МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра загальної та прикладної фізики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«МАТЕМАТИЧНА ПІДТРИМКА ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИХ ГУРТКІВ У ЗАКЛАДАХ ПОЗАШКІЛЬНОЇ ОСВІТИ»**

Виконав студент: 2 курсу, групи 8.0141-ф
спеціальності 014 Середня освіта
(шифр і назва спеціальності)
предметної спеціальності 014.08 Середня освіта (Фізика)
освітньої програми Середня освіта (Фізика)
Д. С. Шалатов
(ініціали та прізвище)

Керівник завідувач кафедри загальної та прикладної фізики, професор, доцент, доктор педагогічних наук Андрєєв А. М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри природничих дисциплін для іноземних студентів та токсикологічної хімії Запорізького державного медичного університету,доцент, кандидат педагогічних наук Філіпенко І. І.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет Математичний

Кафедра загальної та прикладної фізики

Рівень вищої освіти Магістр

Спеціальність 014 Середня освіта

Освітня програма Середня освіта (Фізика)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
загальної та прикладної фізики,
професор, доцент, доктор пед. н.
_______________ **Андрєєв А.М.**
(підпис)

« _____ » __________ 2022р.

З А В Д А Н Н Я
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ (СТУДЕНТЦІ)

Шалатову Денису Сергійовичу
(прізвище, ім'я та по батькові)

1. Тема роботи Математична підтримка фізико-технічних гуртків у закладах позашкільної освіти

керівник роботи Андрєєв Андрій Миколайович, д. пед. наук, доцент
(прізвище, ім'я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 16 » вересня 2022 року № 1206-С

2. Строк подання студентом роботи 14.11.2022

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Основні теоретичні відомості;
2. Матеріали та методи дослідження;
3. Результати та їх обговорення;
4. Висновки.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень): презентація.

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	**завдання прийняв**

7. Дата видачі завдання 03.06.2022

К А Л Е Н Д А Р Н И Й П Л А Н

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	17.06.2022	
2.	Збір вихідних даних.	04.07.2022	
3.	Обробка методичних та теоретичних	11.07.2022	
	джерел.		
4.	Розробка першого та другого розділу.	22.08.2022	
5.	Розробка третього розділу.	01.10.2022	
6.	Оформлення та нормоконтроль	09.11.2022	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	14.12.2022	

Студент ____________ Д. С. Шалатов
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ____________ А.М. Андрєєв
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ____________ О.В. Смоляков
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Математична підтримка фізико-технічних гуртків у закладах позашкільної освіти»: 82 с., 14 рис., 2 табл., 77 джерел.

ЗАКЛАД ПОЗАШКІЛЬНОЇ ОСВІТИ, КРИТИЧНЕ МИСЛЕННЯ, КРИТИЧНИЙ АНАЛІЗ, МІЖПРЕДМЕТНІ ЗВ'ЯЗКИ, МАТЕМАТИЧНА ПІДТРИМКА, ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ГУРТОК, STEM-ОСВІТА.

Об’єкт дослідження – навчальний процес з фізики у фізико-технічних гуртках закладів позашкільної освіти.

Предмет дослідження: методичні засади проведення навчальних занять з фізики у фізико-технічних гуртках закладів позашкільної освіти.

Мета роботи: обґрунтування методичних засад математичної підтримки фізико-технічних гуртків у закладах позашкільної освіти.

Методи дослідження – аналітичний, емпіричний.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в розробці методичних засад критичного аналізу наукових статей, розвитку критичного мислення гуртківців та застосування ними математичного апарату у процесі розв’язування задач на заняттях фізико-технічних гуртків закладів позашкільної освіти.

Практичне значення дослідження визначається тим, що розроблені методичні засади розв’язання фізичних задач для розвитку критичного мислення із застосуванням математичного апарату і критичного аналізу наукових статей можна використовувати на заняттях фізико-технічних гуртків закладів позашкільної освіти в процесі підготовки вихованців до конкурсів та олімпіад з фізики (у тому числі і за дистанційної форми навчання).

SUMMARY

Master's Qualification Thesis «Mathematical support of physical and technical circles in out-of-school education institutions»: 82 pages, 14 figures, 2 tables, 77 references.

INSTITUTION OF OUT-OF-SCHOOL EDUCATION, CRITICAL THINKING, CRITICAL ANALYSIS, INTERSUBJECT CONNECTIONS, MATHEMATICS SUPPORT, PHYSICAL AND TECHNICAL GROUP, STEM EDUCATION.

The object of study – the educational process in physics in physical and technical circles of out-of-school education institutions.

Purpose: substantiation of the methodological foundations of mathematical support of physical and technical circles in out-of-school education institutions.

The methods of research – analytical, empirical.

The scientific novelty of the obtained results lies in the development of methodological principles for the critical analysis of scientific articles, the development of critical thinking of group members and their use of mathematical apparatus in the process of solving problems in the classes of physical and technical groups of out-of-school education institutions.

The practical significance of the research is determined by the fact that the developed methodological principles of solving physical problems for the development of critical thinking with the use of mathematical apparatus and critical analysis of scientific articles can be used in the classes of physical and technical circles of out-of-school education institutions in the process of preparing students for competitions and physics olympiads (including distance education).

ЗМІСТ

ВСТУП

У ході проведення занять у фізико-технічних гуртках закладів позашкільної освіти відбувається підготовка вихованців до олімпіад, конкурсів, а також до виконання та захисту науково-дослідницьких робіт Малої академії наук України.

Робота таких гуртків, у порівнянні зі загальноосвітніми навчальними закладами має такі переваги: вихованці гуртка є мотивованими, знають, навіщо їм потрібні ці заняття, вони ціленаправлено займаються інтелектуальною роботою, для них є важливим не лише результат, а й сам процес дослідження; середній рівень підготовки вихованців достатньо високий, вони вміють вчитися, що дозволяє керівнику гуртка підвищувати складність матеріалу; вихованці можуть навчатися нестандартним підходам, наприклад при розв’язку задач не тільки за допомогою керівника, але й у інших вихованців (досить часто такий підхід є більш оптимальним ніж звичайний); навчання у гуртку може мати деякі ознаки змагання, бо у вихованців є можливість порівнювати свої досягнення та досягнення інших гуртківців; керівник гуртка в меншій степені «зв’язаний» навчальною програмою, що дозволяє більш гнучко та ефективно оперувати навчальним часом [1].

Проте, як виявилося, керівники фізико-технічних гуртків зіткнулися з проблемою відставання шкільної програми математики від шкільної програми з фізики, що утруднює підготовку гуртківців до олімпіад та конкурсів, а також до виконання та підготовки до захисту науково-дослідницьких робіт Малої академії наук України з фізики.

Отже, актуальною є проблема розробки методичного забезпечення математичної підтримки занять у фізико-технічних гуртках закладів позашкільної освіти.

Метою роботи є обґрунтування методичних засад математичної підтримки фізико-технічних гуртків у закладах позашкільної освіти.

Для досягнення зазначеної мети поставлено такі завдання:

1. На основі методичної та педагогічної літератури з'ясувати методичні особливості проведення гурткових занять з фізики у закладах позашкільної освіти.

2. Розробити методичні засади розвитку критичного мислення вихованців фізико-технічних гуртків у закладах позашкільної освіти.

3. Розробити методичні засади математичної підтримки фізико-технічних гуртків у закладах позашкільної освіти.

4. Впровадити в навчальний процес фізико-технічного гуртка запропоновані методичні засади і перевірити їх ефективність.

Об'єкт дослідження – навчальний процес з фізики у фізико-технічних гуртках закладів позашкільної освіти.

Предмет дослідження: методичні засади проведення навчальних занять з фізики у фізико-технічних гуртках закладів позашкільної освіти.

Мета роботи: обґрунтування методичних засад математичної підтримки фізико-технічних гуртків у закладах позашкільної освіти.

Методи дослідження – аналітичний, емпіричний.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в розробці методичних засад критичного аналізу наукових статей, розвитку критичного мислення гуртківців та застосування ними математичного апарату у процесі розв'язування задач на заняттях фізико-технічних гуртків закладів позашкільної освіти.

Практичне значення дослідження визначається тим, що розроблені методичні засади розв'язання фізичних задач для розвитку критичного мислення із застосуванням математичного апарату і критичного аналізу наукових статей можна використовувати на заняттях фізико-технічних гуртків закладів позашкільної освіти в процесі підготовки вихованців до конкурсів та олімпіад з фізики (у тому числі і за дистанційної форми навчання).

Результати дослідження були апробовані на XV університетській науково-практичній конференції студентів, аспірантів, докторантів і молодих вчених «Молода наука-2022», яка відбулася 18-22 квітня 2022 року [2]; XXVI Міжнародній науково-практичній конференції «Problems of science and practice, tasks and ways to solve them», яка відбулася 5-8 липня 2022 року [3]; III Міжнародній науково-практичній інтернет-конференції «Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації», яка відбулася 30 вересня 2022 року [4], а також на науково-методичному засіданні кафедри загальної та прикладної фізики ЗНУ (протокол № 4 від 29.11.2022).

За результатами дослідження було опублікована науково-методична стаття [5].

Кваліфікаційна робота магістра містить: вступ, три розділи, висновки, перелік посилань (77 джерел), 14 рисунків, 2 таблиці.

1 ТЕОРЕТИЧНО-МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДТРИМКИ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИХ ГУРТКІВ ЗАКЛАДІВ ПОЗАШКІЛЬНОЇ ОСВІТИ

1.1 Фізико-технічні гуртки як складова позашкільної освіти

Поняття «позашкільна освіта» визначається у [6] як сукупність знань, умінь та навичок, що здобувають вихованці, учні і слухачі в закладах позашкільної освіти, інших суб’єктах освітньої діяльності за програмами позашкільної освіти. Також позашкільна освіта є невід’ємним складником системи освіти [7].

Згідно з [6] «закладом позашкільної освіти є складова системи позашкільної освіти, яка надає знання, формуючи вміння та навички за інтересами, забезпечує потреби особистості у творчій самореалізації та інтелектуальний, духовний і фізичний розвиток, підготовку до активної професійної та громадської діяльності, створює умови для соціального захисту та організації змістовного дозвілля відповідно до здібностей, обдарувань та стану здоров'я вихованців, учнів і слухачів».

У цьому ж документі дається визначення таких понять:

– «вихованці – це особи, які відвідують творчі об'єднання, клуби, гуртки, секції закладу позашкільної освіти за інтересами, нахилами та здібностями, отримують допрофесійну підготовку;

– учні – це особи, які відвідують класи та інші творчі об'єднання закладу позашкільної освіти, в яких навчально-виховна робота організована у формі класно-урочної чи іншої системи;

– слухачі – це особи, які проводять дослідницьку, пошукову та експериментальну роботу з різних проблем науки, техніки, мистецтва.

– освітня діяльність закладу позашкільної освіти – це процес надання знань, формування навичок і вмінь з різних напрямів позашкільної освіти, розвитку творчих та інтелектуальних здібностей, фізичних якостей відповідно до запитів та задатків особи» [6].

Нині позашкільна освіта є невід’ємним складником системи освіти України і визнається як владою, так і громадськістю, як необхідний складник розвитку особистості дитини, її громадянського становлення і професійного самовизначення. Також позашкільна освіта надає дітям додаткові можливості для інтелектуального, духовного та фізичного розвитку, а також сприяє актуалізації освітніх і творчих потреб. Одночасно з цим у дітей формується соціально-комунікативна компетентність, відбувається становлення соціальної зрілості та відповідальності [8].

Згідно зі статистичними даними [9] Міністерства освіти і науки України, станом на 01.01.2021 року у нашій країні працював 1 351 заклад позашкільної системи освіти, де навчалося близько 1 млн. 138 тис. вихованців та слухачів. Працювало понад 15 тис. гуртків та творчих об’єднань науково-технічного і дослідницько-експериментального напрямів позашкільної освіти, представлених, серед інших, діяльністю фізико-технічних гуртків.

Разом з поняттям «позашкільна освіта» часто пов'язуються такі слова «освіта», «культура», «особистість», «держава», «заклад», «вільний час», «творчість», «самореалізація» тощо. Значення ж самого цього терміна зводиться до організованої державою системи розвитку людини як особистості у закладах позашкільної освіти.

У відомому Українському педагогічному словнику [10] позашкільна освіта визначається як «сукупність форм культурно-освітньої, загальноосвітньої та виховної роботи серед дорослого населення. В Україні почала розвиватися в другій половині XIX ст. Позашкільною освітою займалися освітні товариства, земства, профспілки (після 1905), недільні школи, народні будинки, народні університети та інші культурно-освітні установи».

Узагальнюючи вищевказане, можна визначити позашкільну освіту, як систему, у якій відбувається процес послідовного опанування дітьми та молоддю додаткових знань, умінь та навичок у позанавчальний час і подальше застосування їх на практиці. Ключовою рисою позашкільної освіти є задоволення потреб дитини у її творчій самореалізації та соціалізації, забезпечення проведення вільного часу з користю, гарантування стабільного емоційного, фізичного та інтелектуального розвитку дитини, формування її компетентностей.

У [11] було встановлено, що основні джерела права і регулювання правовідносин у сфері позашкільної освіти та діяльності фізико-математичних гуртків представлено законами та нормативно-правовими актами, що стосуються:

– міжнародного права (наприклад Декларація прав дитини (1959), Конвенція ООН про права дитини (1989) [12], Всесвітня декларація про забезпечення виживання, захисту і розвитку дітей (1990) [13], тощо);

– національного права (Закон України «Про освіту» (1991, 2017) [7], Закон України «Про позашкільну освіту» (2000) [6], Закон України «Про охорону дитинства» (2001) [14], Концепція позашкільної освіти та виховання (1996), Положення про позашкільний навчальний заклад (2001) [15]) [11].

Проблеми позашкільної освіти та діяльності її закладів освітлювали у своїх наукових напрацюваннях класики педагогіки, як от В. Вахтеров, К. Вентцель, Й. Гербарт, Я. Коменський, М. Пирогов, С. Русова, Ж-Ж. Руссо, К. Ушинський та ін. Натомість основні положення щодо позашкільної освіти у своїх працях розглядали сучасні українські вчені: О. Биковська, Я. Биковський [11], В. Берека [16], В. Вербицький [17, 18], О. Єгорова [19], Г. Пустовіт [20, 21]. О. Савенко [22], Т. Сущенко [23, 24], С. Уварова [25], Л. Яременко [26] та ін.

Історичні аспекти розвитку позашкільної освіти детально розглянуто у [27]. Визначено, що перші позашкільні заклади були організовані на початку XX століття, а їх діяльність в першу чергу була пов’язана з культурно-просвітницькою роботою. Позашкільна робота, виникнувши як самостійна діяльність, набула педагогічного статусу завдяки розмаїттю видів, форм демократичної організації дітей та молоді, які спиралися на прогресивні традиції народної педагогіки. Перша половина ХХ століття стала часом, коли остаточно сформувалася система позашкільної виховної роботи та позашкільної освіти, що надало можливість стимулювати й розвивати здібності та інтереси дітей в сфері мистецтва, живопису, техніки, туризму, фізкультури і спорту. Також у цей період визначилися типи позашкільних навчальних закладів – спеціалізовані та комплексні (багатопрофільні) [27].

У [20, 21] професор Г. П. Пустовіт наголошує про актуальність проблеми сучасних трактувань понять, термінів та різних класифікаційних ознак у галузі позашкільної освіти та виховання. Зокрема автор визначає систему позашкільної освіти як упорядковану у логічній єдності інструктивно-методичну, суспільно-масову, освітньо-виховну та просвітницьку діяльність закладів позашкільної освіти різного типу та інших освітніх закладів, що функціонують як позашкільні центри в позаурочний й позанавчальний час [20]. Крім того, дослідник зосереджує свою увагу на теоретико-методичних основах екологічної освіти та виховання учнів у позашкільних навчальних закладах [21].

У роботі [8] здійснено теоретичне узагальнення і запропоноване нове вирішення наукової задачі обґрунтування організаційно-педагогічних засад управління багатопрофільним закладом позашкільної освіти на засадах дитиноцентризму і менеджменту.

Автор також інтерпретує зміст поняття «позашкільна освіта» як здобуття позашкільної освіти слухачами та вихованцями (учнями) за власним бажанням і у вільно обраний час, для досягнення результатів навчання та набуття ключових компетентностей за навчальними програмами з позашкільної освіти у закладах різних типі і в інших суб’єктах освітньої діяльності одночасно з основною (дошкільною, повною загальною середньою, професійною або професійно-технічною) освітою [8].

Висвітленню шляхів формування креативного мислення особистості дитини в позашкільному закладі присвячена робота [28]. Доводиться, що в позашкільних закладах існують широкі можливості створення сприятливих умов для розвитку креативного мислення дитини. Наголошується на тому, що саме позашкільна освіта відкриває для дитини вільний вибір освітньої сфери, виду, типу та форми діяльності, що забезпечує умови для самовизначення й самореалізації особистості. Дослідженнями показано, що система позашкільної освіти спрямована на: особистісне зростання дитини; її вдосконалення та розвиток у вибраному виді діяльності, тобто предметно-діяльнісній сфері; індивідуалізованість і варіативність програм (розробка індивідуального маршруту розвитку креативного мислення); добровільність і вибірковість в отриманні додаткової освіти; підвищення її функціональної грамотності [28].

У [11] була проведена спроба дослідити питання діяльності фізико-математичних гуртків закладів позашкільної освіти та педагогічних умов їх ефективної діяльності.

Зокрема було відмічено, що фізико-математичні гуртки як складник системи закладів позашкільної освіти є об’єднанням вихованців, учнів і слухачів відповідно до своїх здібностей та інтересів у сфері фізики і математики. Також було показано, що освітній процес у фізико-математичному гуртку закладу позашкільної освіти спрямований на розвиток особистості у процесі опанування фізики, математики, науки та технології.

Також у процесі цього дослідження було виявлено, що фізико-математичні гуртки функціонують як у комплексних, так і в профільних закладах позашкільної освіти. Серед яких можна виокремити палаци, центри, будинки або клуби дітей, юнацтва та молоді, дитячої та юнацької творчості, науково-технічної творчості, станції юних техніків, Мала академія наук тощо.

Автор наголошує, що в залежності від особливостей організації освітнього процесу, фізико-математичні гуртки закладів позашкільної освіти можуть належати до науково-технічного або дослідницько-експериментального напрямів позашкільної освіти, працюючи за основним та/або вищим рівнями [11].

