МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ РІККАТІ»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1111-з

спеціальності 111 математика

(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми математика

(назва освітньої програми)

Я. А. Бутакова

(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, доцент, к.ф.-м.н. Красікова І.В.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Стєганцева П.Г.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя

2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика
(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної та прикладної
математики, професор, д.т.н.
____________ Гребенюк С.М.
(підпис)

« ____ » __________ 2022 р.

ЗАВДАННЯ

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Бутаковій Яні Андріївні
(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Розв'язання матричних диференціальних рівнянь Ріккаті

керівник роботи (проекту) Красікова Ірина Володимирівна к.ф.м.н, доцент
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджено наказом ЗНУ від «_10__»__травня__________2022 р. №__90-с___

2. Строк подання студентом роботи____________________________
3. Вихідні дані до роботи __1.Постановка задачі__________________
   ______________________2. Перелік літератури__________________
4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки(перелік питань, які потрібно розробити)______
   1. Ознайомлення з диференціальними рівняннями Ріккаті
   2. Дослідження властивостей матричної експоненти
   3. Методи розв'язання матричних рівнянь
   4. Розв\`язання задач
5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) ___________

Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 16 травня 2022 р.

К А Л Е Н Д А Р Н И Й П Л А Н

№	**Назва етапів кваліфікаційної роботи**	**Строк виконання етапів роботи**	**примітка**
1.	Розробка плану роботи	16.05.2022-08.06.2022	
2.	Аналітична робота	09.06.2022-11.07.2022	
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел	12.07.2022-09.08.2022	
4.	Розробка першого і другого розділу	10.08.2022-16.08.2022	
5.	Розв’язання прикладів	17.10.2022-31.11.2022	
6.	Оформлення і нормоконтроль	01.12.2022-07.12	
	кваліфікаційної роботи		
7.	Захист кваліфікаційної роботи	14.12.2022	

Студент ________________ Я.А. Бутакова
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ________________ І.В. Красікова
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ________________ О. Г. Спиця

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Розв’язання матричних диференціальних рівнянь Ріккаті»: 65 с., 7 джерел.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЗАГАЛЬНІ РОЗВ’ЯЗКИ, МАТРИЧНА ЕКСПОНЕНТА, МАТРИЧНІ РІВНЯННЯ, РІВНЯННЯ РІККАТІ, ЧАСТКОВІ РОЗВ’ЯЗКИ, ФУНКЦІЯ

Об’єкт дослідження – матричні диференціальні рівняння Ріккаті

Мета роботи: Дослідити властивості матричних диференціальних рівнянь Ріккаті та способи їх розв’язання

Метод дослідження – аналітичний.

У кваліфікаційній роботі розглядаються матричні диференціальні рівняння Ріккаті та рівняння, до яких рівняння Ріккаті приводяться: однорідні та неоднорідні лінійні рівняння та рівняння Бернуллі, які інтегруються в квадратурах.

У роботі наведено докладно досліджуються властивості матричної експоненти. Розглянуті різні типи матричних диференціальних рівнянь, питання існування їх розв’язків, властивостей цих розв’язків і методів їх знаходження. Також наведено приклади розв’язання матричних диференціальних рівнянь Ріккаті.

SUMMARY

Master’s Qualification Thesis "Solution of Riccati matrix differential equations": 65 p., 7 sources.

DIFFERENTIAL EQUATIONS, GENERAL SOLUTIONS, MATRIX EXPONENT, MATRIX EQUATIONS, RICCATI EQUATIONS, PARTIAL SOLUTIONS, FUNCTION

The object of research is Riccati matrix differential equations

The purpose of the work: To study the properties of Riccati matrix differential equations and methods of their solution

The research method is analytical.

The qualifying work examines Riccati matrix differential equations and equations to which Riccati equations are reduced: homogeneous and inhomogeneous linear equations and Bernoulli equations which are integrated in quadratures.

The paper presents the studied properties of the matrix exponent in detail. Various types of matrix differential equations, the existence of their solutions, the properties of these solutions and methods of finding them are considered. Examples of solving Riccati matrix differential equations are also given.

ЗМІСТ

ВСТУП

Рівняння Ріккаті зустрічаються у різних розділах математики. Вони відіграють важливу роль у теорії оптимального управління, у варіаційному численні, у методі прогонки при розв’язанні крайових задач. Існують різні типи рівнянь Ріккаті – матричні, операторні, диференціальні.

Ця кваліфікаційна робота присвячена розв’язанню матричних диференціальних рівнянь Ріккаті.

Відомо, що в загальному вигляді диференціальне рівняння Ріккаті не інтегрується у елементарних функціях. Але, у в окремих випадках, вдається підібрати такі підстановки, які приведуть рівняння Ріккаті до рівняння Бернуллі, лінійних рівнянь, рівнянь з змінними, що розділяються, які інтегруються в квадратурах. З матричними рівняннями ситуація доволі схожа – в загальному вигляді вони не інтегруються за допомогою елементарних перетворень, але існують часткові випадки, коли можна знайти точний розв’язок рівняння.

У роботі розглядаються деякі методи розв'язання таких рівнянь та наводяться приклади їх застосування. Слід зауважити, що процес розв’язання навіть доволі простих на вигляд рівнянь довгий и часом його важко реалізувати вручну. Формули розв’язків матричних диференціальних рівнянь використовують матричні функції, зокрема, матричну експоненту, яка також вивчається в роботі.

Наведемо основні означення, які будуть зустрічатися у кваліфікаційній роботі. Зауважимо, що всі матриці, які будуть зустрічатися, є квадратними.

Рівняння, у яких невідома матриця стоїть під знаком похідної, називається диференціальним матричним рівняннямм. Загальне диференціальне рівняння першого порядку має вигляд:

$$F(t, X, X') = 0\ ,$$

де F – задана неперервна функція трьох своїх аргументів, а $X = X(t)$ – квадратна матриця, елементами якої є функції $x_{ij}(t)$, а $X'(t)$ – це матриця, елементами якої є похідні $x'_{ij}(t)$,

Розв’язати диференціальне матричне рівняння – значить знайти таку матрицю $X(t)$, яка задовольняє дане рівняння, тобто яка, будучи підставленою в це рівняння, перетворює його на тотожність.

Розв’язок рівняння, що містить довільну сталу матрицю C, називається загальним розв’язком. Кожний розв’язок, який отримується із загального при заданій матриці C, називається частковим розв’язком.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної, яка входить у це рівняння. Наприклад, рівняння Ріккаті мають є рівняннями першого порядку.

Диференціальні рівняння, що інтегруються за допомогою скінченної кількості інтегралів або інших елементарних операцій, називаються інтегрованими в квадратурах.

1 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ РІККАТІ

Цей розділ присвячений огляду інформації про диференціальне рівняння Ріккаті [3]. Розглянуті часткові випадки цього рівняння, які дозволяють знайти його розв'язок та деякі властивості розв'язків. Схожі питання будуть розглянуті у другому розділі вже для матричних диференціальних рівнянь Ріккаті.

Загальне диференціальне рівняння Ріккаті має вигляд:

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2, \quad (1.1)$$

де p, q, r – неперервні функції від x, $x \in (-\infty; +\infty)$.

У загальному випадку не інтегрується у квадратурах, тобто це рівняння не інтегрується за допомогою скінченної кількості інтегралів або інших елементарних операцій. Можливі наступні окремі випадки рівняння Ріккаті:

– $r(x) = 0$. Тоді вихідне рівняння – це звичайне лінійне рівняння

$$y' = p(x) + q(x)y.$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді $y = u(x)v(x)$, де функцію *v(x)* вибираємо з умови $v' = q(x)v$, тобто $ln\, v = \int q(x)dx$, значить,

$$v(x) = e^{\int q(x)dx}.$$

тоді для функції u маємо рівняння $u'(x)e^{-\int q(x)dx} = p(x)$, з якого випливає, що $u'(x) = p(x)e^{-\int q(x)dx}$, та

$$u(x) = \int p(x) e^{-\int q(x)dx}\, dx + c,$$

де c – довільна стала.

Перемножуючі функції $v(x)$ і $u(x)$, отримаємо розв’язок рівняння:

$$y = e^{\int q(x)dx}(c + \int p(x) e^{-\int q(x)dx} dx)$$

– $p(x) \equiv 0$. В цьому випадку вихідне рівняння має вигляд

$$y' = q(x)y + r(x)y^2$$

і називається рівнянням Бернуллі, яке можна проінтегрувати в квадратурах. Запишемо його у вигляді $y^{-2}y' = q(x)y^{-1} + r(x)$ та робимо заміну $z = y^{-1}$, тоді $dz = -y^{-2}y'$, а значить $z' = -qz - r$ – лінійне рівняння, розв’язок якого ми розглянули вище.

– p, q, r – сталі функції, то це рівняння з розділяючимися змінними $y' = p + qy + ry^2$. Розділимо змінні:

$$\frac{dy}{p + qy + ry^2} = dx.$$

Розв’язок рівняння буде залежати від знаку виразу $4rp - q^2$. Розглянемо можливі варіанти:

а) $4rp - q^2 > 0$, тоді $\int \frac{dx}{r[\left(y+\frac{q}{2r}\right)^2 + \frac{4rp-q^2}{4r}]} = \int dx$, звідки

$$\frac{2}{\sqrt{4rp-q^2}}arctg\frac{2ry+q}{\sqrt{4pr-q}}=x+c,$$

$$y=\frac{\sqrt{4rp-q^2}}{2r}tg\left[\frac{\sqrt{4rp-q^2}}{2}(x+c)\right]-\frac{q}{2r}.$$

б) $4rp-q^2=0$, тоді

$$\int\frac{dx}{r(y+\frac{q}{2r})^2}=\int dx\,;\ -\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{y+\frac{q}{2r}}=x+c;-\frac{2}{2ry+q}=x+c,$$

звідки $y=\frac{1}{2r}\left(-\frac{2}{x+c}-q\right)$.

в) $4rp-q^2<0$, тоді

$$\int\frac{2y}{r\,[\left(y+\frac{q}{2r}\right)^2-\frac{4pr-q^2}{4r}]}=\int dx,$$

$$\frac{r^2}{\sqrt{4pr-q^2}}ln\left|\frac{2ry+q-\sqrt{q^2-4rp}}{2ry+q+\sqrt{q^2-4rp}}\right|=x+c.$$

– $r(x)=\frac{A}{x^2}$, $q(x)=\frac{B}{x}$, де A,B,p – сталі. Тоді (1.1) –рівняння виду

$$y'=p+A\frac{y}{x}+B\left(\frac{y}{x}\right)^2,$$

яке інтегрується підстановкою $y=xu$.

Рівняння Ріккаті зберігає свій вид при наступних перетвореннях змінних:

– довільне перетворення незалежної змінної $x = \varphi(x_1)$, де φ – диференційовна функція. Виконуючи у (1.1) таку заміну змінної, отримаємо рівняння Ріккаті:

$$\frac{dy}{dx_1} = p[\varphi(x_1)]\varphi'(x_1) + q[\varphi(x_1]\varphi'(x_1)y + r[\varphi(x_1)]\varphi'(x_1)y^2;$$

– довільне дробово-лінійне перетворення залежної змінної

$$y = \frac{\alpha y_1 + \beta}{\gamma y_1 + \delta},$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – довільні диференційовні функції, що залежать від x, які задовольняють умову $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ у інтервалі, що розглядається.

Після цієї заміни знову виходить рівняння типу Ріккаті. Цими перетвореннями можна користуватися для приведення рівняння (1.1) до більш простого вигляду.

