

Міністерство освіти і науки України  
Запорізький національний університет

**С.М. Гребенюк, С.І. Гоменюк**

## **ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ МЕХАНІЧНИХ ЗАДАЧ**

Навчальний посібник  
для здобувачів третього освітньо-наукового рівня  
спеціальності «Прикладна математика»  
освітньо-наукової програми «Прикладна математика»

Затверджено  
вченою радою ЗНУ  
Протокол № 2 від 27. 09.2022 р.

Запоріжжя  
2022

УДК: 519.6(075.8)

Г79

Гребенюк С. М., Гоменюк С. І. Чисельні методи розв'язання механічних задач: навчальний посібник для здобувачів третього освітньо-наукового рівня спеціальності «Прикладна математика» освітньо-наукової програми «Прикладна математика». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2022. 80 с.

У навчальному посібнику в систематизованому вигляді подано програмний матеріал дисципліни «Чисельні методи розв'язання механічних задач». Наведено опис основних чисельних методів, що застосовуються при розв'язанні задач механіки деформівного тіла та інших розділів математичної фізики. Детально розглянуто метод скінченних елементів для розв'язання одно-, дво- та тривимірних задач. Описано процедуру підбору апроксимуючих функцій, побудову матриці жорсткості окремого скінченного елемента та формування системи розв'язувальних рівнянь. Продемонстровано використання методу скінченних елементів до розв'язання задач механіки для анізотропних та слабкостисливих матеріалів. Підібрано практичні завдання, запропоновано запитання для самоперевірки, що сприятиме формуванню навичок самостійного аналізу наукової літератури, подальшій науково-дослідній та професійній діяльності.

Видання призначено для здобувачів третього освітньо-наукового рівня спеціальності «Прикладна математика», які навчаються за освітньо-науковою програмою «Прикладна математика».

Рецензент

*С. В. Чопоров*, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерних наук

Відповідальний за випуск

*С. М. Гребенюк*, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики

## ЗМІСТ

	ВСТУП	5
1	ОСНОВНІ ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ МЕХАНІЧНИХ ЗАДАЧ	7
2	ОСНОВИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ	12
3	ФУНКЦІЇ ФОРМИ ДЛЯ СТРИЖНЕВОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА	21
3.1	Функції форми для стрижневого скінченного елемента з лінійної апроксимацією переміщень	21
3.2	Функції форми для стрижневого скінченного елемента з квадратичної апроксимацією переміщень	23
4	ПОБУДОВА МАТРИЦІ ЖОРСТКОСТІ СТРИЖНЕВОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА	28
4.1	Матриця жорсткості лінійного стрижневого скінченного елемента	28
4.2	Вісьове навантаження стержня	30
4.3	Перенос тепла в стержні	36
5	ФУНКЦІЇ ФОРМИ ДВОВИМІРНИХ ТА ПРОСТОРОВИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ	41
5.1	Функції форми для плоского трикутного скінченного елемента з лінійною апроксимацією переміщень	41
5.2	Функції форми для деяких СЕ	46
6	МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ ПЛОСКОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТУ ДЛЯ ІЗОТРОПНОГО МАТЕРІАЛУ	50
6.1	Основні співвідношення плоскої теорії пружності	50
6.2	Матриця жорсткості трикутного скінченного елемента для ізотропного матеріалу	53
7	ГЛОБАЛЬНА МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ КОНСТРУКЦІЇ	57
8	МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТУ ІЗ АНІЗОТРОПНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ	66

9	МОМЕНТНА СХЕМА СКІНЧЕНОГО ЕЛЕМЕНТУ ДЛЯ СЛАБКОСТИСЛИВОГО МАТЕРІАЛУ	71
	ПРИКЛАДИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ	77
	РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	78

## ВСТУП

Потреби практики вимагають дослідження та аналізу механічних процесів у багатьох сферах людської діяльності. Ефективним засобом таких досліджень є математичне моделювання. Створені моделі можуть мати різну формалізацію, в механіці це, як правило, крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь або диференціальних рівнянь у частинних похідних, інтегральні рівняння тощо. Громіздкість отриманих моделей не дає змогу дослідити їх аналітичними методами (це можливо тільки для обмеженої кількості задач), тому широкого застосування у вирішенні цієї проблеми набувають чисельні методи. Різноманіття чисельних методів дає змогу обрати для вирішення тієї чи іншої задачі більш зручний метод з точки зору коректності застосування, простоти розв'язання задачі та точності отриманих результатів. Одним із найбільш поширених методів є метод скінченних елементів (МСЕ), який адаптовано до розв'язання різних задач механіки. Цей факт підкреслює необхідність та актуальність вивчення дисципліни «Чисельні методи розв'язання механічних задач».

Курс «Чисельні методи розв'язання механічних задач» є обов'язковим для спеціальності «Прикладна математика». Його опанування передбачає здобуття необхідних знань та вмінь, є основою для використання у подальших наукових дослідженнях. Курс надає майбутньому фахівцю фундаментальні компетенції з застосування чисельних методів при розв'язанні практичних задач.

Метою викладання навчальної дисципліни «Чисельні методи розв'язання механічних задач» є ознайомлення аспірантів з теоретичними основами та підходами для застосування чисельних методів, особливо методу скінченних елементів, при розв'язанні різних задач механіки, що надає можливості застосування набутих знань як інструменту для розв'язання конкретних прикладних задач.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Чисельні методи розв'язання механічних задач» є формування у аспірантів цілісної системи знань про основні чисельні методи розв'язання крайових задач різної природи та навичок щодо теорії та практики застосування методу скінченних елементів та отримання на його основі різних підходів та модифікацій для застосування у задачах прикладної математики.

Посібник створено авторами на основі власного досвіду наукових

досліджень та викладання чисельних методів розв'язання крайових задач аспірантам спеціальності «Прикладна математика». Автори сподіваються, що запропоноване видання стане корисним здобувачам вищої освіти, які прагнуть отримати знання та набути навичок з чисельних методів, а також викладачам для проведення лекційних та лабораторних занять, організації самостійної роботи студентів та аспірантів.

# 1 ОСНОВНІ ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ МЕХАНІЧНИХ ЗАДАЧ

Зазвичай наближені методи базуються на дискретизації статичних та математичних моделей задач, що розв'язуються. В методах дискретизації суцільна система з нескінченним числом степеней свободи апроксимується системою із скінченним числом степеней свободи. Диференціальні та інтегральні рівняння, які описують поведінку суцільного середовища, в методах дискретизації замінюються системою алгебраїчних рівнянь, невідомими у яких є вузлові значення шуканої функції.

Відзначимо два шляхи дискретизації: хвильовий та корпускулярний. Серед них особливе місце займає метод скінченних різниць (МСР), варіаційно-різницевої метод (ВРМ) та метод скінченних елементів (МСЕ). Окрім універсальності, обумовленої загальними принципами механіки, ці методи об'єднує дискретна математична модель досліджуваного об'єкту. Стан описується системою алгебраїчних рівнянь, розв'язання якої визначає дискретна множина значень шуканої функції у заздалегідь визначених точках (вузлах) області. Однак шлях досліджуваного об'єкту – математична модель для кожного методу різний, що в значному ступені визначає області використання методів, принципи доведення існування та збіжності розв'язків, процедури реалізації на ЕОМ.

В МСР цей шлях такий: досліджуваний об'єкт – ідеалізована розрахункова схема – континуальна крайова задача для систем диференціальних рівнянь – дискретна крайова задача – алгебраїчні рівняння. При використанні цього методу сіткові рівняння складаються безпосередньо з диференціальних рівнянь заміною похідних скінченними різницями. Незважаючи на добре розроблений та апробований математичний апарат різницевої апроксимації диференціальних рівнянь, МСР не використовує варіаційних принципів та в ряді випадків приводить до порушення симетрії системи алгебраїчних рівнянь й певним труднощам у формулюванні крайових умов, що ускладнює процес розв'язання задачі.

Для ВРМ характерна така схема: досліджуваний об'єкт – ідеалізована розрахункова схема – континуальна варіаційна задача – дискретна варіаційна задача – алгебраїчні рівняння. Завдяки використанню варіаційних принципів, цей метод, у застосуванні до задач механіки, стає більш ефективним: матриця

системи алгебраїчних рівнянь завжди симетрична, структура опису деформованого стану різних типів конструкцій єдина, що відіграє суттєву роль в реалізації алгоритму автоматичного формування на ЕОМ сіткових рівнянь; крайові умови формуються природним чином; полегшуються доведення існування та збіжності розв'язків. Відмінною рисою ВРМ є безпосередній підхід до побудови дискретних аналогів вихідних функціоналів (без звернення до диференціальних рівнянь) шляхом заміни в них невідомих та їх похідних за координатами скінченною множиною значень, що визначаються на елементах деякої сіткової області, та подання інтегралів в виді скінченних сум з ваговими множниками. Подальше варіювання дискретного аналога функціонала енергії за значеннями невідомих функцій в вузлах сітки дає систему сіткових рівнянь.

Для МСЕ схема побудови математичної моделі така: досліджуваний об'єкт – ідеалізована розрахункова схема – дискретна варіаційна задача – алгебраїчні рівняння. Безпосередній перехід до дискретної розрахункової схеми, що здійснюється в МСЕ з міркувань механіки, дає можливість природньо формулювати крайові умови, раціонально розташовувати розрахункові вузли сіткової області, вільно ущільнюючи її в місцях великого градієнта шуканої функції, більш ефективно застосовувати метод до дослідження комбінованих систем, що складаються з фрагментів різної конфігурації, статичної природи та «мірності» в сенсі механіки.

