МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КФАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО МІНІМІЗАЦІЮ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦІОНАЛА ПРИ КЕРУВАННІ ПРОЦЕСОМ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ»**

Виконала студентка 2 курсу, групи 8.1111
спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми математика
(назва освітньої програми)
М.В. Маляревич
(ініціали та прізвище)
Керівник доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, доцент, к.ф.-ф.н., Красікова І.В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)
Рецензент доцент кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н., Стєганцева П.Г.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя

2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
фундаментальної та прикладної
математики, д.т.н., професор
________________Гребенюк С.М.
(підпис)
“ “ 2022 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Маляревич Маргариті Віталіївні
(прізвище, ім’я та по-батькові)

1. Тема роботи Розв’язання задачі про мінімізацію квадратичного функціонала при керуванні процесом теплопровідності

керівник роботи Красікова Ірина Володимирівна, к.ф.-ф.н., доцент
(прізвище, ім’я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від «10» травня 2022 р. № 90-С

2. Строк подання студентом роботи
3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури
4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
   1. Основні означення.
   2. Постановка задачі.
   3. Розв’язання задачі
5. Перелік графічного матеріалу (з точними значеннями обов’язкових креслень) ___________
презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		Завдання видав	Завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 07.05.2022

К А Л Е Н Д А Р Н И Й   П Л А Н

№	**Назва етапів кваліфікаційної роботи**	**Строк виконання етапів роботи**	**Примітка**
1.	Розробка плану роботи.	14.05.2022	
2.	Збір вихідних даних.	21.05.2022	
3.	Обробка методичних та теоретичних	23.06.2022	
	джерел.		
4.	Розробка першого та другого розділів.	29.09.2022	
5.	Розробка третього розділу.	22.11.2022	
6.	Оформлення і нормоконтроль	12.12.2022	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	14.12.2022	

Студент ____________ М.В. Маляревич
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ____________ І.В. Красікова
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ____________ Спиця О.Г.
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Розв'язання задачі про мінімізацію квадратичного функціонала при керуванні процесом теплопровідності»: 61 с., 9 джерел.

ГРАДІЄНТ ФУНКЦІОНАЛА, КРАЙОВА ЗАДАЧА, КРИТЕРІЙ ОПТИМАЛЬНОСТІ, МАТРИЧНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ, ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ

Об'єктом дослідження є задачі оптимального керування на мінімізацію квадратичних функціоналів.

Мета дослідження полягає в розв'язанні двох задач, які описуються крайовими задачами для рівняння теплопровідності. В кожній задачі є свій критерій оптимальності у вигляді квадратичного функціонала, та свій клас допустимих керувань.

Розвинення функцій в ряд за системою власних функцій задачі Штурма-Ліувілля зводить вихідні задачі до розв'язання нескінченних систем диференціальних рівнянь, які можна подати у вигляді матричних диференціальних рівнянь. Такі задачі мають узагальнені розв'язки та дозволяють отримати керуючу функцію в заданому класі. За деяких додаткових умов можна отримати точний розв'язок задачі прямими методами.

SUMMARY

Master’s Qualification Thesis «Solving the problem of minimizing a quadratic functional in controlling the process of heat conduction»: 61 pages, 9 references.

FUNCTIONAL GRADIENT, BOUNDARY EDGE PROBLEM, OPTIMALITY CRITERION, MATRIX DIFFERENTIAL EQUATION, OPTIMAL CONTROL

The object of research is optimal control problems for the minimization of quadratic functionals.

The purpose of the study is to solve two problems, which are described by boundary value problems for the heat conduction equation. Each problem has its own criterion of optimality in the form of a quadratic functional, and its own class of admissible controls.

Development of functions in a series according to the system of eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem reduces the original problems to the solution of infinite systems of differential equations, which can be presented in the form of matrix differential equations. Such problems have generalized solutions and allow obtaining a control function in a given class. Under some additional conditions, an exact solution to the problem can be obtained by direct methods.

ЗМІСТ

ВСТУП

Початкова інформація для вирішення завдань оптимального керування міститься в постановці задачі. Для застосування математичних методів необхідне чітке і строге формулювання задач, яке б усувало можливі невизначеності і двозначності та одночасно робило б задачу математично коректною. З цією метою для загальної задачі необхідне адекватне їй математичне формулювання – математична модель задачі оптимізації.

Математична модель – достатньо повний математичний опис динамічної системи і процесу керування в рамках вибраного ступеня наближення і деталізації. Зазвичай математична модель загальної задачі керування характеризується сукупністю певних математичних співвідношень між її елементами (диференціальних рівнянь, обмежень у вигляді нерівностей, критерію оптимальності, початкових і граничних умов тощо). Математична задача оптимізації має бути чітко визначеною та мати сенс, тобто не містити умов, що приводять до відсутності розв'язку. В роботі буде розглядатися керований процес, який буде описуватися рівнянням в частинних похідних параболічного типу для деякої функції, заданої на прямокутнику $D = [0, \mathrm{T}]\mathrm{x}[0,1]$. Додатково задаються граничні умови та початкові умови.

Зазвичай в процессі розв'язання задачі з'являються додаткові умови, які дозволяють отримати її розв'язок. Важливим кроком в постановці і рішенні загальної задачі керування є вибір критерію оптимальності. В деяких випадках формальний вираз оптимальності системи допускає декілька еквівалентних формулювань. У таких випадках успіх і простота отримуваного рішення багато в чому визначається вибраною формою критерію оптимальності. Після побудови математичної модулі процесу керування подальше її дослідження і оптимізація проводяться математичними методами. В наших задачах критерій оптимальності має вигляд квадратичного функціонала, який потрібно мінімізувати. Тобто оптимальним керуванням в обох задачах буде вважатися така функцій з обумовленого класу, при якій задана крайова задача має розв'язок, і це оптимальне керування та відповідний йому розв'язок крайової задачі будуть надавати заданому функціоналу найменше можливе значення.

При розв'язанні низки проблем оптимального керування тепловими та дифузними процесами, що описуються крайовими задачами, використовуються методи динамічного програмування, що призводять до інтегро-диференціальної крайової задачі типу Ріккаті. Подання шуканих функцій у вигляді рядів Фур'є за повною ортонормованою системою власних функцій задачі Штурма-Ліувілля в просторі L_2 призводять до нескінченних систем диференціальних рівнянь. Такі системи зручно записувати у вигляді матричного диференціального рівняння Ріккаті та розв'язувати його методами, придатними для розв'язання рівнянь такого типу. Як відомо, в загальному вигляді рівняння Ріккаті не можна розв'язати прямими методами. Але при певних додаткових умовах це можна зробити.

У роботі розглядаються дві крайові задачі схожого типу, але з різними критеріями оптимальності та з різними функціями керування. В першій задачі критерій оптимальності має більш складний вигляд, ніж в другій, та керуюча функція в цій задачі має належати простору $L_2\ (D)$. В другій задачі керуюча функція залежить лише від однієї змінної – часу – і має належати простору $L_2\ [0, T]$.

При розв'язанні обох задач використовується один метод, який спирається на принцип оптимальності Беллмана. В кожній задачі отримується рівняння Беллмана для заданої динамічної системи та при розв'язанні цього рівняння з'являється інтегро-диференціальна задача типу Ріккаті.

Розвинення шуканих функцій в ряди Фур'є за повною ортонормованою системою власних функцій задачі Штурма-Ліуівілля одну з цих задач призводить до матричного диференціального рівняння Ріккаті, точний розв'язок якого вдається знайти, а другу – до рівняння Бернуллі, яке завжди можна розв'язати. В якості коефіцієнтів в цих рівняннях виступають сталі матриці, але навіть при цьому розв'язки мають доволі складний вигляд. В першій задачі додаткові вимоги на функцію, що входить в квадратичний функціонал, дозволяють виписати матрицю розв’язку поелементно. Але навіть у загальному випадку, коли елементи матриці виписати не виходить, наводиться її загальний вигляд.

Такий підхід, по-перше, дає можливість отримати розв’язок задачі, по-друге, показати, що знайдене керування є допустимим, тобто належить заздалегідь визначеному класу.

В кожній задачі отриманий розв’язок розуміється в узагальненому сенсі. Розглянуті задачі цікаві з тієї точки зору, що хоча вони доволі схожі за постановкою та методом розв’язання, отримані результати відрізняються, причому більш проста на вигляд задача розв’язується значно складніше.

Оскільки такі задачі виникають при керуванні, наприклад, процесами теплообміну або дифузії, робота має практичне значення.

1 ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ ТА ПОНЯТТЯ, ВИКОРИСТАНІ В РОБОТІ

1.1 Банахів простір L_2 $[0,1]$

В роботі розглядаються функції, що належать простору інтегровних функцій $L_2[a,b]$. Нагадаємо, що $L_2[a,b]$ – простір класів еквівалентності вимірних відносно міри Лебега функцій, заданих на відрізку $[\mathrm{a},b]$, для яких існує скінченний інтеграл Лебега $\int_{[a,b]}|f(x)|^2\mathrm{d}\mu$. В подальшому будемо записувати цей інтеграл у такому вигляді $\int_a^b|f(x)|^2dx$. Такі функції називають функціями, інтегровними з квадратом на відрізку $[a,b]$.

Аналогічно, простір $L_2([a,b]\times[c,d])$ – це простір класів еквівалентності функцій двох змінних, заданих на прямокутнику $[a,b]\times[c,d]$, інтегровних на цьому прямокутнику з квадратом, тобто для них існує подвійний інтеграл $\int_a^b\int_c^d|f(t,x)|^2\,dtdx$.

Цей простір є нормованим, норма на ньому задається формулою:

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2dx}\,.$$

Простір $L_2[a,b]$ є гільбертовим [1], тобто повним нескінченновимірним нормованим простором, наділеним скалярним добутком:

$$(f(x),g(x)) = \int_a^b f(x)\,g(x)dx.$$

Нагадаємо, що довільне відображення $F: X \to \mathbb{R}$ називається функціоналом. Якщо ж розглядати відображення $F: X \to Y$, де X, Y – нормовані простори, то таке відображення називається оператором.

Оператор F називається лінійним, якщо для будь-яких елементів x, y з простору X та для будь-яких дійсних скалярів α, β виконується умова:

$$F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y).$$

Оператор F називається неперервним в точці $x_0 \in X$, якщо він є неперервним відображенням, тобто якщо

$$\forall \ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X: x_n \to x_0 \ \Rightarrow \ Fx_n \to Fx_0.$$

Лінійний оператор, неперервний в одній точці простору, буде неперервним на всьому просторі. Лінійний оператор F називається обмеженим, якщо

$$\exists c > 0 \ \forall x \in X \ \ \|Fx\| \le c\|x\|.$$

Відомо [1], що для лінійного оператора, заданого на нормованому просторі, поняття неперервності та обмеженості еквівалентні.

Відображення $F: X \to Y$ називається диференційовним в точці $x_0 \in X$, якщо існує такий лінійний неперервний оператор $F'(x_0)$, що

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)(h) + \varepsilon(x_0, h),$$

де $\varepsilon(x_0, h) \in Y$ та $\|\varepsilon(x_0, h)\| = o(\|h\|)$.

При цьому оператор $F'(x_0)$ називають похідною Фреше оператора F в точці $x_0 \in X$, а вираз $F'(x_0)(h)$ - диференціалом Фреше оператора F в точці $x_0 \in X$. [2]

1.2 Власні функції задачі Штурма-Ліувілля

Систему функцій $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, називають ортонормованою в просторі $L_2[0,1]$, якщо

$$\left(X_i, X_j\right) = \int_0^1 X_i\,(x) X_j(x) dx = \delta_{ij},$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Якщо ортонормована система є також повною (тобто простором, породженим цією системою, є простір $L_2[0,1]$), тоді така система називається ортонормованим базисом. При цьому довільна функція f простору $L_2[0,1]$ подається у вигляді суми ряду Фур'є:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x),$$

де $c_n = (f, X_n)$ – коефіцієнти Фур'є.

