МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ХАНКЕЛЯ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.111-з
спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми математика
(назва освітньої програми)
Г.П. Лягуша
(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, доцент, к.ф.-м.н. Клименко М.І.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри програмної інженерії, доцент, к.ф.-м. н. Кудін О.В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя

2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
фундаментальної та прикладної
математики, д.т.н., професор
_______________ С.М. Гребенюк
(підпис)
«______»__________ 2022 р.

ЗАВДАННЯ

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Лягуші Галині Петрівні
(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Застосування інтегрального перетворення Ханкеля до дослідження нестаціонарних процесів

керівник роботи (проекту) Клименко Михайло Іванович, к.ф.-м.н, доцент
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від «_____» _____________ 2022 року № _________

2. Строк подання студентом роботи ____________

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі
2. Перелік літератури

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

1. Сутність методу інтегральних перетворень для розв'язування задач для рівнянь з частинними похідними
2. Особливості застосування інтегрального перетворення Ханкеля
3. Розв'язування задач про коливання мембрани та пластини методом перетворення Ханкеля
4. Розв'язування задачі про нестаціонарної теплопровідності методом інтегрального перетворення Ханкеля.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)

Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання ____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1	Розробка плану роботи		
2	Збір вихідних даних		
3	Обробка методичних та теоретичних		
	джерел		
4	Розробка першого розділу		
5	Розробка другого і третього розділів		
6	Оформлення та нормоконтроль		
	кваліфікаційної роботи		
7	Захист кваліфікаційної роботи		

Студент ______________ Г.П. Лягуша
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ______________ М.І. Клименко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ______________ О.Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра: «Застосування інтегрального перетворення Ханкеля до дослідження нестаціонарних процесів»: 63 с., 11 джерел.

ВАГОВА ФУНКЦІЯ, ЗВОРОТНЄ ПЕРЕТВОРЕННЯ, ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ, НЕСТАЦІОНАРНІ ПРОЦЕСИ, ОБРАЗ, ПЕРЕТВОРЕННЯ ХАНКЕЛЯ, ЯДРО ПЕРЕТВОРЕННЯ.

Об’єкт дослідження: нестаціонарні процеси коливань та розповсюдження тепла.

Предмет дослідження: розв’язання крайових задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних методом інтегрального перетворення Ханкеля.

Мета роботи: розробка та застосування методики дослідження нестаціонарних процесів у циліндричні системі координат на основі застосування інтегрального перетворення Ханкеля.

Метод дослідження – метод інтегрального перетворення Ханкеля.

У кваліфікаційній роботі магістра розглядаються особливості застосування методів нескінченних інтегральних перетворень, зокрема інтегрального перетворення Ханкеля до розв’язання диференціальних рівнянь у частинних похідних, що моделюють коливальні процеси та процеси розповсюдження тепла у нескінченних середовищах. Розглянуто розповсюдження вільних коливань у пружній пластині та розповсюдження тепла. Застосування інтегрального перетворення Ханкеля дозволяє визначити компоненти переміщень точок даного об’єкта. Запропонований підхід може бути використаний для дослідження хвильових та теплових процесів у нескінченних об’єктах, а результати – при викладанні спецкурсів із диференціальних рівнянь у частинних похідних.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis: «Application of Hankel's integral transformation to the study of non-stationary processes»: 63 pages, 11 references.

WEIGHT FUNCTION, INVERSE TRANSFORMATION, INTEGRAL TRANSFORM, NON-STATIONARY PROCESSES, IMAGE, HANKEL TRANSFORM, KERNEL OF TRANSFORMATION.

The object of research: non-stationary processes of oscillations and heat propagation.

Research subject: solving boundary value problems for partial differential equations by the Hankel integral transformation method.

The purpose of the work: development and application of the methodology for the study of non-stationary processes in the cylindrical coordinate system based on the application of the Hankel integral transformation.

The research method is the Hankel integral transformation method. The master's thesis examines the peculiarities of the application of methods of infinite integral transformations, in particular, the integral Hankel transformation to the solution of differential equations in partial derivatives that simulate oscillatory processes and processes of heat propagation in infinite media. The propagation of free vibrations in an elastic plate and the propagation of heat are considered.

The application of the Hankel integral transformation allows you to determine the components of the displacements of the points of a given object. The proposed approach can be used for the study of wave and thermal processes in infinite objects, and the results can be used for teaching special courses on partial differential equations.

ЗМІСТ

ВСТУП

Застосування інтегральних перетворень є ефективним методом розв’язання та дослідження рівнянь у частинних похідних. При цьому застосування інтегральних перетворень дозволяє замінити диференціальні операції за однією з змінних на алгебраїчні операції, що спрощують вихідну задачу. Основною умовою для застосування інтегрального перетворення є можливість знаходження розв’язку задачі за його образом. Інтегральні перетворення з нескінченими межами інтегрування знайшли широке застосування при розв’язанні задач механіки, теплопередачі, гідродинаміки, акустики тощо. У той же час малодослідженими залишаються особливості застосування нескінченних інтегральних перетворень, зокрема, перетворення Ханкеля, до розв’язання рівнянь у частинних похідних для нестаціонарних задач для нескінченних середовищ. Це обумовлює актуальність даного магістерського дослідження та визначає його мету.

Метою роботи є розробка та застосування методики розв’язання нестаціонарних задач коливань та розповсюдження тепла у нескінченному середовищу з допомогою інтегрального перетворення Ханкеля, об’єктом дослідження – нестаціонарні процеси коливання та розповсюдження тепла у нескінченному середовищі, а предметом дослідження – застосування інтегрального перетворенняХанкеля до розв’язування нестаціонарних задач.

Методом дослідження є метод інтегрального перетворення Ханкеля. У кваліфікаційній роботі магістра розглядаються особливості застосування методу інтегрального перетворення Ханкеля до розв’язання диференціальних рівнянь у частинних похідних, зокрема, бігармонічного динамічного рівняння коливання пластини та рівнянь теплопровідності у нескінченній області, обмеженої зсередину циліндром кругового перерізу.

Висвітлена теоретична основа застосування методів інтегральних перетворень до розв’язання задач математичної фізики, зокрема, нестаціонарних задач, розглянуто сутність методу інтегрального перетворення Ханкеля. Запропонований підхід може бути використаний для дослідження нестаціонарних процесів у інших типів нескінченних середовищ, де при моделюванні процесів використовуються циліндричні та полярні системи координат. Такі дослідження у роботі виконано для коливання нескінченної пластини та процесу розповсюдження тепла у нескінченного середовища.

Результати даного дослідження можуть бути використані при викладанні спецкурсів із диференціальних рівнянь у частинних похідних та при проектування конструкції, окремі елементів яких моделюються у вигляді нескінченного середовища.

1 ЗАГАЛЬНІ ПРИНЦИПИ ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

1.1 Сутність методу інтегрального перетворення

Перетворення, яким функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n дійсних змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ зіставляється функція

$$\overline{f}\left(x_1, \dots, x_{j-1}, \gamma, x_{j+1}, \dots, x_n\right) = \int_a^b f\left(x_1, \dots, x_{j-1}, \zeta, x_{j+1}, \dots, x_n\right) K(\zeta, \gamma)\rho(\xi)d\zeta. \quad (1.1)$$

$n-1$ дійсних змінних $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ і змінної ζ, взагалі кажучи, комплексною, називають інтегральним перетворенням по змінній x_j. Змінну x_j називають змінною перетворення. Інтегральне перетворення (1.1) визначається межами перетворення a, b, ядром $K(\zeta, \gamma)$ і ваговою функцією $\rho(\zeta)$. Функцію $\overline{f}\left(x_1, \dots, x_{j-1}, \gamma, x_{j+1}, \dots, x_n\right)$ називають інтегральним перетворенням або образом функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називають оригіналом або прообразом функції $\overline{f}\left(x_1, \dots, x_{j-1}, \gamma, x_{j+1}, \dots, x_n\right)$.

Можливі інтегральні перетворення по декількох або відразу по всіх змінних. Інтегральне перетворення по декількох змінних еквівалентне послідовному застосуванню інтегрального перетворення по окремих змінних.

Звичайно образи позначають тими ж символами, що і оригінали, але з рискою над символом.

Перетворення, за допомогою якого функція $\overline{f}\left(x_1, \dots, x_{j-1}, \gamma, x_{j+1}, \dots, x_n\right)$ знову переходить у функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, називають оберненим інтегральному перетворенню (1.1). При цьому саме перетворення (1.1) називають прямим.

Інтегральне перетворення визначено, коли інтеграл в правій частині (1.1) існує. Для практичного застосування інтегральних перетворень, однак, важливо, щоб існували також обернені перетворення, які, спільно з (1.1), встановлювали б взаємно однозначну відповідність між класами функцій: початковим класом функцій f і класом функцій $\overline{f}$, що є їх інтегральним зображенням.

Ідея застосування інтегральних перетворень в задачах для рівнянь з частинними похідними полягає у наступному: прагнуть вибрати інтегральне перетворення, яке дозволило б диференціальні операції по одній із змінних замінити алгебраїчними операціями. Коли це вдається, перетворена задача зазвичай простіше вихідної. Знайшовши розв'язок перетвореної задачі, за допомогою оберненого перетворення знаходять і розв'язок вихідної.

Основною відмінністю інтегральних перетворень в скінчених межах від перетворень Фур'є та Лапласа є використання широкого набору інтегральних перетворень, в яких ядра і вагові функції визначаються індивідуально для кожної конкретної задачі.

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку:

$$Mu = f \ , \tag{1.2}$$

де

$$Mu = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=0}^{3} b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu \ , a_{ij} = a_{ji} \tag{1.3}$$

Виберемо одну із змінних $x_j = \zeta$ в якості змінної перетворення, розглядаючи решту змінних $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ як параметри. Нехай a і $b >$

a – межі зміни ζ. У загальному випадку a і b можуть залежати від параметрів $x_\alpha, \alpha \neq j$. Це не виключає повністю можливості виконання інтегрального перетворення рівняння, проте настільки ускладнює перетворене рівняння, що прагнути до цього ступеня спільності немає сенсу. Тому, вважатимемо, що

Припущення 1 Межі a, b зміни змінних перетворення не залежать від параметрів $x_\alpha, \alpha \neq j$.

Піддавши рівняння (1.2), в інтервалі (a, b) зміни змінної ζ, інтегральному перетворенню виду, отримаємо:

$$\int_a^b \left(\sum_{\alpha,\beta \neq j} a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha \neq j} b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c_2 u \right) K(\zeta,\gamma)\rho(\zeta) d\zeta +$$

$$+ \int_a^b \left(a_{jj} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2 \sum_{\beta \neq j} a_{j\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial x_\beta} + b_j \frac{\partial u}{\partial \zeta} + c_1 u \right) K(\zeta,\gamma)\rho(\zeta) d\zeta = \overline{f}, \qquad (1.4)$$

де $c_1 + c_2 = c$, а $\overline{f}$ – інтегральне перетворення вільного члена f.

Поставимо за мету знайти достатні умови, при яких це інтегральне співвідношення може бути перетворене в диференціальне рівняння відносно інтегрального перетворення шуканої функції u.

$$\overline{u} = \int_a^b u K(\zeta,\gamma)\rho(\zeta)\, d\zeta. \qquad (1.5)$$

Надалі диференціювання по змінній перетворення $x_j = \zeta$ позначатимемо штрихами.