Відмітимо, що коефіцієнт при квадраті залежної змінних можна зробити рівним ± 1. Для цього зробимо заміну шуканої функції $y(x) = \omega(x)z(x)$, у рівнянні (1.1), де $\omega(x)$ – невідома функція. Підставляючи її у рівняння (1.1), отримаємо:

$$\omega\frac{dz}{dx} + r\omega' = r\omega^2 z^2 + q\omega z + p,$$

$$\frac{dz}{dx} = r\omega z^2 + \left(q - \frac{r'}{r}\right)z + pr.$$

Якщо покласти $\omega = \pm\frac{1}{r}$, то отримаємо рівняння типу Ріккаті виду:

$$\frac{dz}{dx} = \pm z^2 + \left(q - \frac{r'}{r}\right) z \pm pr.$$

Не змінюючи коефіцієнту при квадраті залежної змінної, можна коефіцієнт при першій степені залежної змінної зробити рівним нулю.

Для цього введемо у рівняння (1.1) нову залежну змінну u підстановкою: $y(x) = u(x) + \alpha(x)$.

Тоді перетворене рівняння буде мати вигляд:

$$\frac{du}{dx} = ru^2 + [q + 2r\alpha(x)]u + p + r\alpha^2 + q^2 - \alpha'.$$

При $\alpha = \frac{q}{2r}$ коефіцієнт при u дорівнює нулю. Використовуючи обидві підстановки, прийдемо до рівняння Ріккаті виду: $y' = \pm y^2 + p(x)$.

Відзначимо, що якщо відомий один частковий розв’язок рівняння Ріккаті, то загальний розв’язок можна отримати у квадратурах. Нехай $y = y_1(x)$ – відомий частковий розв’язок рівняння (1.1). Тобто маємо тотожність: $y' = p + qy_1 + ry_1^2$. Введемо нову функцію: $y = y_1 + z$, де, z – нова шукана функція. Підставимо цю функцію у рівняння (1.1) та отримаємо:

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} = ry_1^2 + 2ry_1 z + rz^2 + qy_1 + qz + p.$$

Враховуючи, що y_1 – розв’язок початкового рівняння, отримаємо для рівняння відносно функції z :

$$z' = (q + 2ry_1)z + rz^2 \tag{1.2}$$

Отримане рівняння – це рівняння Бернуллі, розв’язок якого можна отримати в квадратурах. Для приведення рівняння Бернуллі (1.2) до лінійного рівняння зробимо заміну $z = \frac{1}{u}$. Значить, $u = \frac{1}{z} = \frac{1}{y - y_1}$ та рівняння для u буде лінійним

$$y' + (q + 2ry_1)u = -r.$$

Його загальний інтеграл має вигляд $u = c\varphi(x) + \psi(x)$ (тут φ, ψ – функції, які залежать від x). Тож, форма загального розв’язку рівняння

:

$$y = y_1 + \frac{1}{c\varphi(x) + \psi(x)} = \frac{cy_1\varphi(x) + y_1\psi(x) + 1}{c\varphi(x) + \psi(x)}.$$

Тобто загальним розв’язком рівняння Ріккаті є дробово-лінійна функція від довільної сталої.

2 МАТРИЧНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

2.1 Матрична експонента

2.1.1 Означення та основні властивості матричної експоненти

Нехай задано квадратну матрицю $A = \left(A_{jk}\right)$ вимірності $n \times n$ і функція $f(\lambda)$ скалярного аргументу λ. Потрібно визначити, що необхідно розуміти під $f(A)$, тобто потрібно розширити функцію $f(\lambda)$ і на матричні значення аргументу.

Означення 2.1 Якщо функція $f(\lambda)$ визначена на спектрі матриці A, то $f(A) = g(A)$, де $g(\lambda)$ – будь-який поліном, що має на спектрі матриці A ті самі значення, що і $f(\lambda)$.

Серед всіх поліномів з комплексними коефіцієнтами, приймаючими ті самі значення на спектрі матриці A, що і функція $f(\lambda)$, існує один і тільки один поліном $r(\lambda)$, степінь якого менше або дорівнює $m - 1$ [6]. Цей поліном називається інтерполяційним поліномом Лангража-Сильвестра для функції $f(\lambda)$ на спектрі матриці A. Він визначається інтерполяційними умовами

$$r(\lambda_k) = f(\lambda_k), r'(\lambda_k) = f'(\lambda_k), \dots \dots\ k = 1, \dots \dots . s, \tag{2.1}$$

де λ_k $(k = 1,2, \dots , s)$ – нулі мінімального поліному $\psi(\lambda)$ матриці A:

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \quad (\lambda - \lambda_s)^{m_s} \quad (m_1 + \dots \dots . m_s = n). \tag{2.2}$$

Таким чином, інтерполяційний поліном має вигляд

$$r(\lambda) = \sum_{k=0}^{s} \sum_{p=0}^{m_k-1} \frac{1}{[m_k - p - 1]!} \left[\frac{\partial^{m_k-p-1}}{\partial \lambda^{m_k-p-1}} \frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k} \cdot \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{p+1}}, \qquad (2.3)$$

де $\psi_k(\lambda) = \dfrac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}}$.

Під експонентою квадратної матриці A розуміють матричну функцію

$$e^A = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!}. \qquad (2.4)$$

Означення 2.2 Функцію $\|\cdot\|: M_n \to \mathbb{R}$ називають матричною нормою, якщо для всіх матриць A, B вона задовольняє аксіоми:

а) $\|A\| \geq 0$;

б) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;

в) $\|cA\| = |c|\|A\|, c$ – довільна комплексна константа;

г) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;

д) $\|AB\| \leq \|A\| \ \|B\|$.

Матричний ряд (2.4) для будь-якої квадратної матриці A збігається, причому абсолютно. Дійсно, складаючи відповідний ряд з норм, будемо мати (тут E – одинична матриця):

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\|A\|^p}{p!} \leq \|E\| + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\|A\|^p}{p!} < \infty .$$

Якщо розглядати матричні норми, в яких $\|E\| = 1$ [7], будемо мати, що

$$\|e^A\| \leq 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\|A\|^p}{p!} = e^{\|A\|}\,.$$

В якості таких норм можна обрати, наприклад, $\|A\|_1 = \sum_{ij=1}^{n} \sum \left|a_{ij}\right|$ або $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{ij=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^2}$.

Аналогічно визначається матрична функція e^{At} при сталій матриці A:

$$e^{At} = E + At + \ldots + \frac{A^n t^n}{n!} \ldots \tag{2.5}$$

Теорема 2.1 Матричний ряд (2.5) існує для всіх матриць A при будь-якому фіксованому t, і для фіксованої матриці A він рівномірно збігається у будь-якій скінченній області комплексної площині t.

Доведення. Маємо, що

$$\frac{\|A^n t^n\|}{n!} \leq \frac{\|A\|^n |t|^n}{n!}\,.$$

Враховуючи, що $\frac{\|A\|^n |t|^n}{n!}$ є загальним членом розвинення в ряд експоненти $e^{\|A\|\,|t|}$, бачимо, що ряд (2.5) рівномірно мажорується числовим рядом, що збігається, і, як наслідок, сам рівномірно збігається у будь-якій скінченній області площини t.

Якщо в (2.5) покласти $t = 0$, отримаємо, що $e^0 = E$ (тут 0 – це нульова матриця).

Скалярна експоненціальна функція задовольняє функціональну тотожність $e^{a(s+t)} = e^{as} e^{at}$. Аналогічну властивість має матрична експонента:

$$e^{A(s+t)} = e^{As}e^{At}. \tag{2.6}$$

Використовуючи розвинення в ряд експоненціальних функцій і той факт, що члени ряду, які абсолютно сходяться, можна об'єднувати будь-яким способом, можна записати

$$e^{As}e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k s^k}{k!} \left(\sum_{t=0}^{\infty} \frac{A^t t^l}{l!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \left(\sum_{k+l=n} \frac{s^k t^l}{k!\, l!} \right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{(s+t)^n}{n!} = \ e^{A(s+t)}$$

Якщо в рівності (2.6) покласти $s = -t$, отримаємо, що

$$e^{A(-t+t)} = E = e^{-At}e^{At},$$

тобто матриця e^{-At} є оберненою для матриці e^{At}: $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$. Отже, матриця e^{At} завжди невироджена. Це матричний аналог того факту, що скалярна експонента ніколи не дорівнює нулю.

Скалярна експоненціальна функція задовольняє функціональну тотожність $e^{(a+b)t} = e^{at}e^{bt}$. Виникає питання про зв'язок між $e^{(A+B)t}$ та $e^{At}e^{Bt}$. Оскільки

$$e^{(A+B)t} = E + (A+B)t + \frac{(A+B)^2}{2} t^2 + \ldots,$$
$$e^{At}e^{Bt} = \left(E + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \ldots \right) \left(E + Bt + \frac{B^2 t^2}{2} + \ldots \right)$$

тоді

$$e^{(A+B)t}-e^{At}e^{Bt}=(BA-AB)\frac{t^2}{2}+\dots\ .$$

Отже, рівність $e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}$ справедлива для всіх t тільки у випадку, коли $BA=AB$, тобто коли матриці A і B перестановочні. Зрозуміло, що ця умова є і достатньою, тобто має місце наступне твердження.

Твердження 2.2 Для матричної експоненти виконуються наступні властивості:

а) для будь-якої сталої матриці A та довільних s,t має місце тотожність $e^{A(s+t)}=e^{As}e^{At}$;

б) рівність $e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}$ виконується для всіх t тоді та тільки тоді, коли $BA=AB$;

в) для будь-якої матриці A матриця e^{At} є невиродженою та обернена до неї має вигляд $(e^{At})^{-1}=e^{-At}$.

Твердження 2.3 Матричну експоненту можна диференціювати на всій прямій, при цьому $\frac{d}{dt}(e^{At})=Ae^{At}$.

Доведення: Оскільки рівномірно збіжний ряд можна почленно диференціювати на області збіжності, маємо наступне:

$$e^{At}=E+\frac{At}{1!}+\dots+\frac{A^nt^n}{n!}+\dots$$

$$(e^{At})'=\left(E+\frac{At}{1!}+\dots\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^nt^n}{n!}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^nnt^{n-1}}{n!}=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^nt^{n-1}}{(n-1)!}==\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{k+1}t^k}{k!}=A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kt^k}{k!}=Ae^{At},$$

$$(e^{At})' = Ae^{At}. \tag{2.7}$$

Твердження 2.4 Матричну експоненту можна інтегрувати на відрізку $[0, t]$, при цьому

$$\int_0^t e^{As} ds = A^{-1}(e^{At} - E).$$

Доведення: Оскільки рівномірно збіжний ряд можна почленно інтегрувати, маємо наступне:

$$\int_0^t e^{At} ds = \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n S^n}{n!}\right) ds = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{A^n S^n}{n!} ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n S^{n+1}}{(n+1)!}\bigg|_0^t =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^{n+1}}{(n+1)!} = A^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = A^{-1}(e^{At} - E).$$

Наведемо без доведення ще один результат, який узагальнює властивість додатності скалярної експоненти [5]

Твердження 2.4 Для невід'ємності всіх елементів матриці e^{At} при $t \geq 0$ необхідно і достатньо, щоб

$$a_{ij} \geq 0, i \neq j, i, j = 1,2, \dots, n.$$

Зрозуміло, що цікавість до властивостей матричної експоненти обумовлена тим, що по аналогії зі скалярним диференціальним рівнянням

$$\frac{du}{dt} = au, u(0) = c,$$

розв'язком якого є функція $u(t) = c \cdot e^{at}$, матричне диференціальне рівняння

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t), \qquad X(0) = C$$

також має розв'язок $X(t) = e^{At}C$.