Якщо порівняти два останніх метода, то можна помітити риси, загальні для них обох. Однак, як показують дослідження, чисельні результати, отримані ВРМ та МСЕ, не завжди співпадають з-за різної швидкості збіжності розв'язків.

Відмінності ВРМ та МСЕ полягає у наступному. В ВРМ записується вираз функціонала енергії усієї системи. В цьому виразі похідні замінюються різницями за відомими формулами, а інтеграли – скінченними сумами через вузлові значення шуканої функції. Подальше варіювання функціонала енергії за вузловими значеннями функції призводить до системи алгебраїчних рівнянь. На відміну від ВРМ в МСЕ передбачається розподіл області на частини (скінченні елементи) й записується вираз для функціонала енергії як сума окремих її частин. В кожному скінченному елементі задається закон розподілу шуканої функції через вузлові значення, потім здійснюється підстановка у вираз для варіації енергії та обчислюються інтеграли точно або численно. Подальше варіювання функціонала енергії за вузловими значеннями функції призводить до системи алгебраїчних рівнянь. Якщо заздалегідь не прагнути відповідності різницевих та квадратурних формул в ВРМ, виду функції, апроксимуючої переміщення та



формул інтегрування в МСЕ, то методи різняться.

З математичної точки зору при забезпеченні безперервності шуканих функцій та використанні варіаційних принципів в побудові залежностей між зусиллями та переміщеннями для скінченних елементів МСЕ можна трактувати як метод Рітца. Суттєвою різницею між МСЕ та методом Рітца є задання координатних (базисних) функцій. В методі Рітца використовуються зазвичай глобальні базисні функції (їх визначення проводиться для всієї області, що розглядається), в МСЕ – локальні базисні функції (для окремого скінченного елемента).

Розв'язання задачі за допомогою метода Рітца відбувається у такій послідовності: обираються координатні функції, на їх основі будується функціонал, екстремум якого є розв'язком варіаційної задачі; визначаються невідомі коефіцієнти, що відповідають екстремуму функціонала, а в задачах механіки – мінімуму потенціальної енергії деформованої системи. Останні дві процедури виконуються автоматично, згідно розробленим правилам обчислювальної математики. При цьому велике значення має вибір координатних функцій, від їх виду залежить кількість членів ряду, необхідна для досягнення заданої точності розрахунку, та збіжність методу взагалі. В МСЕ цей вибір відбувається суто з механічних міркувань. Надання фізичного смислу координатним функціям визначає наочність гіпотез, що вводяться, та надає можливість використовувати інтуїцію при осмисленні процесу деформування твердого тіла.

Більш того, в МСЕ можна понизити поліноми апроксимуючої функції шляхом збільшення числа елементів. В методі ж Рітца апроксимуючі функції мають високі порядки, підібрати які для складних крайових умов не завжди легко. Матриця системи рівнянь в МСЕ завжди симетрична та має стрічкову структуру, а в методі Рітца вона, як правило, повністю заповнена, завдяки чому при застосуванні останнього необхідно значно більше машинного часу на формування та розв'язання системи рівнянь.

До розглянутих методів можна додати й такий метод дискретизації, як метод зважених відхилів (МЗВ), що представляє собою відправну точку для методу скінченних елементів, причому в МЗВ варіаційний принцип не використовується. МЗВ в залежності від виду вагових функцій (базисні функції задаються аналогічно методу скінченних елементів) поділяється на метод колокацій (вагова функція обирається в виді дельта-функції та метод називається методом поточної колокації на відміну від методу колокацій по підобластям,

де вагові функції дорівнюють одиниці в деякій підобласті та нулю – в решті області) та метод Гальоркіна (тут вагові функції приймаються співпадаючими з базисними).

Той або інший метод дискретизації обирається залежно від класу розв'язуваних задач. Так, МСР широко застосовується в динаміці рідини та газу, в теорії пружності, пов'язаної з часовими координатами, а МСЕ найбільш доцільний в механіці деформівного твердого тіла та будівельній механіці, в стаціонарних задачах теплопередачі, гідродинаміці.

З точки зору механіки, МСЕ базується на заміні досліджуваного об'єкта сукупністю скінченного числа дискретних елементів, з'єднаних між собою в окремих вузлах. Статичні властивості кожного елемента визначаються на основі введених механічних гіпотез, а шукані зусилля (переміщення) – з умов кінематичної (статичної) сумісності системи. Приведена трактовка обумовлює таку послідовність проведення дослідження за МСЕ:

призначення розрахункових вузлів, в яких визначаються величини шуканої функції та розбиття досліджуваного об'єкта на скінченні елементи бажаної форми;

встановлення залежностей між зусиллями та переміщеннями в «контактних» вузлах елемента, тобто побудова матриць жорсткості (податливості);

формування системи алгебраїчних рівнянь, що виражають кінематичну (статичну) сумісність деформацій досліджуваного об'єкта;

розв'язання отриманих рівнянь й обчислення значень шуканої функції в розрахункових вузлах;

визначення компонентів напружено-деформованого стану досліджуваної системи на основі знайдених значень шуканої функції.

Іншим методом розв'язання крайових задач є метод інтегральних граничних елементів (МГЕ), який полягає у побудові наближеної моделі об'єкту на основі інтегральних рівнянь. Перший крок на шляху до розв'язання полягає в переході від диференціальних рівнянь у частинних похідних до еквівалентних інтегральних рівнянь. У багатьох випадках, коли такий перехід виявляється успішним, рішення вихідної задачі може бути отримано з мінімальними обчислювальними витратами і високим ступенем точності. Крім того, розмірність вихідної задачі знижується на одиницю, так, двомірні задачі перетворюються на одномірні. Всі різновиди МГЕ використовують принцип суперпозиції, тому область їх застосування обмежена класом повністю лінійних

або лінійних відносно приросту задач. Розрізняють прямі і непрямі МГЕ. У прямих МГЕ шуканими змінними крайової задачі є величини, що мають реальний фізичний зміст, наприклад, в задачах теорії пружності – зусилля і переміщення. У непрямих МГЕ розв’язання вихідної задачі виражається через функції щільності, які самі по собі не мають реального фізичного сенсу. Після того як функції щільності знайдені, значення реальних фізичних параметрів задачі можуть бути отримані з них шляхом простого інтегрування. У будь-якому варіанті МГЕ результатом переходу від диференціальних рівнянь в частинних похідних до інтегральних рівнянь в кінцевому рахунку є система рівнянь, що включає значення змінних тільки на межі заданої області. Тому на відміну МСЕ і МСР подальша дискретизація задачі проводиться тільки на межі досліджуваної області. Останнє зумовлює, по-перше, більш високу в порівнянні з МСР і МСЕ точність розв’язання, по-друге, істотно менший обсяг вхідних даних при реалізації методів на ЕОМ.

### *Контрольні запитання*

1. Назвіть основні чисельні методи розв’язання задач механіки деформівного твердого тіла.
2. Охарактеризуйте метод скінченних різниць розв’язання задач механіки деформівного твердого тіла.
3. Опишіть основну ідею варіаційно-різницевого методу для задач механіки.
4. Охарактеризуйте метод Рітца розв’язання задач механіки деформівного твердого тіла.
5. Опишіть основну ідею методу граничних елементів для задач механіки.

## 2 ОСНОВИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Метод скінченних елементів є універсальним варіаційним методом, орієнтованим на рішення найбільш складних задач механіки деформованого твердого тіла і механіки руйнування. Суть даного методу в наступному: безперервний об'єм реальної конструкції розбивається на підобласті з об'ємних (у загальному випадку) елементів малих, але кінцевих розмірів - скінченні елементи (СЕ), у межах яких шукана функція може бути апроксимована. У підсумку будь-яка величина, що неперервно змінюється по об'єму тіла, також може бути приблизно апроксимована дискретною моделлю, що представляє собою безліч кусочно-безперервних функцій, кожна з яких визначена в межах підобласті.

При побудові скінченно-елементної моделі реальної конструкції розбивка на скінченні елементи не є однозначною процедурою і залежить від ряду факторів, таких як геометричні розміри конструкції, її конфігурація, розмірність задачі (одномірна, двовимірна, просторова), однорідність матеріалу конструкції і деяких інших. При виборі виду і кількості СЕ варто прагнути не тільки до найкращої апроксимації функцій усередині елемента, але і до найбільш природного опису границь області і граничних умов.

При рішенні одномірних задач (розрахунок балок, ферм і ін.) доцільно використовувати стрижневі елементи (рис. 2.1).