В якості такої системи в роботі обирається повна ортонормована система власних функцій задачі Штурма-Ліувілля [3]:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, 0 \le x \le 1,\ X'(0) = X'(1) + \alpha X(1) = 0, \alpha = \text{const} > 0.$$

Для отримання цих функцій утворимо характеристичне рівняння $k^2 + \lambda^2 = 0$, коренями якого будуть числа $k_1 = \lambda_1$, $\mathrm{k}_2 = -\lambda_1$. Тобто загальний розв'язок має вигляд $X = c_1\, cos\, \lambda\, x + c_2\, sin\, \lambda\, x$. Оскільки $X' = -c_1 \lambda\, sin\, \lambda\, x + c_2 \lambda\, cos\, \lambda\, x$ та $X'(0) = \lambda C_2 = 0$, отримуємо, що $C_2 = 0$. Отже, $X = C\, cos\, \lambda\, x$.

З другої крайової умови $X'(1) + \alpha X(1) = 0$ отримаємо, що $C(\alpha cos\,\lambda - \lambda\,sin\,\lambda) = 0$, тобто $\lambda tg\lambda = \alpha$, оскільки C не може дорівнювати нулю.

Власні корені крайової задачі – це додатні корені рівняння $\lambda tg\lambda = \alpha.$ Позначимо їх через λ_n, тоді власні функції, що відповідають цим власним значенням будуть мати вигляд $X_n(x) = C_n\,cos\,\lambda_n\,x.$

Підберемо коефіцієнти C_n таким чином, щоб система функцій $X_n(x) = C_n\,cos\,\lambda_n\,x$ була ортонормованою. Спочатку покажемо, що при будь-яких ненульових C_n ця система ортогональна:

$$\int_0^1 cos\,\lambda_n\,x\,cos\,\lambda_m\,xdx = \int_0^1 \frac{cos(\lambda_n - \lambda_m)x + cos(\lambda_n + \lambda_m)x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda_n - \lambda_m}sin(\lambda_n - \lambda_m)x\,\Big|_0^1 + \frac{1}{\lambda_n + \lambda_m}sin(\lambda_n + \lambda_m)x\,\Big|_0^1\right] =$$

$$= \frac{sin(\lambda_n - \lambda_m)}{2(\lambda_n - \lambda_m)} + \frac{sin(\lambda_n + \lambda_m)}{2(\lambda_n + \lambda_m)} = \frac{\lambda_n\,sin\,\lambda_n cos\lambda_m - \lambda_m\,sin\,\lambda_m cos\lambda_n}{{\lambda_n}^2 - {\lambda_m}^2} =$$

$$= \frac{(\lambda_n tg\lambda_n - \lambda_m tg\lambda_m)\,cos\,\lambda_n\,cos\,\lambda_m}{\lambda_n^2 - \lambda_m^2}.$$

Оскільки $\lambda_n tg\lambda_n = \alpha$, $\lambda_m tg\lambda_m = \alpha$, то при $n \neq m$ $(X_n, X_m) = 0$. При $n = m$

$$\int_0^1 X_n^2\,dx = C_n^2\int_0^1 cos^2\,\lambda_n x dx = C_n^2\int_0^1 \frac{1 + cos\,2\,\lambda_n x}{2}dx = C_n^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\lambda_n}sin\,\lambda_n\right) = 1,$$

звідки

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4\lambda_n}sin\,\lambda_n}}, X_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4\lambda_n}sin\,\lambda_n}}cos\lambda_n x.$$

1.3 Узагальнений розв’язок крайових задач для рівнянь параболічного типу

В роботі буде розглядатися керований процес, який описується функцією $u(t,x)$, яка на прямокутнику $D = [0,\mathrm{T}]\mathrm{x}[0,1]$ задовольняє рівняння параболічного типу

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + p(t,x), \tag{1.1}$$

а на межі прямокутника підпорядкована умовам:

$$u(0,x) \; = \; g\;(x) \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial u(t,1)}{\partial x} + \alpha u(t,1) = 0, \tag{1.3}$$

де $\alpha = \mathrm{const} > 0, g(x)$ – задана функція з $L_2[0,1]$, а $p(t,x)$ – керуюча функція.

Під класичним розв’язком крайової задачі типу (1.1)-(1.3) розуміють функцію $u(t,x)$, яка, будучи підставленою у співвідношення (1.1)-(1.3), перетворює їх на тотожності. Така функція повинна мати похідні необхідного порядку. Але зазвичай усередині області D і на її межі при неоднорідних граничних умовах побудований формальний розв’язок не задовольняє ці вимоги. Тому ми будемо розуміти розв’язок такої задачі в узагальненому сенсі, а функцію $u(t,x)$ будемо називати узагальненим розв’язком задачі [2].

Якщо функція $u(t,x)$ задовольняє рівняння (1.1) та $\Phi(t,x)$ – така функція, для якої формально обчислені похідні $\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial x} \in L_2(D)$, тоді для будь-яких t_0, t_1 має місце тотожність:

$$0=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \Phi(t,x)\left[\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-p(t,x)\right]dxdt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \Phi(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \Phi(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdt$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \Phi(t,x)\,p(t,x)dxdt=$$

$$=\int_0^1 \Phi(t,x)\,u(t,x)\Big|_{t_0}^{t_1}dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 u(t,x)\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t}dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_0^1 dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \frac{\partial\Phi(t,x)}{dx}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \Phi(t,x)\,p(t,x)dxdt=$$

$$=\int_0^1 \Phi(t,x)\,u(t,x)\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1[u(t,x)\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$$

$$+\Phi(t,x)p(t,x)]dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t,1)\frac{\partial u(t,1)}{\partial x}\partial t+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t,0)\frac{\partial u(t,0)}{\partial x}\partial t$$

$$=$$

$$=\int_0^1 \Phi(t,x)\,u(t,x)\Big|_{t_0}^{t_1}dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1[u(t,x)\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$$

$$+\Phi(t,x)p(t,x)]dxdt+\alpha\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t,1)\,u(t,1)dt,$$

або

$$\int_0^1 \Phi(t,x)\,u(t,x)\Big|_{t_0}^{t_1} dx - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 [u(t,x)\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$$
$$+ \Phi(t,x)p(t,x)]dxdt + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t,1)\,u(t,1)dt = 0 \qquad (1.4)$$

Отже, якщо (1.4) розглядати як рівняння відносно u (за будь-якого Φ) разом з початковими умовами (1.2), воно в певному сенсі еквівалентно вихідній задачі (1.1)-(1.3). Функції $\Phi(t,x)$ обираються із простору Соболєва $W_2^{0,1}(D)$, тобто це функції, які належать простору $L_2(D)$ та мають узагальнену частинну похідну першого порядку за змінною x, що також належить простору $L_2(D)$.

Узагальненим розв'язком задачі (1.1)-(1.3) називається функція $u(t,x) \in L_2(D)$, що має узагальнену похідну $\partial u/\partial x$, яка майже при всіх $t \in [0,\mathrm{T}]$ належить простору $L_2[0,1]$ та яка задовольняє наступні умови:

- рівняння (1.4) для будь-якої $\Phi(t,x) \in W_2^{0,1}(D)$ та будь-яких $0 \le t_1 \le t_2 \le T$;
- початкову умову (1.2) у тому сенсі, що $\int_0^1 [u(t,x) - g(x)]\,\psi(x) \to 0$ при $t \to +0$ для будь-яких $\psi(x) \in L_2[0,1]$.

1.4 Матричні диференціальні рівняння

При розв'язанні задачі оптимального керування в роботі доводиться розв'язувати диференціальне матричне рівняння Ріккаті зі сталими коефіцієнтами. Таке рівняння має вигляд

$$\dot{X}(t) = Q + AX(t) + X(t)B + X(t)RX(t), \qquad (1.5)$$

де Q, A, B, R – задані матриці зі сталими елементами, а $X(t)$ шукана матриця, елементами якої є функції, задані на відрізку $[0,T]$.

Відомо, що у загальному випадку матричне диференціальне рівняння Ріккаті не розв'язується прямими методами, але в деяких часткових випадках його можна розв'язати. Наприклад, якщо відомий якийсь частинний розв'язок рівняння (1.5) $X = X_1$, тоді заміною $X = Y + X_1$ це рівняння зводиться до рівняння Бернуллі:

$$\dot{Y}(t) = A_1 Y(t) + Y(t) B_1 + Y(t) R Y(t).$$

Рівняння Бернуллі, в свою чергу, заміною $V(t) = Y^{-1}(t)$ може бути зведено до лінійного рівняння

$$\dot{V}(t) + A_2 V(t) + V(t) B_2 = -R.$$

Загальний розв'язок лінійного рівняння подається у вигляді суми розв'язку відповідного однорідного рівняння та часткового розв'язку неоднорідного рівняння[4]: $V(t) = V_{\text{о}}(t) + V_{\text{ч}}(t)$. Розв'язком однорідного лінійного рівняння є матриця $V_{\text{о}}(t) = U(t) C W(t)$, де $U(t)$ – неособливий розв'язок рівняння $\dot{U}(t) + A_2 U(t) = 0$, а $W(t)$ – неособливий розв'язок рівняння $\dot{W}(t) + W(t) B_2 = 0$

Частковий розв'язок неоднорідного рівняння знаходиться методом варіації сталої матриці C.

2 ЗАДАЧА ПРО МІНІМІЗАЦІЮ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦІОНАЛА

2.1 Постановка задачі. Вивід рівняння Беллмана

Розглянемо керований процес, який описується функцією $u(t,x)$, що на прямокутнику $D = \{(t,x): t \in [0,T], x \in [0,1]\}$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + p(t,x), \tag{2.1}$$

а на межі прямокутника підпорядкована умовам:

$$u(0,x) \ = \ g\ (x) \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial u(t,1)}{\partial x} + \alpha u(t,1) = 0, \tag{2.3}$$

де $\alpha = \mathrm{const} > 0, g(x)$ – задана функція з $L_2[0,1]$, а $p(t,x)$ – керуюча функція.

Задача оптимального управління полягає в наступному: серед усіх керувань $p(t,x) \in L_2\ (D)$, знайти таке, щоб на ньому і відповідному йому розв'язку задачі (2.1)-(2.3) $u(t,x)$ функціонал

$$I(p) = \int_0^1 [u(T,x) - \psi(x)]^2\, dx + \beta \int_0^T \int_0^1 p^2(t,x) dx dt + \\ + \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 u(t,x) Q(x,s) u(t,s) dx ds dt \tag{2.4}$$

набував найменшого значення.

Тут $\beta = const > 0, \ \ \psi(x) \in L_2[0,1], Q(x,s) \in L_2[0,1] \times [0,1], Q(x,s) \geq 0.$l

Для розв'язання задачі оптимального керування скористаємося методом, викладеним в [5] та принципом оптимальності Беллмана [6]: оптимальна поведінка системи має ту властивість, що який би не був момент часу t_0 $(0 \leq t_0 < T)$, вона залишається оптимальною відносно стану системи в цей момент часу на всьому відрізку часу, що залишився $t > t_0$ незалежно від того, яким чином система досягла стану в момент часу t_0.