Науково-технічний напрям позашкільної освіти – напрям, який забезпечує набуття вихованцями (учнями і слухачами) техніко-технологічних умінь та навичок, розширення наукового світогляду, підготовку до активної науково-дослідної роботи, оволодіння сучасною технікою та технологіями

Дослідницько-експериментальний напрям позашкільної освіти – напрям, який сприяє залученню вихованців (учнів і слухачів) до науково-дослідницької, експериментальної, конструкторської та винахідницької роботи в різних галузях науки, техніки, культури і мистецтва, а також створенню умов для творчого самовдосконалення та виявлення, розвитку і підтримки юних талантів та обдарувань [6].

У [29] розглянуто історичні аспекти створення системи позашкільної освіти в Україні, її сучасний стан та проблеми становлення, різні погляди на феномен дитячої обдарованості, питання виховання і розвитку дітей в системі позашкільної освіти за допомогою всесвітньої мережі Інтернет. А також обґрунтовано цілі та завдання створення моделі навчально-виховного простору як всього позашкільного закладу, так і його структурних підрозділів. Розглядається використання надсучасної технології web 2.0, яка дозволяє створити потужний навчально-виховний простір, що об’єднає між собою усіх суб’єктів навчального-виховного процесу.

У посібнику [30] висвітлено основні питання теорії і методики позашкільної освіти, позаурочної роботи, та досвід організації такої роботи. Окреслено історичні аспекти розвитку позашкільної освіти, наведено методи, структуру, управління та науково-методичне забезпечення позашкільної освіти. Натомість робота [31] присвячена дослідженню соціально-педагогічної діяльності у позашкільних навчальних закладах.

У статті [32] охарактеризовано традиційні (передбачають функціонування гуртків позашкільного закладу на базі загальноосвітніх шкіл) та інноваційні (презентує модель єдиного позашкільного простору в рамках функціонування шкіл повного дня, в яких відслідковується реальне місце позашкільної освіти в організації допрофільної підготовки і профільного навчання старшокласників) напрями розвитку інтеграційного процесу загальноосвітніх та позашкільних навчальних закладів у сучасній освіті. Зазначено окремі підходи формування готовності педагогів до професійної діяльності в умовах такої інтеграції. Зазначено, що розробка методичного супроводу з означеної вище проблеми може реалізуватися декількома шляхами:

– через організацію дослідно-експериментальної діяльності в рамках ТНДК, за результатами діяльності якого будуть запропоновані конкретні моделі, методики, технології, програми тощо;

– через реалізацію науково-методичної роботи в системі інституту післядипломної педагогічної освіти через районний, міський методичний кабінет (центр) та навчальні заклади, які передбачатимуть діяльність творчих груп, організацію семінарів, вивчення, узагальнення та поширення досвіду роботи з означеної проблеми, розробку проєктів, методичних рекомендацій; по-третє, розгляд проблеми на курсах підвищення кваліфікації; по-четверте, у процесі самоосвіти [32].

Стаття [33] присвячена дослідженню теоретичних і методологічних основ професійного розвитку педагогічних працівників позашкільних закладів освіти. Виокремлено характерні ознаки професійної компетентності педагога позашкільного закладу та розроблено підходи до визначення професійної характеристики керівника гуртка. Вказано, що у новому освітньому просторі професійна компетентність педагога позашкільного навчального закладу передбачає розвиток таких функцій, як інформативна (знати), діяльнісна (могти), креативна (володіти) та розвивальна (бути).

1.2 Математична підтримка та STEM-освіта у фізико-технічних гуртках

Математична підтримка фізики може бути виражена у вигляді STEM-освіти як у закладах шкільної, так і позашкільної освіти. Українська Державна наукова установа «Інститут модернізації змісту освіти» констатує: «STEM (S – science, T – technology, E – engineering, M – mathematics). Акронім STEM вживається для позначення популярного напряму в освіті, що охоплює науку (Science), технології (Technology), технічну творчість (Engineering) та математику (Mathematics). Це напрям в освіті, при якому в навчальних програмах посилюється природничонауковий компонент + інноваційні технології. Технології використовують навіть у вивченні творчих, мистецьких дисциплін» [34].

Там же зазначається: «STEM-освіта спрямована на розвиток особистості через формування компетентностей, природничо-наукової картини світу, світоглядних позицій і життєвих цінностей з використанням міждисциплінарного підходу до навчання, який базується на практичному застосуванні наукових, математичних, технічних та інженерних знань і вмінь для розв'язання практичних проблем для подальшого використання їх у професійній діяльності».

Державна наукова установа «Інститут модернізації змісту освіти», враховуючи світові тенденції в освіті, розроблює Методичні рекомендації щодо розвитку STEM-освіти в закладах загальної середньої та позашкільної освіти на кожен наступний навчальний рік починаючи з 2017 року. Зокрема у документі [35] на 2022/2023 н.р. зазначається, що «освіта повинна бути випереджувальною, відповідати тенденціям розвитку суспільства в майбутньому, тому особлива увага на сьогодні приділяється інноваційному напряму STEM-освіті. Впровадження STEM-освіти здійснюється з урахуванням таких принципів: особистісний підхід, спрямований на врахування вікових, індивідуальних особливостей здобувачів освіти, їх інтересів та здібностей, особливих освітніх потреб; наступність – формування необхідних компетентностей на всіх складниках та рівнях освіти; постійне оновлення змісту освіти з урахуванням досягнень науки, розвитку технологій та вимог ринку праці; ... продуктивна мотивація здобувачів освіти до провадження науково-дослідницької та проєктної діяльності, винахідництва; істотна роль математики в інтегративному підході реалізації STEM-освіти, послідовне, ґрунтовне, якісне її викладання; спонукання до формування та розвиток «гнучких навичок» у здобувачів освіти (навичок презентації, роботи в групі, комунікації); використання технологій розвивального та проблемного навчання; розвиток закладів спеціалізованої освіти наукового спрямування» [35].

У [36] виокремлюються проблеми природничо-математичної STEM-освіти та наводиться Концепція розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти), яка «спрямована на модернізацію природничо-математичної освіти (STEM-освіти), широкомасштабне її впровадження на всіх складниках та рівнях освіти; встановлення партнерства з роботодавцями та науковими установами для залучення їх до розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти)».

Цей документ також містить таке визначення природничо-математичної освіти (STEM-освіти). Це «цілісна система природничої і математичної освітніх галузей, метою якої є розвиток особистості через формування компетентностей, природничо-наукової картини світу, світоглядних позицій і життєвих цінностей з використанням трансдисциплінарного підходу до навчання, що базується на практичному застосуванні наукових, математичних, технічних та інженерних знань для розв’язання практичних проблем для подальшого використання цих знань і вмінь у професійній діяльності» [36].

Аналіз змісту ключових понять STEM, які є основоположними в розумінні сутності нового освітнього напряму проведено у [11, 37].

У дослідженнях [38] поняттю STEM з освітньої точки зору надають значення різноманітної діяльності, яка зазвичай включає заміну традиційних лекційно-орієнтованих стратегій викладання більшою кількістю досліджень і проєктних підходів. STEM – це не лише інтеграція природничих наук, фізики, техніки та математичних навчальних планів, які більш тісно пов’язані в роботі реального вченого або інженера, це ще й поштовх до випуску більшої кількості студентів у галузі природничих наук, технології, інженерії та математики. Дослідники також наголошують на важливості поширення передового досвіду цього напрямку та необхідності створення єдиної концепції STEM-освіти, однак побоюються, що усі її варіанти надто різноманітні, щоб помістити їх у занадто вузькі рамки, а універсальний підхід навряд чи спрацює з сильними сторонами кожної ініціативи STEM.

У [37] зазначено, що STEM-підхід в освіті ґрунтується на конструюванні навчальних дисциплін і окремих дидактичних елементів на міждисциплінарних засадах (інтегроване навчання відповідно до певних тем, а не окремих дисциплін) із застосуванням новітніх освітніх технологій: когнітивних, соціальних і трансферу знань.

У роботі [39] розглянуто основні особливості сучасної STEM-освіти, такі як: інтегроване навчання, розвиток навичок критичного мислення та розв’язання проблем, командна робота й активна комунікація, креативні та інноваційні підходи до створення проєктів, підготовка дітей до різних технологічних інновацій, практичне застосування науково-технічних знань у реальному житті. А також проаналізовано теоретико-методологічні засади створення моделі STEM-освіти, що полягають у переході від традиційного навчання до інноваційного шляхом використання проєктного, практико-орієнтованого навчання, перевернутого та змішаного навчання, хмарних технологій та технології web 2.0.

У статті [40] розглядається проблема STEM-освіти в контексті підвищення якості природничо-математичної грамотності учнів. Встановлено стан сформованості природничо-математичної грамотності учнів як уміння застосовувати знання для вирішення практичних завдань для реалізації STEM-освіти. Наведено приклади практично-орієнтованих інтегрованих завдань з географії, хімії, біології та фізики, які розкривають можливості STEM-освіти. Дослідниками проаналізовано успішність виконання індивідуальних завдань, які передбачали предметну інтеграцію та використання знань на практиці. Виокремлено найважливіші фактори, що впливають на якість STEM-освіти: професійний рівень вчителів, матеріально-технічне та навчально-методичне забезпечення, мотивація учнів, практико-орієнтований зміст освіти. За результатами моніторингового дослідження підготовлено рекомендації закладам загальної середньої освіти щодо подальшого впровадження STEM-освіти.

Праця [41] присвячена розгляду різниці між технічними навичками, що стосуються основних правил математики і зазвичай розвиваються на уроках математики, та структурними навичками, які пов'язані зі здатністю розпізнавати структурну роль математики у фізичній думці. Дослідники вважають, що одним з найважливіших умінь для розуміння явищ у сфері фізики є вміння використовувати математику як інструмент міркування. З цієї причини вони розглянули, як фізики використовують цей структурний підхід у дидактичному контексті. Уроки фізики в університеті, проведені видатним професором з електромагнетизму та спеціальної теорії відносності, були записані на відео, щоб дослідити структурний підхід у реальних ситуаціях у класі. Аналіз цих уроків дозволив дослідникам визначити набір із чотирьох структурних навичок, які визначені та наведені на прикладі:

- математизація (від фізики до математики)
- інтерпретація (від математики до фізики)
- виведення (логіка/дедуктивне міркування)
- аналогія (приховані подібності) [41].

Враховуючи перспективність STEM-освіти у ході даного дослідження можна висловити доцільність її застосування в діяльності фізико-технічних гуртків закладів позашкільної освіти.

1.3 Розвиток критичного мислення та формування базових компетентності при роботі з вихованцями фізико-технічного гуртка

У книзі [42] критичне мислення визначається як використання когнітивних технік або стратегій, які збільшують імовірність отримання бажаного кінцевого результату та відрізняється контрольованістю, обґрунтованістю та ціленаправленістю. А навички, які використовуються при цьому, мають бути обґрунтованими та ефективними для конкретної ситуації і типу задачі, що розв’язується. Також для критичного мислення є характерним побудова логічних ланцюжків, створення узгоджених між собою логічних моделей та прийняття обґрунтованих рішень щодо того, відхилити якесь судження, погодитися з ним або тимчасово відкласти його розгляд. Критичне мислення також повинно включати в себе оцінку самого процесу мислення – ходу міркувань, які і привели нас до наших висновків, або тих факторів, які ми враховували при прийнятті рішення [42].

У статті [1] охарактеризовано такі функції критичного мислення: відслідковування логічної правильності суджень; перевірка переконливості аргументації й доказів; оцінка походження знання та його достовірності; конструювання й дослідження альтернативних шляхів вирішення різних проблем.

Особливу увагу автори приділяють формуванню критичного мислення при підготовці до інтелектуальних змагань на заняттях гуртка з фізики та відзначають труднощі, з якими зустрічається шкільний вчитель при підготовці до таких змагань:

- недостатня кількість годин;
- практична відсутність можливості повернення до раніше вивченого матеріалу, якщо це не передбачено навчальною програмою;
- зниження загального рівня викладання відповідно до середнього рівня підготовки учнів;

– рівень підготовки вчителів не завжди досить високий, щоб підготувати учнів до олімпіад III та IV етапів.

Автори наводять переваги роботи міжшкільного гуртка при підготовці до олімпіад з фізики: вихованці гуртка є мотивованими, мають високий рівень підготовки з фізики, використовують нестандартні підходи до навчання, мають можливість порівнювати свої досягнення з іншими тощо. Також у статті представлено організацію заняття міжшкільного гуртка з фізики відповідно до технології розвитку критичного мислення [1].

У дослідженні [43] проводилося визначення рівня навичок критичного мислення студентів на тему «Імпульс і момент імпульсу». Причинами труднощів студентів у виконанні тесту автор називає: обмежену здатність студентів формулювати поняття та знаходити альтернативні розв’язання, а після надання відповідей студентам складно зробити висновки та зв’язати зміст матеріалу, який не вивчався глибоко, тому студенти, як правило, були легковажним у складанні тестів. Розв’язання цієї проблеми, за словами автора полягає в тому, щоб надати учням більше досвіду щодо навичок критичного мислення та додаткового навчання в позаурочний час.

Стаття [44] містить мета-аналіз, що узагальнює результати дослідження впливу проблемного навчання на покращення критичного мислення учнів на предметах фізики, хімії та біології. Також більш детальні дослідження критичного мислення проводилися у роботах [45, 46].

У роботі [47] досліджено проблему наявності великої кількості помилок у фізичних виданнях різного рівня (починаючи з інтернет-видань і закінчуючи рекомендаціями МОН України). Дослідник пропонує використовувати подібні помилки для розвитку критичного мислення майбутніх учителів фізико-технологічного профілю та ілюструє деякі приклади, як саме це можна робити, серед яких, зокрема, дві задачі Всеукраїнських олімпіад з фізики. Автор зазначає, що помилки, які присутні у різних джерелах інформації з фізики, слід відкрито обговорювати та використовувати при підготовці учителів фізико-технологічного профілю.

Дослідник впевнений, що така практика дасть потужний ефект як для розвитку критичного мислення, так і відповідального ставлення до своїх обов’язків. Вона запрацює на зменшення проценту браку у роботі авторів задач, підручників, інтернет-сайтів, методичних рекомендацій [47].

Компетентісний підхід у навчанні [48] спрямований на роботу з інформацією та опанування учнями компетентностей, умінь і навичок, які допомагають їм бути успішними, конкурентними та цінними на ринку праці. Згідно з дослідженням [49], проведеним у жовтні-листопаді 2020 року дослідницькою агенцією “Vox Populi Agency” на замовлення Державної служби якості освіти України, найважливішим критерієм якості освіти в Україні вважають опанування компетентностей.

Компетентнісний підхід передбачає не засвоєння учнем окремих одне від одного знань і вмінь, а оволодіння ними в комплексі. Цей підхід означає переорієнтацію домінуючої освітньої парадигми з переважною трансляцією знань, формування навичок на створення умов для оволодіння комплексом ключових компетенцій, що характеризують потенціал особистості [18].

Компетентнісний підхід допомагає формувати здатність випускника до виживання і стійкої життєдіяльності в умовах сучасного багатофакторного соціально-політичного, ринково-економічного, інформаційно та комунікаційно насиченого простору. Цей підхід в сучасних соціально-економічних умовах має особливу актуальність у зв'язку з тим, що формування ключових компетентностей майбутніх фахівців допомагає бути конкурентоспроможними на ринках праці, безкризово і своєчасно пройти особистісну і професійну соціалізацію та адаптацію.

Зокрема у позашкільній освіті компетентнісний підхід ґрунтується на застосуванні в меті, завданнях, змісті, формах та методах позашкільної освіти базових компетентностей особистості [18].

Серед провідних компетентностей, що становлять основу реалізації компетентнісного підходу в позашкільній освіти науково-технічного та експериментально-дослідницького напрямів, автори посібника [17] виділяють такі компетентності:

– пізнавальну, яка забезпечує оволодіння знаннями і поняттями, про культуру, природу, техніку і суспільство та діяльнісну (проєктно-технологічну), що забезпечує формування практичних вмінь та навичок особистості;

– проєктно-технологічну – здатність учнів застосовувати знання, уміння та особистий досвід у предметно-перетворювальній діяльності.

Дослідники у [17] наголошують, що організація гурткової роботи передбачає використання певних прийомів і методів, направлених на активізацію творчих здібностей учнів у технічних та науково-дослідницьких гуртках. Ці прийоми і методи, спрямовані на стимуляцію творчості гуртківців і одночасно сприяють розвитку їхніх творчих здібностей. Вони працюють на становлення творчої особистості вихованця, його готовності до творчої діяльності.

Стаття [50] присвячена проблемі формування пізнавальної самостійності підлітків у науково-технічних гуртках позашкільних навчальних закладів. Подається характеристика її структурних компонентів, педагогічні умови та основні засоби її формування.

У роботі [51] розглядається проблема розвитку критичного мислення суб’єктів навчального процесу. Автори визначають дидактичний потенціал курсу фізики для формування та розвитку критичного мислення суб’єктів навчальної діяльності. У статті показана важливість використання проблемних ситуацій та запитань для розвитку критичного мислення. Наведений взаємозв’язок побудови сучасної картини світу та розвитку критичного мислення тих, хто навчається.

У роботі [52] аргументована можливість використання суперечностей у методиці навчання електродинаміки та парадоксів СТВ як засобів розвитку критичного мислення майбутніх учителів фізики. А також запропоновано та проаналізовано основні положення методики розвитку критичного стилю мислення суб'єктів навчання.

У статті [53] розкрито суть критичного мислення як наскрізного вміння учнів, що формується в процесі навчання різних шкільних предметів, зокрема фізики. Наведено опис найбільш поширених концепцій критичного мислення і структурні компоненти відповідних моделей. Зазначається, що як компетентнісно орієнтована технологія критичне мислення містить: цілі, які відображають знаннєвий компонент, практичні уміння і навички, досвід застосування набутих знань і вмінь у життєвих ситуаціях, нарешті, ціннісні ставлення, сформовані в освітньому процесі. У методичному аспекті на прикладі навчання квантової фізики показані можливості реалізації компетентнісно орієнтованої технології критичного мислення в навчанні фізики.

У статті [54] на підставі проведених досліджень, показано ефективність такої моделі розвитку критичного мислення, що відповідає гіпотетико-дедуктивному спрямуванню освітнього процесу. Наголошується, що у контексті методології навчання слід замінити індуктивно-емпіричний підхід на гіпотетико-дедуктивний. З'ясовано, що це дозволяє значно покращити результати навчання на уроках фізики в 10-11 класах і має наступні переваги з точки зору методики навчання фізики: зміщення акцентів у цілях навчання із засвоєння складних наукових понять на формування в учнів нового типу мислення («мислення вищого порядку»); розвиток в учнів навичок критичного мислення надає їм упевненості у власних силах під час виконання STEM-проєктів.