2.1.2 Методи отримання матричної експоненти

В п. 2.1.1 було розглянуто один з методів отримання матричної експоненти – за допомогою інтерполяційного многочлена. Для цього знаходиться мінімальний поліном матриці A – це такий приведений многочлен $\psi(\lambda)$ мінімального степіня, для якого $\psi(A) = 0$. Якщо $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \quad (\lambda - \lambda_s)^{m_s} \qquad (m_1 + \ldots \ldots m_s = n)$, де де λ_k $(k = 1,2, \ldots, s)$ – нулі мінімального поліному $\psi(\lambda)$ матриці A кратності m_k, тоді інтерполяційний многочлен задається формулою (2.3), в якій $f(\lambda) = e^{\lambda}$:

$$r(\lambda) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{p=0}^{m_k - 1} \frac{1}{[m_k - p - 1]!} \left[\frac{\partial^{m_k - p - 1}}{\partial \lambda^{m_k - p - 1}} \frac{e^{\lambda}}{\psi_k(\lambda)}\right]_{\lambda = \lambda_k} \cdot \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{p+1}}, \qquad (2.9)$$

де

$$\psi_k(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}}.$$

Ще один метод отримання матричної експоненти застосовує жорданову форму матриці [1]. Нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ $(m \le n)$ – власні значення матриці A, які відповідають різним кліткам $J_q(\lambda_q), \dots, J_m(\lambda_m)$ її канонічної форми Жордана, і нехай $e_1, \dots, e_m$, відповідно порядки цих кліток. Тоді

$$A = S^{-1} diag[J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m)\,]S\,,$$

де S – деяка неособлива матриця ($\det S \neq 0$).

Враховуючи відомі властивості квазідіагональних матриць, маємо

$$\begin{aligned} e^{At} &= exp\{tS^{-1} diag[J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m)\,]S\} = \\ &= S^{-1} diag\left[e^{\,tJ_1(\lambda_1)}, \dots, e^{\,tJ_m(\lambda_m)}\right]S. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Оскільки $J_q(\lambda_q) = \lambda_q E_q + I_1^{(q)}\,, q = 1, \dots, m$, де E_q – одинична матриця порядку q і $I_1^{(q)}$ – її перший одиничний косий ряд, то

$$e^{tJ_q(\lambda_q)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!}\left(\lambda_1 E_q + I_1^q\right)^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \sum_{r=0}^{p} \frac{p!}{r!\,(p-r)!} \lambda_q^{p-r} I_r^{(q)} =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{I_r^{(q)} t^r}{r!} \sum_{p=r}^{\infty} \frac{\left(\lambda_q t\right)^{p-r}}{(p-r)!}\,. \quad (2.11)$$

Як відомо, $I_r^{(q)} = \left[I_r^{(q)}\right]^r = 0$ при $r \ge e_q$ та

$$\sum_{p=r}^{\infty} \frac{\left(\lambda_q t\right)^{p-r}}{(p-r)!} = e^{\lambda_q t},$$

тому з формули (2.11) остаточно отримуємо

$$e^{tJ_q(\lambda_q)} = e^{\lambda_q t} \sum_{r=0}^{e_q-1} \frac{t^r}{r!} I_r^{(q)} \qquad (q = 1, \dots, m) \tag{2.12}$$

де $I_0^{(q)} = E_q$.

Формули (2.10) та (2.12) дають нормальну форму матриці e^{At}.

Наведемо ще третій метод. Матричну експоненту можна подати у вигляді

$$e^{At} = E\psi_1(t) + (A - \lambda_1 E)\psi_2(t) + (A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E)\psi_3(t) + \ldots +$$
$$+(A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E) \dots (A - \lambda_{n-1} E)\psi_n(t),$$

де $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – корені характеристичного многочлена матриці, а многочлени ψ_k визначаються рекурсивно:

$$\psi_1(t) = e^{\lambda_1 t},\ \psi_{k+1}(t) = \int_0^t e^{\lambda_{k+1}(t-\hat{\imath})} \psi_k(\hat{\imath}) d\hat{\imath}.$$

2.2 Лінійні диференціальні рівняння

Цей розділ присвячений дослідженню та методам розв’язання матричного диференціального рівняння Ріккаті

$$\dot{X} = Q(t) + A(t)X + XB(t) + XR(t)X.$$

Дослідження матричних диференціальних рівнянь почнемо з часткових випадків матричного рівняння Ріккаті, зокрема, з лінійних однорідних рівнянь

$$X' = A(t)X + XB(t). \tag{2.13}$$

де X – шукана n-мірна матриця, $A(t), B(t)$ – задані неперервні матриці.

Задача полягає у визначенні властивостей розв'язків таких рівнянь, а також в описі практичних методів побудови загальних та часткових розв'язків.

Наведемо деякі факти з теорії систем лінійних однорідних диференціальних рівнянь типу

$$y'_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) y_k, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Якщо позначити $y = \{y_1, \dots, y_n\}$, таку систему можна записати у векторній формі

$$y' = A(t)y. \tag{2.14}$$

Ця система має n- лінійно незалежних розв'язків, яким можна поставити у відповідність неособливу матрицю

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & y_1^2(t) \dots \dots & y_1^n(t) \\ y_2^1(t) & y_2^2(t) \dots \dots & y_2^n(t) \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \dots .. & \dots \dots \dots \\ y_n^1(t) & y_n^2(t) \dots \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

і загальний розв'язок рівняння (2.14) можна записати у вигляді $y(t) = Y(t)c$, де $c = \{c_{1,} \dots, c_n\}$ – вектор довільних сталих.

Якщо необхідно знайти частковий розв'язок того самого рівняння, задовольняючий початковій умові

$$y(t_0) = y^\circ, \qquad (2.16)$$

то сталий вектор c можна визначити з умови $Y(t_0)c = y^\circ$.

Тому розв'язок задачі Коші (2.14), (2.16) можна подати у вигляді

$$Y(t) = W(t, t_0)y^\circ, \qquad W(t, t_0) = Y(t)Y^{-1}(t_0). \qquad (2.17)$$

Матриця $W(t, s)$ називається матрицею Коші і, як буде видно з подальшого аналізу, вона грає принципову роль у характеристиці лінійних матричних диференціальних рівнянь. Відзначимо її найважливіші властивості.

Властивість 1 Матриця Коші задовольняє умову $W(t, t) = E$ при будь-якому значенні t.

Властивість 2 Матриця Коші $W(t, s)$ задовольняє рівняння (3.2) за змінною t при будь-якому значенні параметру s, тобто

$$W'(t, s) \equiv A(t)W(t, s).$$

Властивість 3 Матриця Коші $W(t, s)$ однозначно визначається матрицею $A(t)$, яка входить у рівняння (2.14).

Із цих властивостей, зокрема, випливає що матриця Коші $W(t, t_0)$ є розв'язком матричного диференціального рівняння $Y' = A(t)Y$, який задовольняє початкову умову $Y(t_0) = E$.

Властивість 4 Якщо відома матриця Коші $W(t,s)$, то загальний розв'язок рівняння $Y' = A(t)Y$ знаходиться без квадратур за формулою $Y(t) = W(t,s)C$, де C – довільна n-мірна стала матриця. Розв'язок задачі $Y' = A(t)Y$ з початковою умовою має вигляд

$$Y(t) = W(t, t_0)Y(t_0). \tag{2.18}$$

Цю властивість можна узагальнити і сформулювати її наступним чином:

Твердження 2.1 Якщо відома матриця $Y(t)$, складена з n – лінійно незалежних окремих розв'язків рівняння (2.14), то загальний розв'язок рівняння $Y' = A(t)Y$ знаходиться без квадратур.

Розв'язок $Y(t)$ рівняння (2.14), вказаний у цьому твердженні, у подальшому будемо називати неособливим.

Разом з рівнянням $Y' = A(t)Y$ розглянемо ще одне матричне диференціальне рівняння $Z' = ZB(t)$, де $B(t)$ – задана неперервна матриця. Позначимо через $Z(t)$ довільний частковий розв'язок цього рівняння. Для його побудови можна скористатися наступним прийомом.

До обох частин рівняння $Z' = ZB(t)$ застосуємо операцію транспонування. В результаті отримаємо рівняння $Z'^* = B^*(t)Z^*$. Це рівняння того ж типу, що і $Y' = A(t)Y$. Його властивості вже описані вище і можна розглядати його матрицю Коші.

Для цього виписуємо відповідне векторне рівняння $z' = B^*z$ і матрицю $U(t)$ довільних його n – лінійно незалежних розв'язків. Тоді відповідна матриця Коші визначається формулою $V^*(t,s) = U(t)U^{-1}(s)$ або $V(t,s) = U^{-1}(s)U(t)$. Частковий розв'язок транспонованого рівняння $Z'^* = B^*(t)Z^*$ можна представити у вигляді $Z^*(t) = V^*(t,t_0)Z^*(t_0)$. Тому частковий розв'язок рівняння $Z' = ZB(t)$ отримуємо у вигляді

$$Z(t) = Z(t_0)V(t, t_0). \tag{2.19}$$

Коли матриці A B постійні, тоді $Y(t) = e^{At}$, $Z(t) = e^{Bt}$, тобто $W(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$, $V(t, t_0) = e^{B(t-t_0)}$.

Твердження 2.2 Якщо відомі неособливі розв’язки $Y(t)$ і $Z(t)$ рівнянь $Y' = A(t)Y$ і $Z' = ZB(t)$, відповідно, то загальний рішення розв’язок рівняння (2.13) знаходиться без квадратур за формулою

$$X(t) = Y(t)CZ(t), \tag{2.20}$$

де C – довільна стала матриця.

Зокрема, якщо матриці A і B в рівнянні (2.13) постійні, то його загальний розв’язок можна представити у вигляді

$$X(t) = e^{At}Ce^{Bt}. \tag{2.21}$$

Доведення. Той факт, що матриця (2.20) є розв’язком рівняння (2.13), перевіряється безпосередньо її підстановкою в це рівняння:

$$\dot{Y}CZ + Y\dot{C}Z + YC\dot{Z} = A(t)YCZ + YCZ\,B(t),$$

оскільки $A(t)Y = \dot{Y}, Y\dot{C}Z = 0\ (\dot{C} = 0, C = const), \dot{Z} = Z\,B(t)$.

Для доведення того, що розв’язок є загальним, визначимо через $\tilde{X}(t)$ деякий розв'язок і нехай

$$\tilde{X}(t_0) = \tilde{X}_0, \tag{2.22}$$

Вважаючи у (2.20) $t = t_0$ і враховуючи рівність (2.22), отримуємо рівняння $Y(t_0)CZ(t_0) = \tilde{X}_0$ відносно сталої C, з якого отримуємо, що

$$C = Y^{-1}(t_0)\tilde{X}_0 Z^{-1}(t_0).$$

Підставимо це значення C в (2.20), отримаємо розв'язок рівняння (2.13) у формі

$$X(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)\tilde{X}_0 Z^{-1}(t_0)Z(t) = W(t, t_0)X_0 V(t, t_0), \qquad (2.23)$$

де $W(t, t_0) = Y(t)Y^{-1}(t_0)$, $V(t, t_0) = Z^{-1}(t_0)Z(t)$ – матриці Коші рівнянь $Y' = A(t)Y$ і $Z' = ZB(t)$, відповідно.