Припущення 2 Інтеграли в лівій частині (1.4) рівномірно збігаються відносно параметрів, а підінтегральні вирази – неперервні функції цих параметрів.

Припущення 3 Диференціальний вираз (1.3) може бути представлений у вигляді

$$Mu = M_j u + \widehat{M}u, \tag{1.6}$$

де

$$M_j u = a_{jj}\frac{\partial^2 u}{\partial {x_j}^2} + b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + c_1 u = a_{jj}u'' + b_j u' + c_1 u, \tag{1.7}$$

а

$$\widehat{M}u = \sum_{\alpha,\beta\neq j} a_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha\neq j} b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c_2 u,\ c_2 = c - c_1 \tag{1.8}$$

– диференціальний вираз, що не містить ні похідних по змінній перетворення, ні залежних від неї коефіцієнтів.

Це припущення рівносильне двом наступним:

Коефіцієнти a_{kl} і b_k при $k, l \neq j$ не залежать від $x_j = \zeta$.

$$a_{jk} = 0 \text{ при } k \neq j\ . \tag{1.9}$$

Зважаючи на умову 2 в першому інтегралі в лівій частині (1.4) можна змінити порядок інтегрування по ζ і диференціювання по $x_\alpha, \alpha \neq j$, а тоді зважаючи на властивість 3.1 цей інтеграл набуває вигляду

$$\sum_{\alpha,\beta\neq j} a_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha\neq j} b_\alpha \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_\alpha} + c_2\overline{u}.$$

Це перетворення еквівалентне формальній заміні в (1.6)

$$\widehat{M}u \to \widehat{M}\overline{u}.$$

Другий інтеграл в лівій частині (1.4) проінтегруємо по частинах:

$$\int_a^b \left(a_{jj}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2\sum_{\beta \neq j} a_{j\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial x_\beta} + b_j \frac{\partial u}{\partial \zeta} + c_1 u \right) K(\zeta,\gamma)\rho(\zeta)d\zeta =$$

$$= \left\{ \left[a_{jj}\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \left(b_j - \frac{\partial a_{jj}}{\partial \zeta} \right) u + 2\sum_{\beta \neq j} a_{j\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right] K(\zeta,\gamma)\rho(\zeta)d\zeta - u a_{jj}\frac{\partial (K\rho)}{\partial \zeta} \right\} \Bigg|_a^b -$$

$$-u a_{jj}\frac{\partial (K\rho)}{\partial \zeta}\Bigg|_a^b + \int_a^b \left(\frac{\partial^2 (a_{jj}K\rho)}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial (b_j K\rho)}{\partial \zeta} + c_1 K\rho \right) u d\zeta -$$

$$-2\sum\nolimits_{\beta \neq j} \int_a^b \frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial (a_{j\beta}K\rho)}{\partial \zeta} d\zeta \ . \qquad (1.10)$$

Остання сума в правій частині, зважаючи на 3.2, дорівнює нулю. Перетворене рівняння не буде містити інтегральних членів, якщо

$$\frac{\partial^2 (a_{jj}K\rho)}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial (b_j K\rho)}{\partial \zeta} + c_1 K\rho = -s^2 K\rho, \qquad (1.11)$$

де s^2 – величина, незалежна від ζ. Тоді

$$\int_a^b \left(\frac{\partial^2 (a_{jj}K\rho)}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial (b_j K\rho)}{\partial \zeta} + c_1 K\rho \right) u d\zeta = -s^2 \int_a^b u K\rho d\zeta = -s^2 \overline{u}.$$

Співвідношення 1.11 приймемо за рівняння, що визначає ядро перетворення при $a < \zeta < b$ (при $\zeta = a$ і $\zeta = b$ ядро буде визначено граничними умовами). Зробимо певні припущення про властивості коефіцієнтів a_{jj}, b_j, c_1.

Припущення 4 Коефіцієнти a_{jj}, b_j, c_1 не залежать від параметрів $x_\alpha, \alpha \neq j$.

Припущення 5 При $a < \zeta < b$ величини a''_{jj}, b'_j, c_1 неперервні по ζ, а $a_{jj} > 0$.

За умови 5 рівняння 1.11 вибором вагової функції $\rho(\zeta)$ можна перетворити в самоспряжене. Для цього запишемо його у вигляді

$$a_{jj}pK'' + \left[2\left(a_{jj}p\right)' - b_j p\right]K' - qK = -s^2 pK, \tag{1.12}$$

де

$$q = -\left(\left(a_{jj}p\right)'' - \left(b_j p\right)' + c_1 p\right) \tag{1.13}$$

– неперервна функція змінної перетворення ζ. Визначимо функцію ρ умовою:

$$\left(a_{jj}\rho\right)' = \left(b_j\rho\right), \tag{1.14}$$

звідки

$$a_{jj}p' + \left(a'_{jj} - b_j\right)p = 0. \tag{1.15}$$

Розв’язком цього рівняння служить функція

$$\rho(\zeta) = e^{\int^{\zeta} \frac{1}{a_{jj}}\left(a'_{jj} - b_j\right)d\zeta}. \tag{1.16}$$

Тут символом $\int^{\zeta}$ позначається, що нижньою межею може бути будь – яка точка з інтервалу $a \leq \zeta \leq b$ визначення коефіцієнтів a_{jj}, b_j. Вагова функція, визначена, додатна при всіх ζ з інтервалу $a < \zeta < b$ і має неперервну другу похідну. При даному виборі вагової функції внаслідок (1.14) рівняння (1.12) набуде виду

$$-(pK')' + qK = s^2 \rho K, \tag{1.17}$$

де

$$p = a_{jj}\rho, q = -c_1\rho. \tag{1.18}$$

Зважаючи на умову 5 при $a < \zeta < b$ коефіцієнт $p > 0$, а величини p'' і q неперервні.

Коли ядро інтегрального перетворення задовольняє рівнянню (1.11) або (1.17), то інтегральне перетворення доданку $M_j u$ у (1.6) формально еквівалентно заміні

$$M_j u \rightarrow -s^2 \overline{u}.$$

Тим самим диференціальна операція M_j замінюється алгебраїчною операцією множення на $-s^2$.

За умов (1.9) і (1.14) позаітегральний член у правій частині (1.10) дорівнює різниці

$$N_b - N_a, \tag{1.19}$$

де N_b і N_a – значення виразу

$$N = p(u'K - uK') \tag{1.20}$$

при $\zeta = b$ і $\zeta = a$ відповідно. При позначенні (1.19) і умовах 1 – 5 перетворене рівняння (1.2) набуває виду

$$\widehat{M}\overline{u} - s^2\overline{u} = \overline{f} + N_a - N_b. \tag{1.21}$$

Щоб різниця $N_a - N_b$ при належному виборі ядра перетворення могла бути виражена тільки через задані в задачі величини, достатнім є виконання наступної умови:

Припущення 6 Додаткові дані задачі (граничні і початкові умови) діляться на дві групи, з яких перша не містить похідних за змінною перетворення і залежних від неї коефіцієнтів, а друга не містить похідних за параметрами $x_\alpha, \alpha \neq j$, і представляє умови, задані на межах a, b. Якщо перша група даних містить похідні по x_α, то порядок диференціювання по x_α і інтегрування по $x_j = \zeta$ може бути змінений.

Застосування інтегрального перетворення до першої групи даних зводиться до заміни функцій змінної $x_j = \zeta$ їх інтегральними перетвореннями. Наприклад, гранична умова

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x_k} + \beta u\right)\Big|_{x_k = a_k} = \phi,\ k \neq j,$$

у якому, по зробленому вище припущенню, коефіцієнти α і β не залежать від ζ, перетвориться в граничну умову

$$\left(\alpha \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_k} + \beta \overline{u}\right)\Big|_{x_k = a_k} = \overline{\phi}.$$

Перетворені дані першої групи, тобто дані першої групи, в яких виконана заміна представляє повну сукупність додаткових даних перетвореної задачі:

$$u \to \overline{u}.$$

Друга група даних передбачається заданою на межах $x_j = a$ і $x_j = b$, тобто представляє умови по змінній перетворення. Але дані по змінній перетворення не можуть входити в додаткові дані перетвореної задачі, оскільки вона, за умовою, не повинна містити диференціальних операцій по $x_j = \zeta$ або γ.

Дані по x_j використовуються при обчисленні різниці $N_a - N_b$ і, отже, враховуються в перетвореному рівнянні. Конкретне обчислення різниці $N_a - N_b$ застосовується до різних форм даних по змінній перетворення.

Припущення 5 виключає практично важливий випадок, характерний для рівнянь параболічного типу, коли змінна $x_j = t$ грає роль часу. Для розгляду цього випадку, припустимо, що:

Припущення $\overline{5}$ Рівняння задачі має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \widehat{M}u = f, \tag{1.22}$$

де $\widehat{M}u$ – диференціальний вираз, що не містять похідних по t, а також не залежних від t коефіцієнтів.

Піддавши рівняння (1.22) інтегральному перетворенню з ядром $K(t, \gamma)$ в межах від $t = 0$ до $t = \infty$, отримаємо

$$\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t} K dt + \widehat{M}\overline{u} = \overline{f}. \tag{1.23}$$

Для вагової функції ρ вважаємо, що $\rho = 1$, а

$$\overline{u} = \int_0^\infty u\, K dt.$$

Проінтегрувавши по частинах, отримаємо

$$\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t} K dt = [Ku]|_0^\infty - \int_0^\infty K' u dt.$$

Перетворене рівняння не буде містити інтегральних членів, якщо

$$K' = -sK, \tag{1.24}$$

де $s -$ число, звідки

$$K(t,\gamma) = K(0,\gamma)e^{-st}. \tag{1.25}$$

Продиференціювавши рівняння (1.24) по t, приводимо його до вигляду (1.17):

$$K'' = s^2 K. \tag{1.26}$$

Рівняння (1.23) за умов (1.24) можна привести до вигляду

$$\widehat{M}\overline{u} + s\overline{u} = \overline{f} - [Ku]|_0^\infty. \tag{1.27}$$

1.2 Інтегральні перетворення з нескінченими межами

Якщо змінна $x = \xi$, що обрана в якості змінної перетворення, змінюється у нескінченному інтервалі, то інтегральне перетворення задачі за цією змінною має нескінченні границі.

З’ясуємо спочатку, як належить обрати ядро перетворення, щоб обчислити різницю $N_a - N_b$, що входить в перетворення (1.21).