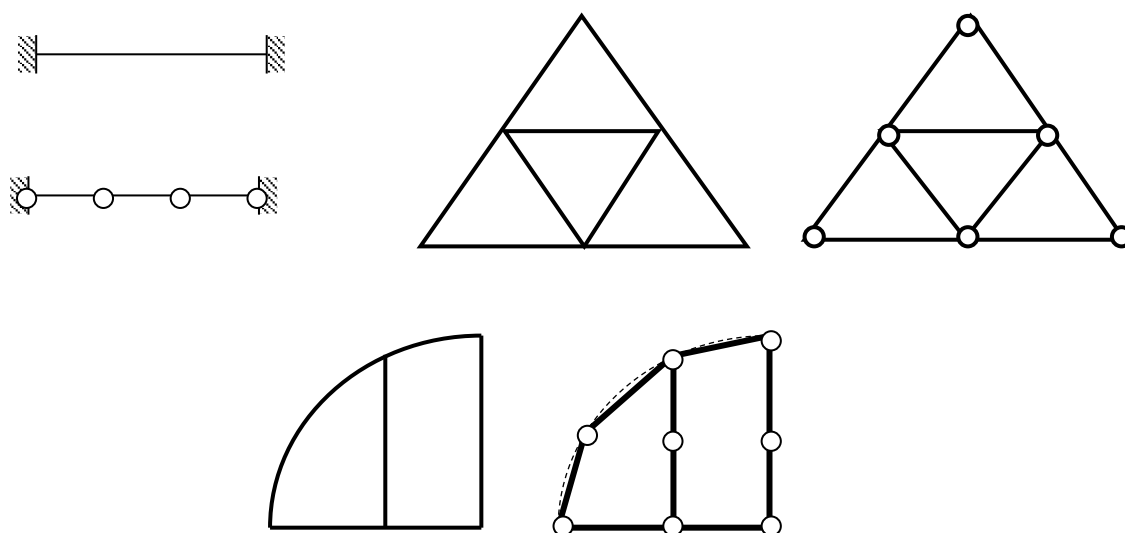


Рис. 2.1 Одновимірні скінченні елементи

У результаті скінченно-елементної дискретизації реальні конструкції

представляються у виді окремих стрижневих елементів, зчленованих між собою в так званих вузлових точках, або вузлах. Найбільше широко використовуваним одномірним СЕ є СЕ у виді прямокутного стрижня.

Якщо вихідна конструкція включає криволінійні ділянки, то кожна така ділянка необхідно замінити одним криволінійним стрижнем або сукупністю прямолінійних стрижневих елементів шляхом постановки проміжних вузлів. Чим точніше пропонується дискретна модель апроксимує реальну конструкцію, тим точніше одержуваний у ході рішення результат.

При рішенні двовимірних задач найбільш широке поширення одержали скінченні елементи у виді плоских трикутників і чотирикутників (рис. 2.2).

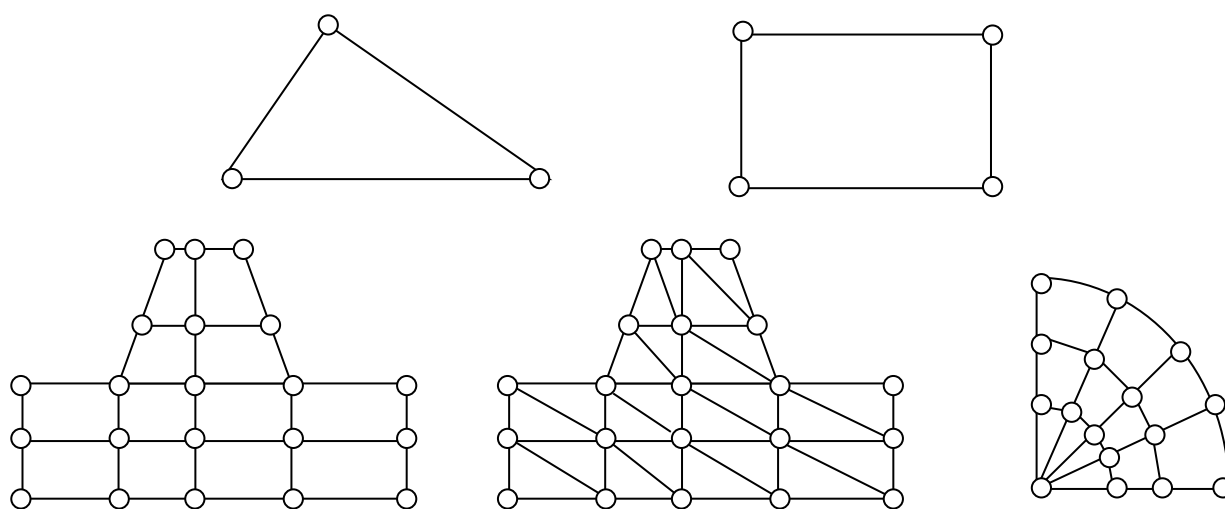


Рис. 2.2 Двовимірні скінченні елементи

Найбільш загальним випадком задачі механіки деформованого твердого тіла є просторова (тривимірна) задача. При розбивці тривимірних об'єктів на СЕ використовують тетраедри, трикутні або чотирикутні призми (рис. 2.3).

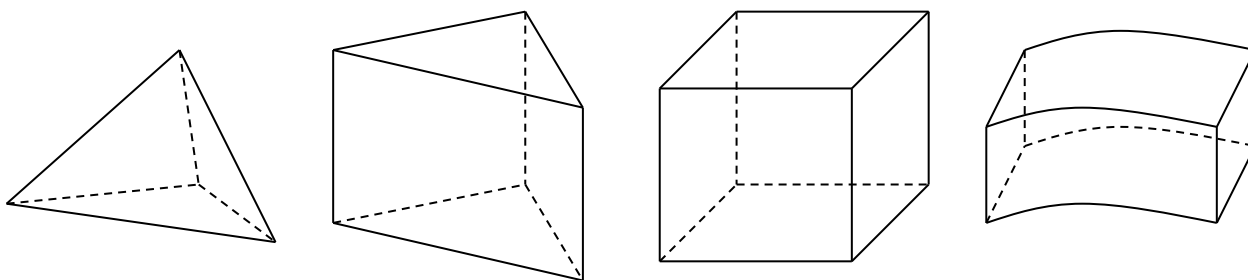


Рис. 2.3 Тривимірні скінченні елементи

Для опису тіл із криволінійними границями можуть використовуватися криволінійні СЕ. Однак їхнє застосування обмежене необхідністю аналітичного опису форми скінченного елемента і значним ускладненням виводу матриці жорсткості. Різноманіття існуючих криволінійних границь приводить до необхідності виводу матриці жорсткості криволінійного СЕ для кожного конкретного випадку, що доцільно тільки при дуже відповідальних розрахунках.

Крім представлених вище СЕ, застосовують також спеціальні скінченні елементи, що служать для опису особливостей напружено-деформованого стану матеріалу конструкції (біля вершини тріщини, розрізу і т.д.). Такі основні види СЕ.

МСЕ може базуватися на трьох підходах: на методі переміщень (задаються функції, що апроксимують переміщення усередині СЕ); на методі сил (задаються функції, що апроксимують напруження усередині СЕ); на змішаному методі (задаються функції, що апроксимують на одній частині СЕ переміщення, а на іншій – напруження). На практиці найбільш широке поширення одержав МСЕ в сполученні з методом переміщень, що дозволяє зменшити труднощі, зв'язані з задоволенням граничних і контактних умов. Крім цього для даного підходу у якості функцій, що апроксимують переміщення по об'єму, найбільш прийнятними є ті функції, у яких як невідомі коефіцієнти записуються переміщення вузлових точок елемента. Що дозволяє задовольнити умові спільності деформацій.

На практиці як апроксимуючі функції в межах СЕ частіше застосовують інтерполяційні поліноми різного ступеня, називані в МСЕ функціями форми.

Інтерполяційні поліноми:

для одномірного випадку

$$u(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i,$$

для двомірного випадку

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^i y^j, (i + j \leq k),$$

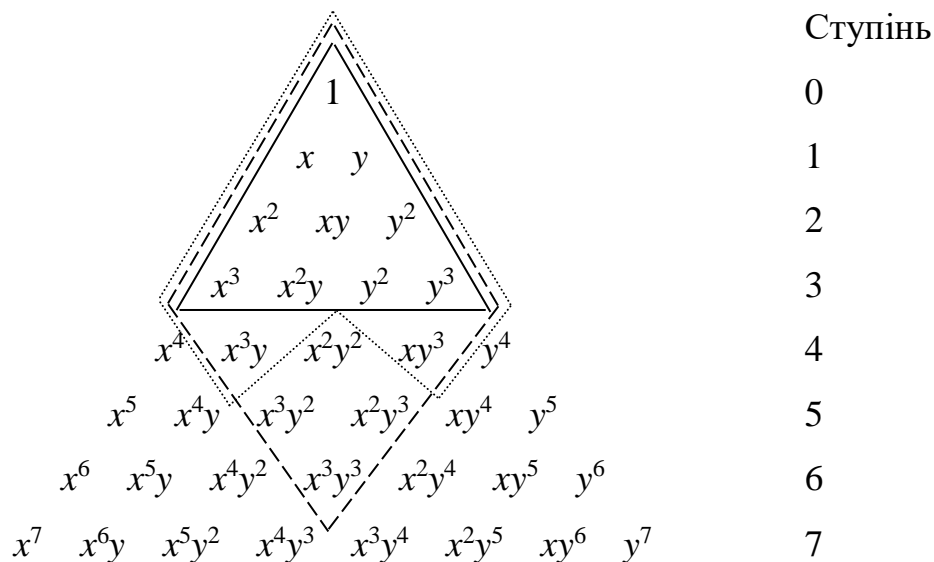
для тривимірного випадку

$$u(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^i y^j z^m.$$

Кількість доданків, що входять в апроксимуючий поліном, залежить від виду обраного скінченного елемента і, як правило, приймається рівним кількості вузлів скінченного елемента. Якщо за умовою задачі для апроксимації необов'язково використовувати повний поліном, то число членів розкладання повинне бути таке, щоб використовуваний поліном був симетричним щодо порядку апроксимації. Це властивість полінома називають властивістю геометричної ізотропії.