Відповідно до цього принципу вводимо функціонал:

$$S[t,u] = \min_{\substack{p \in L_2(D) \\ 0 \leq x,s \leq 1 \\ t \leq \tau \leq T}} \left\{ \int_0^1 [u(T,x) - \psi(x)]^2 dx + \beta \int_t^T \int_0^1 p^2(\tau,x) dx d\tau + \right. \qquad (2.5)$$

$$\left. + \int_t^T \int_0^1 \int_0^1 u(\tau,x) Q(x,s) u(\tau,s) dx ds d\tau \right\},$$

де $t \in [0,T]$ – довільний момент часу.

Покладемо $t' = t + \Delta t$, $u(t',x) = u(t,x) + \Delta u(t,x)$, отримаємо, що $S[t', u(t',x)] = S[t + \Delta t, u(t,x) + \Delta u(t,x)]$. Функція S, як функція від t, неперервно диференційовна, та як функціонал від u має диференціал Фреше $\Phi\big(t, u(t,x)\big)$, обчислений в точці $\big(t, u(t,x)\big)$, отже

$$S[t', u(t',x)] = S[t,u] + \frac{\partial S[t, u(t',x)]}{\partial t} \Delta t + \Phi\big(t, u(t,x), \Delta u(t,x)\big) +$$

$$+ \omega\big(t, u(t,x), \Delta u(t,x)\big) + o(\Delta t) = \frac{\partial S[t, u(t,x)]}{\partial t} \Delta t + \Phi(t, u, \Delta u) +$$

$$+ \omega(t, u, \Delta u) + o(\Delta t) + \left[\frac{\partial S[t, u(t',x)]}{\partial t} - \frac{\partial S[t, u(t,x)]}{\partial t} \right] \Delta t + S[t,u].$$

Використовуючи формулу Лагранжа, знаходимо, що

$$\frac{\partial S[t,u(t',x)]}{\partial t} - \frac{\partial S[t,u(t,x)]}{\partial t} = \frac{\partial S[t,u(t,x)+\Delta u(t,x)]}{\partial t} - \frac{\partial S[t,u(t,x)]}{\partial t} =$$

$$= \widehat{\Phi}[t,u(t,x)+h\Delta u(t,x),\Delta u(t,x)] =$$

$$= \Phi_1[t,u(t,x),\Delta u(t,x)] + \omega_1(t,u(t,x),\Delta u(t,x)),$$

де Φ_1 – диференціал Фреше функціонала $\frac{\partial S}{\partial t}$, обчислений в точці (t,u),

$$\frac{\omega_1(t,u,\Delta u)}{\|\Delta u\|} \to 0,\ \frac{\omega(t,u,\Delta u)}{\|\Delta u\|} \to 0 \text{ при } \|\Delta u\| \to 0.$$

Тоді

$$S[t',u(t',x)] = S[t,u] + \frac{\partial S[t,u]}{\partial t}\Delta t + dS[t,u,\Delta u] + \mathrm{o}(\Delta t) + \omega_2(t,u,\Delta u),$$

де $dS[t,u,\Delta u]$ −повний диференціал функціонала,

$$\frac{\omega_2(t,u,\Delta u)}{\|\Delta u\|} \to 0 \text{ при } \|\Delta u\| \to 0.$$

Функціонал (2.5) перепишемо у вигляді:

$$S[t,u] = \min_{p\in L_2(D)} \left\{ \int_0^1 [u(T,x)-\psi(x)]^2 dx + \beta \int_t^{t+\Delta t} \int_0^1 p^2(\tau,x)dxd\tau + \right.$$

$$+ \beta \int_{t+\Delta t}^{T} \int_0^1 p^2(\tau,x)dxd\tau + \int_t^{t+\Delta t} \int_0^1 \int_0^1 u(\tau,x)Q(x,s)u(\tau,s)dxdsd\tau$$

$$\left. + \int_{t+\Delta t}^{T} \int_0^1 \int_0^1 u(\tau,x)Q(x,s)u(\tau,s)dxdsd\tau \right\} =$$

$$= \min_{p \in L_2(D)} \left\{ \beta \int_t^{t+\Delta t} \int_0^1 p^2(\tau, x) dx d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \int_0^1 \int_0^1 u(\tau, x) Q(x, s) u(\tau, s) dx ds d\tau \right\} +$$

$$+ \min_{p \in L_2(D)} \left\{ \int_0^1 [u(T, x) - \psi(x)]^2 dx + \beta \int_{t+\Delta t}^{T} \int_0^1 p^2(\tau, x) dx d\tau \right.$$

$$\left. + \int_{t+\Delta t}^{T} \int_0^1 \int_0^1 u(\tau, x) Q(x, s) u(\tau, s) dx ds d\tau \right\} =$$

$$= \min_{p \in L_2(D)} \left\{ \beta \int_t^{t'} \int_0^1 p^2(\tau, x) dx d\tau + \int_t^{t'} \int_0^1 \int_0^1 u(\tau, x) Q u(\tau, s) dx ds d\tau \right\} + S[t', u(t', x)].$$

Підставимо в цей вираз отримане вище значення $S[t', u(t', x)]$:

$$\min_{p \in L_2(D)} \left\{ \beta \int_t^{t'} \int_0^1 p^2(\tau, x) dx d\tau + \int_t^{t'} \int_0^1 \int_0^1 u(\tau, x) Q u(\tau, s) dx ds d\tau \right\} =$$

$$= S[t, u] - S[t', u(t', x)] =$$

$$= -\left(dS[t, u, \Delta u] + o(\Delta t) + \omega_2(t, u, \Delta u) + \frac{\partial S[t, u]}{\partial t} \Delta t \right)$$

або

$$-\frac{\partial S[t, u]}{\partial t} \Delta t = \min_{p \in L_2(D)} \left\{ \beta \int_t^{t'} \int_0^1 p^2 dx d\tau + \int_t^{t'} \int_0^1 \int_0^1 u Q u dx ds d\tau \right\} + \quad (2.6)$$

$$+ dS[t, u, \Delta u] + o(\Delta t) + +\omega_2(t, u, \Delta u).$$

Оскільки $\Delta u(t, x) = u(t', x) - u(t, x) \in L_2(0,1)$ при всіх $t \in [0, T]$,

$$dS[t, u, \Delta u] = \int_0^1 \nu(t, x) \, \Delta u(t, x) dx,$$

де $v(t,x)$ – градієнт функціонала S, обчислений в точці (t,u), що належить $L_2[0,1]$ майже при всіх $t \in [0,T]$.

Отже, (2.6) перепишемо у вигляді:

$$-\frac{\partial S[t,u]}{\partial t}\Delta t = \min_{p\in L_2(D)}\left\{\beta\int_t^{t'}\int_0^1 p^2 dxd\tau + \int_t^{t'}\int_0^1\int_0^1 uQudxdsd\tau\right\} + \\ + \int_0^1 v(t,x)\,\Delta u(t,x)dx + o(\Delta t) + +\omega_2(t,u,\Delta u). \tag{2.7}$$

Наведемо додатково очевидну допоміжну тотожність:

$$\int_0^1 v(t,x)\Delta u(t,x)dx = \int_0^1 v(t,x)u(t,x)|_t^{t+\Delta t}dx = \\ = \int_0^1 [v(t,x)u(t,x)]|_t^{t+\Delta t}dx - \int_0^1 u(t+\Delta t,x)v(t,x)|_t^{t+\Delta t}dx;$$

Перетворимо (2.7), враховуючи наведену тотожність та тотожність (1.4), та обираючи в якості $\Phi(t,x)$функцію $v(t,x)$:

$$-\frac{\partial S[t,u]}{\partial t} = \min_{p\in L_2(D)}\left\{\frac{\beta}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\int_0^1 p^2 dxd\tau + \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\int_0^1\int_0^1 uQudxdsd\tau + \right. \\ + \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\int_0^1\left[u\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + vp\right]dxd\tau \\ \left. -\frac{\alpha}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} v(t,1)u(t,1)d\tau - \int_0^1 u(t+\Delta t)\frac{\Delta v}{\Delta t}dx + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} + \frac{\omega_2}{\Delta t}\right\}$$

Перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$:

$$-\frac{\partial S[t,u]}{\partial t}=\min_{p\in L_2(D)}\left\{\int_0^1\left[\beta p^2+\nu p-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right]dx-\alpha v(t,1)u(t,1)\right\}+ \\ +\int_0^1\int_0^1 uQudxdsd\tau \tag{2.8}$$

Знак рівності в цьому рівнянні означає рівність майже скрізь. Це шукане рівняння Беллмана для нашої задачі з початковою умовою

$$S[T,u]=\int_0^1[u(T,x)-\psi(x)]^2\,dx. \tag{2.9}$$

2.2 Розв’язання рівняння Беллмана

Зрозуміло, що мінімум у правій частині (2.6) досягається за умови:

$$p(t,x)=-\frac{1}{2\beta}\nu(t,x),$$

тобто (2.8) запишеться у вигляді

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\int_0^1\left[\frac{1}{4\beta}\nu^2+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right]dx+\alpha v(t,1)u(t,1)-\int_0^1\int_0^1 uQudxdsd\tau. \tag{2.10}$$

Розв’язок рівняння (2.9) шукаємо у вигляді квадратичного функціонала:

$$S[t,u] = \int_0^1 \int_0^1 k(t,x,s)u(t,x)u(t,s)dsdx + \int_0^1 \varphi(t,x)\, u(t,x)dx + \eta(t), \tag{2.11}$$

де $k(t,x,s), \psi(t,x), \eta(t)$ – функції, що підлягають визначенню.

Обчислимо диференціал Фреше цього функціонала:

$$S[t,u+h] - S[t,u] = \int_0^1 \int_0^1 k(t,x,s)[u(t,x)+h(x)][u(t,s)+h(s)]dxds + \int_0^1 \varphi(t,x)[u(t,x)+h(x)]dx + \eta(t) -$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 k(t,x,s)u(t,x)u(t,s)dsdx - \int_0^1 \varphi(t,x)u(t,x)dx - \eta(t) =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 k(t,x,s)h(x)u(t,s)dsdx + \int_0^1 \int_0^1 k(t,x,s)u(t,x)h(s)dsdx + \int_0^1 \int_0^1 k(t,x,s)h(x)h(s)dsdx + \int_0^1 \varphi(t,x)h(x)dx,$$

$$dS(t,u,h) = \int_0^1 \int_0^1 [k(t,x,s)+k(t,s,x)]u(t,s)h(x)dsdx + \int_0^1 \varphi(t,x)h(x)dx.$$

Оскільки вище було отримано, що $dS[t,u,\Delta u] = (v(t,x), \Delta u(t,x))$, де $v(t,x)$ – градієнт функціонала, то

$$v(t,x) = \int_0^1 [k(t,s,x) + k(t,s,x)]u(t,s)ds + \varphi(t,x) \tag{2.12}$$

Підставимо в (2.9) вирази для S і v, визначені формулами (2.10) та (2.11), відповідно:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{\partial K(t,x,s)}{\partial t} + 2\frac{\partial^2 K(t,x,s)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 K(t,x,s)}{\partial s^2} + Q(x,s). - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{4\beta} K_1(t,x,s) \right\} u(t,x)u(t,s)dsdx +$$

$$+ \int_0^1 \left\{ \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + 2\frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x^2} - \frac{3}{2\beta} \int_0^1 [k(t,s,x) + k(t,x,s)]\varphi(t,s)ds \right\} u(t,x)dx -$$

$$-2u(t,1) \left\{ \int_0^1 \left[\alpha k(t,1,s) + \frac{\partial k(t,1,s)}{\partial x} \right] u(t,s)ds + \alpha\varphi(t,1) + \frac{\partial \varphi(t,1)}{\partial x}. + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \left[\alpha k(t,x,1) + \frac{\partial k(t,x,1)}{\partial s} \right] u(t,x)dx \right\} +$$

$$+2u(t,0) \left\{ \frac{\partial \varphi(t,0)}{\partial x} + \int_0^1 \frac{\partial k(t,0,s)}{\partial x} u(t,s)ds + \int_0^1 \frac{\partial k(t,x,0)}{\partial s} u(t,x)dx \right\} + \eta'(t)$$

$$- \frac{3}{4\beta} \int_0^1 \varphi^2(t,x)dx = 0,$$

де $k_1(t,x,s) = \int_0^1 [k(t,y,s) + k(t,s,y)][k(t,y,x) + k(t,x,t)]dy$.