У статті [55] обґрунтовується застосування проблемних питань фізики для активізації навчальної діяльності та розвитку критичного мислення. На прикладі хвиль де Бройля з'ясовується проблема і дається тлумачення їх фізичного змісту. Наголошується, що пошук розв'язку проблемних питань сприяє набуттю практичних умінь і навичок, що є необхідною умовою компетентності майбутніх спеціалістів.

У статті [56] обґрунтовано важливість формування у школярів критичного мислення і виділені вміння, необхідні для здійснення критичної розумової діяльності. Розглянуто прийоми розвитку критичного мислення при організації різних видів шкільного фізичного експерименту, що спрямовані на досягнення не тільки предметних, а й міжпредметних освітніх результатів.

У статті [57] розкриваються теоретичні та методичні основи організації діяльності учнів з фізики на основі використання технологій критичного мислення в процесі вивчення теми «Основи спеціальної теорії відносності».

Стаття [58] присвячена одному з важливих завдань навчання фізики, що полягає в тому, щоб розвивати критичне мислення учнів, яке тісно пов’язане з математичним; удосконалювати вміння мислити, робити висновки, тобто формувати розумову культуру, що характеризується певним рівнем розвитку мислення.

Тези доповіді [59] присвячені технології розвитку критичного мислення, де пропонується набір конкретних методичних прийомів, які потрібні для використання на різних рівнях освіти, в різних предметних галузях, видах та формах роботи.

Тези доповіді [60] присвячені технології під назвою «Розвиток критичного мислення», яка, за словами автора «дає змогу оволодівти саме такими освітніми результатами, як уміння організовувати діяльність в різноманітних галузях знань з інформаційним потоком». Метою даної технології має стати розвиток розумових навичок і здібностей учнів, які будуть необхідними не лише в навчанні, але й у сучасному житті, а саме: вміння застосовувати відповідно правильні рішення, опрацьовувати інформацію, робити аналіз явищ з різних сторін.

У роботі [61] на конкретних прикладах розкривається один з аспектів створюваної авторами технології навчання фізики, пов’язаний з використанням фізико-математичних аналогій у межах технології розвитку критичного мислення.

У статті [62] викладено деякі методичні рекомендації щодо завдання формування і розвитку критичного мислення в учнів старшої профільної школи, а також напрямками використання ряду Маклорена під час поглибленого вивчення фізики.

Автори дослідження [63] презентують практикум з курсу "Математичний апарат фізики", завдання якого орієнтовані на навчання першокурсників бакалаврату фізичного факультету навичкам критичного мислення і набуття ними досвіду самостійної роботи з навчальним матеріалом.

У статті [64] на прикладі однієї з тем пропедевтичного курсу «Математичний апарат фізики» автори презентують розроблений дидактичний матеріал для організації самостійної роботи першокурсників фізичного факультету університету. «Слайди» із завданнями, що стосуються використання тригонометричних формул під час розв’язування фізичних задач, доповнені розгорнутими коментарями, які містять додаткові вказівки, підказки і вправи. Особлива увага приділена методам перевірки отриманих відповідей.

У роботі [65] зроблено загальний огляд науково-методичних досліджень, проведених під керівництвом автора статті, результати яких використовуються як фактичний матеріал при розгляді однієї з ключових тем спецкурсу «Технологія критичного мислення» для майбутніх учителів фізики.

Підсумовуючи вищесказане, потрібно відзначити важливість математичної підтримки та розвитку критичного мислення як на уроках фізики, так і на заняттях фізико-технічних гуртків позашкільних закладів освіти, зокрема розробки відповідного методичного забезпечення занять.

2 МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ РОЗВИТКУ КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ ВИХОВАНЦІВ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИХ ГУРТКІВ

2.1 Три розв’язки однієї фізичної задачі для розвитку критичного мислення

Розв’язування задач різними способами дозволяє не лише формувати і збагачувати знання математичних і фізичних понять, навички їх застосування на практиці, але й розвиває критичне та нестандартне мислення гуртківців, кмітливість і спостережливість. Отримання однакового результату різними способами, звичайно, не гарантує, що цей результат є правильним. Однак така самоперевірка є корисною у тому випадку, коли в одному зі способів було допущено помилку, яку важко помітити повторним його застосуванням.

На гурткових заняттях є можливість присвятити розв’язуванню однієї задачі набагато більше часу, ніж це можливо на звичайному уроці в школі, і при цьому придумати різні способи розв’язку. Наразі пропонується розглянути три розв’язки однієї фізичної задачі, умова якої така:

«Два тіла кидають із однієї точки з однаковими початковими швидкостями: перше – вертикально вгору, а друге – вертикально вниз. Коли перше тіло досягає найвищої точки, друге торкається землі. Чому дорівнює висота початкової точки над землею, якщо відомо, що перше тіло піднялось на висоту 5 м від початкової точки? [66]»

Попередній аналіз умови задачі. Перед тим, як приступати до розв’язання потрібно обговорити наступні питання. Для початку треба визначитися з системою координат. Оберемо вертикальну вісь *Oy*, вздовж якої відбувається рух двох даних тіл, таким чином, щоб її початок був на рівні землі, а сама вона була б направлена вгору. Швидкість є векторною величиною, і, хоч у задачі вказано, що у двох тіл швидкості є однаковими, гуртківцям необхідно пояснити, що мається на увазі модулі цих швидкостей, а от їхні проєкції на вісь Oy відрізняються лише знаком. Зрозумілим є також те, що при досягненні першим тілом найвищої точки, його швидкість дорівнюватиме нулеві.

Для розвитку критичного мислення та базових компетентностей слухачів гуртка їм було запропоновано розв'язати дану задачу декількома способами. Отримання відповіді різними шляхами не просто допомагає учням перевіряти правильність розв'язання, але й дозволяє розглянути фізичну ситуацію з різних боків і розвивати уяву.

Перший зі способів полягає у складанні системи рівнянь та її аналітичному розв'язку. Однак, на противагу цьому способу гуртківцям було запропоновано використати ще два методи, пов'язаних із графічною інтерпретацією рівнянь.

I спосіб розв'язання – аналітичний. Він покликаний навчити вихованців гуртка розв'язувати задачі за діями з використанням навідних запитань. Гуртківцям було поставлено такі питання:

1) На яку висоту h підніметься тіло, кинуте з початковою швидкістю v_0, якщо прискорення вільного падіння g.

2) Через який час τ тіло, кинуте з початковою швидкістю v_0 вертикально вгору, досягне найвищої точки.

3) З якої висоти H падало тіло, якщо його кинули вертикально вниз зі швидкістю v_0 і воно упало за час τ.

Відповіді, отримані при розв'язанні таких «підзадач» складаються у систему рівнянь, де невідому висоту було позначено як H, а відому – як $h = 5\,м$. Відповідно весь розв'язок основної задачі можна умістити у таку блок-схему (рис. 2.1). Стрілочками показано послідовність підстановки значень одного виразу в інший.

$$\begin{cases} 1)\ h=\dfrac{g\tau^2}{2} \\ 2)\ \tau=\dfrac{v_0}{g} \\ 3)\ H=v_0\tau+\dfrac{g\tau^2}{2}=3\dfrac{g\tau^2}{2}=3h \end{cases}$$

Рисунок 2.1 – Блок-схема розв’язання системи рівнянь

II спосіб розв’язання – за геометричним змістом інтеграла. Скористаємося тим, що пройдений шлях можна знайти як площу під графіком залежності швидкості від часу (рис. 2.2). Запишемо відповідні вирази для проєкцій швидкостей першого і другого тіла:

$$v_1(t)=v_0-gt \text{ та } v_2(t)=-v_0-gt\,.$$

Тоді висота підйому першого тіла буде рівна:

$$h=\frac{v_0\tau}{2}\text{, як площа трикутника (над віссю } Ot\text{).}$$

Натомість для другого:

$$H=\frac{(-v_0-v(\tau))\tau}{2}=\frac{(-2v_0-g\tau)\tau}{2}\text{, як площа прямокутної трапеції (під віссю } Ot\text{).}$$

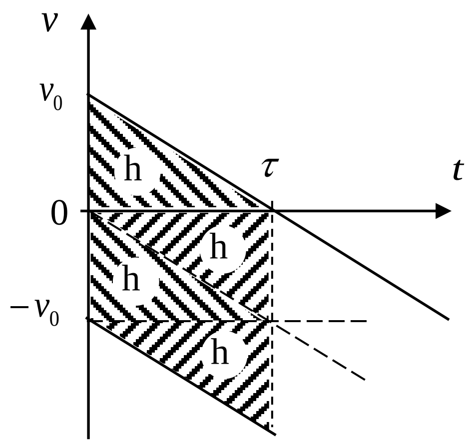

Рисунок 2.2 – Графік залежності проєкцій швидкості від часу

При детальному розгляді графіку, зображеному на (рис. 2.6), можна помітити, що площа трапеції складається з трьох площ трикутника, отже $H = 3h$.

III спосіб розв'язання – за властивістю парабол. Для параболи виду $y(x) = kx^2$ справедливим є відношення $\dfrac{y(a)}{y(b)} = \dfrac{a^2}{b^2}$, що, як можемо бачити, не залежить від k.

Зобразимо графік залежності координати від часу для першого і другого тіла (рис. 2.3), при чому треба врахувати, що:

1) Проєкція прискорення (яка визначає форму парабол) обох тіл на вісь Oy є однаковою.

2) Початкова координата є теж однаковою $y_1(0) = y_2(0) = H$.

3) Кутові коефіцієнти дотичних до парабол (якими є проєкції швидкостей тій на вісь Oy) у початковий момент часу відрізняються лише знаками $v_{y1}(0) = -v_{y2}(0) = v_0$.

4) Вісь часу на графіку можна провести, виходячи з того, що $y_1(\tau) = H + h$ та $y_2(\tau) = 0$.

Отже, ці дві параболи є однаковими, але зміщеними на величину 2τ вбік по осі Ot.

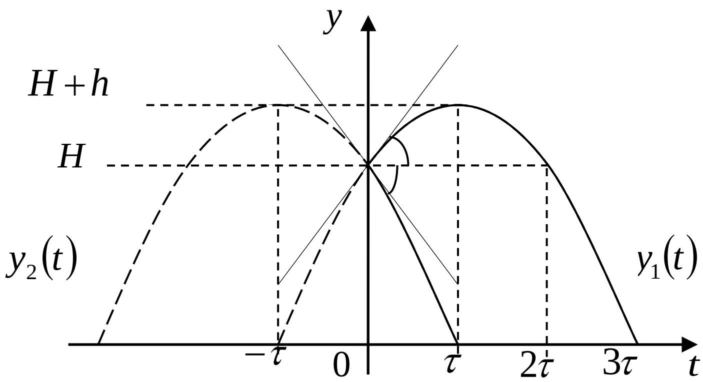

Рисунок 2.3 – Графік залежності координати від часу

З цього рисунку за властивістю парабол можна скласти наступне співвідношення: $\frac{h+H}{h}=\frac{(2\tau)^2}{\tau^2}$, звідки $h+H=4h$, а отже і $H=3h$.

Відповідь: висота початкової точки над землею дорівнює 15 м.

Отже, навчання гуртківців розв'язанню задач з фізики різними способами сприяє набуттю ними навичок практичного застосування знань, отриманих як на уроках фізики, так і математики, кращому розумінню фізичних явищ, що розглядаються, а також розвитку у них критичного мислення, бо такий вид роботи привчає вихованців гуртка самостійно перевіряти та аналізувати отримані ними відповіді та виявляти допущені помилки.

2.2 Критичний аналіз статті з наукового інтернет-журналу

Як уже зазначалось у першому розділі роботи, у статті [47] для розвитку критичного мислення пропонувалось проводити аналіз помилок у розв'язках задач з фізики. Натомість, на заняттях гуртка було проведено критичний аналіз статті з наукового інтернет-журналу, що частково було висвітлено у власних публікаціях [2, 3, 5].

Навчання старшокласників прийомів критичного мислення в галузі фізики має включати роботу з уже опублікованими статтями. Якщо мова йде про тексти наукових досліджень, то доволі складно знайти такі, зміст яких був би зрозумілим навіть для дуже підготовлених старшокласників. Тому було дуже доречно знайти статтю [67], опубліковану в науковому інтернет-журналі, а також її англомовну версію [68].

Автори зазначеної публікації, серед яких був і доктор технічних наук, стверджували, що вони знайшли цілком оригінальний підхід до обчислення періоду коливань нелінійних систем. За допомогою нього дослідники отримали формулу періоду коливань маятника, яка містить лише елементарні функції, і яку можна застосовувати не тільки для малих амплітуд коливань. В анотації до статті повідомлялося, що «отримано аналітично точний розв’язок для періоду коливань фізичного маятника для великих кутів відхилення».

За словами авторів аналізованої статті, традиційні методи розв’язування задачі про період коливань маятника при великих кутах відхилення шляхом інтегрування диференціальних рівнянь руху приводять до еліптичних інтегралів, що не дозволяє отримати розв’язок в елементарних функціях. При цьому дослідники зазначили, що змогли розв’язати дану задачу, уникнувши використання диференціальних рівнянь: «Якщо відмовитись від необхідності мати точне значення миттєвої швидкості маятника і користуватись середнім значенням швидкості маятника за період, то необхідність у диференціальних рівняннях відпадає». Для визначення середнього значення швидкості у статті пропонувалося скористатися добре відомою з курсу математичного аналізу формулою для середнього значення функції (2.1):

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{2.1}$$

Наприкінці розділу статті, який називається «Метод знаходження періоду маятника в елементарних функціях», наведено кінцеву формулу, де збережене авторське позначення довжини нитки літерою R (2.2):

$$T = \frac{S}{v_{cp}} = \frac{\alpha_{\max}\sqrt{2R}}{\sqrt{g}\left(\sqrt{1+\sin\alpha_{\max}}-1\right)} \tag{2.2}$$

На думку авторів статті, що аналізується, ця формула є правильною для кутів максимального відхилення, які лежать у межах $0 \le \alpha_{\max} \le \frac{\pi}{2}$.

Стаття містить такий рис. 2.4, який пояснює позначення, що використовують автори.

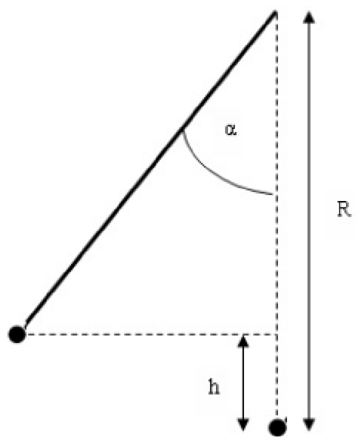

Рисунок 2.4 – Пояснювальний рисунок, наведений у статті [67]

У розділі «Обговорення отриманих результатів» розглянуто той випадок, коли маятник відхиляють до горизонтального положення й відпускають з нульовою початковою швидкістю. Наприкінці цього розділу є такі слова: «Отримане значення відрізняється від значення, вказаного Гюйгенсом на 0,07%, а від розв'язку еліптичних інтегралів – на 0,72%».

Автори статті, що аналізується, у своїх претензіях на наукову новизну не зупиняються на формулі для періоду коливань математичного маятника у випадку великої амплітуди, що виражається в елементарних функціях. Ось перший абзац наступного розділу: «Метод, який ми пропонуємо, не обмежується розв'язуванням задачі коливань маятника. Справа в тому, що коливання фізичного маятника є нелінійними, саме в цьому і була складність розв'язування цієї задачі. Запропонований «метод середніх значень за період» дозволяє розв'язувати аналогічні задачі для будь-яких коливальних систем, що здійснюють вільні нелінійні коливання». А сам розділ має назву «Загальний метод розв'язування задач нелінійних коливань».

Але якщо навіть обмежитись лише отриманням доволі простої формули, що виражає період математичного маятника при великих амплітудах коливань, то це дійсно можна вважати серйозним науковим досягненням. У вихованців фізико-математичного гуртка, яким про це було повідомлено, виник природний інтерес, адже у школі вони вивчали формулу періоду математичного маятника, що не залежить від кута відхилення. Однак на лабораторних роботах їх попереджали, що не треба сильно відхиляти нитку маятника, оскільки для великих амплітуд ця формула не працює. Про те, що зі збільшенням амплітуди період збільшується, старшокласники дізналися з Вікіпедії, але у формулах, які там наводяться, містяться явно не елементарні функції.

Оскільки вихованці фізико-математичного гуртка Запорізького обласного центру науково-технічної творчості учнівської молоді «Грані» були доволі підготовленими з точки зору знання деяких прийомів критичного мислення, було вирішено присвятити декілька занять критичному аналізу вище згаданої статті.

Цілком природно розпочати з кінцевої формули, яку отримали автори зазначеної статті. Гуртківці без проблем могли впевнитися в тому, що з одиницями вимірювання у формулі (2.2) все в порядку. А чи витримає вона перевірку на випадок малих амплітуд? Значення періоду у цьому випадку мало б збігатися з відомим зі шкільних підручників: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.

Перепишемо формулу (2.2) у вигляді $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \tau(\alpha_{max})$, де «зведений» період коливань буде такою функцією максимального кута відхилення нитки (2.3):

$$\tau(\alpha_{max}) = \frac{\alpha_{max}}{\sqrt{2}\pi\left(\sqrt{1+\sin\alpha_{max}} - 1\right)} \qquad (2.3)$$

Очевидно, що ця функція мала б прямувати до одиниці за умови, що α_{max} прямує до нуля. Щоб з'ясувати, чи виправдовується таке очікування, помножимо чисельник та знаменник на вираз $\sqrt{1+\sin\alpha_{max}} + 1$, спряжений до того виразу, який у знаменнику стоїть у дужках. Такий крок дозволяє, після використання того, що $\sin\alpha_{max} \approx \alpha_{max}$ при малих α_{max} та застосування у знаменнику однієї з відомих зі шкільної математики формул скороченого множення, досить легко знайти шукану границю для $\tau(\alpha_{max})$ (2.4):

$$\lim_{\alpha_{max}\to 0}\left(\frac{\alpha_{max}}{\sin\alpha_{max}}\cdot\frac{\sqrt{1+\sin\alpha_{max}}+1}{\sqrt{2}\pi}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\pi} \tag{2.4}$$

Інший спосіб перевірки на граничний випадок малих кутів полягав у наступному. Як уже зазначалося, при малих значеннях α_{max} синус кута можна замінити самим кутом, вираженим у радіанах. Крім того, потім $\sqrt{1+\alpha_{max}}$ можна замінити на $1+\frac{\alpha_{max}}{2}$, після скорочення отримуємо (2.5):

$$T=\frac{\alpha_{max}\sqrt{2R}}{\sqrt{g}\left(\sqrt{1+\sin\alpha_{max}}-1\right)}\approx 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{R}{g}} \tag{2.5}$$

Як бачимо, виведена авторами аналізованої статті кінцева формула не пройшла перевірку на випадок малих амплітуд. Цікаво було б повернутися до тексту дослідження, перевірити увесь хід виведення та дізнатися, де автори статті, опублікованої у науковому інтернет-журналі, припустилися помилки.