Якщо інтервал нескінчений лише в одному напрямку і в його початковій точці a коефіцієнти a_{jj}, b_j, c_1 рівняння вихідної задачі не мають особливостей, то в ній, в залежності від фізичного характеру змінної $x_j = \xi$, можуть бути задані або гранична умова вигляду

$$(\alpha_a u^{'} + \beta_a u) = \phi_a,$$

або початкові умови, тобто задані $u(a)$ та $u'(a)$. При заданні граничної умови для можливості обчислення N_a ядро достатньо підпорядкувати умові

$$\alpha_a K^{'} + \beta_a K = 0, \tag{1.28}$$

тоді значення N_a може бути обчислено за формулами:

$$N_a = \frac{\phi_a}{\alpha_a} p(a) K(a, \gamma), \alpha_a \neq 0, \tag{1.29}$$

$$N_a = -\frac{\phi_a}{b_a} p(a) K^{'}(a, \gamma), b_a \neq 0. \tag{1.30}$$

Якщо ж при $\xi = a$ задані початкові умови, то значення, що визначається (1.20) при $\xi = a$, може бути обчислено завжди, і єдине обмеження, що накладається початковими умовами на вибір ядра, полягає в тому, щоб значення N_a було скінченим.

Звичайною умовою у відношенні шуканої функції u є обернення її в нуль в нескінченно віддаленій точці. Необхідно, щоб вираз $N_a = N_\infty$ також обертався в нуль в цій точці, для чого при обертанні в нуль функції u достатньо, щоб значення K і K' залишались в цій точці скінченними.

З’ясуємо як слід обрати ядро, щоб було можливе обернене перетворення, та встановимо загальний вираз для цього останнього.

Розглянемо спочатку інтервал $[a, \infty)$, тобто інтервал з початковою точкою a та необмеженим зверху. В точці $\xi = a$ коефіцієнти рівняння (1.17) особливостей не мають. За характером можливих змін у формі прямого та оберненого перетворень такий інтервал еквівалентний скінченному інтервалу з істотною особливістю в одній з граничних точок.

Сформулюємо теорему розвинення. Для цього зауважимо, що підстановкою

$$v(\xi, \lambda) = K(\xi, \lambda)\sqrt{\rho(\xi)} \tag{1.31}$$

рівняння (1.17), що визначає ядро інтегрального перетворення, перетворюється у вигляд

$$-(\hat{p}v')' + \hat{q}v = \lambda v, \tag{1.32}$$

де

$$\hat{p} = \frac{p}{\rho}, \hat{q} = \frac{q}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left[p\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)'\right]'. \tag{1.33}$$

Використовуючи (2.4), легко підрахувати, що початкові умови вигляду

$$v(a) = cos\,\alpha, p(a)v^{'}(a) = sin\,\alpha, \tag{1.34}$$

а також гранична умова (2.1) для ядра перетворення задовольняються, якщо покласти

$$\alpha = -arctg\left[\frac{p}{\rho}\left(\frac{\beta_a}{\alpha_a} - \frac{1}{2}\frac{\rho^{'}}{\rho}\right)\right]_{\xi=a}, \tag{1.35}$$

$$\left(\sqrt{\rho}K\right)\Big|_{\xi=a} = cos\,\alpha \text{ при } a_\alpha \neq 0, \tag{1.36}$$

$$\left(\frac{p}{\sqrt{\rho}}K'\right)\Big|_{\xi=a} = 1 \text{ при } a_\alpha = 0. \tag{1.37}$$

Роль умов (2.8) та (2.9) насамперед складається в належному нормуванні ядра.

Представимо розвинення функції $f(\xi)\sqrt{\rho}$ і сформулюємо умову:

Нехай: 1) при $a \leq \xi < \infty$ функції $\hat{p}, \hat{p}', \hat{q}$, що визначаються (2.6), неперервні, а функція $\hat{p} > 0$; 2) функція $K(\xi, \lambda)$ при $a < \xi < \infty$ задовольняє рівнянню (1.17), а при $\xi = a$ граничній умові (1.28) і відповідним умовам (1.36) і (1.37) 3) функція $f(\xi)$ задовольняє умові

$$\int_a^\infty |f(\xi)|^2 \rho(\xi) d\xi < \infty. \tag{1.38}$$

Тоді існує інтегральне перетворення

$$\bar{f}(\lambda) = \int_a^\infty f(\xi) K(\xi, \lambda) \rho(\xi) d\xi \tag{1.39}$$

і обернене йому перетворення

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda)K(\xi,\lambda)\sigma^{'}(\lambda)d\lambda + \sum_{(\alpha)} \bar{f}(\lambda_\alpha)K(\xi,\lambda_\alpha)c_{-1}(\lambda_\alpha), \quad (1.40)$$

де функція $\sigma'(\lambda)$ і коефіцієнти $c_{-1}(\lambda_j)$ визначаються коефіцієнтами $\hat{p}, \hat{q}$ і умовами, що накладені на $K(\xi,\lambda)$.

Рівності (1.39) та (1.40) слід розуміти як збіжність у середньому і встановлюють взаємно однозначну відповідність між функціями $\bar{f}(\lambda)$ і $f(\xi)$.

В деяких випадках в правій частині (1.40) інтеграл або сума можуть бути відсутніми.

Права частина (1.40) може бути подана у вигляді інтегралу Стилт'єса, який має вигляд

$$\int_a^b g(x)d\sigma(x).$$

Тоді

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda)K(\xi,\lambda)d\sigma(\lambda), \quad (1.41)$$

де $\sigma(\lambda)$ – функція, що не спадає. Члени суми в правій частині (1.40) відповідають точкам розриву $\sigma(\lambda)$.

$$d\sigma = \frac{4}{\pi^2 a}\frac{sds}{J_\upsilon^2(sa)+Y_\upsilon^2(sa)}, \lambda = s^2 > 0, \quad (1.42)$$

де $J_\upsilon(sa), Y_\upsilon(sa)$ – функції Беселя і Вебера.

Сформулюємо ще одну умову.

Якщо при комплексному λ з мнимою частиною $Im\,\lambda > 0$ існує такий розв'язок υ рівняння (1.41), що не належить класу $\wp^2(a,\infty)$, тобто такий, що інтеграл $\int_a^b |\upsilon|^2 d\xi$ розбігається при $b \to \infty$, то функція $\sigma(\lambda)$ визначена однозначно. В противному випадку існує залежне від одного параметру багатовид функцій $\sigma(\lambda)$, що задовольняють.

Формули (1.41) і(1.42), а також(1.38)-(1.40) дають відповідь на питання про умови існування прямого і оберненого перетворення на інтервалі $a \leq \xi < \infty$.

Коли інтервал зміни змінної інтегрування нескінчений в обох напрямках, а також, коли інтервал нескінчений в одному напрямку, а на іншому кінці інтервалу коефіцієнти рівняння мають досить сильну особливість або такі особливості є на обох кінцях скінченного інтервалу, то вираз для прямого і оберненого перетворення може бути складнішим ніж наведені вище.

Наведемо теорему про розвинення для інтервалу $(-\infty, \infty)$.

Нехай: 1) на будь – якому скінченому інтервалі функції $\hat{p}(\xi), \hat{p}'(\xi)$ і $\hat{q}(\xi)$ дійсні і неперервні, а функція $\hat{p}(\xi) > 0$; 2) функції $K_1(\xi, \lambda), K_2(\xi, \lambda)$ задовольняють рівності (1.17) і початковим умовам (при довільному $\xi = a$):

$$\begin{cases} \left(\sqrt{\rho} K_1\right)\Big|_{\xi=a} = 1, \\ \left(\sqrt{\rho} K_1\right)'\Big|_{\xi=a} = 0, \end{cases} \tag{1.43}$$

$$\begin{cases} \left(\sqrt{\rho} K_2\right)\Big|_{\xi=a} = 0, \\ \frac{p}{\rho}\left[\left(\sqrt{\rho} K_2\right)'\right]\Big|_{\xi=a} = 1; \end{cases} \tag{1.44}$$

3) функція $f(\xi)$ задовольняє умові

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)|^2 \rho(\xi) d\xi < \infty. \tag{1.45}$$

Тоді існує інтегральне перетворення

$$\bar{f}_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) K_1(\xi,\lambda)\rho(\xi) d\xi, \tag{1.46}$$

$$\bar{f}_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) K_2(\xi,\lambda)\rho(\xi) d\xi \tag{1.47}$$

та функції, що не спадають $\sigma_{11}(\lambda), \sigma_{12}(\lambda), \sigma_{22}(\lambda)$, такі, що

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}_1(\lambda) K_1(\xi,\lambda) d\sigma_{11}(\lambda) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\bar{f}_2(\xi) K_1(\xi,\lambda) + \bar{f}_1(\xi) K_2(\xi,\lambda)\right] d\sigma_{12}(\lambda) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}_2(\lambda) K_2(\xi,\lambda) d\sigma_{22}(\lambda). \tag{1.48}$$

Якщо при комплексному l з уявною частиною $Im\, l > 0$ існують розв'язки v_1, v_2 рівняння $-(\hat{p}v')' + \hat{q}v = lv$, що не належать класам $\wp^2(-\infty, a)$ і $\wp^2(a, +\infty)$, тобто такі, що інтеграли

$$\int_{-b}^{a} |v_1|^2 d\xi \text{ і } \int_{a}^{b} |v_2|^2 d\xi$$

розбігаються при $b \to \infty$, то функції $\sigma_{jk}(\lambda)$ визначаються одночасно. В противному випадку існує багатовид функцій $\sigma_{jk}(\lambda)$, що залежать від одного або від двох параметрів.

Інтеграли Стілт'єса у правій частині(1.48), звичайно, також можуть бути подані в формі, що аналогічна правій частині (1.42).

Формули (1.43)-(1.46) розв'язують питання про інтегральні перетворення за змінною, що змінюється в інтервалі, який не обмежений з обох боків.

З (1.48) випливає, що при перетвореннях з двома нескінченими границями для виконання оберненого перетворення необхідно знати два інтегральних перетворення з лінійно незалежними ядрами.

2 ПОНЯТТЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ХАНКЕЛЯ

2.1 Функції Бесселя

При вирішенні багатьох задач математичної фізики приходять до необхідності розв'язування лінійного диференціального рівняння

$$x^2y^n + xy' + (x^2 - v^2)y = 0, \qquad (2.1)$$

де v – постійна.