Отже, цей розв'язок задовольняє умову (2.22) і, в силу теореми єдиності, він співпадає з $\tilde{X}(t)$. Отже, розв'язок (2.20) дійсно є загальним.

Розглянемо тепер питання про властивості розв'язків неоднорідного рівняння

$$X' = A(t)X + XB(t) + F(t), \qquad (2.24)$$

де $A(t), B(t), F(t)$ – задані неперервні матриці.

Оскільки матричне рівняння (2.24) представляє собою своєрідну форму системи скалярних диференціальних рівнянь, то, очевидно, що справедливим є наступне твердження.

Твердження 2.3 Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (2.24) представляє собою суму загального розв'язку однорідного рівняння (2.13) і часткового розв'язку рівняння (2.24).

Коли відомі часткові розв'язки таких рівнянь, загальний розв'язок в деяких випадках можна отримати бкз квадратур. Зокрема, якщо відомі два часткових розв'язки X_1 і X_2 рівняння $\dot{X} = A(t)X + F(t)$, то загальний розв'язок цього рівняння знаходиться без квадратур за формулою $X = (X_1 - X_2)C + X_2$, де C – довільна постійна матриця.

Аналогічне твердження справедливе і відносно рівняння $\dot{Y} = YB(t) + \Phi(t)$. В загальному випадку для рівняння (2.24) це питання вирішується складніше.

Твердження 2.4 Якщо відомі три часткових розв'язки $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$ неоднорідного рівняння (2.24) і існує момент часу t_0 такий, що матриці

$$X_{12}^0 = X_1(t_0) + X_2(t_0) \text{ і } X_{13}^0 = X_1(t_0) + X_3(t_0)$$

неособливі, тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння (2.24) знаходиться без квадратур.

Доведення. Очевидно, що матриці $X_{12}(t_0) = X_1(t_0) + X_2(t_0)$ і $X_{13}(t_0) = X_1(t_0) + X_3(t_0)$ є частковими розв'язками однорідного рівняння (2.13). Тому можна записати

$$X_{12}(t) = W(t, t_0)X_{12}(t_0)V(t, t_0), \quad X_{13}(t) = W(t, t_0)X_{13}(t_0)V(t, t_0) \quad (2.25\ )$$

де $W(t, t_0)$ і $V(t, t_0)$ – невідомі поки що матриці Коші рівнянь $Y' = A(t)Y$ і $Z' = ZB(t)$, відповідно.

Їх можна визначити наступним чином. Оскільки матриці $X_{13}(t_0), X_{12}(t_0)$ – неособливі, то відношення (3.13) можна розв'язати відносно $W(t, t_0)$ і $V(t, t_0)$, якщо виразити їх безпосередньо через відомі часткові розв'язки $X_1(t), X_2(t)$ та $X_3(t)$ рівняння (2.24).

Перше рівняння з (2.25) можна розв'язати відносно $V(t, t_0)$:

$$V(t,t_0) = X_{12}(t_0)^{-1}W^{-1}(t,t_0)X_{12}(t) \qquad (2.26)$$

Підставляючи отримане значення $V(t,t_0)$ у друге рівняння з (2.25), отримаємо рівняння відносно $W(t,t_0)$, яке можна записати у вигляді

$$X_{13}(t) = W(t,t_0)X_{13}(t_0)X_{12}^{-1}(t_0)W^{-1}(t,t_0)X_{12}(t) \qquad (2.27)$$

Тому загальний розв'язок рівняння (2.24) тепер можна представити у вигляді

$$X(t) = W(t,t_0)CV(t,t_0) + X_3(t), \qquad (2.28)$$

де W, V визначаються рівняннями (2.26) і (2.27).

Наслідок 2.5 Для будь-яких трьох часткових розв'язків $X_1(t), X_2(t)$ та $X_3(t)$ справедливі рівності.

$$W^{-1}(t,s)X_{13}(t)X_{12}^{-1}(t)W(t,s) = X_{13}(s)X_{12}^{-1}(s), \qquad (2.29)$$

$$V(t,s)X_{13}^{-1}(t)X_{12}(t)V^{-1}(t,s) = X_{13}^{-1}(s)X_{12}(s)\,, \qquad (2.30)$$

де $X_{jk} = X_j - X_k$.

Доведення. Перша з рівностей безпосередньо випливає зі співвідношення (2.27). Для отримання другої рівності необхідно рівняння (2.25) розв'язувати у зворотному порядку. Спочатку потрібно друге з цих рівнянь розв'язати відносно $W(t,t_0)$:

$$X_{13}(t)V^{-1}(t,t_0)X_{13}^{-1}(t_0) = W(t,t_0),$$

а потім розв'язувати перше рівняння:

$$X_{12}(t) = X_{13}(t)V^{-1}(t,t_0)X_{13}^{-1}(t_0)X_{12}(t_0)V(t,t_0),$$
$$V(t,s)X_{13}^{-1}(t)X_{12}(t)V^{-1}(t,s) = X_{13}^{-1}(s)X_{12}(s).$$

Використовуючи наведені вище факти про розв'язання рівняння (2.24), можна записати, що його загальний розв'язок можна подати у вигляді

$$X(t) = Y(t)CZ(t) + \tilde{X}(t), \tag{2.31}$$

де перший доданок у правій частині рівності представляє собою загальний розв'язок рівняння (2.13) (див. формулу (2.20)), а другий доданок є довільним частковим розв'язком рівняння (2.24).

Щоб отримати частковий розв'язок $X(t)$, можна скористатися стандартним методом варіації довільної сталої.

Нехай відомо загальний розв'язок однорідного рівняння (2.13), представлений у формі $X(t) = Y(t)C\,Z(t)$ де C – довільна стала. Розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$X(t) = Y(t)C(t)\,Z(t), \tag{2.32}$$

де $C(t)$ – підлягаюча визначенню матрична функція.

Підставляючи функцію (2.32) у рівняння (2.13), отримаємо

$$\dot{Y}CZ + Y\dot{C}Z + YC\dot{Z} = AYCZ + YCZB + F.$$

Оскільки при сталій матриці C матриця (2.32) є розв'язком однорідного рівняння (2.13), отримаємо, що $Y(t)\dot{C}(t)Z(t) = F(t)$ і, відповідно,

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)F(s)Z^{-1}(s)ds.$$

Підставляючи знайдене значення $C(t)$ у формулу (2.32), отримуємо частковий розв'язок рівняння (2.24) у вигляді

$$\tilde{X}(t) = \int_{t_0}^{t} W(t,s)F(s)V(t,s)ds,$$

де $W(t,s)$ і $V(t,s)$ – матриці Коші однорідних рівнянь $Y' = A(t)Y$ і $Z' = ZB(t)$, визначені формулами

$$W(t,s) = Y(t)Y^{-1}(s), V(t,s) = Z^{-1}(s)Z(t). \tag{2.33}$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння (2.24) можна подати у вигляді

$$X(t) = Y(t)CZ(t) + \int_{t_0}^{t} W(t,s)F(s)V(t,s)ds, \tag{2.34}$$

де C – довільна постійна матриця, $Y(t)$ і $Z(t)$– неособливі розв'язки рівнянь $Y' = A(t)Y$ і $Z' = ZB(t)$, відповідно, а $W(t,s)$ і $V(t,s)$ визначаються формулами (2.33).

Розв'язок рівняння (2.24), який задовольняє початкову умову

$$X(t_0) = X_0, \tag{2.35}$$

очевидно, визначається наступною формулою Коші

$$X(t) = W(t, t_0) X_0 V(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} W(t, s) F(s) V(t, s) ds. \tag{2.36}$$

Відомо [4], що задача Коші для лінійного неоднорідного матричного диференціального рівняння: $X(t) = A(t)X(t) + X(t)B(t) + F(t), X(0) = F$ має єдиний розв'язок.

2.3 Рівняння Бернуллі

Розглянемо рівняння

$$\dot{X} = A(t)X + XB(t) + XR(t)X, \tag{2.37}$$

яке називається рівнянням Бернуллі. Воно є ще одним окремим випадком загального матричного диференціального рівняння Ріккаті.

Розв'язується воно шляхом зведення його до лінійного рівняння. Робиться це наступним чином: обидві частини рівняння (3.25) спочатку помножимо зліва на матрицю X^{-1}, а потім справа на ту саму матрицю. В отриманому рівнянні

$$X^{-1} \dot{X} X^{-1} = X^{-1} A(t) + B(t) X^{-1} + R(t) \tag{2.38}$$

зробимо заміну змінної $U = X^{-1}$. Оскільки $X\,X^{-1} = E$, де E – одинична матриця, то

$$\frac{d(X\,X^{-1})}{dt} = \dot{X}\,X^{-1} + X\,\dot{X}^{-1} = 0,$$

де 0 – матриця з нульовими елементами. Звідси знаходимо, що

$$X^{-1}\dot{X}\,X^{-1} = -\,\dot{X}^{-1}$$

Тому, із співвідношення (2.38) отримуємо лінійне рівняння

$$-\dot{U} = B(t)U + UA(t) + R(t)\,. \tag{2.39}$$

Воно того самого типу, що і рівняння, яке розглянуто вище. Тому до нього можна застосувати твердження 2.4: якщо відомі три часткових розв'язки U_1, U_2, U_3 цього рівняння, то його загальний розв'язок отримується без квадратур за формулою

$$U(t) = W(t, t_0)C\,V(t, t_0) + U_3(t). \tag{2.40}$$

Тут матриці $W(t, t_0)$ і $V(t, t_0)$ визначаються співвідношеннями (2.25), в яких слід покласти $X_{jk} = U_j - U_k$. Вони є фундаментальними матрицями рівнянь $= -B(t)X, Y = -YA(t)$.

Матрицям U_j відповідають часткові розв'язки рівняння Бернуллі (2.39), які визначаються формулою $X_j = U_j^{-1}$. Отже, маємо наступний результат.

Твердження 2.6 Якщо відомі три розв'язки X_1, X_2, X_3 рівняння Бернуллі (2.37), то його загальний розв'язок знаходиться без квадратур.

З формули (2.40) і заміни $U = X^{-1}$ випливає, що матриця $X(t)$, яка визначається формулою

$$X(t) = (W(t,t_0)CV(t,t_0) + U_3(t))^{-1},$$

є розв'язком рівняння Бернуллі.

Насправді, цей результат можна обернути, тобто показати, що розв'язок рівняння Бернуллі можна подати в такому і лише в такому вигляді.

Твердження 2.7 Якщо матриці $Z(t)$ і $Y(t)$ не є особливими, тоді існує рівняння Бернуллі, розв'язком якого є матриця

$$X(t) = (Z(t)CY(t) + P(t))^{-1} \tag{2.41}$$

де C – довільна постійна матриця, а $P(t)$ – деяка диференційовна матриця.