Спочатку гуртківцям було запропоновано придивитися до однієї з проміжних формул, яка у статті мала такий вигляд (2.6):

$$v(\alpha)=\sqrt{2gR(1-\sin\alpha)} \tag{2.6}$$

Якщо амплітуда коливань вважається заданою, то чому ж α_{max} не входить до цього виразу? Із закону збереження енергії зрозуміло, що у випадку $\alpha=\alpha_{max}$ модуль швидкості мав би дорівнювати нулю, а за умови $\alpha=0$

набути свого максимального значення і дорівнювати $\sqrt{2gR(1-\cos\alpha_{max})}$. З цих міркувань цілком очевидно, що у загальному випадку формула (2.6) не може виражати залежність модуля швидкості тягарця математичного маятника від кута відхилення нитки від вертикалі. А може вона бути правильною для конкретного значення амплітуди коливань, а саме для $\alpha_{max}=\frac{\pi}{2}$?

Нескладно впевнитись, що за такої амплітуди, коли нитка маятника може доходити до горизонтального положення, формула (2.6) проходить перевірку і на випадок $\alpha=\alpha_{max}=\frac{\pi}{2}$, і на випадок $\alpha=0$. Крім того, з фізичних міркувань отримуємо, що очікувана залежність $v(\alpha)$ мала б бути спадною (на що, до речі, вказували й автори статті). Формула (2.6) витримує і цю перевірку.

Завдання, яке було поставлене перед гуртківцями полягало в тому, щоб довести різними способами неправильність зазначеної формули навіть для цього конкретного значення амплітуди. Але була поставлена додаткова вимога: не вдаватися до виведення власної формули!

1-й спосіб. Аналіз ситуації поблизу горизонтального положення нитки маятника. Старшокласникам було запропоновано подумати над тим, як має поводити себе швидкість тягарця, коли кут відхилення α тільки-тільки почне зменшуватись від значення $\frac{\pi}{2}$. У першому наближенні це буде нагадувати вільне падіння тіла. Уявімо собі момент, коли нитка маятника утворює з горизонтальним напрямком малий кут $\varphi \ll 1$. Зрозуміло, що у цей момент кут α дорівнюватиме $\frac{\pi}{2}-\varphi$. Ця ситуація схематично зображена на рис. 2.5.

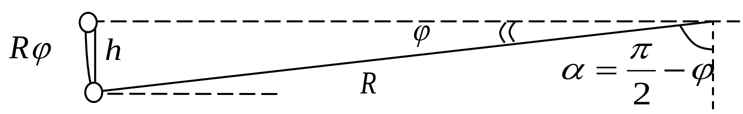

Рисунок 2.5 – Схема, що пояснює перехід до нової змінної

У розглядуваний момент потенціальна енергія тягарця буде на mgh менше максимального значення. Відповідно, кінетична енергія $\frac{mv^2}{2}$ зросте від нуля до mgh. Врахуємо, що $h = R\sin\varphi$ і $\sin\varphi \approx \varphi$ (тобто h буде майже не відрізнятися від довжини $R\varphi$ дуги, якою рухався тягарець маятника). У цьому наближенні знайдемо, що швидкість збільшиться від нуля до значення $\sqrt{2gR\varphi}$. Чи можна буде отримати такий самий вираз з формули (2.6) після переходу до нової змінної φ та з урахуванням умови $\varphi \ll 1$?

Спочатку вихованці гуртка мали, застосувавши формулу зведення $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi$, отримати такий вираз для швидкості через нову змінну φ: $v(\varphi) = \sqrt{2gR(1 - \cos\varphi)}$. Для врахування умови $\varphi \ll 1$ необхідно було скористатися тим, що $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$. Зробивши відповідну підстановку, старшокласники отримали для швидкості апроксимуючий вираз $\varphi\sqrt{gR}$, який явно не збігається з очікуваним $\sqrt{2gR\varphi}$.

2-й спосіб. Перевірка на окремий випадок. Потрібно нагадати, що формула (2) пройшла перевірку на два окремих випадки: $\alpha = \alpha_{\max} = \frac{\pi}{2}$ і $\alpha = 0$, для яких очікувана відповідь була очевидною. Безпосередньо на занятті гуртка з’явилась пропозиція розглянути ще один простий окремий випадок. Кут $\alpha = \frac{\pi}{3}$ відповідає ситуації, коли тягарець опуститься з максимальної висоти на $\frac{R}{2}$. Відповідно, кінетична енергія збільшиться від нуля до $\frac{mgR}{2}$, а швидкість до $\sqrt{gR}$. Підстановка ж у формулу (2.6) значення кута $\alpha = \frac{\pi}{3}$ дає значення швидкості $v\big|_{\alpha = \frac{\pi}{3}} = \sqrt{gR\left(2 - \sqrt{3}\right)}$, яке явно не збігається з очікуваним.

3-й спосіб. Перевірка функції на парність. У процесі дискусії на занятті гуртка було також запропоновано перевірити функцію (2.6) на парність.

Дійсно, у розглядуваному випадку $\left(\alpha_{max} = \frac{\pi}{2}\right)$ кут $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а із закону збереження енергії очевидним є те, що при значеннях кута, які відрізняються лише знаком, тягарець матиме однакову кінетичну енергію. Відповідно, однаковим буде і модуль швидкості. Отже, функція для залежності модуля швидкості від кута відхилення нитки маятника від вертикалі має бути парною. Однак функція $v(\alpha) = \sqrt{2gR(1 - \sin\alpha)}$ не є ані парною, ані непарною.

Отримання правильної залежності $v(\alpha)$ у випадку $\alpha_{max} = \frac{\pi}{2}$ і порівняння її з неправильною. Розглянутий приклад неправильної залежності $v(\alpha)$ у випадку $\alpha_{max} = \frac{\pi}{2}$ цікавий тим, що формула (2.6) витримує не лише перевірку на розмірність, а й ще принаймні три перевірки: 1) на окремий випадок $\alpha = 0$; 2) на окремий випадок $\alpha = \alpha_{max} = \frac{\pi}{2}$; 3) функція $v(\alpha) = \sqrt{2gR(1 - \sin\alpha)}$ виявилася очікувано спадною. У той же час, нам вдалося продемонструвати три способи доведення неправильності формули (2.6), якщо навіть її сприймати як таку, що виведена для амплітуди $\alpha_{max} = \frac{\pi}{2}$.

Необхідно нагадати, що завдання для гуртківців щодо спростування формули (2.6) супроводжувалося вимогою не вдаватися до виведення власної формули. Тобто виведення власної формули, яка б не збігалася з формулою (2.6), не зараховувалося як окремий спосіб спростування. Цей спосіб був би надто простим і стандартним. Дійсно, користуючись рис. 2.4, нескладно записати закон збереження повної механічної енергії, а з нього знайти правильний вираз для модуля швидкості: $v(\alpha) = \sqrt{2gR\cos\alpha}$.

Щоб наочно порівняти правильний і неправильний вирази для функції $v(\alpha)$ у випадку $\alpha_{max} = \frac{\pi}{2}$, довелося згадати навички з інформатики. Для зручності побудови графіків на комп'ютері формули для швидкостей було записано у «зведеному» вигляді (2.7):

$$\frac{v(\alpha)}{\sqrt{2gR}}=\sqrt{1-\sin\alpha}\ \text{ і }\ \frac{v(\alpha)}{\sqrt{2gR}}=\sqrt{\cos\alpha} \tag{2.7}$$

Результат побудови графіків функцій подано на рис. 2.6.

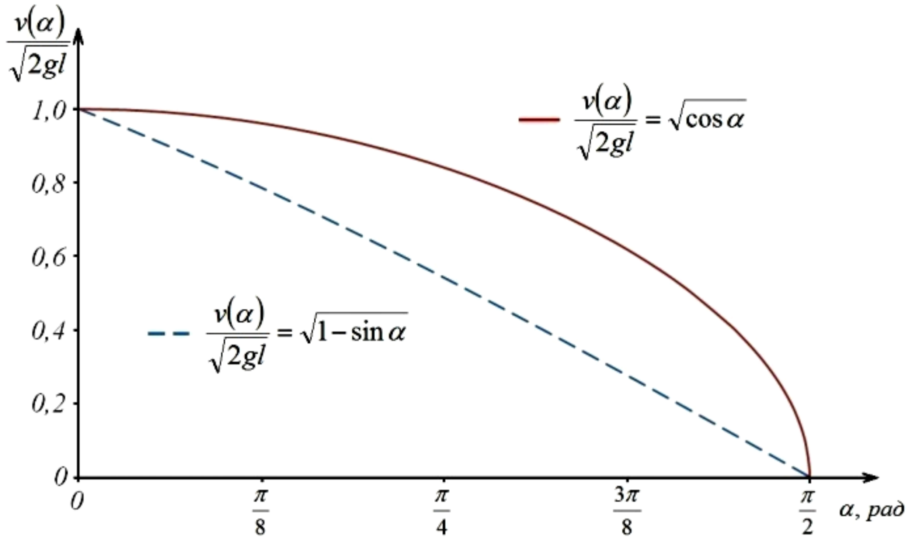

Рисунок 2.6 – Графічне порівняння двох виразів для $v(\alpha)$ у випадку $\alpha_{\max}=\frac{\pi}{2}$

Уже після того, як графіки було побудовано, стало зрозумілим, що з фізичних міркувань нескладно було б довести, що похідна функції $v(\alpha)$ мала б дорівнювати нулю при $\alpha=0$. А це, на відміну від правильного виразу, не виконується для неправильного виразу (2.6). Трохи складнішим, але цілком реальним, є розгляд поведінки похідної функції $v(\alpha)$ за умови $\alpha\to\frac{\pi}{2}$.

Доречно проаналізувати і сам метод, запропонований авторами. У анотації аналізованої статті вказано: «Метод розв’язування використаний для розв’язування великих коливань маятника може бути розширеним на будь-які нелінійні коливальні системи. На відміну від наближених методів, що наводяться в сучасній літературі, запропонований метод, за наявності вихідної інформації, дозволяє отримати точні розв’язки нелінійних коливань будь-якого типу».

У чому ж головна ідея цього методу? Розглянемо його на прикладі коливань математичного маятника. Період коливань маятника вчетверо більший за той час, протягом якого кут відхилення нитки від вертикалі збільшується від нуля до $\alpha_{\max}$. З цим твердженням складно не погодитися, якщо йдеться про незгасаючі коливання математичного маятника в однорідному гравітаційному полі. Час збільшення кута від нуля до $\alpha_{\max}$ пропонується знаходити, поділивши довжину $R\alpha_{\max}$ дуги, яку проходить тягарець маятника, на його середню швидкість. Здавалося б, все правильно. Щоправда, виникає природне запитання: з яких міркувань знайти середню швидкість?

Для визначення середнього значення швидкості автори аналізованої статті запропонували скористатися добре відомою з курсу математики формулою для середнього інтегрального значення функції (2.8):

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad (2.8)$$

У розглядуваній ситуації руху тягарця маятника цю математичну формулу (3) було переписано в такому вигляді (2.9):

$$v_{\text{сер}} = \frac{1}{\alpha_{\max}}\int_0^{\alpha_{\max}} v(\alpha)\,d\alpha \qquad (2.9)$$

У цьому й полягала основна ідея авторів статті.

Навіть у тому випадку, якщо б так можна було робити, то не можна заздалегідь стверджувати, що інтеграл у формулі (2.9) для будь-яких нелінійних коливань виражається в елементарних функціях. Отож, сподівання на поширення запропонованого методу, про яке йшлося в анотації до аналізованої статті, одразу мало б сенс поставити під сумнів. Але, як буде показано, необхідно вести мову не про обмеження в поширенні методу на будь-які нелінійні коливання, а про цілковиту його хибність. Це можна довести двома способами.

Перший спосіб пов'язаний з тим, щоб залишити формулу (2.9) без змін, а формулу (2.6), про яку вже відомо, що вона неправильна, змінити на правильну. Отримавши кінцеву відповідь, можна впевнитись, що вона не витримує перевірку на випадок малих коливань так само, як і кінцева формула (2.2) з аналізованої статті. Другий спосіб буде технічно простішим, але він стосуватиметься іншої задачі про визначення часу певного руху. Застосувавши головну ідею авторів аналізованої статті щодо середньої швидкості, прийдемо до кінцевої відповіді, неправильність якої буде очевидною.

Перший спосіб доведення хибності головної ідеї аналізованої статті.

З виведенням правильної формули для залежності модуля швидкості тягарця математичного маятника від кута відхилення нитки особливих проблем не було. Дійсно, якщо задано максимальний кут відхилення, то із закону збереження повної механічної енергії отримуємо (2.10):

$$v(\alpha) = \sqrt{2gR(\cos\alpha - \cos\alpha_{\max})} \tag{2.10}$$

Підставивши (2.10) у (2.9), будемо мати вираз для «середньої» швидкості (2.11):

$$v_{\text{сер}} = \frac{1}{\alpha_{\max}} \int_0^{\alpha_{\max}} \sqrt{2gR(\cos\alpha - \cos\alpha_{\max})}\, d\alpha. \tag{2.11}$$

Щоправда, як з'ясувалося, інтеграл, що входить до формули для «середньої» швидкості, в елементарних функціях не виражається.

Як можна буде побачити з подальшого викладу, слово «середня» не випадково взято в лапки. Відслідковуючи основну ідею авторів обговорюваної статті, для обчислення періоду потрібно буде підставити знайдене значення «середньої» швидкості у формулу для періоду $T=\dfrac{S}{v_{\text{сер}}}$, де $S=4R\alpha_{\max}$.

Не зупиняючись на питанні про те, чому не вдасться виразити отриманий для «середньої» швидкості інтеграл в елементарних функціях для довільних значень максимального кута відхилення, спробуємо перевірити відповідь для періоду на граничний випадок малих коливань. У цьому випадку його можна виразити в елементарних функціях. Покажемо це, замінивши косинуси малих кутів апроксимуючими виразами: $\cos\alpha\approx 1-\dfrac{\alpha^2}{2}$ та $\cos\alpha_{\max}\approx 1-\dfrac{\alpha_{\max}^2}{2}$. Тепер інтеграл, що стоїть у виразі для «середньої» швидкості: $v_{\text{сер}}\approx\sqrt{gR}\alpha_{\max}\int\limits_0^{\alpha_{\max}}\sqrt{1-\left(\dfrac{\alpha}{\alpha_{\max}}\right)^2}\cdot\dfrac{d\alpha}{\alpha_{\max}}$, легко обчислюється за допомогою заміни $\dfrac{\alpha}{\alpha_{\max}}=x$. Дійсно, $v_{\text{сер}}\approx\sqrt{gR}\alpha_{\max}\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\dfrac{\pi}{4}\alpha_{\max}\sqrt{gR}$ та $T=\dfrac{16}{\pi}\sqrt{\dfrac{R}{g}}$.

Знову треба констатувати, що замість очікуваного коефіцієнта 2π вийшов коефіцієнт $\dfrac{16}{\pi}$.

Другий спосіб доведення хибності головної ідеї аналізованої статті на простому прикладі. Якщо абстрагуватися від визначення періоду математичного маятника, то можна на дуже простому прикладі продемонструвати помилковість підходу авторів аналізованої статті до визначення часу руху через неправильну середню швидкість. Розглянемо падіння тіла без початкової швидкості з висоти H із прискоренням g. Очевидно, що час падіння буде дорівнювати $\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$. Але спробуємо знайти час падіння способом, який буде аналогічним до запропонованого авторами аналізованої статті.

Для початку виразимо з закону збереження повної механічної енергії залежність швидкості від висоти: $v(h)=\sqrt{2g(H-h)}$. Потім залежність для знайдемо «середню» швидкість: $v_{\text{сер}} = \frac{1}{H}\int_0^H v(h)dh = \frac{\sqrt{2g}}{H}\left[-\frac{2}{3}(H-h)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^H\right] = \frac{2}{3}\sqrt{2gH}$. Знаходимо «час падіння»: $\tau = \frac{H}{v_{\text{сер}}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{H}{2g}} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2H}{g}}$. Цей простий приклад дозволяє впевнитися, що ідея авторів з використання математичної формули у такий спосіб приводить нас до явно неправильної відповіді.

Причина цього криється в помилковості ключової ідеї авторів аналізованої статті. Не можна бездумно використовувати математичні формули. Середня швидкість визначається так: $\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$, де t – це час, а не кут відхилення α , чи висота h, або ж інша узагальнена координата.

Автори аналізованої статті звертали увагу читачів на те, що формулу для середнього значення швидкості тягарця вони виводили декількома способами. Їхнє твердження про це супроводжувалося посиланням на статтю, яку так і не вдалося відшукати, натомість було знайдено її англомовний переклад [68]. Як з’ясувалося, там наведено той самий спосіб, що й у статті, критичний аналіз якої ми проводили з гуртківцями. Ось цей вираз для «середньої» швидкості проходження тягарцем шляху від положення максимального відхилення нитки до точки рівноваги:

$$v_{сер} = 2\sqrt{2gR}\left(\sqrt{1+\sin\alpha_{\max}}-1\right). \tag{2.12}$$

Хоча формула для «середньої» швидкості стоїть за один крок від формули для періоду, її теж було вирішено використати для відпрацювання у старшокласників прийомів критичного мислення.

Критичний аналіз виразу для середньої швидкості тягарця. Перед тим, як звернутися до формули (2.12), варто було подумати про вимоги, яким вона мала б задовольняти, якби була правильною. Можна порівняти вираз, апроксимуючий цю формулу у випадку малих коливань, з тим, який нескладно отримати, поділивши шлях $S = 4R\alpha_{\max}$, який проходить тягарець за період малих коливань, на відоме зі школи значення цього періоду $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$. Зрозуміло, що збігу цих виразів ми не отримаємо, бо ми вже порівнювати період T_0 з апроксимуючим при малих амплітудах виразом для періоду, обчисленого за формулою (2.2), яка пов’язана з формулою (2.12).