Це рівняння зустрічається також у багатьох питаннях фізики, механіки, астрономи тощо. Рівняння (2.1) називається рівнянням Бесселя. Оскільки рівняння (2.1) має особливу точку $x = 0$, його частинний розв'язок слід шукати як узагальненого степеневого ряду:

$$y = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (a_0 \neq 0). \qquad (2.2)$$

Підставляючи ряд (2.2) у рівняння (2.1), отримаємо:

$$(\rho^2 - v^2)a_0x^0 + [(p+1)^2 - v^2]a_1x^{p+1} + \sum_{k=2}^{\infty}\{[(p+k)^2 - v^2]a_k + \\ +a_{k-2}\}\, x^{p+k} = 0\ . \qquad (2.3)$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при різних степенях x , матимемо:

$$\rho^2 - v^2 = 0, \qquad (2.4)$$

$$[(p+1)^2 - v^2]a_1 = 0, \tag{2.5}$$

$$[(p+k)^2 - v^2]a_k + a_{k-2} = 0. \tag{2.6}$$

З першої рівності знаходимо два значення для p :

$$p_1 = v \text{ та } p_2 = -v.$$

Якщо ми візьмемо перший корінь $p = v$, то формул (2.5) і (2.6) отримаємо

$$a_1 = 0 \quad \text{та} \quad a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2v+k} \quad (k = 2, 3, 4, \ldots).$$

Звідси випливає, що

$$a_{2k+1} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

а коефіцієнти з парними індексами визначаються, очевидно, за формулами

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(v+1)\cdot 1!}, \quad a_4 = \frac{a_0}{2^4(v+1)(v+2)\cdot 2!} \text{ і т.д.},$$

з яких ясно, що загальний вираз для коефіцієнтів a_{2k} має такий вигляд:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k}(v+1)(v+2)\ldots(v+k)\cdot k!} \quad (k = 2, 3, 4, \ldots).$$

Що ж до коефіцієнта a_0, який був досі абсолютно довільним, то виберемо його таким чином:

$$a_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)}, \tag{2.7}$$

де $\Gamma(v)$ – гамма-функція, яка визначається для всіх позитивних значень v (а також для всіх комплексних значень з позитивною речовою частиною) таким чином:

$$\Gamma(v)= \int_0^\infty e^{-x} x^{v-1}\, dx. \tag{2.8}$$

При такому виборі a_0 коефіцієнт a_{2k} може бути записаним у такому вигляді:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+v} k!(v+1)(v+2)\dots(v+k)\Gamma(v+1)}. \tag{2.9}$$

Цей вираз може бути спрощений, якщо скористатися однією з основних властивостей гамма-функцій. Для цього проінтегруємо праву частину рівності (2.8) частинами; тоді отримаємо наступну основну формулу:

$$\Gamma(v+1) = v\Gamma(v). \tag{2.10}$$

Зазначимо, що формула (2.10) дає можливість визначити гамма-функцію для від'ємних значень v, а також для всіх комплексних значень.

Нехай k – деяке ціле позитивне. Застосовуючи кілька разів формулу (2.10), отримаємо

$$\Gamma(v+k+1) = (v+1)(v+2)\dots(v+k)\Gamma(v+1). \tag{2.11}$$

Вважаючи в цій формулі $v = 0$, знайдемо, через рівність

$$\Gamma(1)= \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = 1$$

іншу важливу властивість гамма-функції, що виражається рівністю

$$\Gamma(k+1) = \text{k}!. \tag{2.12}$$

За допомогою формули (2.11) вираз (2.9) для коефіцієнта a_{2k} набуде наступного вигляду:

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k+v} k!\Gamma(v+\text{k}+1)}. \tag{2.13}$$

Вносячи знайдені значення коефіцієнтів a_{2k+1} і a_{2k}до ряду(2.2), отримаємо частинний розв'язок рівняння (2.1). Цей розв'язок носить назву функції Беселя 1-го роду v-го порядку і позначається зазвичай через $J_y(x)$.

Таким чином,

$$J_y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{2k+v}}{k!\Gamma(v+k+1)}. \tag{2.14}$$

Ряд (2.14) збігається для будь-якого значення x, у яких неважко переконатися, застосовуючи ознаку Даламбера.

Використовуючи другий корінь $p_2 = -v$ можна побудувати другий частинний розв'язок рівняння (2.1). Він може бути отриманим, очевидно, з розв'язку (2.14) простою заміною v на $-v$, оскільки рівняння (2.1) містить тільки v_2 і не змінюється при заміні v на – v:

$$J_{-y}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{-v+2k}}{k!\Gamma(-v+k+1)}. \qquad (2.15)$$

Якщо v не дорівнює цілому числу, то приватні рішення $J_y(x)$ і $J_{-y}(x)$ рівняння Бесселя (2.1) будуть лінійно незалежними, оскільки розкладання, що стоять у правих частинах формул (2.14) і (2.15), починаються з різних ступенів x. Якщо ж є ціле позитивне число n, то в цьому випадку легко виявити лінійну залежність рішень $J_n(x)$ та $J_{-n}(x)$. Справді, загалом v для k=0, 1, 2, …, n -1 величина – v + k+1 приймає цілі від'ємні значення чи нуль. Для цих значень k:$\Gamma(-v+k+1) = \infty$, що випливає з формули

$$\Gamma(m) = \frac{\Gamma(\mathrm{m}+1)}{m}.$$

Таким чином, перші n членів у розкладанні (15) дорівнюють нулю і ми отримаємо

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{-n+2k}}{\Gamma(k+1)(-n+k+1)}.$$

Або, поклавши $k = n + l$, отримаємо

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^l (\frac{x}{2})^{n+2l}}{\Gamma(l+1)\Gamma(-n+l+1)},$$

тобто

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad (n - \text{ціле}) . \qquad (2.16)$$

Звідси випливає, що загалом n функції $J_n(x)$ та $J_{-n}(x)$ лінійно незалежні.

Для того, щоб знайти загальне рішення рівняння (2.1), коли v дорівнює цілому числу n, необхідно знайти друге, лінійно-незалежне від $J_v(x)$, приватне рішення. Для цього введемо нову функцію $Y_v(x)$, поклавши

$$Y_v(x) = \frac{J_v(x)\cos v\pi - J_{-v}(x)}{\sin v\pi}\,. \tag{2.17}$$

Очевидно, що ця функція також є рішенням рівняння (2.1), оскільки вона є лінійною комбінацією частинних розв'язків $J_v(x)$ та $J_{-v}(x)$ цього рівняння. Потім неважко переконатися, на підставі співвідношення (2.16), що при v, рівному цілому числу n, права частина рівності (2.17) набуває невизначеного вигляду $\frac{0}{0}$. Якщо розкрити цю невизначеність за правилом Лопіталя, то в результаті ряду викладок (які через їхню складність тут не відтворюються) отримаємо наступне подання функції $Y_n(x)$ при цілому позитивному n :

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}J_0(x)ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(k+n)!}\left[\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right]. \tag{2.18}$$

В окремому випадку, при n=0, функція $Y_0(x)$ представляється таким чином:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}J_0(x)ln\frac{x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}. \tag{2.19}$$

Ведена тут функція $Y_v(x)$ називається функцією Бесселя 2-го роду *ν-го порядку або функцією Неймана*.

Функція Неймана $Y_v(x)$ є розв'язком рівняння Беселя також у тому випадку, коли v -ціле число.

Функції $J_v(x)$ и $Y_v(x)$ очевидно, лінійно незалежні, отже, ці функції при всякому -дробовому чи цілому v – утворюють фундаментальну систему розв'язків. Звідси випливає, що загальне розв'язків рівняння (2.1) може бути подане у вигляді

$$y = C_1 J_v(x) + y = C_2 Y_v(x)\ , \tag{2.20}$$

де C_1 и C_2 – довільні постійні.

На закінчення цього параграфа зауважимо, що з функцій Бесселя і Неймана різних порядків мають місце такі рекурентні формули:

$$J'_v(x) = J_{v-1}(x) - \frac{v}{x} J_v(x)\ ,\ \ Y'_v(x) = Y_{v-1}(x) - \frac{v}{x} Y_v(x), \tag{2.21}$$

$$J'_v(x) = -J_{v+1}(x) + \frac{v}{x} J_v(x)\ ,\ \ Y'_v(x) = -Y_{v+1}(x) + \frac{v}{x} Y_v(x), \tag{2.22}$$

$$J'_{v+1}(x) = \frac{2v}{x} J_v(x) - J_{v-1}(x)\ ,\ \ Y_{v+1}(x) = \frac{2v}{x} Y_v(x) - Y_{v-1}(x). \tag{2.23}$$

Формули (2.21), (2.22) перевіряються безпосереднім диференціюванням рядів для функції Бесселя. Доведемо, наприклад, справедливість формули (2.21). Маємо

$$\frac{d}{dx}[x^v J_v(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(v+k) x^{2v+2k-1}}{2^{v+2k} k!\Gamma(v+k+1)}.$$

Або, приймаючи до уваги, що $\Gamma(v+k+1) = (v+k)\Gamma(v+k)$ отримаємо

$$\frac{d}{dx}[x^v J_v(x)] = x^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{v-1+2k}}{k!\Gamma(v-1+k+1)}.$$

Порівнявши з розвиненням (2.14), матимемо

$$\frac{d}{dx}[x^v J_v(x)] = x^v J_{v-1}(x).$$

Продиференціювавши добуток, ми переконаємося у справедливості формули (2.21). Справедливість формули (2.22) доводиться аналогічно.

Деякі окремі випадки функцій Бесселя.

У математичній фізиці найчастіше зустрічаються функції Бесселя

$$J_0(x), J_1(x),\ Y_0(x) \text{ та } J_{\pm n\frac{1}{2}}(x),$$

де n – ціле число.

Перші дві з цих функцій подаються такими рядами:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \cdots, \tag{2.24}$$

$$J_0(x) = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \cdots\right). \tag{2.25}$$

Їх є докладні таблиці. функцій Графіки функцій $J_2(x)$, $J_3(x)$ і т.д. зводиться до обчислення відповідних значень функцій $J_0(x)$ и $J_1(x)$

Звернемося тепер до функції $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$. де n –ціле число. Знайдемо насамперед значення функцій $J_{\frac{1}{2}}$ и $J_{-\frac{1}{2}}$, для чого звернемося до розкладання (2.14); з нього видно, що

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}}{k!\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)}.$$

Але з формули(2.11) безпосередньо випливає, що

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)}{2^{k+1}}\Gamma(\frac{1}{2}),$$

де

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Таким чином,

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Остання сума є розкладання sin x в степенний ряд, внаслідок чого

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\ . \tag{2.26}$$

Аналогічно, з розвинення (2.15) випливає, що

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\ . \tag{2.27}$$

Якщо тепер скористатися формулою(2.23), то можна бачити, що

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(-\cos x+\frac{\sin x}{x})=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin(x-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{x}\cos(x-\frac{\pi}{2})\right],$$

$$J_{\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{-\sin x + \frac{3}{x}\left[\sin(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\},$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[(1 - \frac{3}{x^2})\sin(x - \pi) + \frac{3}{x}\cos(x - \pi)\right].$$

Взагалі, функція Бесселя $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$. при цілому n виражається через елементарні функції, а саме:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[P_n(\frac{1}{x})\sin(x - \frac{n\pi}{2}) + Q_{n-1}(\frac{1}{x})\cos(x - \frac{n\pi}{2})\right]. \qquad (2.28)$$

де $P_n(\frac{1}{x})$ – многочлен степеня n відносно $\frac{1}{x}$, а $Q_{n-1}(\frac{1}{x})$ – мног багаточлен ступеня $n - 1$, причому $P_n(0) = 1, Q_{n-1}(0) = 0$.

Звідси випливає, що при великих значеннях x має місце асимптотичне подання функції Бесселя:

$$J_v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1})\right] \quad (x > 0), \qquad (2.29)$$

де через $O(x^{-1})$ позначено величину порядку $\frac{1}{x}$

Зазначимо, що асимптотична формула (2.29) справедлива не тільки за $v = n + \frac{1}{2}$, але й за всіх значень v.

2.2 Означення та властивості інтегрального перетворення Ханкеля

Формули типу (1.14), (1.15), (1.16), що дають розкладання довільної функції $f(x)$ в інтеграл Фур’є, становлять значний інтерес у багатьох проблемах математики та фізики. До розкладів подібного типу відноситься розкладання по циліндричних функцій, відоме під назвам інтеграла Фур'є – Бесселя:

$$f(x) = \int_0^{\infty} J_v(xu)u\,du \int_0^{\infty} f(t)J_v(ut)t\,dt \quad (0 < x < +\infty)\ , \tag{2.30}$$

де $J_v(x)$ – функція Беселя, $v > -\frac{1}{2}$.