Оскільки отримане рівняння має виконуватися для будь-яких $u(t,x)$, маємо такі задачі для визначення функцій $k(t,x,s)$, $\varphi(t,x)$ і $\eta(t)$:

$$\frac{\partial k(t,x,s)}{\partial t} + 2\frac{\partial^2 k(t,x,s)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 k(t,x,s)}{\partial s^2} + Q(x,s) \\ = \frac{3}{4\beta} k_1(t,x,s), \tag{2.13}$$

$$\begin{cases} \alpha k(t,x,1) + \frac{\partial k(t,x,1)}{\partial s} = \frac{\partial k(t,x,0)}{\partial s} = 0 \\ \alpha k(t,1,s) + \frac{\partial k(t,1,s)}{\partial x} = \frac{\partial k(t,0,s)}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{3}{2\beta}\int_0^1 [k(t,s,x) + k(t,x,s)]\varphi(t,s)ds \tag{2.15}$$

$$\alpha\varphi(t,1) + \frac{\partial \varphi(t,1)}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial \varphi(t,0)}{\partial x} = 0, \tag{2.16}$$

$$\eta(t) = \frac{3}{4\beta}\int_0^1 \varphi^2(t,x)dx. \tag{2.17}$$

Оскільки функціонал $S[t,u]$, визначений формулою (2.11), відповідає умовам (2.9), то

$$S[T,u] = \int_0^1 \int_0^1 k(T,x,s)u(T,x)u(T,s)dsdx + \int_0^1 \varphi(T,x)u(T,x)dx + \eta(T) = \\ = \int_0^1 u^2\,(T,x) - 2\int_0^1 u(T,x)\psi(x)dx + \int_0^1 \psi^2(x)dx.$$

З того, що ця рівність має виконуватися при будь-яких $u(t,x)$, отримуємо такі умови:

$$k(T,x,s) = \delta(x-s), \tag{2.18}$$

де $\delta(x-s)$ – функція Дірака,

$$\varphi(T,x) = -2\psi(x), \tag{2.19}$$

$$\eta(T) = \int_0^1 \psi^2\,(x)dx. \qquad (2.20)$$

Отже, початкова задача (2.1)–(2.4) звелася до знаходження функцій $K(t,x,s), \varphi(t,x), \eta(t)$, визначених задачами (2.13)–(2.20),

Зокрема, для визначення функції $K(t,x,s)$ маємо рівняння (2.13) з початковими умовами (2.14), (2.18). Ця крайова задача для визначення $K(t,x,s)$ називається інтегро-диференціальною задачею типу Ріккаті.

2.3 Розв’язок крайової задачі Ріккаті

Розв’язок задачі (2.13) – (2.14) шукаємо у вигляді

$$k(t,x,s) = \sum_{n,m=1}^{\infty} k_{nm}(t) X_n(x) X_m(s), \qquad (2.21)$$

де $X_n(x)$ – повна ортонормована система власних функцій задачі Штурма-Ліувілля.

Покажемо, що (2.21) задовольняє граничні умови (2.14):

$$k_s(t,x,s)\Big|_{s\,=\,0} = \sum_{n,m=1}^{m} k_{nm}(t)\, X_n(x) X_m{}'(0) = 0,$$

$$\alpha k(t,x,s)\Big|_{s\,=\,1} + k_s(t,x,s)\Big|_{s\,=\,1}$$
$$= \alpha \sum_{n,m=1}^{\infty} k_{nm}(t)\, X_n(x) X_m(1) + \sum_{n,m=1}^{\infty} k_{nm}(t)\, X_n(x) X_m{}'(1) =$$

$$= \alpha \sum_{n,m=1}^{\infty} k_{nm}(t)\, X_n(x) X_m(1) - \alpha \sum_{n,m=1}^{\infty} k_{nm}(t)\, X_n(x) X_m(1) = 0.$$

$$k_x(t,x,s)\Big|_{x=0} = \sum_{n,m=1}^{\infty} k_{nm}(t)\,{X_n}'(0)X_m(s) = 0,$$

$$\alpha k(t,x,s)\Big|_{x=1} + k_x(t,x,s)\Big|_{x=1}$$

$$= \alpha \sum_{n,m=1}^{\infty} k_{nm}(t)\,X_n(1)X_m(s) + \sum_{n,m=1}^{\infty} k_{nm}(t)\,X_n'(1)X_m(s) =$$

$$= \alpha \sum_{n,m=1}^{\infty} k_{nm}(t)\,X_n(1)X_m(s) - \alpha \sum_{n,m=1}^{\infty} k_{nm}(t)\,X_n(1)X_m(s) = 0.$$

Визначимо всі доданки в рівнянні (2.13):

$$k_t(t,x,s) = \sum_{n,m=1}^{\infty} k_{nm}'(t)\,X_n(x)X_m(s),$$

$$k_{xx}''(t,x,s) = \sum_{n,m=1}^{\infty} k_{nm}(t)\,X_n''(x)X_m(s) = -\sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_n^2 k_{nm}(t)\,X_n(x)X_m(s);$$

$$k_{xx}''(t,x,s) = \sum_{n,m=1}^{\infty} k_{nm}(t)\,X_n(x)X_m''(s) = -\sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_m^2 k_{nm}(t)\,X_n(x)X_m(s).$$

Функцію $Q(x,s)$ також подамо у вигляді ряду $Q(x,s) = \sum_{n,m=1}^{\infty} q_{nm}\,X_n(x)X_m(s)$.

Тоді ліва частина рівняння має вигляд:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} k_{nm}'(t)\,X_n(x)X_m(s) - 2\sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_n^2 k_{nm}(t)\,X_n(x)X_m(s)$$

$$- 2\sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_m^2 k_{nm}(t)\,X_n(x)X_m(s) + \sum_{n,m=1}^{\infty} q_{nm}\,X_n(x)X_m(s) =$$

$$= \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(k_{nm}'(t) - 2(\lambda_n^2 + \lambda_m^2)k_{nm}(t) + q_{nm}\right) X_n(x)X_m(s).$$

Випишемо праву частину:

$$\frac{3}{4\beta}k_1(t,x,s) = \frac{3}{4\beta}\int_0^1 [k(t,y,s)+k(t,s,y)][k(t,y,x)+k(t,x,t)]dy =$$

$$= \frac{3}{4\beta}\int_0^1 \left(\sum_{i,m=1}^{\infty}\big(k_{im}(t)+k_{mi}(t)\big)X_i(y)X_m(s)\right)\left(\sum_{j,n=1}^{\infty}\big(k_{jn}(t)\right.$$

$$\left.+k_{nj}(t)\big)X_j(y)X_n(x)\right)dy =$$

$$= \frac{3}{4\beta}\int_0^1 \left(\sum_{i,m,j,n=1}^{\infty}\big(k_{im}(t)+k_{mi}(t)\big)\big(k_{jn}(t)\right.$$

$$\left.+k_{nj}(t)\big)X_i(y)X_m(s)X_j(y)X_n(x)\right)dy =$$

$$= \frac{3}{4\beta}\sum_{i,m,n=1}^{\infty}\big(k_{im}(t)+k_{mi}(t)\big)\big(k_{in}(t)+k_{ni}(t)\big)X_m(s)X_n(x) =$$

$$= \frac{3}{4\beta}\sum_{i,m,n=1}^{\infty}\big(k_{im}(t)+k_{mi}(t)\big)\big(k_{in}(t)+k_{ni}(t)\big)X_m(s)X_n(x) =$$

$$= \frac{3}{4\beta}\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\big(k_{im}(t)+k_{mi}(t)\big)\big(k_{in}(t)+k_{ni}(t)\big)\right)X_n(x)X_m(s).$$

Оскільки будь-яка ортонормована система є лінійно незалежною, то рівність (2.13) можлива тоді і тільки тоді, коли рівні між собою коефіцієнти при $X_n(x)X_m(s)$ в обох частинах, тобто отримуємо послідовність рівнянь:

$$k'_{nm}(t) - 2(\lambda_n^2 + \lambda_m^2)k_{nm}(t) + q_{nm} = \frac{3}{4\beta}\sum_{i=1}^{\infty}\big(k_{im}(t) + k_{mi}(t)\big)\big(k_{in}(t) + k_{ni}(t)\big). \quad (2.22)$$

З умови (2.18) випливає, що

$$k_{nm}(T) = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases}.$$

Введемо наступні позначення:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2\lambda_1^2 & 0 & . \\ 0 & 2\lambda_2^2 & . \\ . & . & . \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & . \\ q_{21} & q_{22} & . \\ . & . & . \end{pmatrix}, K(t) = \begin{pmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) & . \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) & . \\ . & . & . \end{pmatrix}.$$

В цих позначеннях систему (2.22) можна записати у вигляді матричного диференціального рівняння:

$$\dot{K}(t) = \Lambda K(t) + K(t)\Lambda - Q + \frac{3}{4\beta}(K^2 + (K^*)^2 + K^*K + KK^*). \quad (2.23)$$

з початковою умовою $K(T) = E$, де K^*– матриця, транспонована до матриці K, а E – одинична матриця.

Шукаємо умови, за яких це рівняння може бути розв’язано. Припустимо, що функція $k(t,x,s)$ в функціоналі (2.11) є симетричною будемо припускати, що матриця $K(t)$ є симетричною, тоді рівняння (2.23) з початковою умовою набуває такого вигляду:

$$\dot{K}(t) = \Lambda K(t) + K(t)\Lambda - Q + \frac{3}{\beta}K^2(t), \quad (2.24)$$

$$K(T) = E. \quad (2.25)$$

Отримане рівняння є матричним диференціальним рівнянням Ріккаті, причому це рівняння можна розв'язати прямими методами. Оскільки матриця $\frac{\beta}{3}\left(\sqrt{B}-\Lambda\right)$, де $B=\Lambda^2+\frac{3}{\beta}Q$, є частковим розв'язком цього рівняння, заміною $K(t)=\frac{\beta}{3}\left(P(t)+\sqrt{B}-\Lambda\right)$, рівняння (2.24) зводиться до рівняння Бернуллі:

$$\dot{P}(t)=P^2(t)+P(t)\sqrt{B}+\sqrt{B}P(t)\,, \tag{2.26}$$

з початковою умовою $P(T)=3\beta^{-1}E+\Lambda-\sqrt{B}$.