Доведення. Співвідношення (2.41) перепишемо відносно матриці C:

$$Z^{-1}(X^{-1} - P)Y^{-1} = C.$$

Отриману рівність продиференціюємо за змінною t:

$$\dot{Z}^{-1}(X^{-1} - P)Y^{-1} - Z^{-1}\left(\dot{X}^{-1} - \dot{P}\right)Y^{-1} + Z^{-1}(X^{-1} - P)\dot{Y}^{-1} = \frac{dC}{dt} = 0,$$
$$Z^{-1}X^{-1}\dot{X}X^{-1}Y^{-1} = -\dot{Z}^{-1}(X^{-1} - P)Y^{-1} - Z^{-1}\dot{P}Y^{-1} - Z^{-1}(X^{-1} - P)\dot{Y}^{-1}.$$

Цю рівність помножимо зліва на XZ, а справа на YX. Отриману таким чином рівність можна записати у вигляді

$$\dot{X} = -\dot{Y}^{-1}YX - XZ\dot{Z}^{-1} - XZ\frac{d(Z^{-1}PY^{-1})}{dt}YX.$$

А це означає, що матриця $X(t)$, яка визначається формулою (2.41), є розв'язком рівняння Бернуллі

$$\dot{X} = A(t)X + XB(t) + XS(t)X,$$

де

$$A(t) = -\dot{Y}^{-1}Y = Y^{-1}\dot{Y}, \quad B(t) = -Z\dot{Z}^{-1} = \dot{Z}Z^{-1}, \quad S(t) = -Z\frac{d(Z^{-1}PY^{-1})}{dt}Y.$$

2.4 Матричне диференціальне рівняння Ріккаті

Розглянемо тепер загальне матричне диференціальне рівняння Ріккаті:

$$\dot{X} = Q(t) + A(t)X + XB(t) + XR(t)X, \tag{2.42}$$

в якому $Q(t), A(t), B(t)$ і $R(t)$ – задані n-квадратні матриці, визначені на деякому відрізку часу t, X – шукана n-квадратна матриця.

Зауважимо, що усі розглянуті вище рівняння є частковими випадками рівняння Ріккаті. Дійсно, якщо $Q(t) = R(t) = 0$, рівняння перетворюється на лінійне однорідне. Якщо $Q(t) \neq 0, R(t) = 0$, це – лінійне неоднорідне рівняння. Якщо $Q(t) = 0, R(t) \neq 0$, тоді рівняння Ріккаті стає рівнянням Бернуллі.

Відзначимо деякі найпростіші властивості рівняння (2.42), які у подальшому виявляться корисними при розв'язанні різних задач.

Твердження 2.8 Тип рівняння не змінюється при заміні незалежної змінної по формулі $t = \varphi(\tau)$, де $\varphi(\tau)$ – довільна диференційовна функція.

Твердження 2.9 Якщо R – диференційовна невироджена матриця (R^{-1} існує), заміною $Y = RX$ рівняння (2.42) зводиться до вигляду

$$\dot{Y} = Q_1(t) + A_1(t) + YB_1(t)Y_2 \qquad (2.43)$$

де $Q_1 = RQ,\;\; A_1 = \left(RA + \dot{R}\right)R^{-1}, \quad B_1 = B$

Доведення. Якщо обидві частини рівняння (3.30) помножити зліва на R і ввести відповідні означення, то отримаємо рівняння

$$R(t)\dot{X} = R(t)Q(t) + R(t)A(t)X + R(t)XB(t) + R(t)XR(t)X,$$
$$R(t)\dot{X} + \dot{R}(t)X = R(t)Q(t) + R(t)A(t)X + \dot{R}(t)X + R(t)XB(t) + R(t)XR(t)X,$$

Позначимо $Y = R(t)X$, тоді

$$\dot{Y} = Q_1 + A_1Y + YB_1 + Y^2,$$

де $Q_1(t) = R(t)Q(t),\;\; A_1(t) = \left(R(t)A(t) + \dot{R}(t)\right)R^{-1}(t), \quad B_1(t) = B(t).$

Твердження 2.10 Заміною змінної $Y = Z - B_1$ рівняння (3.31) приводиться до вигляду

$$Z = Q_2 + A_2Z + Z^2, \qquad (2.44)$$

Доведення. Підставимо в рівняння $\dot{Y} = Q_1 + A_1Y + YB_1 + Y^2$ матрицю $Y = Z - B_1$:

$$\left(\dot{Z}-\dot{B}_1\right)=Q_1+A_1(Z-B_1)+(Z-B_1)B_1+(Z-B_1)^2$$

$$\dot{Z}=Q_1+A_1Z-A_1B_1+ZB_1-B_1^2+Z^2+\dot{B}_1-ZB_1-B_1Z+B_1^2,$$

$$Z=Q_2+A_2Z+Z^2,$$

де

$$A_2=A_1-B_1, Q_2=Q_1+\dot{B}_1-A_1B_1.$$

Твердження 2.11 Заміною змінної $Y=Z-A_1$ рівняння (3.31) приводиться до вигляду

$$Z=Q_3+B_3Z+Z^2. \tag{2.45}$$

Доведення. Підставимо в рівняння $\dot{Y}=Q_1+A_1Y+YB_1+Y^2$ матрицю $Y=Z-A_1$:

$$\left(\dot{Z}-\dot{A}_1\right)=Q_1+A_1(Z-A_1)+(Z-A_1)B_1+(Z-A_1)^2$$

$$\dot{Z}=Q_1+A_1Z-A_1^2+ZB_1-A_1B_1+Z^2+\dot{A}_1-ZA_1-A_1Z+A_1^2,$$

$$Z=Q_3+B_3Z+Z^2,$$

де $B_3=B_1-A_1, Q_3=Q_1+\dot{A}_1-A_1B_1$.

Твердження 2.12 Якщо $X=X_1(t)$ – частковий розв'язок рівняння (2.42), то заміною

$$X=Y+X_1 \tag{2.46}$$

рівняння Ріккаті (2.42) зводиться до рівняння Бернуллі

$$\dot{Y} = A_3Y + YB_3 + YRY, \tag{2.47}$$

де $A_3 = A + X_1R,\ \ B_3 = B +\ RX_1$.

Доведення. Оскільки $X_1(t)$ – розв'язок рівняння (2.42), то справедлива тотожність

$$\dot{X}_1(t) = Q(t) + A(t)X_1(t) + X_1(t)B(t) + X_1(t)R(t)X_1(t).$$

Підставимо заміну (2.46) у рівняння (2.42):

$$\left(\dot{Y} + \dot{X}_1\right) = Q_1 + A(Y + X_1) + (Y + X_1)B + (Y + X_1)R(Y + X_1),$$
$$\dot{X}_1 + \dot{Y} = Q_1 + AY + AX_1 + YB + X_1B + YRY + YRX_1 + X_1RY + X_1RX_1,$$
$$\dot{Y} = (A + X_1R)Y + Y(B +\ RX_1) + YRY.$$

Твердження 2.13 Якщо $X_1(t)$ – частковий розв'язок рівняння (2.42), а $Z = Z_1(t)$ і $U = U_1(t)$ – неособливі розв'язки рівнянь

$$\dot{Z} = -B_3(t)Z, \tag{2.48}$$
$$\dot{U} = -UA_3(t), \tag{2.49}$$

де $A_3 = A + X_1R,\ \ B_3 = B +\ RX_1$, тоді загальний розв'язок рівняння (2.42) знаходиться однією квадратурою.

Доведення. У відповідності з твердженням 2.12, рівняння (2.42) зводимо до рівняння Бернуллі (2.47) заміною $X = Y + X_1$. В рівнянні (2.47) робимо заміну $V = Y^{-1}$ та перейдемо до лінійного рівняння:

$$\dot{Y} = A_3Y + YB_3 + YRY, Y^{-1}\dot{Y}Y^1 = Y^{-1}A + B_3Y^{-1} + R\ ,$$

$$-(Y^{-1}) = \ Y^{-1}A_3 + B_3Y^{-1} + R,$$

$$\dot{V} + B_3V + VA_3 = -R. \tag{2.50}$$

Загальний розв'язок рівняння (2.46) можна подати у вигляді

$$V = V^{\circ} + V_1, \tag{2.51}$$

де V_1 – частковий розв'язок цього рівняння, а V° – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $\dot{W} + B_3(t)W + WA_3(t) = 0$.

Загальний розв'язок цього рівняння можна подати у вигляді

$$V^{\circ} = Z_1(t)CU_1(t) \tag{2.52}$$

де C – довільна постійна матриця, а $Z_1(t)$ і $U_1(t)$ – неособливі розв'язки рівнянь (2.48) і (2.49).

Знаючи загальний розв'язок (2.52) однорідного рівняння, можна визначити частковий розв'язок V_1 неоднорідного рівняння (2.50) методом варіації постійної матриці C, тобто однією квадратурою. Повертаючись до матриці X, можна визначити загальний розв'язку рівняння Рцккаті:

$$X = (Z_1CU_1 + V_1)^{-1} + X_1. \tag{2.53}$$

І знову це твердження можна обернути.

Твердження 2.14 Матриця

$$X(t) = (Z(t)CU(t) + P(t))^{-1} + S(t),$$

де C – довільна постійна матриця, $Z(t)$ і $U(t)$ – неособливі матриці, а $Z(t), U(t), Z^{-1}, U^{-1}(t), S(t), R(t)$ ті, які диференціюються, є розв'язком деякого рівняння Ріккаті.

Доведення. Згідно з твердженням 2.7, матриця вигляду $V(t) = (Z(t)CY(t) + P(t))^{-1}$ є розв'язком деякого рівняння Бернуллі. Звідси випливає, що матриця $X(t) = (Z(t)CU(t) + P(t))^{-1} + S(t)$ є розв'язком рівняння Ріккаті.

Твердження 2.15 Нехай X_1, X_2, X_3 і X_4 – часткові розв'язки рівняння (2.42), а $U(t)$ – неособливий розв'язок рівняння $\dot{U} + UA_3(t) = 0$, де $A_3(t) \ = A + X_1R$. Тоді існує постійна матриця C_0 така, що

$$U(X_4 - X_1)(X_4 - X_2)^{-1}(X_3 - X_2)(X_3 - X_1)^{-1}U^{-1} = \ C_0 \qquad (2.54)$$

Доведення. Згідно з твердженням 2.13, загальний розв'язок рівняння (2.42) можна представити у вигляді (2.53)

$$X = (ZCU + V)^{-1} + X_1$$

Надаючи матриці C конкретні значення, визначимо розв'язки X_2, X_3 і X_4 у формі $X_i = (ZC_iU + V)^{-1} + X_1, i = 2,3,4$. Звідси отримуємо

$$(X_i - X_1)(ZC_iU + V) = E, \qquad i = 2,3,4,$$

де E – одинична матриця і тому

$$ZC_iU = (X_i - X_1)^{-1} - V$$

$$ZC_i = ((X_i - X_1)^{-1} - V)U^{-1}, ZC_j = \left(\left(X_j - X_1\right)^{-1} - V\right)U^{-1}$$

$$Z\left(C_i - C_j\right) = \left[(X_i - X_1)^{-1} - \left(X_j - X_1\right)^{-1}\right]U^{-1}, j, i = 2,3,4, i \neq j \qquad (2.55)$$

Рівності (2.55) можна представити у вигляді

$$Z\left(C_i - C_j\right) = (Xi - X_1)^{-1}\left(X_j - X_i\right)(Xj - X_1)^{-1}U^{-1}$$

Відповідно, справедливі рівності

$$Z(C_2 - C_3) = (X_2 - X_1)^{-1}(X_3 - X_2)(X_3 - X_1)^{-1}U^{-1},$$
$$Z(C_2 - C_4) = (X_2 - X_1)^{-1}(X_4 - X_2)(X_4 - X_1)^{-1}U^{-1}.$$

Припускаючи, що матриці $C_2 - C_3$ і $C_2 - C_4$ оборотні, отримуємо рівність

$$(X_3 - X_2)(X_3 - X_1)^{-1}U^{-1}(C_2 - C_3)^{-1} = (X_4 - X_2)(X_4 - X_1)^{-1}U^{-1}(C_2 - C_4)^{-1}.$$

Звідси отримуємо рівність (2.54), в якій

$$C_0 = (C_2 - C_4)^{-1}(C_2 - C_3).$$

2.5 Існування розв’язку матричного диференціального рівняння Ріккаті

Розглянемо питання про існування розв’язку рівняння (2.42). Будемо вважати, що матриці $Q(t), A(t), B(t)$ і $R(t)$ неперервні на відрізку $a \leq t \leq b$.