Нехай функція $f(x)$ обмеженої варіації у будь-якому скінченному інтервалі (0,R) і

$$\int_0^{\infty} |f(x)|\, x^{\frac{1}{2}} dx < \infty.$$

Тоді при $v > -\frac{1}{2}$ маємо

$$\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\} = \int_0^{\infty} J_v(xu)u\,du \int_0^{\infty} f(t)J_v(ut)t\,dt\ . \tag{2.31}$$

У точках неперервності має місце формула (2.30).

Справедливість зазначеного розвинення сформульована і за інших припущень [2].

Перетворенням Ханкеля називають інтеграл

$$f_v(u) = H_v[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)tJ_v(ut)\,dt \quad (0 < u < +\infty)\ . \tag{2.32}$$

З інтегрального розвинення (2.31) випливає формула обернення

$$f(t) = H_v^{-1}[f_v(u)] = \int_0^{\infty} f_v(u)J_v(ut)\,udt \quad (0 < t < +\infty)\ . \tag{2.33}$$

Зауважимо, що якщо функція $f(t)$ така, що $f(t)=O(t^2)$ при $t\to 0$ $\alpha+v+2>0$ $f(t)=O(t^3)$ при $t\to\infty$ $\beta+\frac{3}{2}>0$, то інтеграл (2.32) збігається [4].

До розвинення (2.31) можна додати ще одне розвинення аналогічного типу

$$f(x)=\int_0^\infty H_v(xu)(xu)^{\frac{1}{2}}u\,du\ \int_0^\infty Y_v(ut)(ut)^{\frac{1}{2}}f(t)t\,dt\ , \qquad (2.35)$$

де Y_v – функція Бесселя другого роду, H_v – функція Струве.

Формула (2.35) є основою для введення відповідного інтегрального перетворення.

Наведемо зв'язок, що існує між перетворенням Ханкеля та кратними перетвореннями Фур'є [1].

Нехай

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\gamma x+i\omega y}f^*(\gamma,\omega)d\gamma d\omega\ ,$$

$$f^*(\gamma,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\gamma x+i\omega y}f(x,y)dxdy\ .$$

При переході до полярних координат за формулами $x+iy=re^{l\varphi}$ і $\gamma+i\omega=pe^{l\varphi}$ функції $f(x,y)$ і $f^*(\gamma,\omega)$ пов'язані між собою наступними співвідношеннями:

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{p=0}^{\infty}\int_{\varphi=0}^{\infty}e^{irp\cos(\varphi-\varphi)}v(p,\varphi)pdpd\varphi.$$

Вважаючи

$$v(p,\varphi)=i^{-n}X(p)e^{tn\varphi}$$

і беручи до уваги інтегральне подання функцій Бесселя

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iz\cos\theta + ln\theta} d\theta,$$

отримаємо

$$u(r,\varphi) = e^{ln\varphi}\int_0^{\infty} \rho J_n\,(r\rho)\chi(\rho)d\rho\ .$$

Введемо позначення

$$u(r,\varphi) = \Phi(r)e^{in\varphi},$$

де $\Phi(r) = \int_0^{\infty} \rho J_n\,(r\rho)\chi(\rho)d\rho.$

Тоді отримаємо

$$v(r,\varphi) = i^n e^{in\varphi}\int_0^{\infty} J_n\,(-r\rho)\Phi(r)rdr,$$

$$\chi(p) = \int_0^{\infty} J_n\,(r\rho)\Phi(r)rdr.$$

Наведемо ще кілька властивостей перетворення Ханкеля.

$$H_v[f(at)] = \frac{1}{a^2} f_v^*(\frac{u}{a}).$$

За допомогою інтегрування частинами можна отримати співвідношення

$$H_v\left[\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{df}{dt} - \frac{v^2}{t^2} f\right] = -u^2 H_v[f(t)].$$

При цьому передбачається, що

$$(t \to 0)\begin{cases} t^{v+1}\frac{df}{dt} = 0, \\ t^{v}f(t) = 0, \end{cases} \qquad (t \to \infty)\begin{cases} t^{\frac{1}{2}}\frac{df}{dt} = 0, \\ t^{\frac{1}{2}}f(t) = 0. \end{cases}$$

Рівність Парсеваля у цьому випадку має вигляд:

$$H_v[f(t)] = f_v^*(u) \qquad H_v[g(t)] = g_v^*(u)\ .$$

Тоді

$$\int_0^{\infty} u f_v^*(u)\, g_v^*(u) du = \int_0^{\infty} t f(t) g(t) dt \qquad (v > -\tfrac{1}{2})\ .$$

Умови справедливості останньої формули сформульовані у [4]. Асимптотика [4]: якщо $f(t) = O(t^{\alpha})$ при $t \to 0$ і $\alpha + v + 2 > 0$ $f(t) = O(t^{3})$ при $t \to \infty$ при $\beta + \frac{3}{2} < 0$, то $f_v^*(u)(v > -1, u > 0)$ існує, і, окрім цього, $f_v^*(u) = O\left(u^{\alpha'}\right)(u \to 0), \alpha' \geq \min(v, -\beta - 2)$ і $f_v^*(u) = O\left(u^{\beta'}\right)(u \to \infty), \beta' \geq \max(-\frac{1}{2}, -\alpha - 2)$.

Узагальненням інтегрального розвинення (2.31) є формула

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi_u(t) u du}{J_v^2(au) + Y_v^2(au)} \int_0^{\infty} f(\tau)\, \varphi_u(\tau) \tau d\tau (a < t < +\infty)\ , \tag{2.36}$$

де $\varphi_u(t) = J(au)Y_v(ut) - Y_v(au)J_v(ut)$ $\quad (v < -\frac{1}{2})$ – лінійна комбінація функції Бесселя першого та другого роду -го порядку.

Розвинення (2.36) має місце, якщо $f(t)$ – кусочно-неперервна функція обмеженої варіації у будь-якому інтервалі (a, R) та інтеграл

$$\int_0^\infty |f(t)|\, t^{\frac{1}{2}} dt < \infty.$$

при $a \to 0$ (3.36) переходить в (3.31).

За аналогією з перетворенням Ханкеля інтегральне розкладання (3.36) призводить до відповідного інтегрального перетворення, яке називається узагальнене перетворення Вебера

$$f^*(u) = \int_a^\infty tC_v\,(ut, au) f(t) dt,$$

де $C_v(z,w) = J_v(z)[PY_v(w) - QwY_{v+1}(w)] - Y_v(z)[PJ_v(w) - QwJ_{v+1}(w)]$,

P і Q – деякі довільні сталі.

Перетворення Ханкеля та Вебера можуть бути успішно застосовані до вирішення крайових задач для рівняння Лапласа та Гельмгольця, деяких задач теорії пружності та теплопровідності.

3 ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ХАНКЕЛЯ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ ТА РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ТЕПЛА

3.1 Застосування перетворення Ханкеля до дослідження коливань

Перетворення Ханкеля є корисним при розв’язані плоских задач у полярній системі координат або просторових задач у циліндричній системі координат. Якщо функція $f(r)$ визначена на $0;\ +\infty)$, абсолютна інтегрована на цьому проміжку з ваговою функцією $\rho(r)=\sqrt{r}$ та задовольняє умови Діріхле, то така функція є оригіналом для перетворення Ханкеля.

Перетворення Ханкеля застосовують для виключення оператора

$$L_1[u]=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\frac{\nu^2}{r^2}u. \tag{3.1}$$

Згідно з формулою [5]: $H\big[L_1[u]\big]=-p^2H[u]$.

При дослідженні малих поперечних коливань нескінченної однорідної мембрани [1], якщо початкові умови мають осьову симетрію, необхідно розв’язати наступну задачу Коші відносно невідомих поперечних коливань $u(r,t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right),\ t>0,\ r>0,$$
$$u(r,0)=f(r),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(r). \tag{3.2}$$

Вважаючи, що функції $u(r,t)$, $f(r)$, $\psi(r)$ задовольняють умовам оригіналам перетворення Ханкеля порядку $\nu=0$, застосуємо це перетворення.

Отримуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння другого порядку відносно зображення $U(t,p)$:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + a^2p^2U = 0,$$
$$U(0,p) = F(p),\ U_t'(0,p) = \Psi(p),$$

де $U(t,p),\ F(p),\ \Psi(p)$ – зображення відповідно невідомої функції переміщення та функцій початкових умов.

З врахуванням початкових умов розв'язок останньої задачі Коші має вигляд:

$$U(t,p) = F(p)\cos(apt) + \frac{\Psi(p)}{ap}\sin(apt).$$

Остаточний розв'язок задачі про поперечне коливання мембрани отримаємо, застосовавши обернене перетворення Ханкеля до отриманого зображення:

$$u(r,t) = \int_0^{+\infty}\left[F(p)\cos(apt) + \frac{\Psi(p)}{ap}\sin(apt)\right]J_0(pr)p\,dp.$$

Використавши інтегральне перетворення Ханкеля для крайової задачі, аналогічної (3.2), що моделює процеси поперечні коливання мембрани з іншими початковими умовами:

$$u(r,0) = \frac{A}{\sqrt{1+\frac{r^2}{b^2}}},\ u_t(r,0) = 0.$$

Застосувавши до рівняння (3.2) інтегральне перетворення Ханкеля (нульового) порядку за змінною r. Отримаємо:

$$\tilde{u}(\lambda,t)=\int_0^{+\infty} ru(r,t)\,J_0(\lambda r)dr.$$

При цьому $u(r,t)=\int_0^{+\infty}\lambda\tilde{u}(\lambda,t)J_0(\lambda r)d\lambda$.

Для лівої частини зображення рівняння (3.2) отримуємо, що зображенням похідної по часу оригіналу буде відповідати похідна по часу зображення $\tilde{u}_{tt}(\lambda,t)$.

Для правої частини цього рівняння отримуємо, застосувавши формулу інтегруваннями частинами:

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)rJ_0(\lambda r)dr=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)J_0(\lambda r)dr=\left(r\frac{\partial u}{\partial r}J_0(\lambda r)\right)\Big|_0^{+\infty}-$$

$$-\int_0^{+\infty}\lambda r\frac{\partial u}{\partial r}J_0'(\lambda r)dr=-\lambda\int_0^{+\infty}r\frac{\partial u}{\partial r}J_0'(\lambda r)dr=-\lambda\left(urJ_0'(\lambda r)\right)\Big|_0^{+\infty}$$

$$+\lambda\int_0^{+\infty}u\frac{\partial u}{\partial r}\left(rJ_0'(\lambda r)\right)dr=$$

$$=\lambda\int_0^{+\infty}\left(J_0'(\lambda r)+J_0''(\lambda r)+\lambda J_0'(\lambda r)\right)udr.$$

Тут позаінтегральні доданки дорівнюють нулю, оскільки виконуються умови $u(\infty,t)=u_r(\infty,t)=0$.