Зробимо заміну $D(t)=P^{-1}(t)$ та отримаємо з рівняння (2.26) лінійне рівняння

$$\dot{D}(t)=-E-\sqrt{B}D(t)-D(t)\sqrt{B} \tag{2.27}$$

з початковою умовою

$$D(T)=(3\beta^{-1}E+\Lambda-\sqrt{B})^{-1}. \tag{2.28}$$

Згідно з п.1.4, розв'язок такого рівняння подається у вигляді суми розв'язку однорідного рівняння та часткового розв'язку неоднорідного рівняння. Розв'язком однорідного лінійного рівняння є матриця $D_{\text{о}}(t)=U(t)CW(t)$, де $U(t)$ – неособливий розв'язок рівняння $\dot{U}(t)+\sqrt{B}U(t)=0$, а $W(t)$ – неособливий розв'язок рівняння $\dot{W}(t)+W(t)\sqrt{B}=0$. [7] Враховуючи, що матриця $\sqrt{B}$ – стала, $U(t)=W(t)=e^{-\sqrt{B}t}$, отже, $D_{\text{о}}(t)=e^{-\sqrt{B}t}Ce^{-\sqrt{B}t}$ – розв'язок однорідного лінійного рівняння . Частковий розв'язок неоднорідного рівняння знайдемо методом варіації сталої матриці C. Вважаємо, що $C=C(t)$ та підставимо матрицю $D_{\text{ч}}(t)=e^{-\sqrt{B}t}C(t)e^{-\sqrt{B}t}$ в рівняння (2.27):

$$-\sqrt{B}e^{-\sqrt{B}t}C(t)e^{-\sqrt{B}t}+e^{-\sqrt{B}t}C'(t)e^{-\sqrt{B}t}-e^{-\sqrt{B}t}C(t)e^{-\sqrt{B}t}\sqrt{B}=$$

$$= -E - \sqrt{B}e^{-\sqrt{B}t}C(t)e^{-\sqrt{B}t} - e^{-\sqrt{B}t}C(t)e^{-\sqrt{B}t}\sqrt{B},$$

$$e^{-\sqrt{B}t}C'(t)e^{-\sqrt{B}t} = -E,$$

$$C'(t) = -e^{2\sqrt{B}t},$$

$$C(t) = \int_T^t -e^{2\sqrt{B}s}ds = \int_t^T e^{2\sqrt{B}s}ds.$$

Отже, частковим розв'язком рівняння (2.27) є матриця

$$D_{ч}(t) = e^{-\sqrt{B}t}C(t)e^{-\sqrt{B}t} = e^{-\sqrt{B}t}\left(\int_t^T e^{2\sqrt{B}s}ds\right)e^{-\sqrt{B}t} = \int_t^T e^{2\sqrt{B}(s-t)}ds.$$

Тоді загальним розв'язком цього рівняння є матриця

$$D(t) = e^{-\sqrt{B}t}Ce^{-\sqrt{B}t} + \int_t^T e^{2\sqrt{B}(s-t)}ds.$$

З умови (2.28) випливає, що $C = e^{\sqrt{B}T}\left(3\beta^{-1}E + \Lambda - \sqrt{B}\right)^{-1}e^{\sqrt{B}T}$. Отже, розв'язанням задачі (2.27)–(2.28) є матриця

$$D(t) = e^{\sqrt{B}(T-t)}\left(3\beta^{-1}E + \Lambda - \sqrt{B}\right)^{-1}e^{\sqrt{B}(T-t)} + \int_t^T e^{2\sqrt{B}(s-t)}ds,$$

а розв'язання задачі (2.24)-(2.25) має вигляд:

$$K(t) = \frac{\beta}{3}\left(\left(e^{\sqrt{B}(T-t)}(3\beta^{-1}E + \Lambda - \sqrt{B})^{-1}e^{\sqrt{B}(T-t)} + \int_t^T e^{2\sqrt{B}(s-t)}ds\right)^{-1} + \sqrt{B} - \Lambda\right) \tag{2.29}$$

2.4 Отримання оптимального керування

Для продовження розв’язання задачі (2.15) – (2.16), (2.19) знаходимо також у вигляді ряду за системою власних функцій задачі Штурма-Ліувілля:

$$\varphi(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) X_n(x).$$

Тоді рівняння (2.15) набуває вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(t)\, X_n(x) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \varphi_n(t)\, X_n(x) =$$

$$= \frac{3}{\beta}\int_0^1 \left(\sum_{n,m=1}^{\infty} k_{nm}(t) X_n(x) X_m(s) \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) X_i(s) \right) ds\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n'(t) - 2\lambda_n^2 \varphi_n(t) \right) X_n(x) = \frac{3}{\beta} \sum_{n,m=1}^{\infty} k_{nm}(t) \varphi_m(t) X_n(x).$$

Враховуючи лінійну незалежність системи функцій $X_n(x)$, отримуємо нескінченну систему рівнянь:

$$\varphi_n'(t) = -2\lambda_n^2 \varphi_n(t) + 3\beta^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} k_{nm}(t) \varphi_m(s) \tag{2.30}$$

з початковими умовами $\varphi_n(T) = -2\psi_n$, де ψ_n – коефіцієнти функції $\psi(x)$ за системою $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Якщо позначити $\Phi = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \dots), \Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots)$, рівняння (2.30) з початковою умовою можна записати у матричному вигляді:

$$\Phi' = (3\beta^{-1}K - \Lambda)\Phi, \Phi(\mathrm{T}) = -2\Psi. \quad (2.31)$$

Можна стверджувати [4], що таке рівняння має єдиний розв'язок. Знаючи функції $K(t,x,s), \varphi(t,x)$, можемо записати оптимальне керування у вигляді

$$p(t,x) = -\frac{1}{2\beta}\left(\int_0^1 2k(t,x,s)u(t,s)ds + \varphi(t,x)\right) \quad (2.32)$$

Таким чином, для визначення функції $u(t,x)$, яка мінімізує функціонал (2.4), маємо задачу:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + p(t,x),$$
$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial u(t,1)}{\partial x} + \alpha u(t,1) = 0, u(0,x) = g(x),$$

де $p(t,x)$ визначається формулою (2.32).

2.5 Випадок діагональної матриці $\boldsymbol{Q}$

Вище отримано загальний вигляд матриці $K(t)$ та матричне однорідне диференціальне рівняння, для визначення матриці Φ: $\Phi' = (3\beta^{-1}K - \Lambda)\Phi$. Враховуючи, що матриця $K(t)$ не є сталою, розв'язання навіть такого простого на вигляд рівняння є складною задачею. Отже, розглянемо додаткову умову на функцію $Q(x,s)$ в квадратичному функціоналі (2.4). Будемо вважати, що розвинення такої функції за системою власних функцій задачі Штурма-Ліувілля має вигляд

$$Q(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n X_n(x) X_n(s),$$

тобто матриця коефіцієнтів Q є діагональною [8]. Тоді й матриця $B = \Lambda^2 + \frac{3}{\beta} Q$ є діагональною, і, відповідно, матриця $K(t)$, що визначається формулою (2.29), також буде діагональною. Її діагональні елементи мають вигляд:

$$k_{nn}(t) = \frac{\beta}{3}\left(\frac{2b_n(a_n - 2b_n)}{a_n(e^{2b_n(T-t)} - 1) + 2b_n} + b_n - 2\lambda_n^2\right), \tag{2.33}$$

де $b_n = \sqrt{4\lambda_n^4 + 3\beta^{-1} q_n}$, $a_n = 3\beta^{-1} + 2\lambda_n^2 + b_n$.

Для визначення елементів матриці Φ отримаємо нескінченну систему рівнянь:

$$\varphi_n'(t) = \left(2\lambda_n^2 + 3\beta^{-1} k_{nn}(t)\right)\varphi_n(t), \varphi_n(T) = -2\psi_n,$$

де $K_{nn}(t)$ визначається формулою (2.33). Цю систему можна розв'язати і отримати функції $\varphi_n(t)$ у вигляді:

$$\varphi_n(t) = -\frac{4b_n \psi_n e^{b_n(T-t)}}{a_n(e^{2b_n(T-t)} - 1) + 2b_n}. \tag{2.34}$$

Таким чином, отримуємо функцію

$$p(t,x) = -\frac{1}{2\beta}\left(\int_0^1 2k(t,x,s)u(t,s)ds + \varphi(t,x)\right).$$

Якщо функції $u(t,x)$ та $p(t,x)$ в задачі (2.1)-(2.3) також подати у вигляді рядів $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x)$, $p(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) X_n(x)$, тоді

$$p_n(t) = -\frac{1}{2\beta}\big(2k_{nn}(t)u_n(t) + \varphi_n(t)\big)$$

і задача (2.1)-(2.3) перетвориться на систему рівнянь

$$u_n'(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = -\frac{1}{2\beta}\big(2k_{nn}(t)u_n(t) + \varphi_n(t)\big), u_n(0) = g_n,$$

де g_n – коефіцієнти Фур'є функції $g(x)$.

Розв'язком цієї системи є функції

$$u_n(t) = e^{-\int_0^t\left(\lambda_n^2+\frac{k_{nn}(\tau)}{\beta}\right)d\tau}\left(g_n - \frac{1}{2\beta}\int_0^t \varphi_n(\tau)e^{\int_0^\tau\left(\lambda_n^2+\frac{k_{nn}(s)}{\beta}\right)ds}d\tau\right) =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{e^{(b_n-\lambda_n^2)t}(a_n(e^{2b_n(T-t)}-1)+2b_n)}{c_n}}\times \tag{2.35}$$

$$\left(g_n + \frac{1}{\beta}\int\limits_0^t \frac{2b_n\psi_n e^{b_n(T-\tau)}}{a_n(e^{2b_n(T-\tau)}-1)+2b_n}\sqrt[3]{\frac{c_n e^{(\lambda_n^2-b_n)\tau}}{a_n(e^{2b_n(T-\tau)}-1)+2b_n}}d\tau\right),$$

де $c_n = a_n(e^{2b_nT}-1)+2b_n$.

Зрозуміло, що всі функції, отримані при розв'язанні систем рівнянь визначаються однозначно [9]. Функція $u(t,x)$ з коефіцієнтами, визначеними формулою (2.35), є узагальненим розв'язком задачі (2.1)-(2.3). Дійсно, нехай $u_N(t,x) = \sum_{n=1}^N u_n(t)X_n(x)$, тоді

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_N^2(t,x)dxdt = \sum_{n=1}^N\int\limits_0^T u_n^2(t)dt \le \sum_{n=1}^N\left(\frac{g_n^2}{\lambda_n^2} + \frac{\psi_n^2}{\lambda_n^2}e^{\frac{2T}{\beta}}\right) \le M = const.$$

Отже, при $N_1, N_2 \to \infty, \int_0^1 \left(u_{N_1} - u_{N_2}\right)^2 dx \to 0$ рівномірно по t, тобто існує границя фундаментальної послідовності $u_N(t,x)$, яка як раз дорівнює $u(t,x)$.

Покажемо, що $u(t,x) \in W_2^{0,1}(D)$. У просторі $W_2^{0,1}(D)$ задаємо скалярний добуток:

$$(v,w) = \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} dxdt + \alpha \int_0^T v(t,1)w(t,1)dt,$$

який породжує норму, еквівалентну звичайній нормі цього простору [2]. Але система $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ відносно такого скалярного добутку буде повною, але ненормованою, оскільки $(X_n, X_m) = \delta_{nm}\lambda_n^{-1}\lambda_m^{-1}$. Отже,

$$(u_N, u_N) = \sum_{n=1}^{N} \int_0^T \lambda_n^2 u_n^2(t)dt \leq \sum_{n=1}^{N} \left(g_n^2 + \frac{\psi_n^2}{\lambda_n^2} e^{\frac{2T}{\beta}}\right) \leq C = const.$$

Тоді при $N_1, N_2 \to \infty$ $\left(u_{N_1} - u_{N_2}, u_{N_1} - u_{N_2}\right) \to 0$ і, в силу повноти $W_2^{0,1}(D)$, граничний елемент $u(t,x) \in W_2^{0,1}(D)$, що і необхідно було довести.