Визначити число членів у багаточлені довільного ступеня можна за допомогою трикутника Паскаля (рис. 2.4).

Вид функції форми підбирається для кожного вузла, що належить СЕ, окремо. Функція форми повинна задовольняти наступній умові: вона повинна дорівнювати 1 у вузлі, для якого підібрана, і дорівнювати 0 у всіх інших вузлах.



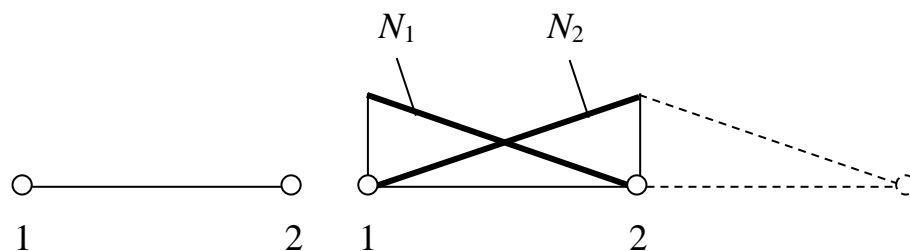
- - повний поліном 3-ого ступеня;
- - члени, що утворюють кубічний елемент Лагранжева сімейства;
- ..... - члени, що утворюють кубічний елемент Серендипова сімейства.

Рис. 2.4 Трикутник Паскаля

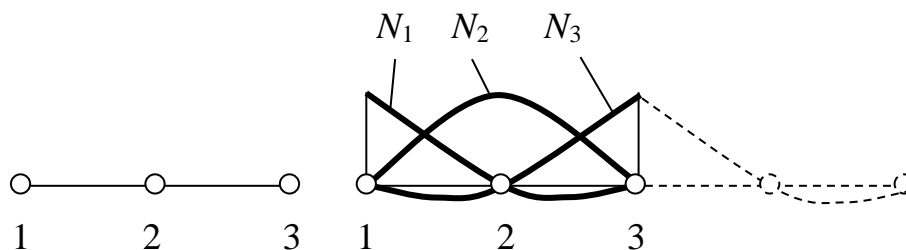
Розглянемо основні типи СЕ і їхні функції форми.

Одномірні СЕ

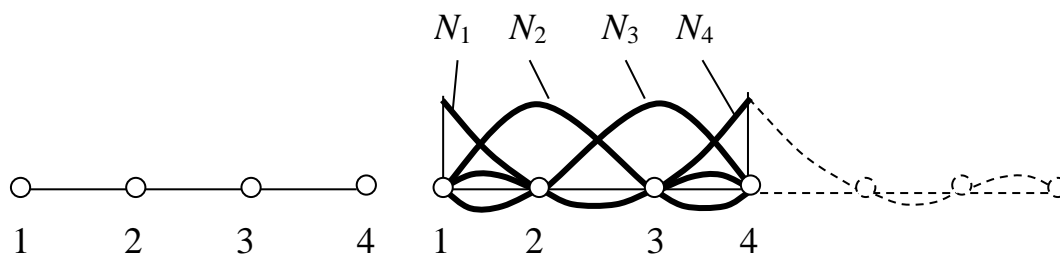
а) з лінійною апроксимацією



б) із квадратичною апроксимацією

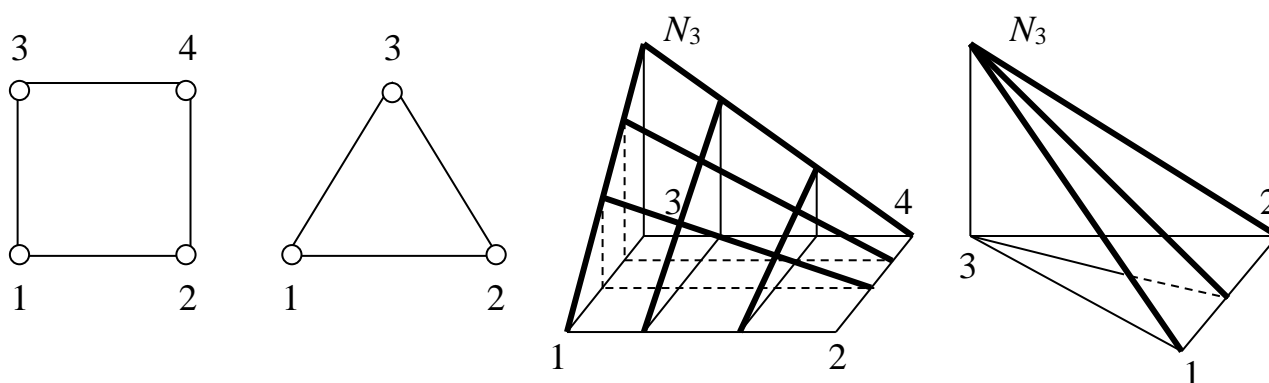


в) з кубічною апроксимацією



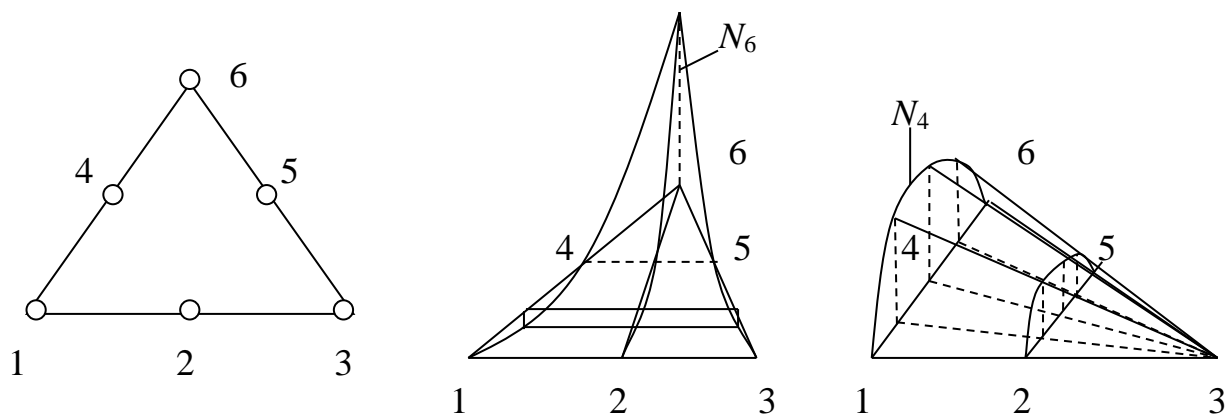
Двомірні

а) з лінійною апроксимацією

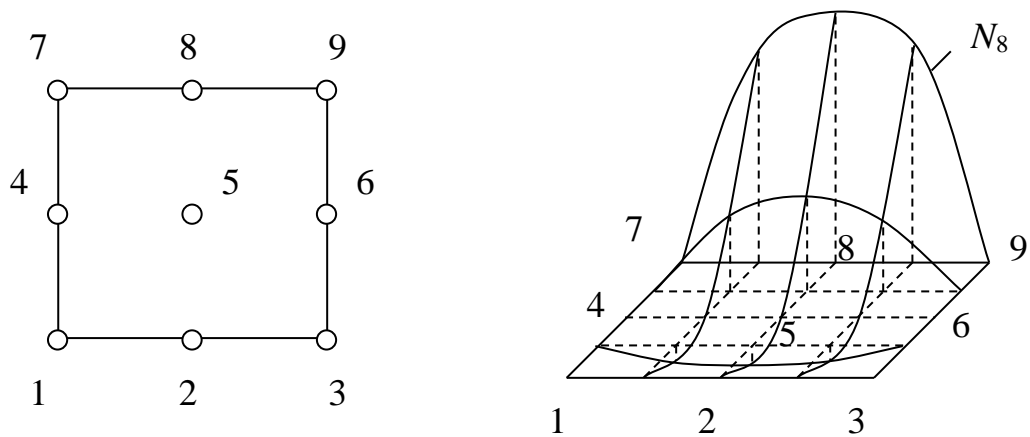




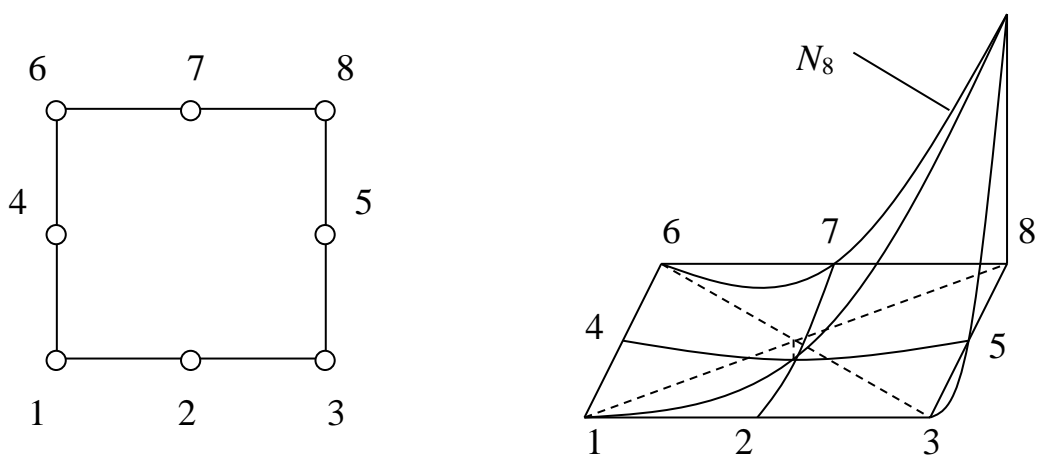
б) із квадратичною апроксимацією  
Трикутний скінченний елемент