Новою є така ідея. Цілком очевидно, що середня швидкість не може бути більшою за максимальну, якої тягарець набуває, коли проходить положення рівноваги. Скориставшись законом збереження енергії, можна без проблем знайти залежність максимальної швидкості від амплітуди коливань маятника:

$$v_{\max} = \sqrt{2gR(1 - \cos\alpha_{\max})}\,. \tag{2.13}$$

За будь-яких значень амплітуди коливань максимальна швидкість тягарця маятника, обчислена за формулою (2.13), мала б бути більшою за середню швидкість, яка обчислена за формулою (2.12). Якщо ж знайдеться значення $\alpha_{\max}$, за якого співвідношення виявиться протилежним, то можна буде стверджувати, що формула (2.12) для середньої швидкості тягарця є неправильною.

Як показове значення амплітуди можна взяти $\alpha_{\max} = \frac{\pi}{4}$. Нескладно впевнитись, що за формулою (3) маємо $v_{cep}\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0{,}61 \cdot \sqrt{2gR}$, а це більше за $v_{\max}\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0{,}54 \cdot \sqrt{2gR}$, чого не мало би бути. Доцільно скористатися навичками, отриманими на уроках інформатики, та побудувати графіки (рис. 2.7) порівнюваних функцій для всього діапазону зміни амплітуди коливань, попередньо звівши їх до безрозмірного «зведеного» вигляду (2.14), (2.15):

$$\frac{v_{cep}}{\sqrt{2gR}} = \sqrt{1+\sin\alpha_{\max}} - 1 \qquad (2.14)$$

$$\frac{v_{\max}}{\sqrt{2gR}} = \sqrt{\cos\alpha_{\max}} \qquad (2.15)$$

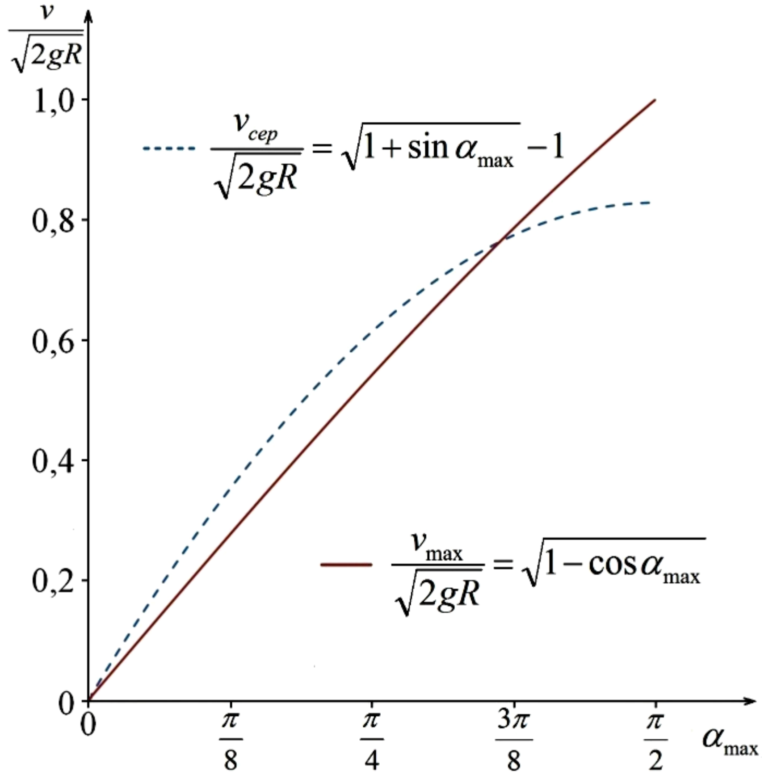

Рисунок 2.7 – Наочна демонстрація того, що формула (2.12) є хибною

Отже, завдання навчати вихованців гуртка прийомам критичного мислення наразі є актуальним. Зокрема у випадку аналізу фізичних текстів більша частина таких прийомів пов’язана з використанням математики та інформатики. Для розвитку критичного мислення учнів корисним є не лише відпрацювання відповідних навичок із застосуванням спеціально розроблених вправ, а й робота з опублікованими текстами з фізики, автори яких ненавмисно припустилися помилок, а рецензенти і редактори з якихось причин цих помилок також не помітили. Важливими також є тексти статей з фізики, опубліковані у наукових виданнях. Оскільки не так часто трапляються випадки, коли старшокласникам вистачає власної фізико-математичної підготовки, щоб самостійно розібратися зі змістом таких статей, їм потрібна допомога досвідчених дослідників, яка може бути надана на заняттях фізичних гуртків закладів позашкільної освіти. Важливим є завдання продовжити пошук наукових і науково-методичних статей з фізичним змістом, корисних з точки зору прикладів реальних помилок, яких можна було уникнути, знаючи та використовуючи прийоми критичного мислення.

2.3 Організація навчального дослідження залежності періоду коливань математичного маятника від амплітуди

У ході критичного аналізу статті, наведеного у попередньому розділі, з’ясувалося, що автори припустилися низки помилок, пошук яких можна перетворити у окреме цікаве завдання для навчального дослідження.

Наразі пропонується звернути увагу на ще одне навчальне дослідження, безпосередньо пов’язане зі застосуванням чисельних методів для з’ясування залежності періоду коливань математичного маятника від їхньої амплітуди. Мета такого дослідження полягає у набутті гуртківцями досвіду інтеграції знань, умінь і навичок, які вони отримали в школі на уроках з таких навчальних предметів як фізика, математика та інформатика. Тут яскраво простежується практичне застосування концепції розвитку STEM-освіти в Україні [35].

Спочатку пригадаймо один із способів виведення загальної формули для періоду із застосуванням закону збереження повної механічної енергії. Так для математичного (нитяного) маятника (рис. 2.8) його можна записати таким чином $mgl(1-\cos\varphi)+\frac{m\left(l\dot{\varphi}\right)^2}{2}=mgl(1-\cos\varphi_{\max})$, де l – довжина нитки, $\dot{\varphi}$ – миттєва кутова швидкість маятника, m – маса тягарця, $\varphi_{\max}$ – максимальний кут відхилення нитки від положення рівноваги.

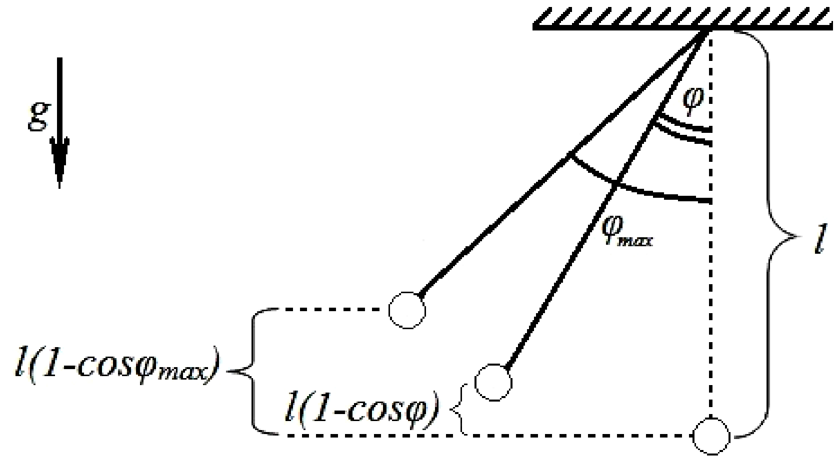

Рисунок 2.8 – Нитяний (математичний) маятник

Зрозуміло, що період коливань маятника є вчетверо більшим за час, протягом якого тягарець проходить дугу від точки рівноваги до положення, яке характеризується кутом $\varphi_{\max}$. Положення нитки за час $dt = \dfrac{d\varphi}{\dot{\varphi}}$ змінюється на кут $d\varphi$ а кутову швидкість можна знайти із записаного вище закону збереження повної механічної енергії (2.15):

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_{\max})}. \tag{2.15}$$

Тепер можна записати вираз для чверті періоду (2.16):

$$\frac{T}{4} = \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_{\max})}}. \tag{2.16}$$

Правильність цього виразу перевіримо на відомий крайній випадок малих коливань. Скориставшись апроксимуючими виразами для малих кутів: $\cos\varphi \approx 1 - \dfrac{\varphi^2}{2}$ і $\cos\varphi_{\max} \approx 1 - \dfrac{\varphi_{\max}^2}{2}$, а також новою змінною $\eta = \dfrac{\varphi}{\varphi_{\max}}$, отримуємо інтеграл, що легко обчислюється за допомогою формули Ньютона-Лейбніца, оскільки первісна підінтегральної функції виражається елементарною функції: $T_0 = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \arcsin\eta\Big|_0^1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Звідси видно, що у випадку малих кутів наведена формула дає очікуваний результат, який є відомим зі шкільного курсу фізики.

Перед тим, як отримати шукану залежність періоду математичного (по-іншому – нитяного) маятника від кута відхилення, можна знайти значення періоду в іншому крайньому випадку, коли максимальний кут відхилення дорівнює $\varphi_{\max} = \frac{\pi}{2}$. Тоді вираз для періоду набуває вигляду (2.17):

$$T_{\pi/2} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos\varphi}}. \tag{2.17}$$

Спочатку треба впевнитися у тому, що даний інтеграл дійсно не виражається в елементарних функціях. Для цього гуртківцям було запропоновано знайти призначені для інтегрування програми в мережі Інтернет. Найбільше їх зацікавила одна з них під назвою Wolfram|Alpha [69], яка містить у собі значний набір обчислюваних алгоритмів, особливо для фізики та математики.

Результат обчислення шуканого визначеного інтеграла і графік підінтегральної функції наведено на рис. 2.9. Як бачимо, програма Wolfram|Alpha підтвердила гіпотезу про те, що відповідь не виражається в елементарних функціях. Однак, старшокласникам (принаймні, учням випускного класу) відомо, що визначений інтеграл є конкретним числом, що можна обчислити з потрібною точністю, скориставшись чисельними методами інтегрування.

В одній з інструкцій до програми Wolfram|Alpha [70], міститься не лише перелік методів чисельного інтегрування, які найчастіше застосовуються у цій програмі, але й інформацією про те, якими спеціальними параметрами необхідно доповнити звичайний запит на обчислення визначених інтегралів, якщо користувачу необхідно використати конкретний числовий метод та порівняти його з іншими, розбити відрізок інтегрування на задану кількість інтервалів або отримати результат із наперед заданою точністю.

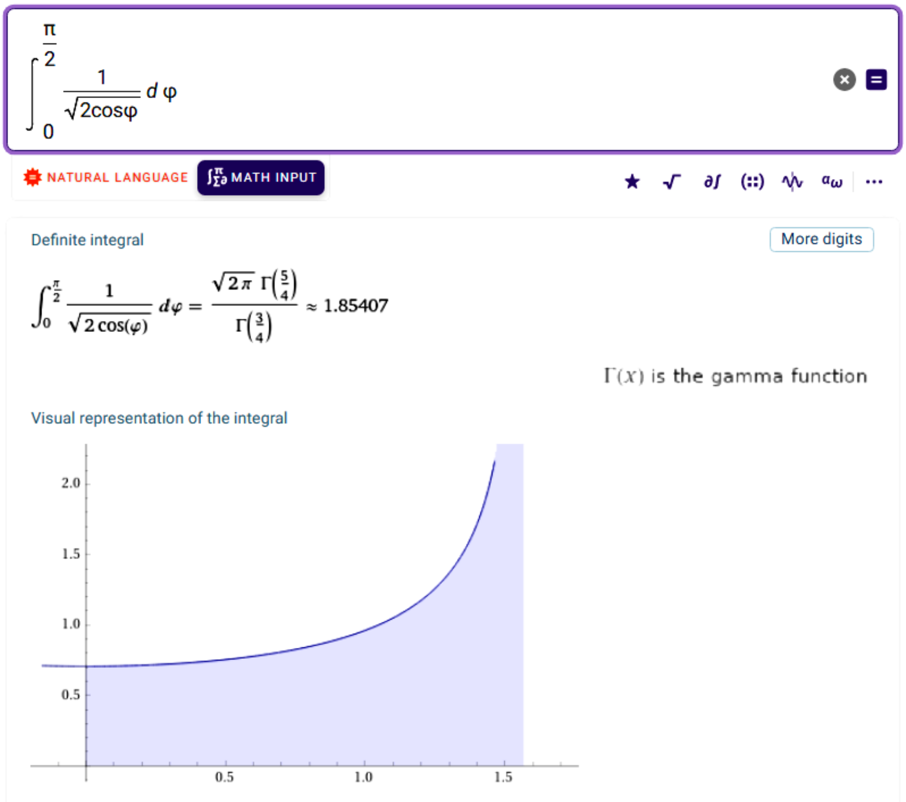

Рисунок 2.9 – Результат обчислення шуканого визначеного інтеграла і графік підінтегральної функції

Наприклад, увівши в Wolfram|Alpha таку команду: «integrate ((2*cosx)^(-1/2))dx left endpoint method with 500 intervals x=0..π/2», отримуємо від комп’ютерної програми не лише значення, розраховане за вказаним користувачем методом для 500 інтервалів розбиття, але й зіставлення результатів інтегрування іншими методами, яке наведено у таблиці 2.1, сформованій Wolfram|Alpha автоматично.

Таблиця 2.1 – Порівняння результатів інтегрування $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos\varphi}}$ різними методами для 500 інтервалів розбиття

Method	Result	Absolute error	Relative error
Left endpoint	1,79731	0,05677	0,03062
Right endpoint	1,79509 – 175176*i*	175176,	94481,8
Midpoint	1,8301	0,02397	0,01293
Trapezoidal rule	141945,	141943,	76557,4
Simpson's rule	47316,2	47314,3	25519,1
Boole's rule	22081,9	22080,	11908,9

Зрозуміло, що найбільш точним серед усіх, не враховуючи розрахунок за допомогою спеціальних функцій, є так званий «метод середньої точки» (у вітчизняній літературі відомий як «метод середніх прямокутників»). Цей результат можна зрозуміти, повернувшись до графіка підінтегральної функції, наведеного на рис. 2.9. Дійсно, підінтегральна функція прямує до нескінченності при наближенні аргументу до значення $\frac{\pi}{2}$. Саме це і призводить до того, що більшість методів, наведених у таблиці 2.1, дають неточні результати. Зрозуміло, що така сама ситуація спостерігається й у загальному випадку, коли аргумент підінтегральної функції наближається до значення $\varphi_{\max}$: (2.18):

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_{\max})}}. \tag{2.18}$$

Під час проведення навчально-дослідної роботи з'ясувалося, що можна перетворити вираз для періоду коливань таким чином, щоб підінтегральна функція не прямувала до нескінченності на інтервалі інтегрування. Тому при організації навчального дослідження гуртківцям було запропоновано звернутися до підручника [71], орієнтованого на студентів закладів вищої освіти. Щоб порівняти отриману разом з гуртківцями формулу з наведеною у цьому підручнику, старшокласники мали перейти від косинуса кута до квадрату синуса половинного кута: $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$. Тоді вираз для періоду коливань (2.18) набуде вигляду (2.19):

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_{\max}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}. \tag{2.19}$$

Далі у підручнику [71] пропонується ввести заміну: $u = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_{\max}}{2}}$, яка в подальшому мала б привести до такого виразу для періоду коливань: $T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$, де $k = \sin\frac{\varphi_{\max}}{2}$. Однак, при більш детальному аналізі формул стає зрозумілим, що у підручнику припустилися друкарської помилки. Правильна заміна повинна бути такою : $\sin u = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_{\max}}{2}}$.

Цікавими виявилися дві особливості цієї заміни: по-перше, нова підінтегральна функція вже не прямує до нескінченності, по-друге, межі інтегрування залишаються однаковими при будь-яких значеннях $\varphi_{\max}$ і не залежать від нього.

Програма Wolfram|Alpha також надає можливість побудувати графіки двох порівнюваних підінтегральних функцій для максимального кута відхилення $\varphi_{\max} = \frac{\pi}{2}$ (рис. 2.10). Звернемо увагу на те, що програма при побудові цих графіків функцій сама перетворила відповідні аналітичні вирази.

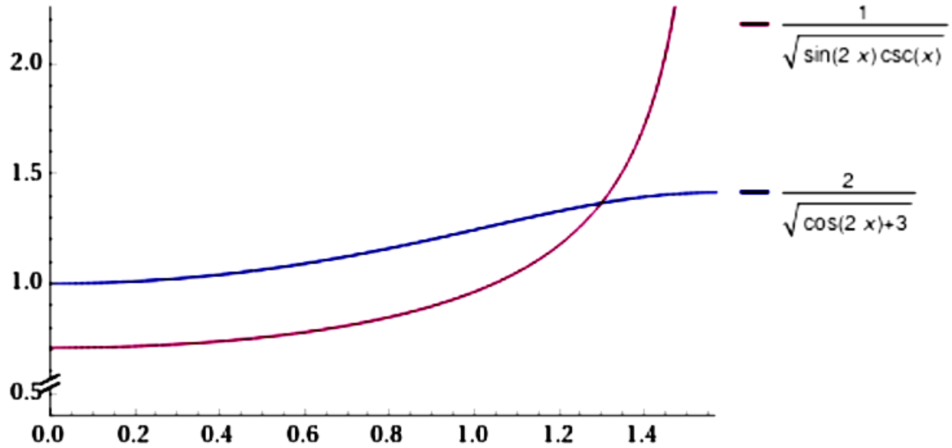

Рисунок 2.10 – Графіки функцій $y = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}5\sin^2 x}}$ та $y = \frac{1}{\sqrt{2\cos x}}$

Числове інтегрування нової функції всіма запропонованими методами дає досить точний результат для тих самих 500 інтервалів розбиття. Для порівняння ж результатів чисельного обчислення отриманих інтегралів «методом середньої точки» для різної кількості інтервалів розбиття було складено таблицю 2.2.

Таблиця 2.2 – Порівняння результатів обчислення двох інтегралів для різної кількості інтервалів розбиття проміжку інтегрування.

Intervals	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 x}{2}}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos\varphi}}$
1	1,813799	1,320877
5	1,854075	1,614387
25	1,854075	1,746860
125	1,854075	1,806126
625	1,854075	1,832632
3125	1,854075	1,844485

Помітним є те, що перетворений вираз вже при невеликій кількості інтервалів дає правильний результат. Натомість вихідний інтеграл не дозволяє отримати це значення навіть при значному збільшенні інтервалів розбиття. Як бачимо, після вдалої заміни змінної не має сенсу обирати велику кількість інтервалів розбиття при чисельному підрахунку визначеного інтегралу, який входить до формули для періоду коливань математичного маятника. Це є важливим фактом, бо для побудови графіка залежності «зведеного» періоду від амплітуди коливань (рис. 2.11) обчислення доводиться виконувати для кожного значення амплітуди.