Зауважимо, що функції $k_{nn}(t)$, визначені формулою (2.33), при будь-якому n є зростаючими та неперервними на $[0,T]$, тобто

$$k_{nn}(t) \leq k_{nn}(T) = 1,$$

$$\int_0^T \int_0^1 \left(\int_0^1 K(t,x,s)u(t,s)ds \right)^2 dxdt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} K_{nn}^2(t)u_n^2(t)dt \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t)dt < \infty.$$

Оскільки функції $|\varphi_n(t)|$ є неспадними на $[0,T]$, $|\varphi_n(t)| \leq |\varphi_n(T)| = 2|\psi_n|$, тобто

$$\int_0^T \int_0^1 \varphi^2(t,x)dxdt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t)dt \leq 4 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2(t)dt < \infty.$$

тобто

$$\int_0^1 k(t,x,s)u(t,s)ds \in L_2(D) \text{ і } \varphi(t,x) \in L_2(D),$$

та керування $p(t,x) = -\frac{1}{2\beta}\left(\int_0^1 2k(t,x,s)u(t,s)ds + \varphi(t,x)\right)$, дійсно належить $L_2(D)$, тобто є допустимим.

3 РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО МІНІМІЗАЦІЮ ФУНКЦІОНАЛА, КОЛИ КЕРУЮЧА ФУНКЦІЯ ЗАЛЕЖИТЬ ЛИШЕ ВІД ЧАСУ

В цьому розділі розглянемо задачу, аналогічно тій, яку було розглянуто в попередньому розділі, але тепер будемо вважати, що керуюча функція залежить лише від часу і не залежить від координати.

3.1 Постановка задачі. Рівняння Беллмана

Розглянемо керований процес, який описується функцією $u(t,x)$, що на прямокутнику $D = \{(t,x): t \in [0,T], x \in [0,1]\}$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + p(t) f(x), \tag{3.1}$$

а на межі прямокутника підпорядкована умовам:

$$u(0,x) = g(x), \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial u(t,1)}{\partial x} + \alpha u(t,1) = 0, \tag{3.3}$$

де $\alpha = \text{const} > 0, g(x), f(x)$ – задані функції з $L_2[0,1]$, а $p(t)$ – керуюча функція.

Задача оптимального управління полягає в тому, щоб серед усіх керувань $p(t) \in L_2[0,T]$, знайти таке, щоб на ньому і відповідному йому розв’язку задачі (3.1)-(3.3) $u(t,x)$ функціонал

$$I(p) = \int_0^1 [u(T,x) - \psi(x)]^2 \, dx + \beta \int_0^T p^2(t) dt \tag{3.4}$$

набував найменшого значення. Тут $\beta = const > 0, \ \ \psi(x) \in L_2[0,1]$.

Для виводу рівняння Беллмана скористаємося тим же методом, що й у розділі 2. Введемо функціонал:

$$S[t,u] = \min_{\substack{p \in L_2[0,T] \\ 0 \le x,s \le 1 \\ t \le \tau \le T}} \left\{ \int_0^1 [u(T,x) - \psi(x)]^2 dx + \beta \int_t^T p^2\,(\tau) dt \right\}, \tag{3.5}$$

де $t \in [0,T]$ – довільний момент часу.

Після перетворень отримаємо рівняння Беллмана для цього функціонала у вигляді:

$$-\frac{\partial S[t,u]}{\partial t} = \min_{p \in L_2(D)} \left\{ \beta p^2(t) + \int_0^1 \left[v p(t) f(x) - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} \right] dx - \alpha v(t,1) u(t,1) \right\}. \tag{3.6}$$

Знак рівності в цьому рівнянні означає рівність майже скрізь. Це шукане рівняння Беллмана для задачі (3.1)–(3.3) з початковою умовою

$$S[T,u] = \int_0^1 [u(T,x) - \psi(x)]^2 \, dx. \tag{3.7}$$

3.2 Розв’язання рівняння Беллмана

Мінімум у правій частині досягається за умови:

$$p(t) = -\frac{1}{2\beta}\int_0^1 \nu(t,x)\, f(x)dx, \tag{3.8}$$

тобто (3.6) запишеться у вигляді

$$\frac{\partial S[t,u]}{\partial t} = \frac{1}{4\beta}\left(\int_0^1 \nu(t,x)f(x)dx\right)^2 + \alpha u(t,1)\nu(t,1) + \int_0^1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial \nu(t,x)}{\partial x}dx$$

Розв’язання цього рівняння знову шукаємо у вигляді:

$$S[t,u] = \int_0^1\int_0^1 K(t,x,s)u(t,x)u(t,s)dsdx + \int_0^1 \varphi(t,x)\, u(t,x)dx + \eta(t) \tag{3.9}$$

Градієнт функціонала має вигляд:

$$v(t,x) = \int_0^1 [K(t,x,s) + K(t,s,x)]u(t,s)ds + \varphi(t,x) \tag{3.10}$$

Підставимо в рівняння (3.6) вирази для S і v, визначені формулами (3.9) та (3.10), відповідно:

$$\int_0^1\int_0^1 \left\{\frac{\partial K(t,x,s)}{\partial t} + 2\frac{\partial^2 K(t,x,s)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 K(t,x,s)}{\partial s^2}. - \right.$$

$$\left. -\frac{3}{4\beta}K_1(t,x,s)\right\} u(t,x)u(t,s)dsdx +$$

$$+\int_0^1 \left\{ \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + 2\frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x^2} \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2\beta}\int_0^1 \int_0^1 [K(t,s,x) + K(t,x,s)]\varphi(t,y)f(s)f(y)dsdy \right\} u(t,x)dx -$$

$$-2u(t,1)\left\{ \alpha\varphi(t,1) + \frac{\partial \varphi(t,1)}{\partial x} \right.$$

$$+\int_0^1 \left[\alpha K(t,1,s) \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial K(t,1,s)}{\partial x} \right] u(t,s)ds. + \int_0^1 \left[\alpha K(t,x,1) + \frac{\partial K(t,x,1)}{\partial s} \right] u(t,x)dx \right\} +$$

$$+2u(t,0)\left\{ \frac{\partial \varphi(t,0)}{\partial x} + \int_0^1 \frac{\partial K(t,0,s)}{\partial x} u(t,s)ds + \int_0^1 \frac{\partial K(t,x,0)}{\partial s} u(t,x)dx \right\} + \eta'(t)$$

$$- \frac{3}{4\beta}\left[\int_0^1 \varphi(t,x)f(x)dx \right]^2 = 0,$$

де

$$K_1(t,x,s) = \int_0^1 \int_0^1 [K(t,y,s) + K(t,s,y)]\,[K(t,z,x) + K(t,x,z)]f(y)f(z)dzdy$$

Оскільки отримане рівняння має виконуватися для будь-яких $u(t,x)$, отримуємо такі задачі для визначення функцій $K(t,x,s)$, $\varphi(t,x)$ і $\eta(t)$:

$$\frac{\partial K(t,x,s)}{\partial t} + 2\frac{\partial^2 K(t,x,s)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 K(t,x,s)}{\partial s^2} = \frac{3}{4\beta}K_1(t,x,s), \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} \alpha K(t,x,1) + \dfrac{\partial K(t,x,1)}{\partial s} = \dfrac{\partial K(t,x,0)}{\partial s} = 0 \\ \alpha K(t,1,s) + \dfrac{\partial K(t,1,s)}{\partial x} = \dfrac{\partial K(t,0,s)}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{3}{2\beta}\int_0^1\int_0^1 [K(t,s,x) + K(t,x,s)]\varphi(t,y)f(s)f(y)dsdy, \tag{3.13}$$

$$\alpha\varphi(t,1) + \frac{\partial \varphi(t,1)}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial \varphi(t,0)}{\partial x} = 0, \tag{3.14}$$

$$\eta(t) = \frac{3}{4\beta}\left[\int_0^1 \varphi(t,x)f(x)dx\right]. \tag{3.15}$$

Оскільки функціонал $S[t,u]$, визначений формулою (3.9), відповідає умовам (3.7), то

$$S[T,u] = \int_0^1\int_0^1 K(T,x,s)u(T,x)u(T,s)dsdx + \int_0^1 \varphi(T,x)u(T,x)dx + \eta(T) =$$

$$= \int_0^1 u^2\,(T,x) - 2\int_0^1 u(T,x)\psi(x)dx + \int_0^1 \psi^2(x)dx$$

З того, що ця рівність має виконуватися при будь-яких $u(t,x)$, отримуємо такі умови:

$$K(T,x,s) = \delta(x-s), \tag{3.16}$$

де $\delta(x-s)$ – функція Дірака,

$$\varphi(T,x) = -2\psi(x) \tag{3.17}$$

$$\eta(T) = \int_0^1 \psi^2\,(x)dx. \tag{3.18}$$

Отже, початкова задача (3.1)–(3.4) звелася до знаходження функцій $K(t,x,s), \varphi(t,x), \eta(t)$, визначених задачами (3.11)-(3.18),

Зокрема, для визначення функції $K(t,x,s)$ маємо рівняння (3.11) з початковими умовами (3.12), (3.16). Ця крайова задача для визначення $K(t,x,s)$ називається інтегро-диференціальною задачею типу Ріккаті.

3.3 Розв'язок крайової задачі Ріккаті

Подамо функції $K(t,x,s),$ та $f(x)$ у вигляді рядів за системою власних функцій задачі Штурма-Ліувілля:

$$K(t,x,s) = \sum_{n,m=1}^{\infty} K_{nm}(t) X_n(x) X_m(s),$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x).$$

Зауважимо, що, як і попередньому розділі, функцію $K(t,x,s)$ будемо вважати симетричною.

Визначимо всі складові в рівнянні (3.11):

$$K_t(t,x,s) = \sum_{n,m=1}^{\infty} K'_{nm}(t) X_n(x) X_m(s),$$

$$K''_{xx}(t,x,s) = -\sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_n^2 K_{nm}(t) X_n(x) X_m(s),$$

$$K''_{xx}(t,x,s) = -\sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_m^2 K_{nm}(t) X_n(x) X_m(s)/$$

Тоді ліва частина рівняння має вигляд:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}[K'_{nm}(t)-2(\lambda_m^2+\lambda_m^2)K_{nm}(t)]X_n(x)X_m(s).$$

А права частина буде мати вигляд:

$$\frac{3}{4\beta}K_1(t,x,s)=$$

$$=\frac{3}{4\beta}\int_0^1\int_0^1[K(t,y,s)+K(t,s,y)]\,[K(t,z,x)$$

$$+K(t,x,z)]f(y)f(z)dzdy$$

$$=\frac{3}{\beta}\int_0^1\int_0^1\left(\sum_{i,m=1}^{\infty}K_{im}(t)\,X_i(y)X_m(s)\right)\left(\sum_{j,n=1}^{\infty}K_{jn}(t)\,X_j(y)X_n(x)\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty}f_l\,X_l(y)\right)$$

$$\left(\sum_{r=1}^{\infty}f_r\,X_r(z)\right)dzdy=$$

$$=\frac{3}{\beta}\int_0^1\int_0^1\left[\sum_{i,m,j,n,i,r=1}^{\infty}K_{im}(t)\,K_{jn}(t)X_i(y)X_m(s)X_j(z)X_n(x)X_l(y)X_r(y)f_lf_r\right]dzdy=$$

$$=\frac{3}{\beta}\sum_{i,m,j,n=1}^{\infty}K_{im}(t)\,K_{jn}(t)X_m(s)X_n(x)f_if_j$$

$$=\frac{3}{\beta}\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}(K_{im}(t)\,K_{jn}(t)q_iq_j\right)X_n(x)X_m(s).$$

Отже

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}[K'_{nm}(t)-2(\lambda_m^2+\lambda_m^2)K_{nm}(t)]X_n(x)X_m(s)$$

$$=\frac{3}{\beta}\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}(K_{im}(t)\,K_{jn}(t)f_if_j\right)X_n(x)X_m(s). \tag{3.19}$$

Рівність (3.19) можлива тоді і тільки тоді, коли рівні коефіцієнти при $X_n(x)X_m(s)$ в обох частинах, тобто отримуємо послідовність рівнянь:

$$K_{nm}(t)-2(\lambda_n^2+\lambda_m^2)K_{nm}(t)=\frac{3}{\beta}\sum_{i,j=1}^{\infty}K_{nj}(t)f_jf_iK_{im}\,(t) \tag{3.20}$$

З умови (3.16) випливає, що

$$K_{nm}(T)=\delta_{nm}=\begin{cases}1,n=m\\0,n\neq m\end{cases}$$

Якщо ввести позначення:

$$\Lambda=\begin{pmatrix}2\lambda_1^2 & 0 & .\\ 0 & 2\lambda_2^2 & .\\ . & . & .\end{pmatrix},K(t)=\begin{pmatrix}k_{11}(t) & k_{12}(t) & .\\ k_{21}(t) & k_{22}(t) & .\\ . & . & .\end{pmatrix},F=\begin{pmatrix}f_1f_1 & f_1f_2 & .\\ f_2f_1 & f_2f_2 & .\\ . & . & .\end{pmatrix}.$$

то систему рівнянь (3.20) можна записати у вигляді:

$$\dot{K}(t)=\Lambda K(t)+K(t)\Lambda+\frac{3}{\beta}K(t)FK(t) \tag{3.21}$$

з початковою умовою $K(t)=E$.