Прямокутний скінченний елемент Лагранжева сімейства

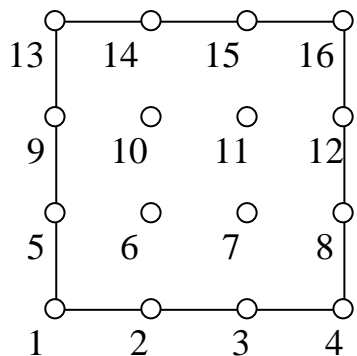


Скінченний елемент Серендіпова сімейства

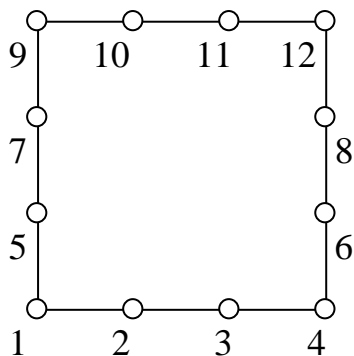


в) з кубічною апроксимацією

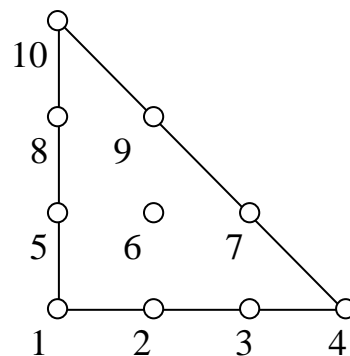
Лагранжев SE



Серендипов SE

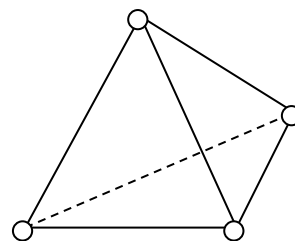
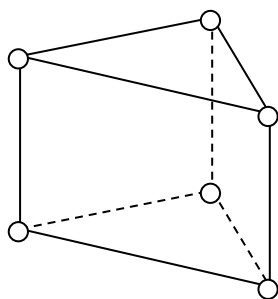
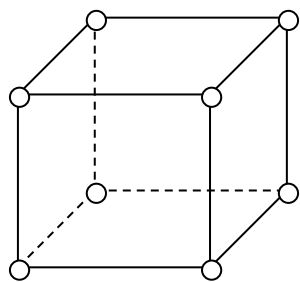


Трикутний SE



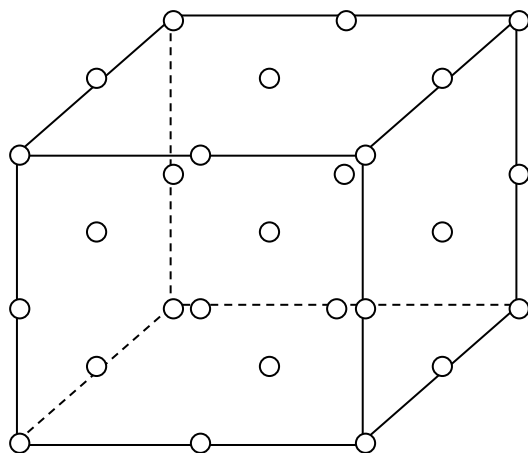
3) Просторові SE

а) з лінійною апроксимацією

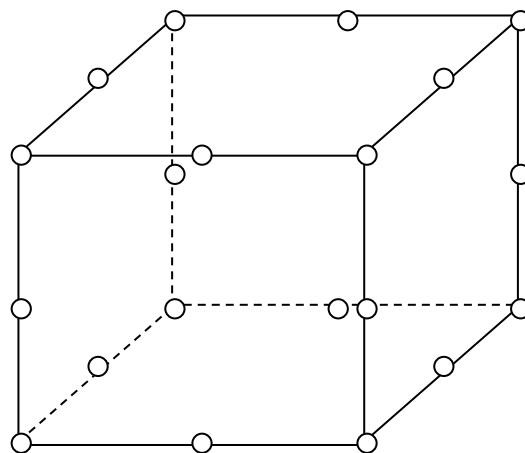


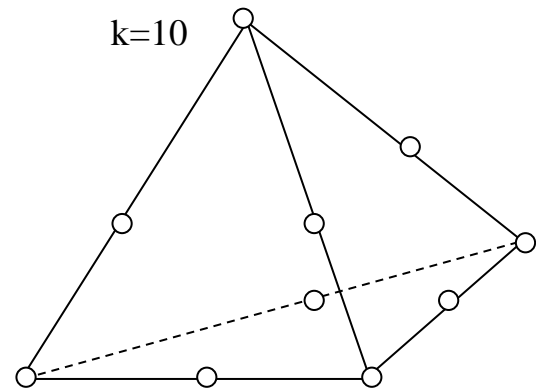
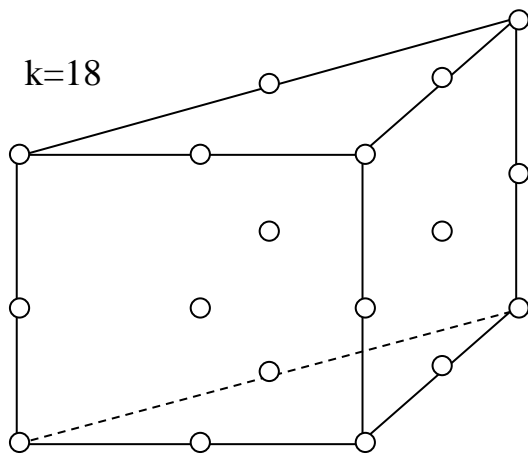
б) із квадратичною апроксимацією (к – кількість вузлів)

Лагранжев SE (к=27)



Серендипов SE (к=20)

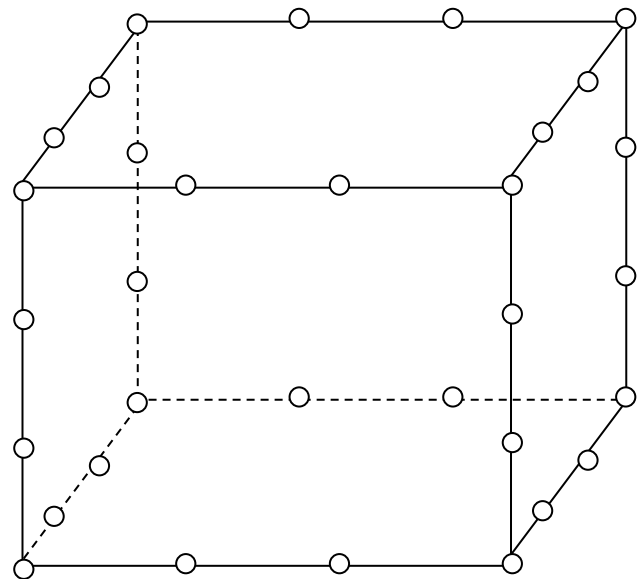
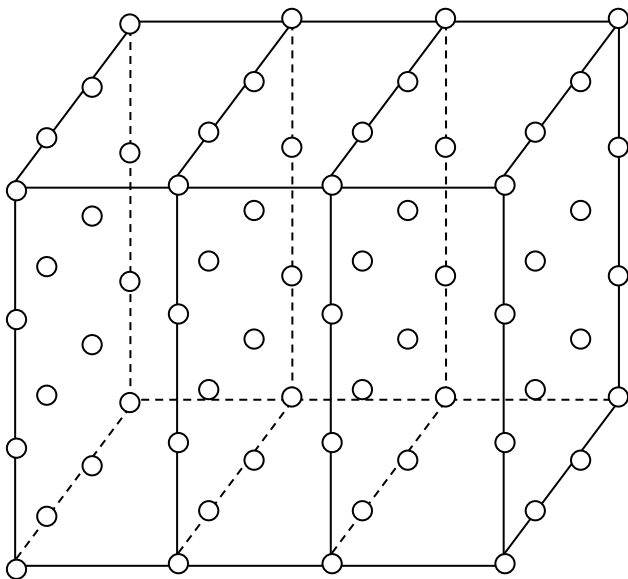




в) з кубічною апроксимацією

Лагранжев СЕ ( $k=64$ )

Серендипов СЕ ( $k=32$ )



### Контрольні запитання

1. Опишіть ідею методу скінченних елементів.
2. Правила дискретизації неперервного тіла на скінченні елементи.
3. Як у методі скінченних елементів вирішується проблема описання об'єктів криволінійної форми або криволінійних меж об'єктів.
4. Які функції використовуються у методі скінченних елементів для апроксимації шуканої величини. Вимоги до таких функцій.
5. Типи одновимірних скінченних елементів.

6. Типи двовимірних скінченних елементів.
7. Типи просторових скінченних елементів.
8. У чому відмінність між скінченними елементами Лагранжева та Серендипова сімейств.