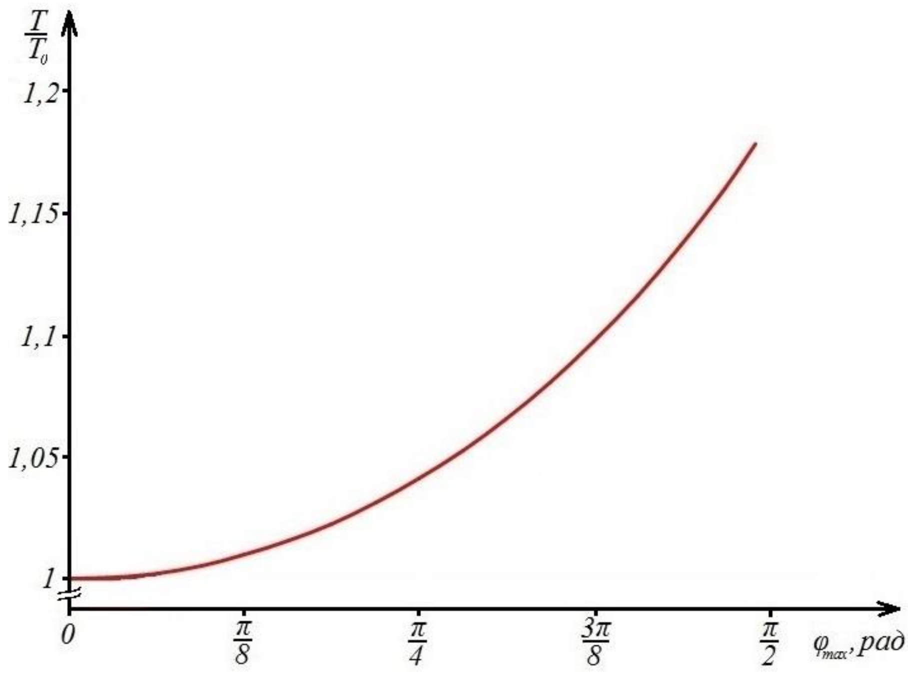

Рисунок 2.11 – Графік залежності періоду (у відносних одиницях) коливань математичного маятника від максимального кута відхилення нитки

Отже, матеріали робіт, з якими гуртківці брали участь у конкурсах-захистах, доцільно використовувати для розробки методики організації навчальних досліджень, при проведенні яких акцент зміщується з наукової новизни дослідження на новизну суб’єктивну. Керівник навчального дослідження буде лише направляти учнів, давати вказівки чи ставити потрібні запитання для скеровування думок у потрібному напрямку. Оскільки керівнику вже відомі результати, які були отримані під час дійсно науково-дослідної роботи, він може сконцентруватися на своїй методичній діяльності, забезпечуючи індивідуальну підтримку і розвиток гуртківців.

3 МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДТРИМКИ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИХ ГУРТКІВ

3.1 Три балістичні задачі на екстремум і одна нерівність

У посібниках [72, 73, 74, 75], орієнтованих на тих, хто готується до олімпіад, є чимало задач на екстремуми. Як відомо, стандартним математичним апаратом для дослідження функцій на екстремуми є апарат диференціального числення. Але за шкільною програмою з математики поняття похідної з'являється надто пізно [76], якщо подивитися з боку потреб шкільного курсу фізики.

У цьому розділі пропонується розглянути деякі методи розв'язування фізичних задач на екстремуми, застосовуючи різні математичні прийоми. Спочатку розглянемо спосіб без застосування похідних. Запишемо умови трьох балістичних задач на знаходження екстремуму так:

Задача 1. Тіло запускають з поверхні землі під різними кутами до горизонту так, щоб воно потрапило в ціль, що знаходиться на відстані L по горизонталі від місця запуску та на висоті H над поверхнею землі. Яку найменшу швидкість та під яким кутом потрібно надати тілу для влучного пострілу по мішені?

Задача 2. З поверхні землі запускають тіло з деякою початковою швидкістю v_0 під різними кутами до горизонту, намагаючись поцілити в мішень, що знаходиться на відстані L по горизонталі від місця запуску. На яку найбільшу висоту можна підняти ціль, та під яким кутом потрібно запускати тіло, щоб постріл був влучний?

Задача 3. З поверхні землі запускають тіло з деякою початковою швидкістю v_0 під різними кутами до горизонту, намагаючись влучити в мішень, що знаходиться на висоті H від над поверхнею землі. На яку найбільшу відстань можна встановити ціль, та під яким кутом потрібно запускати тіло, щоб поцілити в мішень ?

Загальний вираз, який описує траєкторію тіла, кинутого під кутом α до горизонту, має такий вигляд $y(x) = x \cdot \mathrm{tg}\alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$. За цією залежністю можна побудувати графік, який описує траєкторію тіла (рис. 3.1):

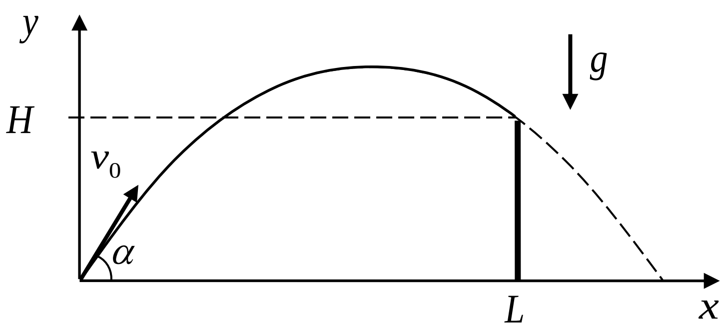

Рисунок 3.1 – Графік, що описує траєкторію польоту тіла

З умов задач відомо, що тіло обов'язково повинно потрапити у точку з координатами $(L;H)$, тому, враховуючи, що $\dfrac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha$, запишемо вираз (3.1):

$$H = L \cdot \mathrm{tg}\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\alpha\right). \tag{3.1}$$

Знайдемо, при яких кутах взагалі можливо влучити у ціль. Для цього виразимо із записаного виразу $\mathrm{tg}\alpha$, виділивши спочатку повний квадрат $\left(\mathrm{tg}\alpha - \dfrac{v_0^2}{gL}\right)^2 = \dfrac{v_0^4}{g^2L^2} - \dfrac{2v_0^2H}{gL^2} - 1$. Звідси слідує, що $\mathrm{tg}\alpha$ дорівнює (3.2):

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gL} \pm \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2L^2} - \frac{2v_0^2H}{gL^2} - 1} \tag{3.2}$$

Видно, коли вираз під коренем набуває від'ємних значень, то в ціль неможливо влучити ні при якому значенні кута α. Отже потрібно розглянути таку нерівність (3.3):

$$\frac{v_0^4}{g^2L^2}-\frac{2v_0^2H}{gL^2}-1\geq 0 \text{ або } v_0^4-2v_0^2gH-g^2L^2\geq 0 \tag{3.3}$$

Звідси можна отримати три нерівності для величин, про які запитується у трьох задачах.

Перша нерівність записується так $\left(v_0^2-gH\right)^2\geq g^2\left(L^2+H^2\right)$. Відкинувши усі розв'язки, що не мають фізичного змісту, перепишемо першу нерівність у такому вигляді $v_0\geq\sqrt{g\left(H+\sqrt{L^2+H^2}\right)}$, *другу нерівність* таким чином $H\leq\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gL^2}{2v_0^2}$, а *третю нерівність* так $L\leq\frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2-2gH}$.

Крайньому випадку наведених трьох нерівностей відповідає знак «дорівнює», залишивши який, знаходимо:

Відповідь до задачі 1. Мінімальну початкову швидкість: $v_{0\min}=\sqrt{g\left(H+\sqrt{L^2+H^2}\right)}$, при $\alpha_{кр}=\operatorname{arctg}\frac{H+\sqrt{L^2+H^2}}{L}$.

Відповідь до задачі 2. Максимальну висоту: $H_{\max}=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gL^2}{2v_0^2}$ при $\alpha_{кр}=\operatorname{arctg}\frac{v_0^2}{gL}$ за умови, що $v_0\geq\sqrt{gL}$.

Відповідь до задачі 3. Максимальну відстань по горизонталі: $L_{\max}=\frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2-2gH}$ при $\alpha_{кр}=\operatorname{arctg}\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2-2gH}}$ за умови, що $v_0\geq\sqrt{2gH}$.

Отже, даний математичний прийом дозволяє уникнути «взяття» похідних, які вивчаються пізніше – у старшій школі [76], натомість замінивши це розв'язанням нерівностей. Надалі буде показано деякі способи, що містять диференціювання.

3.2 Три розв'язки ускладненої балістичної задачі на екстремум

Наведений у попередньому розділі способи розв'язування балістичних задач на екстремум можна доповнити наступними трьома, застосувавши їх для розв'язку ускладненої третьої задачі з розділу 3.1, умову якої можна записати так:

«На краю обриву висотою h закріплена гармата, з якої роблять постріл під деяким кутом до горизонту вгору, ядром, що вилітає з деякою постійною швидкістю v_0. Знайти, якою може бути максимальна дальність польоту ядра?».

Направимо вісь Ox горизонтально, а вісь Oy – вертикально вгору (рис. 3.3). Очевидно, що ядро упродовж польоту буде рухатись з прискоренням, проєкція якого на вісь Ox буде дорівнювати нулю, а на вісь Oy буде від'ємною і становитиме $-g$. Виходячи з цього, запишемо вирази для проєкцій на відповідні вісі вектора швидкості руху тіла, позначивши α кут до горизонту, під яким ядро вилітає з гармати: $v_x = v_0 \cos\alpha$ і $v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt$.

Після інтегрування цих виразів за часом, враховуючи при цьому початкові умови, отримаємо рівняння руху тіла вздовж осей координат: $x(t) = t \cdot v_0 \cos\alpha$ і $y(t) = h + t \cdot v_0 \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$.

Такий запис є виразом траєкторії польоту ядра у параметричному вигляді. Перепишемо його у звичайному вигляді (3.4):

$$y(x) = h + x \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}. \qquad (3.4)$$

Ця функціональна залежність дозволяє зобразити траєкторію польоту ядра на графіку (рис. 3.2).

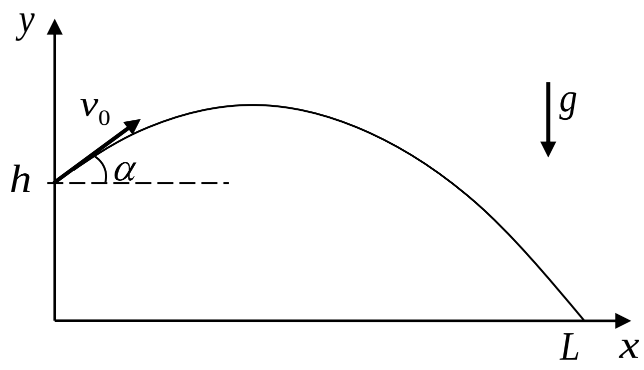

Рисунок 3.2 – Графік, на якому зображена траєкторія польоту ядра

Хоч у попередньому розділі й показаний спосіб, що дозволяє знайти відповідь без застосування диференціювання, у розв’язках до цієї задачі перші два способи будуть містити похідну. Це зумовлено тим, що попереднє ознайомлення з даною темою для гуртківців є корисне у якості підготовки як до олімпіад з фізики, так і до уроків математики у старшій школі.

I «прямий» спосіб – із «взяттям» похідної. Запишемо дальність польоту ядра L у залежності від кута пострілу до горизонту α. Для цього спочатку, розв’язавши квадратне рівняння $0 = h + \tau \cdot v_0 \cos\alpha - \frac{g\tau^2}{2}$, знайдемо часу польоту τ, через який координата ядра $y(t)$ стане рівною нулю $y(\tau) = 0$, тобто $\tau = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}$.

Тепер підставимо отримане значення часу у вираз для горизонтальної координати $x(t) = t \cdot v_0 \cos\alpha$, враховуючи, що у кінцевий момент часу вона буде рівна дальності польоту ядра $x(\tau) = L$ (3.5):

$$L(\alpha) = v_0 \cos\alpha \left(\frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} \right). \qquad (3.5)$$

За умовою задачі, h та v_0 є фіксованими величинами. Отже, змінюючи кут пострілу α, можна знайти такий критичний $\alpha_{кр}$, при якому $L(\alpha_{кр}) = L_{\max}$, а отже задача буде розв’язаною. Для цього знайдемо екстремум функції $L(\alpha)$, взявши похідну за кутом і прирівнявши її до нуля $\frac{dL}{d\alpha}=0$. Але спочатку перепишемо $L(\alpha)$ у вигляді (3.6):

$$L(\alpha)=\frac{v_0^2}{g}\left(\frac{\sin 2\alpha}{2}+\cos\alpha\cdot\sqrt{\frac{2gh}{v_0^2}+\sin^2\alpha}\right). \tag{3.6}$$

Похідна цього виразу має такий вигляд (3.7):

$$\frac{dL}{d\alpha}=\frac{v_0^2}{g}\left(\cos 2\alpha-\sin\alpha\cdot\sqrt{\frac{2gh}{v_0^2}+\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{\sqrt{\frac{2gh}{v_0^2}+\sin^2\alpha}}\right) \tag{3.7}$$

Екстремум функції $L(\alpha)$ знайдемо, привівши цей вираз до спільного знаменника й прирівнявши чисельник без константи $\frac{v_0^2}{g}$ до нуля (3.8):

$$\cos 2\alpha_{кр}\cdot\sqrt{\frac{2gh}{v_0^2}+\sin^2\alpha_{кр}}=\sin\alpha_{кр}\cdot\left(\frac{2gh}{v_0^2}+\sin^2\alpha_{кр}-\cos^2\alpha_{кр}\right) \tag{3.8}$$

Піднісши праву і ліву частину рівняння до квадрату, а також, враховуючи, що $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$, запишемо рівність (3.9):

$$\cos^2 2\alpha_{кр}\cdot\left(\frac{2gh}{v_0^2}+\sin^2\alpha_{кр}\right)=\sin^2\alpha_{кр}\cdot\left(\frac{2gh}{v_0^2}-\cos 2\alpha_{кр}\right)^2 \tag{3.9}$$

Розкриємо дужки зліва та квадрат різниці справа і зведемо подібні доданки $\cos^2 2\alpha_{кр}\cdot\frac{2gh}{v_0^2}=\sin^2\alpha_{кр}\cdot\left(\frac{2gh}{v_0^2}\right)^2-2\sin^2\alpha_{кр}\cos 2\alpha_{кр}\frac{2gh}{v_0^2}$. Скоротимо на константу $\frac{2gh}{v_0^2}$, і, враховуючи, що $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, отримаємо:

$\left(1 - 2\sin^2\alpha_{кр}\right)^2 = \sin^2\alpha_{кр}\cdot\frac{2gh}{v_0^2} - 2\sin^2\alpha_{кр}\left(1 - 2\sin^2\alpha_{кр}\right)$.

Розкриємо дужки і різницю суми і зведемо подібні доданки $1 - 4\sin^2\alpha_{кр} + 4\sin^4\alpha_{кр} = \sin^2\alpha_{кр}\cdot\frac{2gh}{v_0^2} - 2\sin^2\alpha_{кр} + 4\sin^4\alpha_{кр}$.

Отримаємо вираз (3.10):

$$1 = \sin^2\alpha_{кр}\cdot\left(\frac{2gh}{v_0^2} + 2\right) \tag{3.10}$$

Звідки $\sin\alpha_{кр} = \frac{v_0}{\sqrt{2\left(v_0^2 + gh\right)}}$, або $\cos\alpha_{кр} = \sqrt{\frac{2gh + v_0^2}{2\left(v_0^2 + gh\right)}}$, або $\mathrm{tg}\alpha_{кр} = \frac{v_0^2}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$.

Або навпаки, враховуючи що $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ і $2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha = 1$ вираз (3.11):

$$\cos^2 2\alpha_{кр} + 2\sin^2\alpha_{кр}\cos 2\alpha_{кр} = \sin^2\alpha_{кр}\cdot\frac{2gh}{v_0^2} \tag{3.11}$$

Запишемо так $\cos 2\alpha_{кр} = \left(1 - \cos 2\alpha_{кр}\right)\cdot\frac{2gh}{v_0^2}$, звідки $\cos 2\alpha_{кр} = \frac{gh}{v_0^2 + gh}$.

Знайдемо значення $L\left(\alpha_{кр}\right)$, підставивши $\sin\alpha_{кр}$ та $\cos\alpha_{кр}$ (3.12):

$$L\left(\alpha_{кр}\right) = v_0\sqrt{\frac{2gh + v_0^2}{2\left(v_0^2 + gh\right)}}\left(\frac{v_0}{g}\cdot\frac{v_0}{\sqrt{2\left(v_0^2 + gh\right)}} + \frac{1}{g}\sqrt{v_0^2\frac{v_0^2}{2\left(v_0^2 + gh\right)} + 2gh}\right) \tag{3.12}$$

Винесемо знаменник $g\sqrt{2\left(v_0^2 + gh\right)}$ з дужок, а з виразу $\sqrt{v_0^4 + 2\cdot 2\left(v_0^2 + gh\right)gh}$ отримаємо квадрат суми $\sqrt{\left(v_0^2 + 2gh\right)^2} = v_0^2 + 2gh$ (3.13):

$$L\left(\alpha_{кр}\right)=\frac{v_0\sqrt{2gh+v_0^2}}{2g\left(v_0^2+gh\right)}\left(2v_0^2+2gh\right) \tag{3.13}$$

Тоді $L\left(\alpha_{кр}\right)=L_{\max}=\frac{v_0}{g}\sqrt{2gh+v_0^2}$ при $\alpha_{кр}=\operatorname{arctg}\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+2gh}}$.

Такий «прямий» спосіб є математично обґрунтованим, однак досить громіздким. Його застосування корисне для перевірки знань вихованців гуртка зі знаходження екстремумів функцій, диференціюванню та перетворенню різних виразів.

II спосіб – знаходження обвідної лінії. Замість того, щоб розв'язувати вихідну задачу так, як наведено вище, її можна інтерпретувати у такий спосіб: «Знайдіть, при якому значенні *x*, обвідна лінія для сімейства парабол виду $y(x)=h+x\cdot\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$, набуває значення $y(x)$ рівного нулю». Так як обвідна у такому випадку буде представляти лінію, за яку снаряди, випущені з даної висоти з даною швидкістю, не будуть залітати ні при якому куті пострілу α (рис. 3.3).