Викладені вище практичні способи побудови розв’язку цього рівняння не дають відповіді на питання про те, на якому відрізку часу визначено розв’язок і в якому випадку розв’язок задачі Коші для такого рівняння є єдиним.

Розглянемо питання, як можна побудувати розв’язок рівняння (2.42) на всій області існування рівняння [2].

Визначимо дві n – мірних векторні функції $x(t) = \{x_1, \dots x_n\}$ і $y(t) = \{y_1, \dots y_n\}$ як розв'язки системи диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = -B(t)x - R(t)y, \qquad \dot{y} = Q(t)x + A(t)y, \tag{2.56}$$

які задовольняють початкові умови

$$x(t_0) = x^\circ, \qquad y(t_0) = y^\circ. \tag{2.57}$$

Позначимо через $W(t, t_0)$ $2n$ – мірну матрицю Коші системи рівнянь (2.56). Тоді цю систему можна подати у вигляді

$$z(t) = W(t, t_0)z^\circ, \qquad z = \{x, y\} \quad z^\circ = \{x^\circ, y^\circ\}. \tag{2.58}$$

Якщо ж матрицю $W(t, t_0)$ представити через її n – мірні блоки

$$W(t, t_0) = \begin{pmatrix} W_{11}(t, t_0)\_W_{12}(t, t_0) \\ W_{21}(t, t_0)\_W_{22}(t, t_0) \end{pmatrix},$$

то формулу (2.58) можна записати у вигляді

$$x(t) = W_{11}(t, t_0)x^\circ + W_{12}(t, t_0)\, y^\circ, \tag{2.59}$$

$$y(t) = W_{21}(t, t_0)x^\circ + W_{22}(t, t_0)\, y^\circ. \tag{2.60}$$

При цьому очевидно, що виконуються рівності

$$W_{ii}(t_0, t_0) = E, \qquad W_{ij}(t_0, t_0) = 0, \text{ при } \quad i \neq j. \tag{2.61}$$

Також зрозуміло, що розв'язок (2.58) визначено на відрізку $[a, b]$.

Позначимо через $K(t)$ таку матрицю, що

$$y(t) = K(t)x(t) \tag{2.62}$$

і покажемо, що вона задовольняє рівнянню (2.42) у всіх точках відрізка $[a, b]$, в яких вона неперервна та диференційовна.

Оскільки вектори $y(t)$ і $x(t)$ утворюють розв'язок системи рівнянь (2.56), то з рівності $\dot{y}(t) = \dot{K}(t)x(t) + K(t)\dot{x}(t)$ отримаємо

$$\dot{K}(t)x(t) = K(t)[B(t)x(t) + R(t)y(t)] + Q(t)x(t) + A(t)y(t).$$

Підставляючи в це співвідношення замість $y(t)$ його значення з (2.62), отримуємо рівність, яку можна записати у вигляді

$$\left[\dot{K}(t) - Q(t) - A(t)K(t) - K(t)B(t) - K(t)R(t)\,K(t)\right]x(t) = 0. \tag{2.63}$$

Ця рівність має виконуватися при будь-яких значеннях вектора $x(t)$, тому вираз у квадратних дужках має бути нульовою матрицею, а це означає, що $K(t)$ є розв'язком рівняння Ріккаті, який задовольняє умову

$$K(T) = F, \qquad a \leq T \leq b, \tag{2.64}$$

де F – задана матриця.

У рівностях (2.59)-(2.60) замінимо t на T, а t_0 на t. В результаті отримаємо рівності

$$x(T) = W_{11}(T,t)x(t) + W_{12}(T,t)y(t), \tag{2.65}$$

$$y(T) = W_{21}(T,t)x(t) + W_{22}(T,t)y(t). \tag{2.66}$$

Якщо тепер скористатися тим, що $y(T) = K(T)x(T)$, або що $y(T) = Fx(T)$, то, з урахуванням (2.65)-(2.66) отримуємо

$$y(T) = [W_{22}(T,t) - FW_{12}(T,t)]^{-1}[FW_{11}(T,t) - W_{12}(T,t)y^{\circ}]x(T).$$

Відповідно, розв'язок $K(t)$ рівняння (2.63), який задовольняє початкову умову (2.64), визначається формулою

$$K(T) = [W_{22}(T,t) - FW_{12}(T,t)]^{-1}[FW_{11}(T,t) - W_{12}(T,t)]. \tag{2.67}$$

Якщо досліджувати поведінку розв'язку задачі Коші на проміжку часу $a \leq t \leq T$, то очевидно, що цей розв'язок визначено лише на проміжку $t_1 \leq t \leq T$, де t_1 – найближча до T точка, в якій матриця $W_{22}(T,t) - FW_{12}(T,t)$ є оборотною.

Зауважимо, що в твердженні 2.14 доведено, що загальний розв'язок рівняння Ріккаті можна подати у вигляді

$$X(t) = \left(Z(t)CU(t) + P(t)\right)^{-1} + S(t). \tag{2.68}$$

Якщо в цьому розв'язку зробити незначні перетворення, то його можна привести до виду (2.67):

$$X(t) = \left(Z(t)CU(t) + P(t)\right)^{-1}[Z(t)CV(t) + S_1(t)],$$

де

$$V(t) = U(t)S(t), \quad S_1(t) = E + P(t)S(t).$$

Звідси знаходимо, що

$$X(t) = \left(CU(t) + Y(t)\right)^{-1}Z^{-1}(t)[Z(t)CV(t) + S_1(t)], \quad Y(t) = Z^{-1}(t)\,P(t),$$

І отже,

$$X(t) = \left(CU(t) + Y(t)\right)^{-1}[CV(t) + Q(t)], \qquad Q(t) = Z^{-1}(t)S_1(t). \qquad (2.69)$$

Функції (2.67) і (2.69) дійсно мають схожу структуру. Оскільки кожний з розв’язків (2.67) і (2.69) представляє собою добуток однієї (оберненої) матриці на другу матрицю, то зв’язок між лінійним рівнянням і рівнянням Ріккаті може бути встановлений за допомогою заміни

$$X(t) = U^{-1}(t)V(t), \qquad (2.70)$$

де U і V – матриці, які підлягають виначенню.

Оскільки матриця (2.70) має задовільнити рівняння (2.42), то виконуєтьсяся тотожність

$$-U^{-1}(t)\dot{U}(t)U^{-1}(t)V(t) + U^{-1}(t)\dot{V}(t) \equiv$$

$$\equiv Q(t) + A(t)U^{-1}(t)V(t) + U^{-1}(t)V(t)B(t) + U^{-1}(t)V(t)R(t)U^{-1}(t)V(t).$$

Цю тотожність можна представити у вигляді

$$U^{-1}(t)\left\{\dot{U}(t) + U(t)A(t) + V(t)R(t)\right\}U^{-1}(t)V(t) -$$
$$-U^{-1}(t)\{V(t) - V(t)B(t) - U(t)Q(t)\} \equiv 0.$$

Отримана тотожність буде виконуватися, якщо матриці $U(t)$ і $V(t)$ є неособливими і утворюють розв'язок системи рівнянь

$$\dot{U} + UA(t) + VR(t) = 0, \qquad V - UQ(t) - VB(t) = 0.$$

3 РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В цьому розділі наведемо приклади розв'язання матричних диференціальних рівнянь Ріккаті

Приклад 3.1 Написати нормальний вид матриці e^{At}, де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A = S^{-1}JS, A - \lambda E \sim J - \lambda E.$$

Приведемо задану матрицю до нормальної жорданової форми:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -\lambda & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4+4\lambda+\lambda^2 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\lambda-2)^2 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} (\lambda-2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix}.$$

Отже, нормальна жорданова форма матриці має вигляд:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

З рівняння $SA = JS$ визначимо матрицю $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Маємо 2 жорданові клітки різних порядків, які відповідають однаковим власним значенням: $J_1(2) = 2E_1 + I_1^{(1)} = (2)$, $J_2(2) = 2E_2 + I_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. З формули (2.12) отримуємо $e^{tJ_1(2)} = e^{2t} I_0^{(1)} = e^{2t} E_1 = (e^{2t})$, $e^{te^{2t}} = e^{2t}\left(E_2 + tI_1^{(2)}\right) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Отже, нормальна форма матриці e^{At} має вигляд $e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, а сама матриця:

$$e^{At} = S^{-1} e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S = e^{2t} \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}2 & 0 \\ 0{,}4 & -0{,}4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{2t} \begin{pmatrix} 1 + 0{,}4t & -0{,}2t & 0 \\ 0{,}8t & 1 - 0{,}4t & 0 \\ -2t & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3.2 Визначити матрицю e^{At}, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайдемо корені характеристичного рівняння матриці:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(1 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Зрозуміло, що існує один корінь $\lambda = 2$ кратності 2. Отже, $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$,

$$\psi_1(t) = e^{2t}, \psi_2 = \int_0^t e^{2(t-\hat{\imath})}\ e^{2\hat{\imath}} d\hat{\imath} = \int_0^t e^{2\hat{\imath}} d\hat{\imath},$$

тобто

$$e^{At} = e^t\ E + (A - E)te^t,\ e^A = eE + (A - E)e = eA,$$

$$e^A = e^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^2 & -e^2 \\ e^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3.3 Розв’язати лінійне однорідне рівняння $X' = AX + XB$, де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

з початковою умовою $X(0) = F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Згідно з твердженням 2.2, загальний розв’язок заданого рівняння має вигляд

$$X(t) = Y(t)CZ(t).$$

Враховуючи, що матриці A, B – сталі, маємо, що $Y(t) = e^{At}, Z(t) = e^{Bt}$, тобто $X(t) = e^{At}\mathrm{C}e^{Bt}$. Оскільки $X(0) = F$, знайдемо матрицю $C : F = e^{0}\mathrm{C}e^{0}$, $F = C,$ тобто $X(t) = e^{At}Fe^{Bt}$.