За визначенням для функції Бесселя нульового порядку виконується рівність:

$$\lambda^2J_0''(\lambda r)+\frac{\lambda}{r}J_0'(\lambda r)+\lambda^2J_0(\lambda r)=0.$$

Звідси випливає, що виконується наступна рівність:

$$\lambda^2 r J_0''(\lambda r) + \lambda J_0'(\lambda r) = -r\lambda^2 J_0(\lambda r).$$

Отже, отримаємо рівність:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) r J_0(\lambda r)dr = -\lambda^2 \int_0^{+\infty} ruJ_0(\lambda r)dr = -\lambda^2 \tilde{u}(\lambda, t).$$

Тому рівняння (3.2) з частинними похідними переходить в звичайне лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами виду (параметр перетворення λ тут розглядається як константа):

$$\tilde{u}_{tt}(\lambda, t) + a^2\lambda^2\tilde{u}(\lambda, t) = 0.$$

Знайдемо зображення Ханкеля початкової умови – функції $u(r, 0) = \frac{A}{\sqrt{1+\frac{r^2}{b^2}}}$, отримаємо:

$$\tilde{u}(\lambda, 0) = \int_0^{+\infty} \frac{rA}{\sqrt{1+\frac{r^2}{b^2}}} J_0(\lambda r)dr.$$

Відомо [6], що

$$\int_0^{+\infty} e^{-\omega\lambda} J_0(\lambda r)d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+r^2}},$$

Звідси знаходимо, що

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\omega\lambda}}{\lambda} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+r^2}}.$$

З останньої рівності за формулами обертання знаходимо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{r J_0(\lambda r)}{\sqrt{\omega^2+r^2}} dr = \frac{e^{-\omega\lambda}}{\lambda},$$

тобто маємо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{Ab}{\sqrt{b^2+r^2}} r J_0(\lambda r) dr = \frac{Abe^{-b\lambda}}{\lambda}.$$

Отже, ми отримали наступну задачу Коші для звичайного диференціального рівняння другої порядку відносно невідомої функції – зображення розв’язку:

$$\tilde{u}_{tt}(\lambda, t) + a^2\lambda^2\tilde{u}(\lambda, t) = 0,$$
$$\tilde{u}(\lambda, 0) = \frac{Ab}{\lambda} e^{-b\lambda},\ \tilde{u}_t(\lambda, 0) = 0.$$

Розв’язок цієї задачі Коші – це функція:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \frac{Ab}{\lambda} e^{-b\lambda} cos(a\lambda t).$$

Розв’язуючи вихідної задачі отримуємо з допомогою оберненого перетворення Ханкеля:

$$u(r, t) = \int_0^{+\infty} \lambda \tilde{u}(\lambda, t) J_0(\lambda r) d\lambda = Ab \int_0^{+\infty} e^{-b\lambda} cos(a\lambda t)\, J_0(\lambda r) d\lambda.$$

Оскільки $cos(a\lambda t) = Re\left[e^{-ia\lambda t}\right]$, отримаємо:

$$u(r,t) = Ab \cdot Re\left[\int_0^{+\infty} \lambda\tilde{u}(\lambda,t)J_0(\lambda r)d\lambda\right] = Ab \cdot Re\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+(b+ait)^2}}\right].$$

Далі знаходимо:

$$Ab \cdot Re\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+(b+ait)^2}}\right] = Re\,\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{r^2-a^2t^2}{b^2}+i\frac{2at}{b}}} = \frac{1}{b}Re\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha+i\beta}}\right].$$

Тут введено наступні позначення:

$$\alpha = 1 + \frac{r^2-a^2t^2}{b^2},\ \beta = \frac{2at}{b}.$$

Тоді отримуємо:

$$Re\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha+i\beta}}\right] = Re\,\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(cos\frac{\varphi}{2}+i\,sin\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\ tg\varphi = \frac{\beta}{\alpha},$$

$$cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\,\varphi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+cos\,\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}\ \Rightarrow\ Re\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha+i\beta}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}.$$

Отже, розв’язком поставленої задачі є функція:

$$u(r,t)=\frac{A}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{r^2-a^2t^2}{b^2}\right)^2+\left(\frac{2at}{b}\right)^2}}+\frac{1+\frac{r^2-a^2t^2}{b^2}}{\left(1+\frac{r^2-a^2t^2}{b^2}\right)^2+\left(\frac{2at}{b}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Знайдемо радіально симетричні поперечні коливання необмеженої пластини, якщо є відомим її початкове положення, що залежить лише від радіуса, а початкові швидкості точок цієї пластини дорівнюють нулю.

Відомо, що поперечні коливання $u(r,t)$ необмеженої пластини моделюються рівнянням коливань, що містить бігармонічний оператор Δ^2, тобто двічі поспіль застосувавши гармонічний оператор Δ:

$$u_{tt}+b^2\Delta^2u=0.$$

До цього рівняння додають початкові умови, щоб отримати математичну модель цієї задачі у вигляді задачі Коші. Враховуючи радіальну симетричну коливань, зручно перейти до полярної системи координат. Отримаємо математичну постановку задачу у вигляді:

$$\begin{cases}u_{tt}+b^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\right)^2u=0,\ r>0,\ t>0,\\ u(r,0)=f(r),\ u_t(r,0)=0,\ r>0,\\ u(\infty,t)=u_r(\infty,t)=u_{rr}(\infty,t)=u_{rrr}(\infty,t)=0,\ t>0.\end{cases}$$

Тут у математичній постановці задачі додані, ще умови обмеженості при $r\to\infty$ переміщення $u(r,t)$ та його похідних по радіальній координаті, які є затухають і прямують до нуля.

Обчислим зображення при перетворенні Ханкеля виразу для бігармонічного оператору

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]\right].$$

З врахуванням того, що позаінтегральні члени, що утворюються при подальшому інтегруванні частинами, дорівнюють нулю, отримуємо:

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\right]\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]rJ_0(\lambda r)dr=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]\right]J_0(\lambda r)dr=$$

$$=-\int_0^{+\infty}r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right)\frac{\partial}{\partial r}\big(J_0(\lambda r)\big)dr=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\big(J_0(\lambda r)\big)\right)dr=$$

$$=-\int_0^{+\infty}r\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\big(J_0(\lambda r)\big)\right)\right)dr=$$

$$=\int_0^{+\infty}u\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\big(J_0(\lambda r)\big)\right)\right)\right)dr.$$

Далі використаємо рівність:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\big(J_0(\lambda r)\big)\right)\right)\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\big(\lambda rJ_0'(\lambda r)\big)\right)\right)=$$

$$= \lambda \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\left(J_0'(\lambda r) + \lambda r J_0''(\lambda r) \right) \right) \right) = \lambda \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\left(J_0'(\lambda r) + \lambda J_0''(\lambda r) \right) \right) \right).$$

З рівняння Бесселя

$$\lambda^2 r^2 J_0''(\lambda r) + \lambda r J_0'(\lambda r) + \lambda^2 r^2 J_0(\lambda r) = 0$$

випливає рівність, яку повинна задовольняти функція Бесселя $J_0(\lambda r)$:

$$\frac{1}{r} J_0'(\lambda r) + \lambda J_0''(\lambda r) = -\lambda J_0(\lambda r).$$

Отже, маємо:

$$\lambda \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\left(J_0'(\lambda r) + \lambda J_0''(\lambda r) \right) \right) \right) = -\lambda^3 \frac{d}{dr}\left(r J_0'(\lambda r) \right) =$$

$$= -\lambda^3 \left[J_0'(\lambda r) + \lambda r J_0''(\lambda r) \right] = \lambda^4 r J_0(\lambda r).$$

Таким чином, отримали:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 u r J_0(\lambda r) dr = \lambda^4 \int_0^{+\infty} u(r,t) r J_0(\lambda r) dr = \lambda^4 \tilde{u}(\lambda, t).$$

Отже, з вихідної задачі відносно функції-оригіналу отримаємо для зображення задачу Коші для звичайного диференціального рівняння:

$$\tilde{u}_{tt}(\lambda, t) + b^2 \lambda^4 \tilde{\tilde{u}}(\lambda, t) = 0, \tag{3.3}$$

$$\tilde{u}(\lambda, 0) = \tilde{f}(\lambda), \ \tilde{u}_t(\lambda, 0) = 0. \tag{3.4}$$

Тут $\tilde{f}(\lambda)$ – це зображення початкового переміщення точок пластини:

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(r) r J_0(\lambda r) dr.$$

Розв’язком задачі Коші (5),(6) є функція – зображення переміщення:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{f}(\lambda) \, cos(b\lambda^2 t) \; \tilde{f}(\lambda).$$

Розв’язок вихідної задачі відновимо за формулою обернення перетворення Ханкеля:

$$u(r,t) = \int_0^{+\infty} \lambda \tilde{f}(\lambda) \, cos(b\lambda^2 t) \, J_0(\lambda r) d\lambda =$$
$$= \int_0^{+\infty} \lambda \, cos(b\lambda^2 t) \, J_0(\lambda r) \left[\int_0^{+\infty} \mu f(\mu) J_0(\lambda\mu) d\mu \right] d\lambda =$$
$$\int_0^{+\infty} \mu f(\mu) \left(\int_0^{+\infty} \lambda \, cos(b\lambda^2 t) \, J_0(\lambda r) J_0(\lambda\mu) d\lambda \right) d\mu.$$

Цей інтеграл перетворим наступним чином:

$$\int_0^{+\infty} \lambda \, cos(b\lambda^2 t) \, J_0(\lambda r) J_0(\lambda\mu) d\lambda = Re\left[\int_0^{+\infty} \lambda e^{ibt\lambda^2} J_0(\lambda r) J_0(\lambda\mu) d\lambda \right] =$$
$$= \frac{1}{2bt} sin \frac{r^2+\mu^2}{4bt} J_0\left(\frac{r\mu}{2bt}\right).$$

Отже, остаточний розв’язок поставленої задачі має вигляд:

$$u(r,t) = \frac{1}{2bt} \int_0^{+\infty} \mu f(\mu) \sin \frac{r^2+\mu^2}{4bt} J_0\left(\frac{\rho\mu}{2bt}\right) d\mu \, J_0(\lambda r).$$

Побудуємо розв'язок задачу про радіальні симетричні коливання круглої необмеженої пластинки, прогин якої $u(r,t)$ є малим у порівнянні з товщиною h пластини, а товщина h є малою у порівнянні з радіусом пластини (пластина необмежена по радіальній координаті, тому це припущення виконується).

Розташуємо полярну систему координат r,φ у серединній площині пластині та помістим полярний центр у центр кола, по якому бокова поверхні пластини перетинається з серединною площини. Позначимо D циліндричну жорсткість пластини. Відомо початкові умови для коливального процесу, що досліджується:

$$u(r,0)=f(r),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \tag{3.5}$$

Тобто відомі початкові переміщення точок пластинки, а їх початкова швидкість дорівнює нулю. Диференціальне рівняння, що описує поперечні вісесиметричні коливання $u(r,t)$, має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=b^2\Delta\Delta u=0, \tag{3.6}$$

де $b^2=\frac{\gamma h}{D}$, де γ – щільність матеріалу пластини, оператор Δ – гармонічний оператор у циліндричних координат.