Враховуючи, що $\frac{1}{\cos^2\alpha}=\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)$, введемо заміну $k=\operatorname{tg}\alpha$. Перепишемо функцію (3.4) як (3.14):

$$y(k)=h+xk-\frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1+k^2\right) \tag{3.14}$$

У результаті диференціювання за змінною *k* виразу (3.14) отримаємо $\frac{dy}{dk}=x-\frac{gx^2}{2v_0^2}\cdot 2k$. Тепер знайдемо, при якому $k_{кр}$ значенні ця похідна дорівнює нулеві $0=x-\frac{gx^2}{2v_0^2}\cdot 2k_{кр}$. Отже, $k_{кр}=\frac{v_0^2}{gx}$.

Підставивши це значення у функцію параболи (3.14), отримаємо $y(x)=h+\frac{v_0^2}{g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1+\frac{v_0^4}{g^2x^2}\right)$. Отже, рівняння обвідної лінії має вигляд (3.15):

$$y(x)=h+\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2} \tag{3.15}$$

Враховуючи, що $y(L_{\max})=0$, знайдемо $L_{\max}$ з рівняння $0=h+\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gL_{\max}^2}{2v_0^2}$ значення максимальної відстані (3.16):

$$L_{\max}=\frac{v_0}{g}\sqrt{2gh+v_0^2} \tag{3.16}$$

Хоч у задачі й не запитується, при якому куті буде максимальна дальність польоту, ми можемо знайти його, враховуючи, що $k=\mathrm{tg}\,\alpha$, $k_{кр}=\frac{v_0^2}{gL_{\max}}$, тоді $\mathrm{tg}\,\alpha_{кр}=\frac{v_0}{\sqrt{2gh+v_0^2}}$.

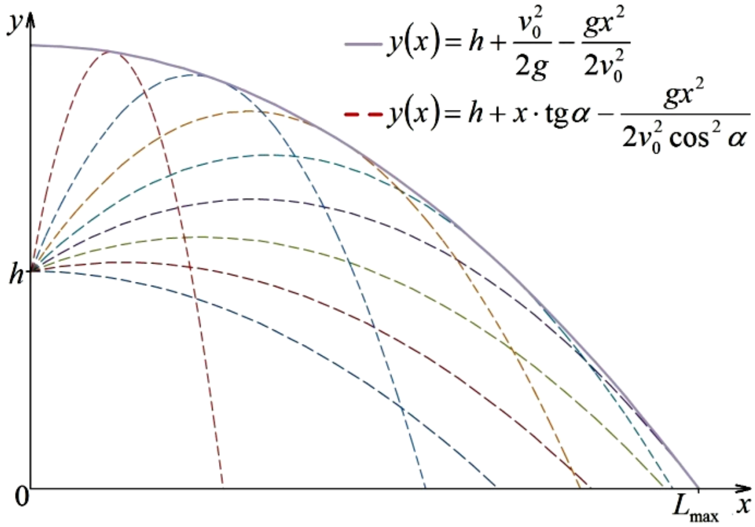

Рисунок 3.3 – Сімейство парабол (пунктирні лінії) та їх обвідна лінія (суцільна лінія)

III спосіб – знаходження мінімальної швидкості. Тепер інтерпретуємо вихідну задачу таким чином: «Яку мінімальну швидкість треба надати ядру, щоб дальність його польоту становила L ». Після знаходження цієї «мінімальної» початкової швидкості, замінимо її на дану в задачі v_0 , в результаті чого замість L отримаємо $L_{\max}$.

Кінцева координата ядра має вигляд $(0;L)$. Запишемо це у вигляді рівняння $0 = h + L\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$. Виразимо звідси $v_0^2 = \dfrac{gL^2}{2(h + L\operatorname{tg}\alpha)\cos^2\alpha}$.

Очевидно, що весь вираз буде прямувати до мінімуму $v_0^2 \to \min$, коли знаменник прямуватиме до максимального значення $2(h + L\operatorname{tg}\alpha)\cos^2\alpha \to \max$.

Враховуючи, що $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $2\cos\alpha\cdot\sin\alpha = \sin 2\alpha$ та $2\cos^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$, перепишемо знаменник у вигляді такої функції кута відхилення та знайдемо її максимум $f(\alpha) = h - h\cos 2\alpha + L\sin 2\alpha$.

Максимальне значення виразу $L\sin 2\alpha - h\cos 2\alpha$ має вигляд $\sqrt{L^2 + h^2}$.

Тоді і максимум введеної функції $f(\alpha)$ дорівнює (3.17):

$$f_{\max} = h + \sqrt{h^2 + L^2} \tag{3.17}$$

Тоді і мінімум швидкості буде рівним (3.18):

$$v_{0\min}^2 = \frac{gL^2}{h + \sqrt{h^2 + L^2}} \tag{3.18}$$

Замінимо у цьому виразі $v_{0\min}$ на v_0, що автоматично приводить нас до заміни L на $L_{\max}$ (3.19):

$$v_0^2 = \frac{gL_{\max}^2}{h + \sqrt{h^2 + L_{\max}^2}} \tag{3.19}$$

Звідки виразимо $L_{\max}$. Спочатку перепишемо цей вираз так $v_0^2\sqrt{h^2+L_{\max}^2}=gL_{\max}^2-hv_0^2$. Піднесемо до квадрату праву та ліву частину і розкриємо дужки $v_0^4h^2+v_0^4L_{\max}^2=g^2L_{\max}^4-2gL_{\max}^2hv_0^2+h^2v_0^4$. Зводимо подібні доданки, та винесемо спільні множники за душки $g^2L_{\max}^4=v_0^2L_{\max}^2\left(v_0^2+2gh\right)$, звідки виразимо шукану величину, враховуючи її фізичний зміст (3.20):

$$L_{\max}=\frac{v_0}{g}\sqrt{2gh+v_0^2} \tag{3.20}$$

Наведені три способи можна доповнити ще одним, який було використано у розділі 3.1. Перепишемо рівняння у такому вигляді і розв'яжемо його відносно тангенса кута пострілу $0=h+L\operatorname{tg}\alpha-\frac{gL^2}{2v_0^2}\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)$.

Виділимо повний квадрат $\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{v_0^2}{gL}\right)^2=\frac{v_0^4}{g^2L^2}+\frac{2v_0^2h}{gL^2}-1$. Виразимо тангенс кута пострілу, також виливши повний квадрат $\operatorname{tg}\alpha=\frac{v_0^2}{gL}\pm\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gL}+\frac{h}{L}\right)^2-\frac{h}{L}-1}$.

Коли під коренем вираз набуває додатні значення, то таку дальність польоту, при заданій швидкості ядро, може досягти, якщо ним вистрелити під двома різними кутами, на що й вказує знак «плюс-мінус».

Розглянемо випадок, коли вираз під коренем має невід'ємне значення, тобто $\left(\frac{v_0^2}{gL}+\frac{h}{L}\right)^2-\frac{h}{L}-1\geq 0$. Розкриємо квадрат і зведемо до спільно знаменника $v_0^4+2ghv_0^2-g^2L^2\geq 0$. Звідси виразимо нерівність, яка має фізичний зміст $L\leq\frac{v_0}{g}\sqrt{2gh+v_0^2}$. Отже, дальність польоту не може бути більша за (3.21):

$$L_{\max}=\frac{v_0}{g}\sqrt{2gh+v_0^2} \tag{3.21}$$

Відповідь: максимальна дальність польоту ядра дорівнює $L_{\max} = \frac{v_0}{g}\sqrt{2gh + v_0^2}$ і можлива при куті пострілу $\alpha_{кр} = \operatorname{arctg}\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$.

Отже, знання та використання деяких математичних прийомів при розв’язуванні фізичних задач допомагає уникнути використання досить складних методів та дещо спростити й скоротити сам розв’язок і перевірку отриманої відповіді. Це стає особливо потрібним як при виконанні науково-дослідних робіт, так і на олімпіадах і конкурсах з фізики. Саме тому вкрай важливо навчати вихованців гуртка таким математичним прийомам.

3.3 Апробація методичних засад математичної підтримки фізико-технічних гуртків та розвитку критичного мислення гуртківців

Методичні засади розвитку критичного мислення гуртківців а також методичні засади математичної підтримки фізико-технічних гуртків закладів позашкільної освіти, наведені у другому та третьому розділах цієї роботи, були застосовані на заняттях гуртка Запорізького обласного центру науково-технічної творчості учнівської молоді «Грані».

Заняття, зважаючи на воєнний стан, проводилися у дистанційному форматі. Разом з гуртківцями, у рамках їх підготовки до науково-дослідної роботи в Малій академії наук України, було проведено як критичний аналіз статті з наукового інтернет-журналу так і продемонстровано навчальне дослідження залежності періоду коливань математичного маятника від амплітуди. Крім того, досить часто впродовж одного заняття відбувалося дослідницьке розв’язування однієї фізичної задачі різними способами з застосуванням інформаційних технологій і комп’ютерних програм. Деякі зразки таких розв’язків наведено у другому та третьому розділах даної кваліфікаційної роботи магістра.

На додаткових заняттях гуртка було проведено консультації двох учнівських робіт, які зайняли перші місця на II та III етапах Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких Малої академії наук України науковому відділенні фізики та астрономії секції теоретичної фізики [77].

Результати дослідження, наведені у даній роботі, були апробовані на XV університетській науково-практичній конференції студентів, аспірантів, докторантів і молодих вчених «Молода наука-2022», яка відбулася 18-22 квітня 2022 року [2]; XXVI Міжнародній науково-практичній конференції «Problems of science and practice, tasks and ways to solve them», яка відбулася 5-8 липня 2022 року [3]; III Міжнародній науково-практичній інтернет-конференції «Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації», яка відбулася 30 вересня 2022 року [4], а також на науково-методичному засіданні кафедри загальної та прикладної фізики ЗНУ (протокол № 4 від 29.11.2022). Також за результатами дослідження було опублікована науково-методична стаття [5].

ВИСНОВКИ

Теоретичний аналіз наукової літератури з досліджуваної проблеми та проведення дослідно-експериментальної роботи з математичної підтримки фізико-технічних гуртків закладів позашкільної освіти (у тому числі і за дистанційної форми навчання) є підставою для наступних висновків:

1. З’ясовано методичні особливості проведення гурткових занять з фізики у закладах позашкільної освіти. Виокремлено труднощі, які виникають при проведенні підготовки учнів до змагань і конкурсів на уроках фізики та наведено переваги занять у гуртках. Обґрунтовано важливість математичної підтримки, поглибленого вивчення математики та навчання критичному мисленню у процесі занять фізико-технічних гуртків закладів позашкільної освіти.

2. Розроблено методичні засади розвитку критичного мислення вихованців фізико-технічних гуртків у закладах позашкільної освіти, зокрема: проведено критичний аналіз наукової статті, як один з видів роботи у фізико-технічному гуртку для розвитку критичного мислення вихованців, та показано хибність підходу її авторів до отримання формули періоду коливань маятника; розібрано навчальне дослідження, пов’язане зі застосуванням чисельних методів для з’ясування залежності періоду коливань математичного маятника від їхньої амплітуди.

3. Розроблено методичні засади математичної підтримки фізико-технічних гуртків у закладах позашкільної освіти та наведено приклади розв'язків фізичних задач різними способами, що включають деякі математичні прийоми, знання та використання яких полегшує розв'язання задач, сприяє розвитку критичного та нестандартного мислення вихованців гуртка, що в подальшому знадобиться їм на олімпіадах та конкурсах з фізики.

4. Впроваджено в навчальний процес фізико-технічного гуртка запропоновані методичні засади. Доведено їх ефективність шляхом

проведеної апробації. Показано, що розроблені методичні засади математичної підтримки є важливими для розвитку критичного мислення та набуття гуртківцями досвіду інтеграції знань, умінь і навичок, які вони отримали, як в школі, так і на заняттях фізико-технічного гуртка.

У перспективі планується розробка повного методичного забезпечення занять у фізико-технічних гуртках закладів позашкільної освіти з використанням розроблених методичних засад для підготовки учнів до олімпіад, конкурсів та захисту науково-дослідницьких робіт Малої академії наук України з фізики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Васильєва Р., Семенець Л., Степанчиков Д. Формування критичного мислення учнів при підготовці до інтелектуальних змагань з фізики / *Нові технології навчання*. 2020. №. 94. С. 44-49. URL : http://journal.org.ua/index.php/ntn/article/view/5/5 (дата звернення: 21.06.2022)
2. Шалатов Д. С. Черговий приклад критичного аналізу наукової статті з фізики у межах учнівського дослідження. / *Збірник наукових праць студентів, аспірантів, докторантів і молодих вчених XV університетської науково-практичної конференції студентів, аспірантів, докторантів і молодих вчених «Молода наука-2022»*. (18-22 квітня 2022 р.), ЗНУ, Запоріжжя. Том 1, С. 69-70 URL : https://web.znu.edu.ua/NIS//2022/tom_1.pdf (дата звернення: 21.09.2022)
3. Мінаєв Ю. П., Тихонська Н. І., Шалатов Д. С. Організація навчального дослідження залежності періоду коливань математичного маятника від амплітуди / *XXVI Міжнародна науково-практична конференція «Problems of science and practice, tasks and ways to solve them»*, (5-8 липня 2022 р.), Гельсінкі, Фінляндія, С. 261–268. URL : https://isg-konf.com/ru/problems-of-science-and-practice-tasks-and-ways-to-solve-them-2/ (дата звернення: 15.07.2022)
4. Шалатов Д. С. Три розв’язки однієї фізичної задачі для розвитку критичного мислення / *III Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації»*. (30 вересня 2022 р.), Запоріжжя. С. 296-301. URL : https://drive.google.com/file/d/1vck6wTMnOqFcOnyEoeJUM31degV0lCWu/view (дата звернення: 22.10.2022)
5. Мінаєв Ю. П., Тихонська Н. І., Шалатов Д. С. Навчання старшокласників прийомів критичного мислення на прикладі аналізу статті про розрахунок

періоду коливань маятника у випадку довільних амплітуд / *Фізика та освітні технології*, Вип. 1, С. 48-55. URL : http://journals.vnu.volyn.ua/index.php/physics/article/view/738/679 (дата звернення: 01.11.2022)

6. Про позашкільну освіту : Закон України від 22.06.2000 № 1841-III / *Відомості Верховної Ради України*. 2000. № 46. С. 393. URL : https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1841-14#Text (дата звернення: 21.01.2022)
7. Про освіту : Закон України від 05.09.2017 № 2145-VIII / *Відомості Верховної Ради України*. 2017, № 38-39, С. 380. URL : https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text (дата звернення: 20.01.2022)
8. Мосякова І. Ю. Організаційно-педагогічні засади управління багатопрофільним позашкільним навчальним закладом : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.06 / Інститут педагогіки НАПН України, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького МОН України, Київ, 2018. 373 с. URL : https://core.ac.uk/download/pdf/195383404.pdf (дата звернення: 27.01.2022)
9. Позашкільна освіта у 2021 році. Статистичні дані. Міністерство освіти і науки України. URL : https://mon.gov.ua/ua/osvita/pozashkilna-osvita/statistichni-danni (дата звернення: 22.01.2022)
10. Гончаренко С. У. Український педагогічний словник. Довідкове видання. Київ : Либідь, 1997. 421с. URL : https://lib.iitta.gov.ua/106820/1/Гончаренко.%20Педагогічний%20словник%20%281%29.pdf (дата звернення: 27.01.2022)
11. Биковський Я. Т. Педагогічні умови діяльності фізико-математичних гуртків закладів позашкільної освіти : автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01 / Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. Київ, 2019. 24 с. URL : http://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/32021/100355505?sequence=1&isAllowed=y (дата звернення: 15.01.2022)

12. Конвенція про права дитини від 20.11.1989 року. (редакція зі змінами, схваленими резолюцією 50/155 Генеральної Асамблеї ООН від 21.12.1995 року). URL : https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/995_021#Text (дата звернення: 29.01.2022)
13. Всесвітня декларація про забезпечення виживання, захисту та розвитку дітей. / URL : https://zakon.rada.gov.ua/laws/main/995_075?lang=ua#Text (дата звернення: 21.12.2021)
14. Про охорону дитинства : Закон України від 26.04.2001 № 2402-III / *Відомості Верховної Ради України*. 2001, № 30, С. 142 URL : https://zakon.rada.gov.ua/laws/main/2402-14#Text (дата звернення: 23.01.2022)
15. Про затвердження переліку типів позашкільних навчальних закладів і Положення про позашкільний навчальний заклад : Постанова Кабінету Міністрів України від 6 травня 2001 р. № 433; зі змінами та доповненнями станом на 26.07.2018. URL : https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/433-2001-п#Text (дата звернення: 25.01.2022)
16. Берека В. Є. Соціально-педагогічні основи розвитку позашкільної освіти в Україні (1957–2000 рр.): автореф. дис. ... канд. пед. наук: спец. 13.00.01 / Інститут педагогіки АПН України. Київ, 2001. 20 с. URL : http://www.irbis-nbuv.gov.ua/aref/20081124046298 (дата звернення: 27.02.2022)
17. Компетентнісний підхід у навчально-виховному процесі позашкільного навчального закладу. Методичний посібник. / В. В. Вербицький та ін. ; за заг. ред. В. В. Мачуського. Харків : «Друкарня Мадрид», 2015. 178 с. URL : https://lib.iitta.gov.ua/9867/ (дата звернення: 18.01.2022)
18. Формування у вихованців позашкільних навчальних закладів базових компетентностей : монографія. / В. В. Вербицький та ін. ; за заг. ред. В. В. Мачуського. Харків : «Друкарня Мадрид», 2015. 330 с. URL : https://nenc.gov.ua/education/wp-content/uploads/2015/12/формування-у-

вихованців-позашкільних-навчальних-закладів-базових-копетентностей.pdf (дата звернення: 19.01.2022)

19. Єгорова О. І. Розвиток позашкільної освіти у Сполучених Штатах Америки : дис. ... канд пед. наук : спец. 13.00.01. / Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. Київ, 2017. 198 с. URL : https://npu.edu.ua/images/file/vidil_aspirant/avtoref/D26.053.01/aref_Yegorova.pdf (дата звернення: 05.03.2022)
20. Пустовіт Г. П. Позашкільна освіта і виховання: книга 1: теоретико-дидактичний аспект. Миколаїв. 2010. 270 с.
21. Пустовіт Г. П. Теоретико-методичні основи екологічної освіти і виховання учнів 1–9 класів у позашкільних навчальних закладах : моногр. Київ ; Луганськ : Альма-матер, 2004. 540 с.
22. Савенко О. О. Економічна підготовка учнів у позашкільних навчальних закладах : автореф. дис. ... канд пед. наук : 13.00.02 / Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова Київ, 2011. 20 с. URL : http://enpuir.npu.edu.ua/handle/123456789/36451 (дата звернення: 18.03.2022)
23. Сущенко Т. І. Позашкільна педагогіка в добу пріоритету особистості / *Педагогіка формування творчої особистості у вищій і загальноосвітній школах*. 2020. № 70, Т. 4. С. 18-23. URL : http://pedagogy-journal.kpu.zp.ua/archive/2020/70/part_4/5.pdf (дата звернення: 10.03.2021)
24. Сущенко Т. І. Позашкільна педагогіка: теорія, історія практика : наук.-метод. посібник. Київ : МАН, 2011. 298 с. URL : https://www.nas.gov.ua/UA/Book/Pages/default.aspx?BookID=0000005544 (дата звернення: 11.02.2021)
25. Уварова С. Г. Самореалізація творчої особистості учня у художньо-естетичному напрямі позашкільної освіти : автореф. дис. ... канд пед. наук : 13.00.02 / Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. Київ, 2013. 23 с. URL : http://enpuir.npu.edu.ua:8080/handle/123456789/33713 (дата звернення: 19.03.2022)