Будемо знаходити матриці e^{At} та e^{Bt}. Характеристичний многочлен матриці A має вигляд

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) + 2\lambda =$$
$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1),$$

отже, мінімальний многочлен матриці A має вигляд $\psi(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1)$. Він має 3 корені $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$ відповідних кратностей $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. З формули

$$\psi_k(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}$$

визначимо $\psi_1(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 1),\ \psi_2(\lambda) = \lambda(\lambda + 1),\ \psi_3(\lambda) = \lambda(\lambda - 2).$ Отже, інтерполяційний многочлен має вигляд:

$$r(\lambda) = \left.\frac{e^{\lambda}}{(\lambda - 2)(\lambda + 1)}\right|_{\lambda=0} (\lambda - 2)(\lambda + 1) + \left.\frac{e^{\lambda}}{\lambda(\lambda + 1)}\right|_{\lambda=2} \lambda(\lambda + 1) +$$

$$+ \left.\frac{e^{\lambda}}{\lambda(\lambda - 2)}\right|_{\lambda=-1} \lambda(\lambda - 2) = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \lambda - 2) + \frac{e^2}{6}(\lambda^2 + \lambda) + \frac{e^{-1}}{3}(\lambda^2 - 2\lambda) =$$

$$= \lambda^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{e^2}{6} + \frac{e^{-1}}{3}\right) + \lambda\left(-\frac{1}{2} + \frac{e^2}{6} + \frac{2e^{-1}}{3}\right) + 1,$$

тоді

$$e^{At} = r(At) = (At)^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{e^2}{6} + \frac{e^{-1}}{3}\right) + At\left(-\frac{1}{2} + \frac{e^2}{6} + \frac{2e^{-1}}{3}\right) + E.$$

Позначимо

$$-\frac{1}{2} + \frac{e^2}{6} + \frac{e^{-1}}{3} = a, -\frac{1}{2} + \frac{e^2}{6} + \frac{2e^{-1}}{3} = b,$$

в цих позначеннях

$$e^{At} = A^2at^2 + Abt + E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} at^2 + bt\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ bt & 2at^2+1 & 2at^2+2bt \\ at^2 & at^2+bt & 3at^2+bt+1 \end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен матриці B має вигляд

$$|B-\lambda E| \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)\,\lambda\,(2-\lambda) - 3\,(1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(-2\lambda+\lambda^2-3) = -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+3).$$

Отже, мінімальний многочлен матриці B $\psi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+3)$. У нього є 2 корені $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$ відповідних кратностей $m_1 = 2, m_2 = 1$. Значить, $\psi_1(\lambda) = (\lambda+3)$, $\psi_2(\lambda) = (\lambda-1)^2$ і, згідно з (2.9), інтерполяційний многочлен має вигляд:

$$r(\lambda) = \left(\left.\frac{e^\lambda}{\psi_1}\right|_{\lambda=1}\right)(\lambda-1)(\lambda+3) + \left(\left.\left(\frac{e^\lambda}{\psi_1}\right)'\right|_{\lambda=1}\right)(\lambda+3) + \left(\left.\frac{e^\lambda}{\psi_2}\right|_{\lambda=-3}\right)(\lambda-1)^2 =$$

$$= \frac{e}{4}(\lambda-1)(\lambda+3) + \left.\left(\frac{e^\lambda}{\lambda+3}\right)'\right|_{\lambda=1}(\lambda+3) + \frac{e^{-3}}{16}(\lambda-1)^2 =$$

$$= \frac{e}{4}(\lambda-1)(\lambda+3) + \frac{e^{-3}}{16}(\lambda-1)^2 + \left.\frac{(\lambda+3)e^\lambda - e^\lambda}{(\lambda+3)^2}\right|_{\lambda=1}(\lambda+3) =$$

$$= \frac{e}{4}(\lambda^2+2\lambda-3) + \frac{e^{-3}}{16}(\lambda-1)^2 + \frac{3e}{16}(\lambda+3) =$$

$$= \lambda^2\left(\frac{e^{-3}}{16} + \frac{e}{4}\right) + \lambda\left(\frac{e}{2} - \frac{e^{-3}}{8} + \frac{3e}{16}\right) - \frac{3e}{4} + \frac{e^{-3}}{16} + \frac{9e}{16}.$$

Позначимо

$$m = \frac{e^{-3}}{16} + \frac{e}{4}, n = \frac{e}{2} - \frac{e^{-3}}{8} + \frac{3e}{16}, k = -\frac{3e}{4} + \frac{e^{-3}}{16} + \frac{9e}{16}.$$

Тоді інтерполяційний многочлен має вигляд $r(\lambda) = m\lambda^2 + n\lambda + k$ та

$$e^{Bt} = r(Bt) = B^2mt^2 + Bnt + kE =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} mt^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} nt + k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} mt^2 + nt + k & mt^2 & 3mt^2 + nt \\ 0 & 3mt^2 + k & 6mt^2 + 3nt \\ 0 & 2mt^2 + nt & 7mt^2 + 2nt + k \end{pmatrix}.$$

Остаточно

$$X(t) = e^{At}Fe^{Bt} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ bt & 2at^2 + 1 & 2at^2 + 2bt \\ at^2 & at^2 + bt & 3at^2 + bt + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} *$$
$$* \begin{pmatrix} mt^2 + nt + k & mt^2 & 3mt^2 + nt \\ 0 & 3mt^2 + k & 6mt^2 + 3nt \\ 0 & 2mt^2 + nt & 7mt^2 + 2nt + k \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4at^2 + 5bt & 2at^2 + 1 & 2at^2 + 2bt \\ 7at^2 + 2bt + 2 & at^2 + bt & 3at^2 + bt + 1 \end{pmatrix} *$$
$$* \begin{pmatrix} mt^2 + nt + k & mt^2 & 3mt^2 + nt \\ 0 & 3mt^2 + k & 6mt^2 + 3nt \\ 0 & 2mt^2 + nt & 7mt^2 + 2nt + k \end{pmatrix}.$$

Приклад 3.4 Розв’язати лінійне неоднорідне рівняння

$$\dot{X} = AX + XB + E, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

яке задовольняє початкову умову

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Згідно з твердженням 2.3, загальний розв’язок заданого рівняння має вигляд

$$X(t) = Y(t)CZ(t) + \int_0^t Y(t)Y^{-1}(s)EZ^{-1}(s)Z(t)ds.$$

Оскільки відоме $X(0)$, знайдемо матрицю $C : X(0) = Y(0)CZ(0)$, $C = Y^{-1}(0)X(0)Z^{-1}(0)$, тобто

$$X(t) = Y(t)Y^{-1}(0)X(0)Z^{-1}(0)Z(t) + \int_0^t Y(t)Y^{-1}(s)EZ^{-1}(s)Z(t)ds =$$

$$= Y(t)\left(Y^{-1}(0)X(0)Z^{-1}(0) + \int_0^t Y^{-1}(s)Z^{-1}(s)ds\right)Z(t).$$

Спочатку знаходимо розв’язки рівнянь $\dot{Y} = AY, \dot{Z} = ZB$.

$$\begin{pmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{Y}_1 = Y_2 \\ \dot{Y}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_1 = at + b \\ Y_2 = a \end{cases},$$

$$\hat{Y}(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, Y(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y^{-1}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -s \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \end{pmatrix} = (Z_1 \;\; Z_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{Z}_1 = -Z_2 \\ \dot{Z}_2 = Z_1 \end{cases}.$$

Розв'яжемо цю систему

$$\begin{cases} \ddot{Z}_2 = \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_1 = -Z_2 \end{cases} \Rightarrow \ddot{Z}_2 = -Z_2.$$

Запишемо характеристичне рівняння для $\ddot{Z}_2 + Z_2 = 0$: $k^2 + 1 = 0 \quad k = \pm i$.

$$\begin{cases} Z_2 = c_1 cos\, t + c_2\, i \sin t \\ Z_1 = -c_1 sin\, t + c_2 i \cos t \end{cases}, \hat{Z} = (c_1 c_2)\begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ i\cos t & i\sin t \end{pmatrix},$$

де $Z(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ i\cos t & i\sin t \end{pmatrix}$. Тоді $Z^{-1}(s) = \begin{pmatrix} -\sin s & -i\cos s \\ \cos s & -i\sin s \end{pmatrix}$.

Запишемо розв'язок:

$$X(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin s & -i\cos s \\ \cos s & -i\sin s \end{pmatrix} ds\right) *$$

$$* \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ i\cos t & i\sin t \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 3 & -i \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos s & -i\sin s \\ -\sin s - s\cos s & -i\ \cos s + is\sin s \end{pmatrix} ds\right)\begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ i\cos t & i\sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 3 & -i \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos s & -i\sin s \\ -s\sin s & -is\cos s \end{pmatrix}\Bigg|_0^t\right)\begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ i\cos t & i\sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 3 & -i \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t - 1 & -i\sin t \\ -t\sin t & -it\cos t \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ i\cos t & i\sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 + \cos t & -i\sin t - i \\ 2 - t\sin t & -it\cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ i\cos t & i\sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2t + t\cos t + 2 - t\sin t & -it\sin t - it - it\cos t \\ 2 + \cos t & -i\sin t - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ i\cos t & i\sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t + t\cos t - 2\sin t - 2t\sin t & t + t\sin t + 2\cos t + 2t\cos t \\ -2\sin t + \cos t & \sin t + 2\cos t + 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3.5 Розв’язати рівняння Бернуллі:

$$\dot{X} = AX + XA + XRX\,, \quad X(0) = C,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Зробимо заміну $X^{-1} = V$. Отримаємо рівняння $-\dot{V} = VA + AV + R$ або $\dot{V} = -AV - VA - R$. При цьому початкова умова набуває вигляду $V(0) = X^{-1}(0) = C^{-1}$. Загальним розв’язком такого лінійного рівняння є матриця

$$V(t) = e^{-At}C^{-1}e^{-At} + e^{-At}\left(\int_0^t e^{As}\,(-R)e^{As}ds\right)e^{-At}.$$

Враховуючи вигляд матриці R, можна записати

$$e^{-At}\left(\int_0^t e^{As}\,(-R)e^{As}ds\right)e^{-At} = -R\int_0^t e^{-At}e^{As}\,e^{As}e^{-At}ds = -R\int_0^t e^{2A(s-t)}\,ds =$$

$$= -R\frac{A^{-1}}{2}\left(e^{2A(s-t)}\Big|_0^t\right) = -\frac{RA^{-1}}{2}(E - e^{-2At}).$$

Тоді

$$V(t) = e^{-At}C^{-1}e^{-At} - \frac{RA^{-1}}{2}(E - e^{-2At}).$$

Визначаємо матричну експоненту:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1+\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}.$$

Отже, мінімальний многочлен матриці A має вигляд $\psi(\lambda) = (\lambda - 1)^2$. У нього є один корінь $\lambda_1 = 1$, кратності $m_1 = 2$. Значить, $\psi_1(\lambda) = 1$, і, згідно з (2.9), інтерполяційний многочлен має вигляд:

$$r(\lambda) = \left(\left.\frac{e^{\lambda}}{\psi_1}\right|_{\lambda=1}\right)(\lambda - 1) + \left(\left.\left(\frac{e^{\lambda}}{\psi_1}\right)'\right|_{\lambda=1}\right) =$$

$$= \left(\left.e^{\lambda}\right|_{\lambda=1}\right)(\lambda-1) + \left(\left.\left(e^{\lambda}\right)'\right|_{\lambda=1}\right) = \left(\left.e^{\lambda}\right|_{\lambda=1}\right)(\lambda-1) + \left(\left.e^{\lambda}\right|_{\lambda=1}\right) =$$

$$= e + e(\lambda - 1) = e\lambda.$$

З цього випливає, що $e^{-At} = r(-At) = -eAt, e^{-2At} = -2eAt$, тобто

$$V(t) = -eAtC^{-1}(-eAt) - \frac{RA^{-1}}{2}(E + 2eAt) = AC^{-1}Ae^2t^2 - \frac{RA^{-1}}{2}(E + 2eAt).$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

звідки

$$AC^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -29 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\frac{RA^{-1}}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V(t) = e^2t^2\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -29 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}(E + 2eAt) =$$

$$= e^2t^2\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -29 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2et+1 & 0 \\ 4et & 2et+1 \end{pmatrix} =$$

$$= e^2t^2\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -29 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2et+1 & 0 \\ -2 & 2et+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11e^2t^2 - 2et - 1 & 3e^2t^2 \\ -29e^2t^2 + 2 & 8e^2t^2 - 2et - 1 \end{pmatrix}.$$