Для вісесиметричого випадку він має вигляд:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}. \tag{3.7}$$

Для розв’язування задачі інтегрування рівняння (3.6) з початковими умовами використаємо метод інтегрального перетворення Ханкеля нульового порядку (порядок перетворення визначається порядком функції Бесселя, що використається у якості ядра перетворення) [4]. Зображення функції *f(r)* визначається рівністю:

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_0^{+\infty} \xi f(\xi) J_0(\lambda\xi)\, d\xi. \tag{3.8}$$

Тут λ – параметр перетворення.

Оригінал відновлюється за формулою оберненого перетворення:

$$f(r) = \int_0^{+\infty} \lambda \tilde{f}(\lambda) J_0(\lambda r)\, d\lambda. \tag{3.9}$$

Застосувавши перетворення Ханкеля за змінною *r* до задачі (3.2), (3.1), приходим до задачі розв’язування звичайного диференціального рівняння відносно зображення:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = -b^2 \lambda^4 \tilde{u}(\lambda, t), \tag{3.10}$$

$$\tilde{u}(0) = \tilde{f}(\lambda) = \int_0^{+\infty} \xi f(\xi) J_0(\lambda\xi) d\xi. \quad \left.\frac{d\tilde{u}}{dt}\right|_{t=0} = 0. \tag{3.11}$$

Самий простий вигляд зображення бігармонічного оператора при перетворенні Ханкеля обумовив вибір метода розв’язування задачі, що ґрунтується на використанні перетворенні Ханкеля. Прийшли до задачі інтегрування простого однорідного звичайного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + b^2\lambda^4 = 0$. Його коренями є $k_{1,2} = \pm b\lambda^2 i$, отже, зображення розв'язок має вигляд:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = C_1(\lambda)\, cos(b\lambda^2 t) + C_2(\lambda)\, sin(b\lambda^2 t).$$

Знаючи $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$, визначаючи з початкових умов (3.11). Отримуючи при цьому, що $C_1(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)$, $C_2(\lambda) = 0$. Отже, розв'язок отриманої задачі Коші для звичайного диференціального рівняння (3.10) з початковими умовами (3.11) має вигляд:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = cos(b\lambda^2 t) \cdot \int_0^{+\infty} \xi f(\xi) J_0(\lambda\xi) d\xi. \tag{3.12}$$

Знайдемо розв'язок задачі, коли розподіл початкових переміщень має вигляд:

$$u(r, 0) = f(r) = Ae^{-\frac{r^2}{a^2}}. \tag{3.13}$$

У (3.13) A та a^2 задані сталі величини.

Для обчислення інтеграла у правій частині рівності (3.12) використаєм перший експоненціальний інтеграл Вебера [6]:

$$\int_0^{+\infty} \lambda J_0(a\lambda) e^{-p^2\lambda} d\lambda = \frac{1}{2p^2} e^{\frac{a^2}{4p^2}}. \tag{3.14}$$

Підставивши у (3.12) замість $f(r)$ її вираз (3.13) і використаємо інтеграл (3.14), отримаємо:

$$\tilde{u}(\lambda,t) = cos(b\lambda^2 t)\cdot\int_0^{+\infty}\xi e^{-\frac{\xi^2}{a^2}}J_0(\lambda\xi)d\xi = \frac{A}{2}a^2 e^{-\frac{\lambda^2 a^2}{2}}cos(b\lambda^2 t). \quad (3.15)$$

Оригінал переміщень знаходимо за формулою обернення перетворення Ханкеля:

$$u(r,t) = \int_0^{+\infty}\lambda\tilde{u}(\lambda,t)J_0(\lambda r)\,d\lambda. \quad (3.16)$$

Представимо (3.15) у вигляді:

$$\tilde{u}(\lambda,t) = \frac{A}{2}a^2 e^{-\frac{\lambda^2 a^2}{2}}cos(b\lambda^2 t) = \left\|cos(b\lambda^2 t) = Re\left[e^{b\lambda^2 ti}\right]\right\| =$$

$$= \frac{A}{2}a^2\, Re\left[e^{-\frac{\lambda^2 a^2}{2}+b\lambda^2 ti}\right].$$

Тут Re – позначимо дійсну частину комплексного виразу. Тоді знаходимо оригінал переміщень точок пластини:

$$u(r,t) = \frac{A}{2}a^2\, Re\left[\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\frac{\lambda^2 a^2}{2}+b\lambda^2 ti}J_0(\lambda r)\,d\lambda\right] = \frac{Ae^{-\frac{R^2}{1+\tau^2}}}{1+\tau^2}\left(cos\left(\frac{R^2\tau}{1+\tau^2}+\tau\, sin\frac{R^2\tau}{1+\tau^2}\right)\right),$$

де $\tau = \frac{4bt}{a^2}$, $R = \frac{r}{a}$.

Аналізуючи отриманий розв'язок, можемо відзначити наступне. Легко переконатися, що при t=0 $\tau = 0$ і виконується задані початкові умови. При $t \to \infty$ переміщення точок пластини прямують до нуля, те ж має місце і при $r \to \infty$.

Застосування перетворення Ханкеля має переваги при розв'язуванні нестаціонарних задач у циліндричних координатах, якщо їх диференціальні математичні моделі містять у рівнянні гармонічні або бігармонічні оператори, тому рівняння відносно зображення є звичайним дуже простим звичайним диференціальним рівнянням, з якого легко можливо відшукати зображення.

Основним при застосування інтегрального перетворення проблемою є знаходження оригіналу при відомому зображенні. Для інтегральних перетворень Лапласа та Фур'є добре розроблена методика знаходження зворотного перетворення і ця задача легко розв'язується з допомогою різних систем комп'ютерної алгебри, наприклад, у Maple, чого, на жаль, для обернення перетворення Ханкеля. У нескладних випадках цю задачу можна розв'язати аналітично, використовуючи властивості циліндричних функцій та відомі формули, пов'язані з інтегруванням, як у розв'язаній у роботі задачі.

3.2 Аналіз нестаціонарного температурного поля

Питання регулювання теплових режимів шахт, копалень, свердловин, що буряться, нафти і газопроводів, а також вивчення теплового впливу прокладених у породах електричних кабелів на інші підземні комунікації пов'язані із завданнями теплопровідності для областей, обмежених зсередини циліндром кругового перерізу при різних граничних умовах на поверхні його. Прикладні задачі такого типу розглядалися у роботах [9,10,11], причому для їхнього розв'язку використовувалися інтеграл Фур'є, метод контурного інтегрування чи перетворення Лапласа. Ці методи завжди пов'язані зі значним обсягом обчислювальних робіт, що потребує інтуїції та досвіду. Тому розглянуте вище перетворення Ханкеля в області $(1, +\infty)$ має перед ними переваги за рахунок стандартності виконуваних операцій.

Розглянемо кілька типів задач вказаного типу.

Нехай початкова температура області$(1, +\infty)$ дорівнює $T_0(r)$. Поверхня $r = 1$ знаходиться при температурі $f(\tau)$

Для цього випадку постановки задачі для рівняння теплопровідності у циліндричних координатах має вигляд:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial \tau}, \;\; r \in (1, +\infty), \qquad \tau > 0 \, , \tag{3.17}$$

$$T(1,\tau) = f(\tau), \quad T(r,0) = T_0(r) \, , \tag{3.18}$$

$$|T(r,\tau)| < +\infty \, . \tag{3.19}$$

Застосуємо до крайової задачі (3.17)-(3.19) перетворення з ядром, поклавши, з міркувань осьової симетрії, $\nu = 0$. Тоді отримуємо:

$$\frac{d\bar{T}}{d\tau} + \mathrm{p}^2\bar{T} = \left|\frac{dK_0(\mathrm{p},r)}{dr}\right|_{r=1} f(\tau) \, , \tag{3.20}$$

$$\bar{T}(\sigma, 0) = \bar{T}_0(0) \, , \tag{3.21}$$

де

$$\bar{T}_0(\mathrm{p}) = \int_1^\infty \mathrm{T}_0(r)\, K_0(\mathrm{p}, r) r dr \, . \tag{3.22}$$

Розв’язком рівняння (3.19), яке задовольняє умову (3.21), буде

$$\bar{T}(\sigma,\tau) = e^{-\mathrm{p}t}\left\{\bar{T}_0(\mathrm{p}) + \left[\frac{dK_0(\mathrm{p},r)}{dr}\right]_{r=1} \int_0^\tau e^{p^2\tau f}(\tau) d\tau\right\} . \tag{3.23}$$

Враховуючи формулу звернення, розв’язання задачі відразу ж отримуємо у вигляді

$$T(r,\tau) = \int_0^\infty K_0(r,\mathrm{p}) e^{-\mathrm{p}^2\tau} \left\{\bar{T}_0(\mathrm{p}) + \left[\frac{dK_0(\mathrm{p},r)}{dr}\right]_{r=1} \int_0^\tau e^{p^2\tau f}(\tau) d\tau\right\} \sigma d\sigma. \tag{3.24}$$

Покажемо, що з рішення (3.24) випливає розв’язання аналогічної задачі, вирішеної за допомогою перетворення Лапласа у дослідженні [4].

Покладемо у (3.24) $T_0(r) = 0$ і $f(\tau) = V = const.$ Далі, оскільки

$$K_0(r,p) = \frac{J_0(pr)Y_0(p) - J_0(p)Y_0(pr)}{\sqrt{J_0^2(p) + Y_0^2(p)}}, \tag{3.25}$$

то, використовуючи властивість функцій Бесселя, знайдемо

$$\left[\frac{dK_0(p,r)}{dr}\right]_{r=1} = -\frac{J_0(p){Y'}_0(p) - {J'}_0(p)Y_0(p)}{\sqrt{J_0^2(p) + Y_0^2(p)}} = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{J_0^2(p) + Y_0^2(p)}}\,. \tag{3.26}$$

Отже, частинний розв’язок задачі у цьому випадку запишеться у вигляді

$$T(r,\tau) = -\frac{2V}{\pi}\left[\int_0^\infty \frac{J_0(pr)Y_0(\sigma) - J_0(p)Y_0(pr)}{J_0^2(\sigma) + Y_0^2(\sigma)}\,\frac{dp}{p} - \int_0^\infty e^{-p^2\tau}\,\frac{J_0(pr)Y_0(p) - J_0(p)Y_0(pr)}{J_0^2(p) + Y_0^2(p)}\,\frac{dp}{p}\right].$$

Далі, оскільки

$$\int_0^\infty \frac{J_v(ax)Y_v(bx)Y_v(ax)}{J_v^2(bx) + Y_v^2(bx)}\,\frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^v\,.$$

то отриманий розв’язок задачі представиться у вигляді

$$T(r,\tau) = V + \frac{2V}{\pi}\int_0^\infty e^{-p^2\tau}\,\frac{J_0(pr)Y_0(p) - J_0(p)Y_0(pr)}{J_0^2(p) + Y_0^2(p)}\,\frac{dp}{p},$$

що цілком збігається з розв’язком (3.22).