### 3 ФУНКЦІЇ ФОРМИ ДЛЯ СТРИЖНЕВОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА

#### 3.1 Функції форми для стрижневого скінченного елемента з лінійної апроксимацією переміщень

Для позначення вершин елемента пронумеруємо вузли, як показано на рис. 3.1. Кожному вузлові поставимо у відповідність координати  $x^{(i)}$  ( $i = 1, 2$  – номери вузлів). Кожен вузол стрижня має один ступінь свободи, обумовлений переміщенням  $u^{(i)}$ . Повне число ступенів свободи стрижневого скінченного елемента дорівнює двом.

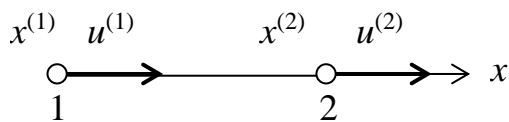


Рис. 3.1

Вектор переміщень вузлів SE представимо у виді:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{Bmatrix}. \quad (3.1)$$

Припустимо, що функція переміщень  $u(x)$  у межах SE підкоряється лінійному закону:

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x. \quad (3.2)$$

Дві постійні  $\alpha_i$  можуть бути знайдені через вузлові переміщення  $u^{(i)}$  і координати вузлів  $x^{(i)}$  з розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 x^{(1)} = u^{(1)}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 x^{(2)} = u^{(2)}. \end{cases}$$

Розв'яжемо дану систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x^{(1)} \\ 1 & x^{(2)} \end{vmatrix} = x^{(2)} - x^{(1)};$$

$$\Delta_{\alpha_1} = \begin{vmatrix} u^{(1)} & x^{(1)} \\ u^{(2)} & x^{(2)} \end{vmatrix} = u^{(1)} x^{(2)} - u^{(2)} x^{(1)}; \quad \Delta_{\alpha_2} = \begin{vmatrix} 1 & u^{(1)} \\ 1 & u^{(2)} \end{vmatrix} = u^{(2)} - u^{(1)}.$$

Тоді

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_{\alpha_1}}{\Delta} = \frac{u^{(1)}x^{(2)} - u^{(2)}x^{(1)}}{x^{(2)} - x^{(1)}}; \alpha_2 = \frac{\Delta_{\alpha_2}}{\Delta} = \frac{u^{(2)} - u^{(1)}}{x^{(2)} - x^{(1)}}.$$

Підставляючи отримані співвідношення для  $\alpha_i$  у вираження (3.2), перетворимо його в такий спосіб:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{u^{(1)}x^{(2)} - u^{(2)}x^{(1)}}{x^{(2)} - x^{(1)}} + \frac{u^{(2)} - u^{(1)}}{x^{(2)} - x^{(1)}}x = \\ &= \frac{1}{x^{(2)} - x^{(1)}} (u^{(1)}x^{(2)} - u^{(2)}x^{(1)} + u^{(2)}x - u^{(1)}x) = \\ &= u^{(1)} \left( \frac{x^{(2)} - x}{x^{(2)} - x^{(1)}} \right) + u^{(2)} \left( \frac{x - x^{(1)}}{x^{(2)} - x^{(1)}} \right) = u^{(1)}N_1 + u^{(2)}N_2, \end{aligned}$$

де

$$N_1 = \frac{x^{(2)} - x}{x^{(2)} - x^{(1)}}, N_2 = \frac{x - x^{(1)}}{x^{(2)} - x^{(1)}}$$

– функції форми стрижневого скінченного елемента з лінійною апроксимацією переміщень.

Нехай  $x^{(1)} = 1$ ;  $x^{(2)} = 2$ . Знайдемо функції форми для даного СЕ:

$$N_1 = \frac{2 - x}{2 - 1} = 2 - x; N_2 = \frac{x - 1}{2 - 1} = x - 1.$$

При  $x^{(1)} = 1$ :  $N_1 = 1$ ;  $N_2 = 0$ .

При  $x^{(2)} = 2$ :  $N_1 = 0$ ;  $N_2 = 1$ .

Нехай задані вузлові переміщення  $u^{(1)} = 0$ ;  $u^{(2)} = 1$ . Знайдемо переміщення в точках скінченного елемента при  $x = 2$ ;  $x = 3/2$ .

$$\begin{aligned} u(2) &= 0 \cdot (2 - 2) + 1 \cdot (2 - 1) = 1; \\ u(3/2) &= 0 \cdot (2 - 3/2) + 1 \cdot (3/2 - 1) = 1/2. \end{aligned}$$

### 3.2 Функції форми для стрижневого скінченного елемента з квадратичною апроксимацією переміщень

Кожному вузлові (рис. 3.2) поставимо у відповідність координати  $x^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$  – номери вузлів). Кожен вузол стрижня має один ступінь свободи, обумовлений переміщенням  $u^{(i)}$ . Повне число ступенів волі даного стрижневого скінченного елемента дорівнює трьом.

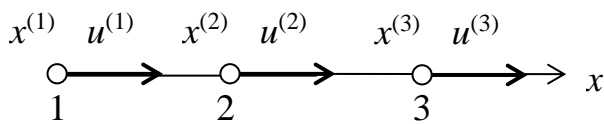


Рис. 3.2

Вектор переміщень вузлів СЕ представимо у виді:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ u^{(3)} \end{Bmatrix}. \quad (3.3)$$

Припустимо, що функція переміщень  $u(x)$  у межах СЕ підкоряється квадратичному закону:

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2. \quad (3.4)$$

Три постійні  $\alpha_i$  можуть бути знайдені через вузлові переміщення  $u^{(i)}$  і координати вузлів  $x^{(i)}$  з розв'язанням системи рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 x^{(1)} + \alpha_3 (x^{(1)})^2 = u^{(1)}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 x^{(2)} + \alpha_3 (x^{(2)})^2 = u^{(2)}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 x^{(3)} + \alpha_3 (x^{(3)})^2 = u^{(3)}. \end{cases}$$

Розв'яжемо дану систему методом Крамера:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & x^{(1)} & (x^{(1)})^2 \\ 1 & x^{(2)} & (x^{(2)})^2 \\ 1 & x^{(3)} & (x^{(3)})^2 \end{vmatrix} = x^{(2)}(x^{(3)})^2 + x^{(1)}(x^{(2)})^2 + x^{(3)}(x^{(1)})^2 - \\ &\quad - (x^{(2)}(x^{(1)})^2 + x^{(3)}(x^{(2)})^2 + x^{(1)}(x^{(3)})^2) = \\ &= x^{(2)}x^{(3)}(x^{(3)} - x^{(2)}) + x^{(1)}x^{(2)}(x^{(2)} - x^{(1)}) + x^{(3)}x^{(1)}(x^{(1)} - x^{(3)}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\alpha_1} &= \begin{vmatrix} u^{(1)} & x^{(1)} & (x^{(1)})^2 \\ u^{(2)} & x^{(2)} & (x^{(2)})^2 \\ u^{(3)} & x^{(3)} & (x^{(3)})^2 \end{vmatrix} = u^{(1)}x^{(2)}(x^{(3)})^2 + u^{(3)}x^{(1)}(x^{(2)})^2 + \\ &+ u^{(2)}x^{(3)}(x^{(1)})^2 - \left( u^{(3)}x^{(2)}(x^{(1)})^2 + u^{(1)}x^{(3)}(x^{(2)})^2 + u^{(2)}x^{(1)}(x^{(3)})^2 \right) = \\ &= u^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}(x^{(3)}-x^{(2)}) + u^{(3)}x^{(1)}x^{(2)}(x^{(2)}-x^{(1)}) + u^{(2)}x^{(3)}x^{(1)}(x^{(1)}-x^{(3)}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\alpha_2} &= \begin{vmatrix} 1 & u^{(1)} & (x^{(1)})^2 \\ 1 & u^{(2)} & (x^{(2)})^2 \\ 1 & u^{(3)} & (x^{(3)})^2 \end{vmatrix} = u^{(2)}(x^{(3)})^2 + u^{(1)}(x^{(2)})^2 + u^{(3)}(x^{(1)})^2 - \\ &- \left( u^{(2)}(x^{(1)})^2 + u^{(3)}(x^{(2)})^2 + u^{(1)}(x^{(3)})^2 \right) = \\ &= u^{(2)} \left( (x^{(3)})^2 - (x^{(1)})^2 \right) + u^{(1)} \left( (x^{(2)})^2 - (x^{(3)})^2 \right) + u^{(3)} \left( (x^{(1)})^2 - (x^{(3)})^2 \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\alpha_3} &= \begin{vmatrix} 1 & x^{(1)} & u^{(1)} \\ 1 & x^{(2)} & u^{(2)} \\ 1 & x^{(3)} & u^{(3)} \end{vmatrix} = u^{(3)}x^{(2)} + u^{(1)}x^{(3)} + u^{(2)}x^{(1)} - \\ &- \left( u^{(1)}x^{(2)} + u^{(2)}x^{(3)} + u^{(3)}x^{(1)} \right) = \\ &= u^{(3)}(x^{(2)}-x^{(1)}) + u^{(1)}(x^{(3)}-x^{(2)}) + u^{(2)}(x^{(1)}-x^{(3)}). \end{aligned}$$