Ця матриця є розв'язком лінійного рівняння. Знайдемо обернену до неї, яка й буде розв'язком вихідного рівняння Бернуллі: $X = V^{-1}$.

$$\Delta = (11e^2t^2 - 2et - 1)(8e^2t^2 - 2et - 1) - 3e^2t^2(-29e^2t^2 + 2) =$$
$$= 88e^4t^4 - 22e^3t^3 - 11e^2t^2 - 16e^3t^3 + 4e^2t^2 + 2et - 8e^2t^2 + 2et + 1 +$$
$$+87e^4t^4 - 6e^2t^2 = 175e^4t^4 - 38e^3t^3 - 21e^2t^2 + 4et + 1.$$

Отже,

$$X = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 8e^2t^2 - 2et - 1 & -3e^2t^2 \\ 29e^2t^2 - 2 & 11e^2t^2 - 2et - 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3.6 Розв'язати рівняння Ріккаті:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + X(t)B + Q + X^2(t), \qquad X(0) = C,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Це рівняння є загальним рівнянням Ріккаті. Його частковим розв'язком є матриця $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (це перевіряється безпосередньою підстановкою матриці в рівняння). Зробимо підстановку $X = Y + X_1$, тоді отримаємо рівняння Бернуллі:

$$\dot{Y} = (A + X_1)Y + Y(B + X_1) + Y^2,$$

де

$$A + X_1 = A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B + X_1 = B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $X(0) = C$, то $Y(0) = X(0) + X_1 = C - X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. Рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння заміною $V = Y^{-1}$, звідки

$$-\dot{V} = VA_1 + B_1V + E,$$

або

$$\dot{V} = -VA_1 - B_1V - E$$

та

$$V(0) = Y^{-1}(0) = (C - X_1)^{-1}.$$

Загальний розв’язок лінійного рівняння має вигляд:

$$V(t) = e^{-B_1 t}(C - X_1)^{-1} e^{-A_1(t)} + \int_0^t e^{-B_1 t} \cdot e^{B_1 S}\,(-E) e^{A_1 S}\, e^{-A_1 t} ds =$$

$$= e^{-B_1 t}\left((C - X_1)^{-1} - \int_0^t e^{-B_1 S} \cdot e^{A_1 S} ds\right) e^{-A_1 t} =$$

$$= e^{-B_1 t}\left((C - X_1)^{-1} - \int_0^t e^{(B_1 + A_1)S}\, ds\right) e^{-A_1 t} =$$

$$= e^{-B_1 t}\left((C - X_1)^{-1} - (B_1 + A_1)^{-1}\, e^{(B_1 + A_1)S}\Big|_0^t\right) e^{-A_1 t} =$$

$$= e^{-B_1 t}\left((C - X_1)^{-1} - (B_1 + A_1)^{-1}\left(e^{(B_1 + A_1)S} - E\right)\right) e^{-A_1 t} =$$

$$e^{-B_1 t}\left((C - X_1)^{-1} - (B_1 + A_1)^{-1}(e^{B_1 t} \cdot e^{A_1 t} - E)\right) e^{-A_1 t}$$

Визначимо матричні експоненти:

$$|A_1 - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -3\lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda - 3).$$

Отже, $\psi(\lambda) = \lambda(\lambda - 3), \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, m_1 = m_2 = 1$, тобто $\psi_1(\lambda) = \lambda - 3$, $\psi_2(\lambda) = \lambda$. Тоді інтерполяційний многочлен записується у вигляді

$$r(\lambda) = \left.\frac{e^{\lambda}}{\lambda - 3}\right|_{\lambda=0} (\lambda + 3) + \left.\frac{e^{\lambda}}{\lambda}\right|_{\lambda=3} \lambda = -\frac{1}{3}(\lambda - 3) + \frac{e^3}{3}\lambda = \frac{1}{3}(e^3 - 1)\lambda + 1.$$

$$e^{A_1 t} = r(A_1 t) = \frac{e^3 - 1}{3} A_1 t + E;$$

$$e^{-A_1 t} = -\frac{e^3 - 1}{3} A_1 t + E.$$

Аналогічно,

$$|B_1 - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1).$$

Отже, $\psi(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 1), \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, m_1 = m_2 = 1,$ тобто $\psi_1(\lambda) = \lambda + 1, \psi_2(\lambda) = \lambda - 2,$

$$r(\lambda) = \left.\frac{e^\lambda}{\lambda + 1}\right|_{\lambda=2} (\lambda + 1) + \left.\frac{e^\lambda}{\lambda - 2}\right|_{\lambda=-1} (\lambda - 2) = \frac{e^2}{3}(\lambda + 1) - \frac{e^{-1}}{3}(\lambda - 2) =$$

$$= \frac{e^2 - e^{-1}}{3}\,\lambda + \frac{e^2 + 2e^{-1}}{3}.$$

$$e^{B_1 t} = r(B_1 t) = \frac{e^2 - e^{-1}}{3}\, B_1 t + \frac{e^2 + 2e^{-1}}{3}\, E;$$

$$e^{-B_1 t} = -\frac{e^2 - e^{-1}}{3}\, B_1 t + \frac{e^2 + 2e^{-1}}{3}\, E.$$

Враховуючи, що $(C - X_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0{,}5 \end{pmatrix}, (B_1 + A_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -1 \end{pmatrix},$

запишемо

$$e^{B_1 t} \cdot e^{A_1 t} - E = \left(\frac{e^2 - e^{-1}}{3}\, B_1 t + \frac{e^2 + 2e^{-1}}{3}\, E\right)\left(\frac{e^3 - 1}{3} A_1 t + E\right) - E =$$

$$= \frac{(e^2 - e^{-1})(e^3 - 1)}{9}\, B_1 A_1 t^2 + \frac{e^2 - e^{-1}}{3} B_1 t + \frac{(e^2 + 2e^{-1})(e^3 - 1)}{3} A_1 t +$$

$$+ \frac{e^2 + 2e^{-1} - 1}{3} E = \frac{e^5 - 2e^2 + e^{-1}}{9} B_1 A_1 t^2 + \frac{e^2 - e^{-1}}{3} B_1 t +$$

$$+ \frac{(e^5 + e^2 - 2e^{-1})}{3} A_1 t + \frac{e^2 + 2e^{-1} - 1}{3} E =$$

$$= \frac{e^5 - 2e^2 + e^{-1}}{9}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} t^2 + \frac{e^2 - e^{-1}}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} t + \frac{(e^5 + e^2 - 2e^{-1})}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t +$$

$$+ \frac{e^2 + 2e^{-1} - 1}{3} E = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) \end{pmatrix},$$

де

$$f_{11}(t) = \frac{(e^5 - 2e^2 + e^{-1})t^2 + (3e^5 + 4e^2 - 7e^{-1})t + e^5 + 2e^{-1} - 1}{3},$$

$$f_{12}(t) = \frac{e^5 - 2e^2 + e^{-1}}{9} t^2 + \frac{(e^5 + e^2 - e^{-1})}{3} t,$$

$$f_{21}(t) = \frac{2e^5 - 2e^2 + 2e^{-1}}{3} t^2 + \frac{2e^2 + 2e^{-1}}{3} t,$$

$$f_{22}(t) = \frac{2e^5 - 4e^2 + 2e^{-1}}{9} t^2 + \frac{2e^2 + 2e^{-1} - 1}{3}.$$

В цих позначеннях

$$(C - X_1)^{-1} - (B_1 + A_1)^{-1} (e^{B_1 t} \cdot e^{A_1 t} - E) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}5 f_{21} & 0{,}5 f_{22} \\ 0{,}5 f_{11} - f_{21} & 0{,}5 f_{12} - f_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 0{,}5 f_{21} & -0{,}5 f_{22} \\ 2 - 0{,}5 f_{11} - f_{21} & 0{,}5 - 0{,}5 f_{12} - f_{22} \end{pmatrix},$$

$$e^{-B_1 t} = -\frac{e^2 - e^{-1}}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} t + \frac{e^2 + 2e^{-1}}{3} E =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{e^2 - e^{-1}}{3} + \frac{e^2 + 2e^{-1}}{3} & -\frac{e^2 - e^{-1}}{3} t \\ -\frac{2(e^2 - e^{-1})}{3} t & \frac{e^2 + 2e^{-1}}{3} \end{pmatrix},$$

$$e^{-A_1 t} = -\frac{e^3-1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + E = \begin{pmatrix} -e^3+2 & -\dfrac{e^3-1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Остаточно

$$V = \begin{pmatrix} -\dfrac{e^2-e^{-1}}{3} + \dfrac{e^2+2e^{-1}}{3} & -\dfrac{e^2-e^{-1}}{3}t \\ -\dfrac{2(e^2-e^{-1})}{3}t & \dfrac{e^2+2e^{-1}}{3} \end{pmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} 1-0{,}5f_{21} & -0{,}5f_{22} \\ 2-0{,}5f_{11}-f_{21} & 0{,}5-0{,}5f_{12}-f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^3+2 & -\dfrac{e^3-1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

А розв’язок вихідного рівняння знаходиться за формулою

$$X(t) = V^{-1}(t) + X_1.$$

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі досліджувалися різноманітні методи розв’язання матричних диференціальних рівнянь. Це були однорідні, неоднорідні рівняння з коефіцієнтами у вигляді квадратних сталих матриць, а також рівняння Бернуллі та рівняння Ріккаті. Цікавість до розв’язань рівнянь Ріккаті обумовлена, з одного боку, тим, що ці рівняння в загальному вигляді не інтегруються в квадратурах, а з іншого тим, що ці рівняння зустрічаються при розв’язанні задач варіаційного числення, теорії оптимального керування тощо.

В роботі проведено аналіз властивостей та методів розв’язання звичайних диференціальних рівнянь Ріккаті, тому можна зробити висновок, що деякі з цих властивостей мають місце також і для матричних диференціальних рівнянь. Зокрема, якщо відомі деякі часткові розв’язки рівнянь, це дозволяє розв’язати рівняння в квадратурах.

Оскільки при розв’язанні таких рівнянь використовується матрична експонента, тому в роботі було докладно розглянуто питання про її властивості та методи знаходження.

Окремий розділ роботи присвячено розв’язанню прикладів. Хоча розв’язувалися лише рівняння з матрицями порядку не вище третього, навіть такі рівняння мають доволі довгий процес розв’язання. Якщо ж матриці будуть більш високої вимірності, або не будуть сталими, це також дозволить скористатися дослідженими методами розв’язання, але значно ускладнить задачу та, можливо, буде потребувати використання обчислювальної техніки.

Результати роботи можуть бути використані як при вивченні дисциплін, пов’язаних з диференціальними рівняннями, так і при розв’язанні практичних задач, в яких зустрічається рівняння Ріккаті.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 5-е изд. Москва : ФИЗМАЛИТ, 2004. 560 с.
2. Егоров А. И. Уравнения Риккати. Москва : ФИЗМАЛИТ, 2001. 320 с.
3. Лось В. М., Мальчиков В. В. Звичайні диференціальні рівняння. Київ : КПІ ім. Сікорського, 2021. 66 с.
4. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння: Підручник. Київ: Либідь, 2003. 600 с.
5. Bellman R. Introduction to matrix analysis. New York Toronto London. 1960. 430 p.
6. Lankaster P. Thery of matrices. New York – London : Academic Press, 1969. 586 p.
7. Roger A. Horn, Charles R. Jonson Matrix analysis. London New York New Rochelle, Camridge Universiti Press 1986. 575 p.