Розглянемо наступний випадок. Початкова температура області $(1,+\infty)$ дорівнює $T_0(r)$ Тепловий потік на поверхні r$=1$ дорівнює $f(\tau)$. У цьому випадку у формулюванні завдання слід замінити умови (3.18) на

$$-\lambda\left[\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=1} = f(\tau), \quad T(r,0) = T_0(r).$$

Тоді, застосовуючи до задачі перетворення Ханкеля з ядром функції Бесселя нульового порядку, розв’язувши трансформоване рівняння щодо $\bar{T}(p,\tau)$ і переходячи до оригіналу за формулою обернення, остаточно знаходимо розв’язок задачі у вигляді:

$$T = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} K_0(r,p)e^{-p^2\tau}\left[\bar{T}_0(p) + K_0(p,1)\int_0^{\tau} e^{p^2\tau f}(\tau)d\tau\right]pdp. \qquad (3.27)$$

Зокрема, при $T_0 = 0$ та $f(\tau) = Q = const$ отримаємо вираз

$$T(r,\tau) = -\frac{2Q}{\pi\lambda}\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-p^2\tau}}{p^2}\frac{J_0(pr)Y_1(p)-J_1(p)Y_0(pr)}{J_1^2(p)+Y_1^2(p)}d\sigma\,, \qquad (3.28)$$

який повністю збігається з (3.23)

Розглянемо, коли початкова температура області$(1,+\infty)$ $T_0(r)$. На поверхні r$=1$ відбувається теплообмін із середовищем, що має температуру $T_\iota(\tau)$ У цьому випадку умови (3.18) замінюються на

$$-\left[\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=1} + H[T(1,\tau) - T_\iota(t)] = 0, \qquad T(r,0) = T_0(r)$$

та аналогічні розглянутим вище обчислення призводять до наступного вирішення задачі:

$$T(r,\tau)=\int_0^{\infty}K_0(r,p)e^{-p^2\tau}\left[\bar{T}_0(p)+HK_0(p,1)\int_0^{\tau}e^{p^2\tau}\mathrm{T}(\tau)d\tau\right]pd, \qquad (3.29)$$

де ядро $K_0(r,p)$ визначається формулою при $a=1$ та $v=0$.

При $T_0(r)=V$, що є сталою величиною та $T_\tau(\tau)$ із (3.29) отримаємо

$$T(r,\tau)=-\frac{2HV}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-p^2\tau}\frac{J_0(pr)[J_0(p)+HY_0(p)]-Y_0(pr)[pJ_1(p)+HJ_0(p)]}{[pJ_1(p)+HJ_1(p)]^2+[pY_1(p)+HY_0(p)]^2}\frac{dp}{p}, \qquad (3.30)$$

Викладений вище підхід, застосуємо для знаходження температури тіла з циліндричною порожниною радіуса r_0, якщо ця порожнину підтримують при сталій температурі V а початкова температура тіла дорівнювалась нулю.

Математична модель для цієї задачі має вигляд:

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}=a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right),\ t>0,\ r>r_0,$$
$$T(r,0)=0,\ T(r_0,t)=V.$$

До класу інтегральних перетворень Ханкеля відносим широко застосоване інтегральне перетворення Вебера. Якщо функція $f(r)$ визначена на $r_0;\ +\infty)$, абсолютно інтегрована з ваговою функцією $\rho(r)=\sqrt{r}$ та задовольняє умови Діріхле, то ця функція є оригіналом для перетворення Вебера. Це перетворення задається формулою:

$$F(p)=\int_{r_0}^{+\infty}[J_\nu(pr_0)Y_\nu(pr)-J_\nu(pr)Y_\nu(pr_0)]\,f(r)rdr,$$

де $\nu > -\frac{1}{2}$. Обернене перетворення Вебера має вигляд:

$$f(r) = V^{-1}[F(p)](r) = \int_0^{+\infty} \frac{J_\nu(pr_0)Y_\nu(pr) - J_\nu(pr)Y_\nu(pr_0)}{J_\nu^2(pr_0) + Y_\nu^2(pr_0)} F(p)pdp.$$

Перетворення Вебера, як і перетворення Ханкеля, можна використане для виключення гармонічного оператора (3). Розглянемо приклад використання перетворення Ханкеля у формі перетворення Вебера.

Застосуємо перетворення Ханкеля у формі перетворення Вебера з параметром $\nu = 0$ за змінною r. Для зображеної шуканої функції – температури $\bar{T}(t,p)$ отримуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{T}(t,p)}{\partial t} + a^2 p^2 \bar{T}(t,p) = \dfrac{2V}{\pi}, \\ \bar{T}(0,p) = 0. \end{cases}$$

Її розв'язок має вигляд:

$$\bar{T}(t,p) = \frac{2V}{\pi a^2 p^2}\left(1 - e^{-a^2 p^2 t}\right).$$

Остаточний розв'язок поставленої задачі знаходимо з допомогою оберненого інтегрального перетворення Вебера:

$$T(r,t) = \frac{2V}{\pi a^2} \int_0^{+\infty} \frac{J_0(pr_0)Y_0(pr) - J_0(pr)Y_0(pr_0)}{p\left[J_0^2\right](pr_0) + Y_0^2(pr_0)} \left(1 - e^{-a^2 p^2 t}\right) dp.$$

Значення останнього інтегралу можна знайти, використавши табличний інтеграл з довідкового посібника з спеціальних функцій [6]:

$$\int_0^{+\infty} \frac{J_0(kx)Y_0(\alpha x) - J_0(x\alpha)Y_0(kx)}{p[J_0^2(xk)] + Y_0^2(xk)} dp = \frac{J_1(k\alpha) + Y_1^2(\alpha k)}{J_0^2(\alpha)},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{J_0(kx)Y_0(\alpha x) - J_0(x\alpha)Y_0(kx)}{p\left[J_0^2(xk)\right] + Y_0^2(xk)} e^{\beta^2 x^2} dp = \frac{Y_1(k\alpha) + J_1^2(\alpha k)}{J_1^2(\alpha)} \Phi(\beta k).$$

Підставивши сюди замість x p, замість k r_0 замість α r, замість $\beta = at$, отримуємо розв’язок задачу у вигляді:

$$T(r,t) = \frac{2V}{\pi a^2}\left[\frac{J_1(r_0 r) + Y_1^2(r r_0)}{J_0^2(r)} - \frac{Y_1(r_0 r) + J_1^2(r r_0)}{J_1^2(r)} \Phi(r_0 at)\right].$$

Перетворення Ханкеля та Вебера можливо ефективно застосувати до розв’язування крайових задач для рівнянь Лапласа, Гельмгольца і деяких задач теорії пружності.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі магістра було здійснено дослідження особливостей застосування методу інтегральних перетворень до розв’язання задач дослідження нестаціонарних процесів у нескінченних середовищ, де для описання процесу використовують циліндричні або полярні координати. оболонках. Даний метод був застосований при знаходженні вільних коливань точок мембрани та тонкої нескінченної пластини.

У першому розділі магістерської роботи розглянуто теоретичні засади застосування методу нескінченних інтегральних перетворень до розв’язання задач математичної фізики, зокрема, поняття прямого та оберненого інтегрального перетворень, а також умови, що забезпечують існування інтегрального перетворення.

У другому розділі магістерської роботи розглянуто сутність та особливості застосування важливого для моделювання процесів, що описуються рівняннями у циліндричною та полярною координатами, інтегрального перетворення з нескінченними межами – інтегрального перетворення Ханкеля. Тут проаналізовано основні типи інтегральних перетворень з нескінченними межами, визначено поняття та основні властивості цього інтегрального перетворення, а також основні інтеграли, що використовуються для знаходження оригіналу за відомим зображенням.

Третій розділ магістерського дослідження висвітлює особливості застосування методики, що ґрунтується на використанні інтегрального перетворення Ханкеля, для оцінки характеристик коливального процесу у тонкій нескінченній пластині, зокрема, переміщень її точок. Зокрема, тут отримані розв’язки задачі про радіально симетричні коливання круглої необмеженої пластини. Застосування перетворення Ханкеля дозволили звести до розв’язування задачі Коші для звичайного диференціального лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами. Для знаходження оригіналу розв’язку використали відомі табличні невласні інтеграли, пов’язані з цими циліндричними функціями.

Застосування перетворення Ханкеля має переваги при розв’язуванні нестаціонарних задач у циліндричних координатах, якщо їх диференціальні математичні моделі містять у рівнянні гармонічні або бігармонічні оператори, тому рівняння відносно зображення є звичайним дуже простим звичайним диференціальним рівнянням, з якого легко можливо відшукати зображення. Основним при застосування інтегрального перетворення проблемою є знаходження оригіналу при відомому зображенні. Для інтегральних перетворень Лапласа та Фур’є добре розроблена методика знаходження зворотного перетворення і ця задача легко розв’язується з допомогою різних систем комп’ютерної алгебри, наприклад, у Maple, чого, на жаль, для обернення перетворення Ханкеля. У нескладних випадках цю задачу можна розв’язати аналітично, використовуючи властивості циліндричних функцій та відомі формули, пов’язані з інтегруванням, що й було використано у даному магістерському дослідженні для аналізу коливань, у більшості розв’язок подібних задачах у вигляді невласних інтегралів, які при конкретних параметрів доводиться обчислювально чисельно, тобто отримали наближений розв’язок.

Дослідження показали, що застосування методів нескінченних інтегральних перетворень є ефективним для розв’язання рівнянь у частинних похідних та їх систем, оскільки після застосування інтегрального перетворення отримана задача відносно зображень є значно простішою ніж вихідна, і знайшовши її розв’язок, за допомогою оберненого перетворення знаходять розв’язок вихідної задачі. Розглянутий метод інтегрального перетворення Ханкеля можна застосовувати при розв’язанні широкого класу крайових задач та задач Коші, для рівнянь з частинними похідними, зокрема, задач дослідження коливальних процесів та розповсюдження тепла у суцільному нескінченному середовищі.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Перестюк М. О., Маранец В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. Київ : Лебідь, 2006. 424 с.
2. Бобик О. І., Бобик І. В., Литвин В. В. Рівняння математичної фізики. Львів : Новий світ, 2020. 256 с.
3. Бондаренко В. Г. Рівняння математичної фізики. Київ : КПІ ім. І. Сікорського, 2018. 100 с.
4. Вайсфельд Н. Д., Рент В. В. Рівняння математичної фізики. Одеса : ОНУ, 2018. 194 с.
5. Курпа Л. В., Линник Г. Б. Рівняння математичної фізики. Харків : ХПІ, 2011. 312 с.
6. Abramowitz M., Stegan I. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematikal Tables. Washington : NBS, 2012, 1058 p.
7. Вірченко Н. О., Четвертик М. О. Узагальнені інтегральні перетворення. *Доповіді НАНУ*. 2015. №8. С. 7–12.
8. Вірченко Н. О., Четвертак М. О. Про одне узагальнене перетворення Бесселя. *Доповіді НАНУ*. 2014. №7. С.23–31.
9. Вірченко Н. О., Заїкіна С. М. Узагальнені інтегральні перетворення. *Теоретичні та прикладні проблеми фізико-математичних наук. Наукові вісті НТТУ «КПІ»*. 2008. №10. С.133–137.
10. Debnath L. Integral Transforms and Their Applications. Boca Raten : Cass Press, 1995. 456 p.
11. Kilbas A. A. Transforms Theory and Applications. Boca Raten : FL Charman and Hall. CRS. 2004. 390 p.