Уведемо позначення:

$$a_1 = x^{(2)}x^{(3)}(x^{(3)}-x^{(2)}); a_2 = x^{(1)}x^{(3)}(x^{(1)}-x^{(3)}); a_3 = x^{(1)}x^{(2)}(x^{(2)}-x^{(1)});$$

$$b_1 = (x^{(2)})^2 - (x^{(3)})^2; b_2 = (x^{(3)})^2 - (x^{(1)})^2; b_3 = (x^{(1)})^2 - (x^{(2)})^2;$$

$$c_1 = x^{(3)}-x^{(2)}; c_2 = x^{(1)}-x^{(3)}; c_3 = x^{(2)}-x^{(1)}.$$

Тоді

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_{\alpha_1}}{\Delta} = \frac{u^{(1)}a_1 + u^{(2)}a_2 + u^{(3)}a_3}{a_1 + a_2 + a_3};$$

$$\alpha_2 = \frac{\Delta_{\alpha_2}}{\Delta} = \frac{u^{(1)}b_1 + u^{(2)}b_2 + u^{(3)}b_3}{a_1 + a_2 + a_3};$$

$$\alpha_3 = \frac{\Delta_{\alpha_3}}{\Delta} = \frac{u^{(1)}c_1 + u^{(2)}c_2 + u^{(3)}c_3}{a_1 + a_2 + a_3}.$$



Підставляючи отримані співвідношення для  $\alpha_i$  у вираження (3.4), перетворимо його в такий спосіб:

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \frac{u^{(1)}a_1 + u^{(2)}a_2 + u^{(3)}a_3}{a_1 + a_2 + a_3} + \frac{u^{(1)}b_1 + u^{(2)}b_2 + u^{(3)}b_3}{a_1 + a_2 + a_3}x + \\
 &\quad + \frac{u^{(1)}c_1 + u^{(2)}c_2 + u^{(3)}c_3}{a_1 + a_2 + a_3}x^2 = \frac{1}{a_1 + a_2 + a_3} \times \\
 &\times \left( u^{(1)}(a_1 + b_1x + c_1x^2) + u^{(2)}(a_2 + b_2x + c_2x^2) + u^{(3)}(a_3 + b_3x + c_3x^2) \right) = \\
 &= u^{(1)}N_1 + u^{(2)}N_2 + u^{(3)}N_3,
 \end{aligned}$$

де функції форми стрижневого скінченного елемента з квадратичною апроксимацією переміщень мають вид:

$$N_1 = \frac{a_1 + b_1x + c_1x^2}{a_1 + a_2 + a_3}; \quad N_2 = \frac{a_2 + b_2x + c_2x^2}{a_1 + a_2 + a_3}; \quad N_3 = \frac{a_3 + b_3x + c_3x^2}{a_1 + a_2 + a_3}.$$

Нехай  $x^{(1)} = 0$ ;  $x^{(2)} = 1$ ;  $x^{(3)} = 2$ . Знайдемо функції форми для даного СЕ:

$$a_1 = 1 \cdot 2 \cdot (2 - 1) = 2; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = 0;$$

$$b_1 = -3; \quad b_2 = 4; \quad b_3 = -1;$$

$$c_1 = 1; \quad c_2 = -2; \quad c_3 = 1.$$

$$N_1 = \frac{2 + (-3) \cdot x + 1 \cdot x^2}{2} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2;$$

$$N_2 = \frac{0 + 4 \cdot x + (-2) \cdot x^2}{2} = 2x - x^2;$$

$$N_3 = \frac{0 + (-1) \cdot x + 1 \cdot x^2}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2.$$

$$\text{При } x^{(1)} = 0: N_1 = 1; \quad N_2 = 0; \quad N_3 = 0.$$

$$\text{При } x^{(2)} = 1: N_1 = 0; \quad N_2 = 1; \quad N_3 = 0.$$

$$\text{При } x^{(3)} = 2: N_1 = 0; \quad N_2 = 0; \quad N_3 = 1.$$

Нехай задані вузлові переміщення  $u^{(1)} = 0$ ;  $u^{(2)} = 2$ ;  $u^{(3)} = 4$ . Знайдемо переміщення в точках скінченного елемента при  $x = 2$ ,  $x = 3/2$ .

$$u(2) = 0 \cdot \left(1 - \frac{3}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2^2\right) + 2 \cdot (2 \cdot 2 - 2^2) + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2^2\right) = 4;$$

$$u\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \cdot \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + 2 \cdot \left(2 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = 3.$$

### *Практичне завдання*

#### **Апроксимуючі функції для одновимірних скінченних елементів**

Згідно номеру варіанта знайти функції форми для одновимірних скінченних елементів. Скінченний елемент має координати кінців  $c$  та  $d$ . Координати внутрішніх вузлів знаходяться рівномірним розбиттям відрізка  $[c; d]$ . Знайти шукану функцію (переміщення  $u$  або температуру  $T$ ) у точці з координатою  $t$ , якщо відомі вузлові значення шуканої функції ( $u_i$  або  $T_i$ ):

1. Апроксимуюча функція квадратична.  $c=1, d=2, t=5/4, u_1=0, u_2=1, u_3=5/2$ .
2. Апроксимуюча функція квадратична.  $c=2, d=4, t=3,5, T_1=0, T_2=1, T_3=3$ .
3. Апроксимуюча функція лінійна.  $c=-1, d=1, t=3/4, u_1=3, u_2=1$ .
4. Апроксимуюча функція лінійна.  $c=2, d=6, t=3,5, T_1=1, T_2=3$ .
5. Апроксимуюча функція кубічна.  $c=1, d=2, t=7/4, u_1=0, u_2=1, u_3=5/2, u_4=3$ .
6. Апроксимуюча функція кубічна.  $c=0, d=3, t=2,5, T_1=0, T_2=1, T_3=3, T_4=3$ .
7. Апроксимуюча функція квадратична.  $c=1, d=4, t=7/2, u_1=1, u_2=2, u_3=5/2$ .
8. Апроксимуюча функція кубічна.  $c=0, d=3, t=2,5, T_1=0, T_2=1, T_3=3, T_4=4$ .

### *Контрольні запитання*

1. Дайте визначення функції форми.

2. Який вид має лінійна апроксимуюча функція одновимірного скінченного елемента.
3. Який вид має квадратична апроксимуюча функція одновимірного скінченного елемента.
4. Як перевірити правильність знайденої функції форми.

## 4 ПОБУДОВА МАТРИЦІ ЖОРСТКОСТІ СТРИЖНЕВОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА

### 4.1 Матриця жорсткості лінійного стрижневого скінченного елемента

В механіці деформованого твердого тіла необхідно визначити напружено-деформований стан конструкцій, тобто визначити напруження, деформації та переміщення будь-якої точки конструкції. Зважаючи, що ці три величини взаємопов'язані між собою, то достатньо знайти одну з них, щоб визначити інші. Як невідому функцію найбільш часто використовують вектор переміщень. Тому як апроксимуючу функцію будемо використовувати функцію переміщень:

$$u(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} u_i + \frac{x - x_i}{x_j - x_i} u_j, \quad (4.1)$$

де  $u_i$  та  $u_j$  – переміщення  $i$  та  $j$  вузлів,  $x_i$  та  $x_j$  – координати  $i$  та  $j$  вузлів.

Або в матричному виді

$$u = \{N\}\{\delta\}, \quad (4.2)$$

де  $\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$  – вектор вузлових переміщень.

Визначимо величину пружної енергії деформування скінченного елемента:

$$U = \int_V \frac{\{\varepsilon\}^T \{\sigma\}}{2} dV = \int_V \frac{\varepsilon_{xx}^T \sigma_{xx}}{2} dV = \int_{x_i}^{x_j} \frac{\varepsilon_{xx}^T \sigma_{xx}}{2} S dx, \quad (4.3)$$

де  $\sigma_{xx}$  – напруження, що діють в стержні в напрямі осі  $x$ ;

$\varepsilon_{xx}$  – деформації в напрямі осі  $x$ .

Тут враховано, що для стержня сталого перетину  $dV = S dx$ , де  $S$  – площа поперечного перетину.

Співвідношення Коші між деформаціями та переміщеннями для одновимірного випадку запишуться в виді:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx}. \quad (4.4)$$

або в матричному виді:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{d}{dx} (\{N\}\{\delta\}). \quad (4.5)$$

Враховуючи, що вузлові переміщення не залежать від координат, отримаємо

$$\varepsilon_{xx} = \frac{d\{N\}}{dx} \{\delta\} = [B]\{\delta\}, \quad (4.6)$$

де

$$[B] = \frac{d\{N\}}{dx} = \frac{d}{dx} \{N_i \ N_j\} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ x_j - x_i & x_j - x_i \end{bmatrix}.$$

А залежність між напруженнями та деформаціями визначається законом Гука:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\},$$

або

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}, \quad (4.7)$$

де  $E$  – модуль пружності матеріалу.

Або з урахуванням (4.6) вираз (4.7) прийме вид:

$$\sigma_{xx} = E[B]\{\delta\}. \quad (4.8)$$

З врахуванням (4.6) та (4.8) вираз (4.3) прийме вид:

$$U = \frac{1}{2} S \int_{x_i}^{x_j} ([B]\{\delta\})^T E [B]\{\delta\} dx. \quad (4.9)$$

Враховуючи, що  $([B]\{\delta\})^T = \{\delta\}^T [B]^T$ , отримаємо

$$U = \frac{1}{2} S \{\delta\}^T \int_{x_i}^{x_j} [B]^T E [B] dx \cdot \{\delta\}. \quad (4.10)$$

Вираз під знаком інтеграла називають матрицею жорсткості скінченного елемента:

$$[K] = S \int_{x_i}^{x_j} [B]^T E [B] dx.$$

#### 4.2 Вісьове навантаження стержня

Розглянемо стержень, жорстко закріплений на одному кінці та навантажений осевим навантаженням на іншому (рис. 4.1).

