\alpha_5(x) = -(n^4 + 4n^2)x^{-4} + 3n^2x^{-3} \frac{[\varphi^3(ax)]'}{\varphi^3(ax)} + \nu n^2x^{-2} \frac{[\varphi^3(ax)]''}{\varphi^3(ax)},$$

а також природні граничні умови.

На зовнішньому радіусі будемо розглядати, наприклад, умови жорсткого закріплення

$$U(x) = 0, U'(x) = 0, \text{ при } x = 1, \quad (3.39)$$

на внутрішньому – умови шарнірного опирання

$$U(x) = 0, \quad U''(x) + \nu \left( \frac{U'(x)}{x} - \frac{n^2 U(x)}{x^2} \right) = 0, \text{ при } x = \frac{b}{a}. \quad (3.40)$$

Для розв'язання даної задачі може бути застосований ВКБ-варіаційний підхід, розглянутий вище.

## ВИСНОВКИ

В роботі надано аналітичний огляд сучасного стану застосування аналітико-чисельних підходів до розв'язку задач динаміки систем із змінними параметрами, розглянуто крайові задачі на власні значення та побудована математична модель задачі про коливання неоднорідної пружної системи. За допомогою ВКБ-варіаційного підходу розв'язано модельну задачу про власні коливання неоднорідної механічної системи із одним ступенем свободи. Застосовуючи гібридний ВКБ-варіаційний підхід, побудовано наближені замкнуті аналітичні розв'язки високого ступеню точності.

Як показали дослідження, застосування аналітико-чисельного підходу на базі асимптотичних (особливо уточнюючих гібридних методів) є достатньо ефективним і полягає в тому, що він дозволяє одержати наближений аналітичний розв'язок задачі для заданого закону зміни коефіцієнтів, оцінити його на форми і частоти коливань, забезпечуючи при цьому необхідну точність результатів.

**ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ**

1. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов. Москва. 1965. 235 с.
2. Geer J., Andersen C. A hybrid perturbation-Galerkin method for differential equations containing a parameter. Hempton, Virginia, USA. 1989.
3. Andrianov I.V., Awrejcewicz J. New trends in asymptotic approaches: summation and interpolation method. Germany. 2001. 54 с.
4. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва. 1968. 464с.
5. Чезари А. Асимптотическое поведение и устойчивость решений. Москва. 1964. 477 с.
6. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва. 1963. 412 с.
7. Крылов Н. М., Боголюбов М. М. Введение в нелинейную механику. Киев. 1937. 364 с.
8. Еругин Н. П., Штокало И. З., Бондаренко П. С. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Киев. 1974. 472 с.
9. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. Москва. 1973. 272с.
10. Найфэ А. Введение в методы возмущений. Москва. 1984. 536 с.
11. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. Москва. 1964. 432 с.
12. Митропольский Ю. О., Мосеєнков Б. І., Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи). Київ. 1961. 122 с.
13. Аникьев И. И., Михайлова М. И., Сущенко Е. А. О возможности неразрушающего определения критической нагрузки конструкций стержневого типа. Киев. 1994. 80-85 с.
14. Штокало И. З. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Киев. 1960. 76 с.



15. Грищак В.З. Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування. Запоріжжя. 2009. 225 с.
16. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов. Москва. 1965. 238 с.
17. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. Москва. 1981. 400 с.
18. Ганилова О. А., Грищак В. З. Дослідження поведінки тришарової ортотропної пластинки під дією динамічного навантаження. Актуальні проблеми математики та інформатики: регіонал. наук. конференція молодих дослідників. Київ. 2007. 34-39 с.
19. Steele C. R. Application of the WKB Method in Solid Mechanics. New York. 1976. 243-295 с.
20. Молчанов И. Н. Машинные методы решения прикладных задач. Дифференциальные уравнения. Киев. 1988. 344с.
21. Грищак В.З., Ганилова О.А. К решению проблемы динамического деформирования пьезоэлектрических многослойных пластин на основе гибридного ВКБ-Галеркин метода. Киев. 2008. 13-20 с.
22. Geer J.F.; Andersen C.M. Hybrid Perturbation-Galerkin Method for Differential Equations Containing a Parameter. USA. 1991. 460-463 с.
23. Geer J.F., Andersen C.M. A hybrid perturbation - Galerkin technique with applications to slender body Theory. Hempton, Virginia, USA. 1989. 344-361 с.
24. Geer J.F., Andersen C.M. Investigating a hybrid perturbation - Galerkin technique using computer algebra. Hempton, Virginia, USA. 1988. 25 с.
25. Geer J.F., Andersen C.M. A hybrid perturbation - Galerkin technique with combines multiple expansions. Hempton, Virginia, USA. 1989. 36 с.
26. Geer J.F., Andersen C.M. A hybrid perturbation - Galerkin method for differential equations containing a parameter. Hempton, Virginia, USA. 1989. 28 с.
27. Geer J.F., Andersen C.M. A hybrid perturbation - Galerkin technique for partial differential equations. Hempton, Virginia, USA. 1990. 25 с.
28. Noor A.K., Andersen C.M., Peters J.M. Global - local approach for nonlinear shell analysis. Washington U., St. Louis, USA. 1979. 634-657 с.

29. Noor A.K., Andersen C.M., Peters J.M. Reduced basis technique for collapse analysis of shells. Hempton, Virginia, USA. 1981. 393-397 с.
30. Грищак В.З. Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування. Запоріжжя. 2009. 225 с.
31. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Москва. 1988. 352 с.
32. Parvu P. Galerkin method for integration of the movement equations of an airplane. Bucharest. 1993. 200-211 с.
33. Андреев Л.В. Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами. Москва. 1988. 195 с.
34. Закатанов Л. Т. Модифицированный метод Галеркина - Петрова для моделирования полупроводниковых приборов на основе метода конечных элементов. Москва. 1992. 85-98 с.