Це рівняння є диференціальним рівнянням Бернуллі відносно нескінченної матриці $K(t)$. Воно являється частковим випадком загального диференціального рівняння Ріккаті і розв’язується шляхом зведення його до лінійного рівняння. Робиться це наступним чином: обидві частини рівняння (3.21) спочатку множимо зліва та справа на матрицю K^{-1}:

$$K^{-1}\dot{K}K^{-1} = K^{-1}\mathit{\Lambda} KK^{-1} + K^{-1}K\mathit{\Lambda} K^{-1} + \frac{3}{\beta}K^{-1}KFKK^{-1}.$$

Оскільки $KK^{-1} = E$, то

$$\frac{d(KK^{-1})}{dt} = \dot{K}K^{-1} + K\left(\dot{K^{-1}}\right) = 0,$$

де 0-матриця з нульовими елементами.

Звідси знаходимо, що $K^{-1}\dot{K}K^{-1} = -\dot{K}^{-1}$. В отриманому рівнянні

$$-\dot{K}^{-1} = K^{-1}\mathit{\Lambda} + \mathit{\Lambda} K^{-1} + \frac{3}{\beta}F.$$

Зробимо заміну $U = K^{-1}$ та отримаємо лінійне рівняння:

$$\dot{U} = -U\mathit{\Lambda} - \mathit{\Lambda} U - \frac{3}{\beta}Q \qquad (3.22)$$

з початковою умовою $U(t) = E$.

Оскільки загальним розв’язком неоднорідного рівняння (3.22) є сума загального розв’язку $U_{\text{о}}$ відповідного однорідного рівняння та деякого часткового розв’язку $U_{\text{ч}}$ неоднорідного рівняння, знайдемо ці розв’язки.

Спочатку розв’яжемо однорідне рівняння $U = -\mathit{\Lambda} U - U\mathit{\Lambda}$. Оскільки матриця $\mathit{\Lambda}$ в рівнянні стала, його загальний розв’язок можна подати у вигляді:

$$U(t) = e^{-\mathit{\Lambda} t}Ce^{-\mathit{\Lambda} t},$$

де C – довільна стала матриця.

Використовуючи початкову умову $U(t) = E$, знаходимо матрицю C:

$$U(T) = e^{-\Lambda T} C e^{-\Lambda T} = E,$$
$$e^{\Lambda T} e^{-\Lambda T} C e^{-\Lambda T} e^{\Lambda T} = e^{\Lambda T} E e^{\Lambda T}$$
$$C = e^{2\Lambda T}$$

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння (3.22) можна записати як

$$U_{\text{о}}(t) = e^{-\Lambda t} e^{\Lambda T} e^{\Lambda T} e^{-\Lambda t} = e^{-\Lambda(t-T)} e^{-\Lambda(t-T)} = e^{-2\Lambda(t-T)}.$$

Щоб отримати частковий розв'язок $U_{\text{ч}}(t)$, можемо скористатися стандартним методом варіації довільної сталої. Розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді: $U_{\text{ч}}(t) = e^{-\Lambda t} C(t) e^{-\Lambda t}$, де $C(t)$ – матрична функція, що підлягає визначенню. Підставляючи її в рівняння (3.22), отримуємо

$$(e^{-\Lambda t})' C e^{-\Lambda t} + e^{-\Lambda t} C' e^{-\Lambda t} + e^{-\Lambda t} C (e^{-\Lambda t})' =$$
$$= -\Lambda e^{-\Lambda t} C e^{-\Lambda t} + e^{-\Lambda t} C' e^{-\Lambda t} - e^{-\Lambda t} C e^{-\Lambda t} \Lambda =$$
$$= -\Lambda e^{-\Lambda t} C e^{-\Lambda t} - e^{-\Lambda t} C e^{-\Lambda t} \Lambda - \frac{3}{\beta} F.$$

Звідси отримуємо, що $e^{-\Lambda t} C' e^{-\Lambda t} = -\frac{3}{\beta} F$ або $C' = -\frac{3}{\beta} e^{\Lambda t} F e^{\Lambda t}$, отже

$$C(t) = -\frac{3}{\beta} \int_T^t e^{\Lambda s} F e^{\Lambda s}\, ds.$$

Підставляючи знайдене значення $C(t)$ в частинний розв'язок, отримаємо, що

$$U_ч(t) = e^{-\Lambda t}\left[-\frac{3}{\beta}\int_T^t e^{\Lambda s} F e^{\Lambda s}\, ds\right] e^{-\Lambda t} = e^{-\Lambda t}\frac{3}{\beta}\left(\int_T^t e^{\Lambda s} F e^{\Lambda s}\, ds\right) e^{-\Lambda t}.$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.21) можна подати у вигляді:

$$U(t) = e^{-\Lambda(t-T)} + e^{-\Lambda t}\frac{3}{\beta}\left(\int_T^t e^{\Lambda s} F e^{\Lambda s}\, ds\right) e^{-\Lambda t}.$$

Повертаючись до матриці $K(t)$, отримаємо розв'язок рівняння (3.21)

$$K(t) = \left(e^{-\Lambda(t-T)} + e^{-\Lambda t}\frac{3}{\beta}\left(\int_T^t e^{\Lambda s} F e^{\Lambda s}\, ds\right) e^{-\Lambda t}\right)^{-1} =$$
$$= \left[e^{-\Lambda(t-T)}\left(E + \frac{3}{\beta}\int_t^T e^{\Lambda(s-T)} F e^{\Lambda(s-T)} ds\right) e^{-\Lambda(t-T)}\right]^{-1}$$

або

$$K(t) = e^{\Lambda(t-T)}\left(E + \frac{3}{\beta}\int_t^T e^{\Lambda(s-T)} F e^{\Lambda(s-T)} ds\right)^{-1} e^{\Lambda(t-T)}. \qquad (3.23)$$

Таким чином, функцію $K(t,x,s) = \sum_{n,m=1}^{\infty} K_{nm}(t) X_n(x) X_m(s)$ визначено.

3.4 Отримання оптимального керування

Функцію $\varphi(t,x)$ також подамо у вигляді ряду

$$\varphi(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) X_n(x).$$

Підставимо $K(t,x,s)$ та $\varphi(t,x)$ у рівняння (3.13) з умовами (3.14) та (3.17):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(t) X_n + 2\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) X_n'' =$$

$$= \frac{3}{\beta} \int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{n,m=1}^{\infty} K_{nm}(t) X_m(s) X_n(x) \right] \left[\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(t) X_j(y) \right] \left[\sum_{r=1}^{\infty} f_r X_r(s) \right] \left[\sum_{i=1}^{\infty} f_i X_i(y) \right] ds dy,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n'(t) - 2\lambda_n^2) X_n =$$

$$= \frac{3}{\beta} \sum_{n,m,j=1}^{\infty} K_{nm}(t) f_m \varphi_j(t) f_j X_n(x) = \frac{3}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m,j=1}^{\infty} K_{nm}(t) f_m \varphi_j(t) f_j \right) X_n(x),$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових $X_n(x)$ в обох частинах, приходимо до системи диференціальних рівнянь з змінними, що розділяються

$$\varphi_n'(t) - 2\lambda_n^2 \varphi_n(t) = \frac{3}{\beta} \sum_{m,j=1}^{\infty} K_{nm}(t) \varphi_j(t) f_m f_j. \tag{3.24}$$

Якщо функцію $\psi(x)$ також подати у вигляді ряду $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x)$, тоді початкова умова (3.16) перетвориться на $\varphi_n = -2\psi_n$. Позначимо $\Phi = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \dots), \Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots)$. Тоді рівняння (3.24) з початковою умовою ψ_n можна записати у матричному вигляді:

$$\Phi' - \Lambda\Phi = \frac{3}{\beta} KF\Phi$$

або

$$\Phi' = \left(\Lambda + \frac{3}{\beta} KF\right)\Phi, \Phi(T) = -2\Psi.$$

Розділимо змінні:

$$\Phi(t) = Ce^{\int_T^t \left(\Lambda + \frac{3}{\beta} K(\tau)F(\tau)\right) d\tau} = Ce^{-\int_\tau^T \left(\Lambda + \frac{3}{\beta} K(\tau)F(\tau)\right) d\tau}.$$

Константу C знаходимо з початкової умови $\Phi(T) = -2\Psi$, звідки $C = -2\Psi$. Отже,

$$\Phi = -2\Psi e^{-\int_\tau^T \left(\Lambda + \frac{3}{\beta} K(\tau)F(\tau)\right) d\tau}. \quad (3.25)$$

Визначивши функції $K(t, x, s)$ і $\varphi(t, x)$, отримаємо функцію

$$\nu(t, x) = 2 \int_0^1 \left[\sum_{n,m=1}^{\infty} K_{nm}(t) X_n(x) X_m(s)\right] \left[\sum_{\iota=1}^{\infty} u_\iota(t) X_\iota(s)\right] ds + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) X_n(x) =$$

$$= 2 \sum_{n,m=1}^{\infty} K_{nm}(t)\, u_m(t) X_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) X_n(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n(t) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}(t) u_m(t)\right) X_n(x).$$

Тут

$$u(t,s) = \sum_{\iota=1}^{\infty} u_{\iota}(t) X_{\iota}(s).$$

Підставляючи $v(t,x)$ у формулу (3.8), отримаємо оптимальне керування

$$p(t) = -\frac{1}{2\beta}\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n + 2\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}u_m\right) X_n(x)\right]\left[\sum_{i=1}^{\infty} f_i X_i(x)\right] dx = = -\frac{1}{2\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n + 2\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}u_m\right) f_n, \tag{3.26}$$

що виражається через функцію $u(t,s)$, яка є розв'язком початкової крайової задачі.