26. Яременко Л. А. Розвиток креативної особистості у позашкільних навчальних закладах : автореф. дис. ... канд пед. наук : 13.00.01 / Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. Київ, 2011. 20 с. URL :http://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/4742/Yaremenko.pdf?sequence=1 (дата звернення: 22.03.2022)
27. Мелентьєв О. Б. Історичні аспекти розвитку позашкільної освіти / *Сучасні методи та форми організації освітнього процесу у закладах вищої освіти* : збірник матеріалів Всеукраїнської науково-методичної конференції. Одеса : Університет Ушинського, 2022. С. 129-133 URL : http://dspace.pdpu.edu.ua/bitstream/123456789/15319/1/Melentiev%202022.pdf (дата звернення: 19.07.2022)
28. Горшкова О. Г. Формування креативного мислення дитини в позашкільному закладі / *Педагогіка формування творчої особистості у вищій і загальноосвітній школах : зб. наук. пр.* / за ред. Т. І. Сущенко та ін. Запоріжжя. 2009. Вип. 5 (58). 564 с. URL : http://pedagogy-journal.kpu.zp.ua/archive/2009/5/5_2009.pdf#page=37 (дата звернення: 17.02.2022)
29. Мілєнін В. М. Інноваційна модель виховного простору сучасного позашкільного навчального закладу. Посібник. Київ, 2013. 160 с. 2013. URL : https://core.ac.uk/download/pdf/32309161.pdf (дата звернення: 10.03.2022)
30. Мелентьєв О. Б. Теорія і методика позашкільної освіти. Навчальний посібник. Умань : «АЛМІ» 2013. 182 с. URL : https://dspace.udpu.edu.ua/bitstream/6789/5238/1/Теорія%20і%20методика%20позашкільної%20%20освіти.pdf (дата звернення: 05.03.2022)
31. Назарівська В. М. Соціально-педагогічна діяльність позашкільних навчальних закладів : квал. роб. ... магістра : 8.01010601 Соціальна педагогіка. Житомир : 2014. URL : http://eprints.zu.edu.ua/12643/1/Назарівська.pdf (дата звернення 26.01.2022)

32. Давидюк Н. Ю. Інтеграція загальноосвітніх та позашкільних навчальних закладів : традиційні та інноваційні напрями розвитку / *Нова педагогічна думка.* 2014. № 2. С. 181-183. URL : http://nbuv.gov.ua/UJRN/Npd_2014_2_54 (дата звернення: 10.02.2022)
33. Каганцова Т. М. Професійний розвиток керівника гуртка позашкільного закладу : підходи до визначення / *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 5 : Педагогічні науки : реалії та перспективи : зб. наук. праць.* Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2018. Вип. 62. С. 80-84. URL : http://enpuir.npu.edu.ua/handle/123456789/23369 (дата звернення: 19.05.2022)
34. Державна наукова установа «Інститут модернізації змісту освіти». URL : https://imzo.gov.ua/stem-osvita (дата звернення: 25.02.2022)
35. Методичні рекомендації щодо розвитку STEM-освіти в закладах загальної середньої та позашкільної освіти у 2022/2023 навчальному році. Лист ІМЗО від 15.08.2022 № 22.1/10-1080. URL : https://imzo.gov.ua/2022/08/15/lyst-imzo-vid-15-08-2022-22-1-10-1080-metodychni-rekomendatsii-shchodo-rozvytku-stem-osvity-v-zakladakh-zahal-noi-seredn-oi-ta-pozashkil-noi-osvity-u-2022-2023-navchal-nomu-rotsi/ (дата звернення: 10.09.2022)
36. Про схвалення Концепції розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти) : Розпорядження Кабінету міністрів України від 05.08.2020 № 960-р. URL : https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/960-2020-p#Text (дата звернення: 15.03.2022)
37. Стрижак О. Є., Сліпухіна І. А., Полісун Н. І., Чернецький І. С. STEM-освіта: основні дефініції / *Інформаційні технології і засоби навчання.* 2017. №. 62(6). С. 16-33. URL : http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?C21COM=2&I21DBN=UJRN&P21DBN=UJRN&IMAGE_FILE_DOWNLOAD=1&Image_file_name=PDF/ITZN_2017_62_6_4.pdf (дата звернення: 07.03.2021)

38. Breiner M. Jonathan, Johnson C. Carla, Harkness Sheats Shelly, Koehler M. Catherine. What Is STEM? A discussion about conceptions of STEM in education and partnerships. / *School Science and Mathematics* Vol. 112 (1), January 2012. URL : https://www.researchgate.net/publication/264295459_What_is_STEM_A_discussion_about_Conceptions_of_STEM_in_education_and_partnerships (дата звернення: 10.03.2022)
39. Балик Н. Р., Шмигер Г. П. Підходи та особливості сучасної STEM-освіти / *Фізико-математична освіта*. 2017. №. 2 (12). С. 26-30. URL : https://cyberleninka.ru/article/n/pidhodi-ta-osoblivosti-suchasnoyi-stem-osviti/viewer (дата звернення: 23.02.2022)
40. Hrynevych L. M., Khoruzha L. L., Rudenko N. M. and Proshkin V. V. STEM education in the context of improving the science and mathematics literacy of pupils / *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing, 2022. Т 2288. № 1. С. 012031 URL : https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2288/1/012031 (дата звернення: 23.08.2022)
41. Karam R., Pospiech G., Pietrocola M. Mathematics in physics lessons: Developing structural skills / *GIREP-EPEC & PHEC*. International Conference. Reims, August. 2011. С. 17-21. URL : https://www.univ-reims.fr/site/evenement/girep-icpe-mptl-2010-reims-international-conference/gallery_files/site/1/90/4401/22908/29476/29655.pdf (дата звернення: 15.07.2022)
42. Halpern D. F. Thought and knowledge : an introduction to critical thinking. Fifth Edition. Psychology Press, New York, 2014. URL : https://ia601306.us.archive.org/12/items/Thought_and_Knowledge_An_Introduction_to_Critical_Thinking_by_Diane_F._Halpern/Thought_and_Knowledge_An_Introduction_to_Critical_Thinking_by_Diane_F._Halpern.pdf (дата звернення: 05.07.2022)
43. Ariani T. Analysis of Students' Critical Thinking Skills in Physics Problems / *Kasuari : Physics Education Journal (KPEJ)*. 2020. Т. 3. №. 1. С. 1-17. URL :

http://www.journalfkipunipa.org/index.php/kpej/article/view/119 (дата звернення: 17.01.2022)

44. Miterianifa M., Trisnayanti Y., Khoiri A., Ayuet al H. D. Meta-analysis: The effect of problem-based learning on students' critical thinking skills / *AIP Conference Proceedings. AIP Publishing LLC*, December 2019. Т. 2194. №. 1. С. 020064. URL : https://www.researchgate.net/publication/338045870_Meta-analysis_The_effect_of_problem-based_learning_on_students'_critical_thinking_skills (дата звернення: 25.07.2022)
45. Peter A. Facione. Critical Thinking: A Statement of Expert Consensus for Purposes of Educational Assessment and Instruction / *Executive Summary «The Delphi Report»*, California Academic Press, 1990. 22 p. URL : https://www.researchgate.net/publication/242279575_Critical_Thinking_A_Statement_of_Expert_Consensus_for_Purposes_of_Educational_Assessment_and_Instruction (дата звернення: 29.03.2022)
46. Lipman M. Critical thinking: What can it be? / *Educational Leadership*, 1988. P. 38-43. URL : https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED352326.pdf (дата звернення: 30.03.2022)
47. Орлянський О. Ю. Розвиток критичного мислення учителя фізико-технічного профілю на аналізі помилок у завданнях з фізики. / *Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету ім. Івана Огієнка. Серія : Педагогічна.* 2017. Вип. 23. С. 66-70. URL : http://ped-series.kpnu.edu.ua/article/view/125401 (дата звернення: 08.05.2022)
48. Що таке компетентнісний підхід у навчанні – відповідає Державна служба якості освіти. URL : https://nus.org.ua/questions/zo-take-kompetentnisnyj-pidhid-u-navchanni-vidpovidaye-derzhavna-sluzhba-yakosti-osvity/ (дата звернення: 29.03.2022)
49. Найважливішим критерієм якості освіти в Україні вважають опанування компетентностей. Дослідження. URL : https://nus.org.ua/news/najvazhlyvishym-kryteriyem-yakosti-osvity-v-

ukrayini-vvazhayut-ovolodinnya-kompetentnostyamy-doslidzhennya/ (дата звернення: 30.03.2022)

50. Липецький О. П. Формування пізнавальної самостійності підлітків у науково-технічних гуртках позашкільних навчальних закладів. / *Теоретико-методичні проблеми виховання дітей та учнівської молоді* . Зб. наук. праць, 2012. 3 (16). С. 185-194. URL : https://lib.iitta.gov.ua/2326/1/Lipetsky%D1%96_2012_book_2.pdf (дата звернення: 17.01.2022)
51. Соломенко А., Коновал О., Туркот Т. Дидактичний потенціал фізики у розвитку критичного мислення / *Педагогіка вищої та середньої школи. Educational Dimension*. 2017. № 1 (50). С. 147-155. URL : https://core.ac.uk/outputs/268532470 (дата звернення: 16.04.2022)
52. Соломенко А. О. Деякі засоби розвитку критичного мислення студентів-фізиків / *Наукові записки Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка. Серія : Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти.* 2016. №. 9 (2). С. 205-212. URL : https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/NZ-PMFMTO/article/view/974 (дата звернення: 18.04.2022)
53. Ляшенко О. І., Терещук С. І. Критичне мислення як технологія компетентнісного навчання фізики / *Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету ім. Івана Огієнка*. Серія: Педагогічна. 2017. № 23. С. 162-166. URL : http://ped-series.kpnu.edu.ua/article/view/125456 (дата звернення: 20.07.2022)
54. Терещук С. І., Мартинюк О. С. Розвиток критичного мислення при вивченні фізики у ліцеї / *Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету ім. Івана Огієнка*. Серія Педагогічна. 2021. № 27. С. 84-87. URL : http://ped-series.kpnu.edu.ua/article/view/251710 (дата звернення: 21.07.2022)
55. Сусь Б. А. Розвиток критичного мислення як засіб формування компетентності майбутнього вчителя фізики / *Сучасні проблеми фізико-*

математичної освіти і науки. 2017. С. 174. URL : http://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/15759/dushchenko-95-2017.pdf?sequence=1#page=175 (дата звернення: 24.07.2022)

56. Сірик Е. П., Кібукевич Т., Сірик К. Розвиток критичного мислення учнів в процесі експериментаторської діяльності з фізики / *Наукові записки* молодих учених. 2021. №. 8. URL : https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1873 (дата звернення: 28.07.2022)
57. Сальник І. В., Томашевська Г. П. Розвиток критичного мислення учнів у процесі вивчення сучасних питань фізики / *Наукові записки.* Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. 2021. Т. 3. №. 12. URL : https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/NZ-PMFMTO/article/view/1369 (дата звернення: 30.07.2022)
58. Ментова Н. О. Технологія розвитку критичного мислення на уроках фізики / *Наукові записки*. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. 2017. Т. 2. №. 11. URL : https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/NZ-PMFMTO/article/view/1153 (дата звернення: 03.08.2022)
59. Захаров А. Є. Технологія критичного мислення в навчанні фізики / *Теоретико-методичні засади вивчення питань сучасної фізики та нанотехнологій у загальноосвітніх та вищихнавчальних закладах*. Матеріали І Всеукраїнської науково-методичної конференції / за ред. О. М. Завражної. Суми: Видавництво Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка, 2016. С. 37-40. URL : http://fizmatsspu.sumy.ua/Konferencii/sbor/nano/materialy_NANO_2016.pdf#page=37 (дата звернення: 04.08.2022)
60. Шкробот Ж. М. Технології критичного мислення в навчанні фізики / *Теоретико-методичні засади вивчення сучасної фізики та нанотехнологій у загальноосвітніх та вищих навчальних закладах :* матеріали III Всеукраїнської науково-методичної конференції. / за ред.

О. М. Завражної Суми: Видавництво Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка, 2018. С. 69-71. URL : http://fizmatsspu.sumy.ua/Konferencii/sbor/nano/materialy_NANO_2018.pdf#page=69 (дата звернення: 05.08.2022)

61. Кенєва І., Мінаєв Ю. Використання фізико-математичних аналогій у межах технології розвитку критичного мислення / *Наукові записки Серія: Педагогічні науки*. Кіровоград : РВВ КДПУ ім. В. Винниченка. 2007. Вип. 72. Частина 1. С. 49-54. URL : http://dspace.cuspu.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/4083/1/Наукові записки КДПУ. Серія Педагогічні науки. - Вип. 72, ч. 1.pdf#page=49 (дата звернення 11.06.2022)

62. Марченко О. А., Мінаєв Ю. П. Знайомство з рядом Тейлора і розвиток критичного мислення / *Наукові записки. Випуск*. Т. 60. № 4.2. URL : http://sites.znu.edu.ua/fizyka_metodyka/statty/Znajomstvo_z_ryadom_Teylora.pdf (дата звернення 12.06.2022)

63. Даценко І. П., Лозовенко О. А., Мінаєв Ю. П. Реалізація ідеї розвитку критичного мислення в практикумі з курсу Математичний апарат фізики. / *Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки*. 2015. № 127 С. 35-38. URL : http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?C21COM=2&I21DBN=UJRN&P21DBN=UJRN&IMAGE_FILE_DOWNLOAD=1&Image_file_name=PDF/VchdpuP_2015_127_10.pdf (дата звернення 16.06.2022)

64. Мінаєв Ю. П., Лозовенко О. А., Даценко І. П. Виховання критичного мислення студентів-фізиків на міждисциплінарнім основі / *Збірник наукових праць кам'янець-подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія педагогічна*. 2013. №. 19. С. 221-224. URL : http://philosophy.chdu.edu.ua/index.php/2307-4507/article/download/31772/28373 (дата звернення: 20.06.2022)

65. Мінаєв Ю. П. Критичний аналіз навчально-методичної літератури у межах спецкурсу «Технологія критичного мислення» для майбутніх

учителів фізики / *Педагогіка формування творчої особистості у вищій і загальноосвітній школах*: *зб. наук. пр*. Запоріжжя. 2011. С. 192-200. URL : http://pedagogy-journal.kpu.zp.ua/archive/2011/16/16_2011.pdf#page=192 (дата звернення: 18.06.2022)

66. Соколов Є. П., Анпілогов Д. І. Збірник структурованих комплексних завдань з фізики : навчально-методичний посібник. Запоріжжя : ЗНТУ. 2010. 208 с. URL : http://books.zntu.edu.ua/book_info.pl?id=178698 (дата звернення: 08.01.2022)

67. Талалай В. В., Кочетков А. В., Федотов П. В., Талалай М. В. Определение периода больших колебаний маятника (до 90°). / *Интернет-журнал «Науковедение».* 2016, Том 8. № 5. URL : http://naukovedenie.ru/PDF/73TVN516.pdf (дата звернення: 31.01.2022)

68. Kochetkov A. V., Chelpanov I. B., Fedotov P. V. Determination of the period of large vibrations of a pendulum in elementary functions. / *Measurement Techniques*, Vol. 59, No. 6, September, 2016, pp. 610-613. URL : https://www.researchgate.net/publication/308947821_Determination_of_the_Period_of_Large_Vibrations_of_a_Pendulum_in_Elementary_Functions (дата звернення: 31.07.2022)

69. Wolfram Alpha. Computational. Intelligence. URL: https://www.wolframalpha.com/ (дата звернення 01.06.2022)

70. Как вычислить приближенное значение определенного интеграла в Wolfram Alpha, используя численные методы решения интегралов. URL: http://www.wolframalpha-ru.com/2013/06/wolframalpha_16.html (дата звернення 02.06.2022)

71. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Учеб, пособие: Для вузов. В 5 т. Т. I. Механика. 4-е изд., стереот. М. : ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2005. 560 с. URL : https://www.twirpx.com/file/2601102/ (дата звернення: 07.03.2022)

72. Всеукраїнські олімпіади з фізики. Задачі та розв'язки / За заг. ред. Б. Кремінського. Львів : Євросвіт, 2003. 232 с. URL : https://www.twirpx.com/file/2178170/ (дата звернення 07.09.2022)
73. Гельфгат И. М., Генденштейн Л. Э., Кирик Л. А. 1001 задача по физике с решениями. Харьков. Центр «Инновации в науке, технике, образовании» 1998. 359 с. URL : https://lib.brsu.by/sites/default/files/books/Гельфгат%20И.М.,%20Л.Э.Генденштейн,%20Л.А.Кирик%20-%201001%20задача%20по%20физике%20с%20решениями_.pdf (дата звернення 07.01.2022)
74. Мельник Ю. С. Задачі прикладного змісту з фізики у старшій школі. Навчально-методичний посібник. Київ : Педагогічна думка, 2013. 120 с. URL : https://core.ac.uk/download/pdf/20054008.pdf (дата звернення 07.09.2022)
75. Мінаєв Ю. П., ТихонськаН. І. Мова фізичних задач : Навчальний посібник. ЗНУ, Запоріжжя. 2011. 95 с. URL : http://ebooks.znu.edu.ua/index.php?action=url/view&url_id=16211 (дата звернення: 07.01.2022)
76. Навчальні програми для 6-9 класів (Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти, 2011 рік). URL : https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas (дата звернення 07.09.2022)
77. Наказ ДОН Запорізької ОДА №186 від 25.05.2022 «Про результати проведення II (обласного) етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів-членів МАН України у 2021/2022 н.р.» URL : http://grani.in.ua/wp-content/uploads/2022/06/наказ-від-25.05.2022-№186.pdf (дата звернення 10.07.2022)