В рівняння (3.1) підставляємо отриману функцію $p(t)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n''(x) - \frac{1}{2\beta}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\varphi_i + 2\sum_{m=1}^{\infty} K_{im}u_m\right) f_i\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x)\right],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) X_n(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 u_n(t) X_n(x) - \frac{1}{2\beta}(\Phi + 2Ku, f)\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x)\right].$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $X_n(x)$, отримуємо:

$$u_n'(t) = -\lambda_n^2 u_n - \frac{1}{2\beta} f_n (\Phi + 2Ku, f).$$

Запишемо це рівняння у матричній формі (тут $u = (u_1, u_2, \dots)$):

$$u' = -\frac{\Lambda}{2}u - \frac{1}{2\beta}(\Phi + 2Ku, f)f$$

або

$$u' = -\frac{\Lambda}{2}u - \frac{1}{2\beta}(\Phi, f)f - \frac{1}{\beta}(Ku, f)f.$$

Визначивши таким чином функцію $u(t,x)$, оптимальне управління, що шукається, отримаємо у вигляді:

$$p(t) = -\frac{1}{2\beta}(\Phi + 2Ku, f).$$

Зауважимо, що на відміну від попередньої задачі, отримати явний вигляд елементів матриці K прямими методами не виходить. Це обумовлено наявністю матриці F.

3.5 Існування розв'язку задачі в класі допустимих керувань

У постановці задачі потрібно, щоб потрібне управління $p(t) \in L_2[0,T]$, а відповідний розв'язок задачі (3.1)-(3.3) $u(t,x) \in W_2^{0,1}(D)$.

Покажемо, що отримані вище функції $K(t,x,s)$ та $\varphi(t,x)$ не виводять за клас допустимих керувань.

Для того щоб функція $p(t)$ у вигляді (3.8) належала $L_2[0,T]$, потрібна скінченність інтеграла $\int_0^T p^2\,(t)dt$:

$$\int_0^T p^2\,(t)dt = \frac{1}{4\beta^2}\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^1 \nu(t,x)f(x)dx\right)^2 dt$$

$$\leq \frac{1}{4\beta^2}\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^1 \nu^2(t,x)dx\right)\left(\int\limits_0^1 f^2(x)dx\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4\beta^2}\|f\|^2\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \nu^2\,(t,x)dxdt.$$

З цієї оцінки випливає, що достатньо показати, що $\nu \in L_2(D)$. Оскільки

$$\nu(t,x) = 2\int_0^1 K(t,x,s)\,u(t,s)ds + \varphi(t,x),$$

то для цього достатньо, щоб були скінченними такі інтеграли:

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 K(t,x,s)\,u(t,s)ds\right)^2 dxdt, \int\limits_0^T\int\limits_0^1 \varphi^2(t,x)\,dxdt.$$

Оскільки $u \in W_2^{0,1}$, то для неї справедлива така умова:

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1\left[u^2(t,x) + \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2\right]dxdt < \infty.$$

Запишемо цю умову для коефіцієнтів Фур’є:

$$\int_0^T \int_0^1 \left[u^2(t,x) + \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2\right] dxdt =$$

$$= \int_0^T \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x) \sum_{i=1}^{\infty} u_i(t) X_i(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n'(x) \sum_{i=1}^{\infty} u_i(t) X_i'(x)\right] dxdt =$$

$$= \int_0^T \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) + \sum_{n,i=1}^{\infty} u_n(t) u_i(t) \left(X_n{}'(x) X_i(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 X_i(x) X_n''(x) dx\right)\right] dt =$$

$$= \int_0^T \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t)(X_n'(1) X_n(1) - X_n'(0) X_n(0) + \lambda_n^2\right] dt =$$

$$= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha X_n^2(1) + \lambda_n^2) u_n^2\,(t) < \infty,$$

тобто

$$\int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 u_n^2(t)\right) dt < \infty.$$

Враховуючи це, отримуємо, що

$$\int_0^T \int_0^1 \left(\int_0^1 Kuds\right)^2 dxdt$$

$$= \int_0^T \int_0^1 \left(\int_0^1 \sum_{n,m=1}^{\infty} K_{nm}(t) X_n(x) X_m(s) \sum_{i=1}^{\infty} u_i(t) X_i(s) ds\right)^2 dxdt =$$

$$= \int_0^T \int_0^1 \left(\sum_{n,m=1}^{\infty} K_{nm}(t) u_m(t) X_n(x)\right)^2 dxdt =$$

$$=\int_0^T\int_0^1\left(\sum_{n,m=1}^{\infty}K_{nm}(t)u_m(t)X_n(x)\right)\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}K_{ij}(t)u_j(t)X_i(x)\right)dxdt=$$

$$=\int_0^T\left(\sum_{n,m,j=1}^{\infty}K_{nm}(t)u_m(t)K_{nj}(t)u_j(t)\right)dt$$

$$=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}K_{nm}(t)u_m(t)\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}K_{nj}(t)u_j(t)\right)dt$$

або

$$\int_0^T\int_0^1\left(\int_0^1 Kuds\right)^2 dxdt=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}K_{nm}u_m\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}K_{nj}u_j\right)dt.$$

Помножимо та поділимо кожну з отриманих сум на λ_m і λ_j, і застосуємо нерівність Гельдера:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{K_{nm}}{\lambda_m}\lambda_m u_m\le\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{K_{nm}}{\lambda_m}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}(\lambda_m u_m)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{K_{nj}}{\lambda_j}\lambda_j u_j\le\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{K_{nj}}{\lambda_j}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j u_j)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

тобто

$$\int_0^T\int_0^1\left(\int_0^1 Kuds\right)^2 dxdt\le$$

$$\le\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{K_{nm}}{\lambda_m}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}(\lambda_m u_m)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{K_{nj}}{\lambda_j}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j u_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}dt=$$

$$= \int_0^T \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 u_m^2 \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{K_{nm}}{\lambda_m} \right)^2 \right) dt.$$

Розглянемо елемент $\int_t^T e^{\Lambda(s-T)}\, F e^{\Lambda(s-T)} ds$ матриці K (3.23). Він матиме вигляд:

$$C_{nm}(t) = \frac{f_n f_m (1 - e^{2(\lambda_n^2 + \lambda_m^2)(t-T)})}{2(\lambda_n^2 + \lambda_m^2)}.$$

В силу того, що $f(x) \in L_2[0,1]$, маємо, що $\exists M > 0 \colon \forall t \in [0,T]\ \forall_{m,n} C_{nm}(t) \leq M$, тобто всі елементи матриці

$$\left(E + \frac{3}{\beta} \int_t^T e^{\Lambda(t-T)}\, F e^{\Lambda(t-T)} ds \right)^{-1}$$

обмежені і, отже, можна вважати, що матриця $К(t)$ поводиться як $e^{2\Lambda(t-T)}$, тобто

$$\frac{K_{nm}^2(t)}{\lambda_n^2} = \frac{e^{4\lambda_n^2(t-T)}}{\lambda_n^2} \leq \frac{1}{\lambda_n^2},$$

$$\int_0^T \int_0^1 \left(\int_0^1 K u ds \right)^2 dx dt \leq \int_0^T \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 u_m^2(t) \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^T \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 u_m^2(t) \right) dt < \infty,$$

тобто $\int_0^1 K(t,x,s) u(t,s) ds$ належить простору $L_2(D)$.

Крім того,

$$\int_0^T \int_0^1 \varphi^2(t,x)dxdt = \int_0^T \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)X_n(x)\right)^2 dxdt$$

$$= \int_0^T \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)X_n(x)\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t)X_i(x)\right)dxdt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t)\, dt.$$

Знову враховуємо, що $K(t)$ поводиться як $e^{2\Lambda(t-T)}$. Тоді елемент матриці (3.25) запишеться у вигляді:

$$-\int_t^T \left(2\lambda_n^2 + \frac{3}{\beta} e^{4\lambda_n^2(t-T)}\right) d\tau = -\left(2\lambda_n^2(T-t) + \frac{3}{\beta}\frac{1-e^{-4\lambda_n^2(T-t)}}{4\lambda_n^2}\right),$$

тобто

$$\varphi_n^2(t) = 4\psi_n^2 e^{-\left(4\lambda_n^2(T-t)+\frac{6}{\beta}\frac{1-e^{-4\lambda_n^2(T-t)}}{4\lambda_n^2}\right)} \le 4\psi_n^2,$$

тобто

$$\int_0^T \int_0^1 \varphi^2\,(t,x)dxdt \le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} 4\psi_n^2\, dt = 4T\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2 < \infty$$

Таким чином, отримані нами K і φ дозволяють визначити управління $p(t)$ у класі $L_2[0,\mathrm{T}]$.

ВИСНОВКИ

Кваліфікаційна робота присвячена розв’язанню двох задач оптимального керування. Це дві крайові задачі схожого типу, але з різними критеріями оптимальності та з різними функціями керування.

Обидва процеси описуються рівняннями параболічного типу, але керуючі функції в цих процесах різні: керуюча функція в першій задачі залежить від двох змінних – часу та координати, та має належати простору $L_2\ (D)$. В другій задачі керуюча функція залежить лише від однієї змінної – часу – і має належати простору $L_2\ [0, T]$. Граничні та початкові умови в двох задачах однакові.

Критерії оптимальності різні, але в кожній задачі мінімізувався деякий квадратичний функціонал. В першій задачі критерій оптимальності має більш складний вигляд, ніж в другій.

При розв’язанні обох задач використовувався один метод, який спирається на принцип оптимальності Беллмана. Згідно з цим принципом в кожній задачі було отримано рівняння Беллмана для заданої динамічної системи та при розв’язанні цього рівняння з’являлася інтегро-диференціальна задача типу Ріккаті.

Розвинення шуканих функцій в ряди Фур’є за повною ортонормованою системою власних функцій задачі Штурма-Ліуівілля одну з цих задач призвело до матричного диференціального рівняння Ріккаті, а другу – до рівняння Бернуллі, яке також можна розв’язати. На відміну від рівняння Бернуллі, для якого завжди можна отримати розв’язок, точний розв’язок рівняння Ріккаті можна отримати лише в деяких часткових випадках. Але в роботі отримане рівняння Ріккаті було розв’язано в загальному вигляді. Крім того, коли всі матриці, що є коефіцієнтами цього рівняння є діагональними, вдалося виписати елементи мариці, яка є розв’язком цього рівняння.

Крім рівняння Бернуллі та Ріккаті в обох задачах прийшлося розв'язувати також лінійне неоднородне векторно-матричне рівняння та рівняння для знаходження функції стану системи. В другій задачі цю функцію вдалося записати лише в загальному вигляді – прямими методами, на відміну від першої задачі, її знайти не вийшло.

Подання функцій у вигляді рядів Фур'є, по-перше, дає можливість показати існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі, та, по-друге, дозволяє доволі легко показати, що отримані керуючі функції є допустимими, тобто належать потрібним класам.

Отже, хоча задачі доволі схожі за постановкою та методом розв'язання, отримані результати істотно відрізняються, причому більш проста на вигляд задача розв'язується значно складніше.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Колмагоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва : НАУКА, 1976. 624 с.
2. Городецький В., Нагнибіда Н., Настасіїв П. Методи вирішення завдань з функціонального аналізу. Київ : Вища шк., 1990. 479 с.
3. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Москва, 1953. 468 с.
4. Беллман. Введение в теорию матриц. Москва : Наука, 1976. 352 с.
5. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. Москва : Наука, 1978. 463 с.
6. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. Москва : МИР, 1974. 205 с.
7. Хорн Р., Джонсон Ч. Математический анализ. Москва : МИР, 1989. 655 с.
8. Праці п’ятої української конференції з автоматичного управління «Автоматика-98» : Київ, 13-16 травня 1998 р. Ч.1. Київ : НТУУ «Київський політехнічний інститут», 1998. 418с.
9. Ланкастер П. Теория матриц. Москва : Наука, 1982. 269 с.