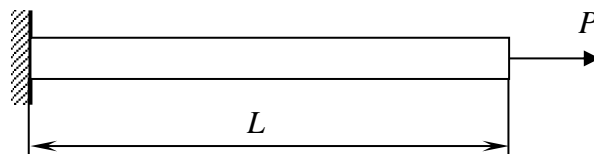


Рис. 4.1 Стержень, під дією навантаження, що розтягує

Розіб'ємо задану конструкцію на два скінченних елемента довжиною  $L/2$  (рис. 4.2).

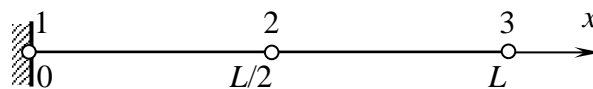


Рис. 4.2 Дискретизація стержня

Звідси маємо координати вузлів:  $x_1 = 0, x_2 = L/2, x_3 = L$ . Кожен вузол може переміщуватися в напрямі осі  $x$ , позначимо ці переміщення  $u_1, u_2, u_3$ . Знайдемо матрицю  $[B]$  для першого та другого елементів:

$$[B_{(1)}] = [B_{(2)}] = \begin{bmatrix} -\frac{2}{L} & \frac{2}{L} \end{bmatrix}.$$

Тоді матриця жорсткості для першого та другого елементів прийме вид:

$$\begin{aligned} [K_{(1)}] &= S \int_0^{L/2} [B_{(1)}]^T E [B_{(1)}] dx = S \int_0^{L/2} \begin{bmatrix} -\frac{2}{L} \\ \frac{2}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{2}{L} & \frac{2}{L} \end{bmatrix} dx = \\ &= SE \begin{bmatrix} \frac{4}{L^2} & -\frac{4}{L^2} \\ -\frac{4}{L^2} & \frac{4}{L^2} \end{bmatrix} \cdot x \Big|_0^{L/2} = \frac{2SE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K_{(2)}] &= S \int_{L/2}^L [B_{(2)}]^T E [B_{(2)}] dx = S \int_{L/2}^L \begin{bmatrix} -\frac{2}{L} \\ \frac{2}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{2}{L} & \frac{2}{L} \end{bmatrix} dx = \\ &= SE \begin{bmatrix} \frac{4}{L^2} & -\frac{4}{L^2} \\ -\frac{4}{L^2} & \frac{4}{L^2} \end{bmatrix} \cdot x \Big|_{L/2}^L = \frac{2SE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Згідно варіаційному принципу Лагранжа із всіх переміщень, що задовольняють кінематичним граничним умовам, стаціонарне значення потенціальної енергії надають ті переміщення, які задовольняють рівнянням рівноваги. Потенціальна енергія системи визначається формулою:

$$\Pi = U - A,$$

де  $A$  – робота зовнішніх сил.

Для нашої конструкції маємо

$$\Pi = \frac{1}{2} \{u_1 \quad u_2\} [K_{(1)}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \{u_2 \quad u_3\} [K_{(2)}] \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - [P] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix},$$

де  $[P] = [P_1 \ P_2 \ P_3]$  – вектор вузлових навантажень.

Враховуючи співвідношення для матриць жорсткості, а також жорстке защемлення одного кінця стержня ( $u_1 = 0$ ) та діюче навантаження ( $P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = P$ ) отримуємо вираз для потенціальної енергії стержня:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \{0 \ u_2\} \frac{2SE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \{u_2 \ u_3\} \frac{2SE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - \\ &- [0 \ 0 \ P] \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{SE}{L} \{-u_2 \ u_2\} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \frac{SE}{L} \{u_2 - u_3 \ u_3 - u_2\} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - Pu_3 = \\ &= \frac{SE}{L} u_2^2 + \frac{SE}{L} ((u_2 - u_3)u_2 + (u_3 - u_2)u_3) - Pu_3 = \\ &= \frac{SE}{L} (2u_2^2 - 2u_2u_3 + u_3^2) - Pu_3. \end{aligned}$$

Для того, щоб потенціальна енергія системи приймала екстремальне значення необхідно, щоб

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0, & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = \frac{SE}{L} (4u_2 - 2u_3) = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_3} = 0, & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi}{\partial u_3} = \frac{SE}{L} (-2u_2 + 2u_3) - P = 0. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{cases}$$

Звідси отримуємо систему

$$\begin{cases} 4u_2 - 2u_3 = 0, \\ -2u_2 + 2u_3 = \frac{PL}{SE}. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, отримуємо

$$u_2 = \frac{PL}{2SE}, u_3 = \frac{PL}{SE}.$$

Переміщення навантаженого кінця співпадають з теоретичним значенням, отриманим в опорі матеріалів.

Розв'яжемо дану задачу з використанням квадратичного скінченного елемента. Функція переміщень для кожного скінченного елемента прийме вид:



$$\begin{aligned}
u(x) = & \frac{x_k x_j (x_k - x_j) + (x_j^2 - x_k^2)x + (x_k - x_j)x^2}{x_k^2(x_j - x_i) + x_j^2(x_i - x_k) + x_i^2(x_k - x_j)} u_i + \\
& + \frac{x_k x_i (x_i - x_k) + (x_k^2 - x_i^2)x + (x_i - x_k)x^2}{x_k^2(x_j - x_i) + x_j^2(x_i - x_k) + x_i^2(x_k - x_j)} u_j + \\
& + \frac{x_i x_j (x_j - x_i) + (x_i^2 - x_j^2)x + (x_j - x_i)x^2}{x_k^2(x_j - x_i) + x_j^2(x_i - x_k) + x_i^2(x_k - x_j)} u_k,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

де  $u_i, u_j$  та  $u_k$  – переміщення вузлів  $i, j, k$ .

Або в матричному виді

$$u = \{N\}\{\delta\}, \tag{4.12}$$

де  $\{\delta\} = \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{pmatrix}$  – вектор вузлових переміщень.

Розіб'ємо дану конструкцію на два скінченних елемента довжиною  $L/2$  (рис. 4.3).

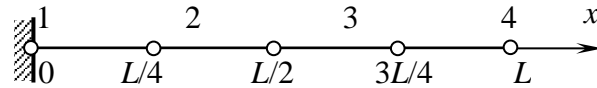


Рис. 4.3 Дискретизація стержня

Звідси маємо координати вузлів першого скінченного елемента –  $x_1 = 0, x_2 = L/4, x_3 = L/2$  та другого –  $x_3 = L/2, x_4 = 3L/4, x_5 = L$ . Кожен вузол може переміщуватися в напрямку осі  $x$ , позначимо ці переміщення  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ . Знайдемо функції форми для першого елемента:

$$N_1 = \frac{8}{L^2} x^2 - \frac{6}{L} x + 1,$$

$$N_2 = -\frac{16}{L^2} x^2 + \frac{8}{L} x,$$

$$N_3 = \frac{8}{L^2} x^2 - \frac{2}{L} x;$$

для другого елемента:

$$N_3 = \frac{8}{L^2}x^2 - \frac{14}{L}x + 6,$$

$$N_4 = -\frac{16}{L^2}x^2 + \frac{24}{L}x - 8,$$

$$N_5 = \frac{8}{L^2}x^2 - \frac{10}{L}x + 3.$$

Знайдемо матрицю  $[B]$  для першого та другого елементів:

$$[B_{(1)}] = \begin{bmatrix} \frac{16}{L^2}x - \frac{6}{L} & -\frac{32}{L^2}x + \frac{8}{L} & \frac{16}{L^2}x - \frac{2}{L} \end{bmatrix};$$

$$[B_{(2)}] = \begin{bmatrix} \frac{16}{L^2}x - \frac{14}{L} & -\frac{32}{L^2}x + \frac{24}{L} & \frac{16}{L^2}x - \frac{10}{L} \end{bmatrix}.$$

Тоді матриця жорсткості для першого та другого елементів прийме вид:

$$[K_{(1)}] = S \int_0^{L/2} [B_{(1)}]^T E [B_{(1)}] dx =$$

$$= S \int_0^{L/2} \begin{bmatrix} \frac{16}{L^2}x - \frac{6}{L} \\ -\frac{32}{L^2}x + \frac{8}{L} \\ \frac{16}{L^2}x - \frac{2}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} \frac{16}{L^2}x - \frac{6}{L} & -\frac{32}{L^2}x + \frac{8}{L} & \frac{16}{L^2}x - \frac{2}{L} \end{bmatrix} dx =$$

$$= \frac{4SE}{L^2} \begin{bmatrix} \frac{7}{6}L & -\frac{4}{3}L & \frac{1}{6}L \\ -\frac{4}{3}L & \frac{8}{3}L & -\frac{4}{3}L \\ \frac{1}{6}L & -\frac{4}{3}L & \frac{7}{6}L \end{bmatrix} = \frac{2SE}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$[K_{(2)}] = S \int_{L/2}^L [B_{(2)}]^T E [B_{(2)}] dx =$$

$$= S \int_{L/2}^L \begin{bmatrix} \frac{16}{L^2}x - \frac{14}{L} \\ -\frac{32}{L^2}x + \frac{24}{L} \\ \frac{16}{L^2}x - \frac{10}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} \frac{16}{L^2}x - \frac{14}{L} & -\frac{32}{L^2}x + \frac{24}{L} & \frac{16}{L^2}x - \frac{10}{L} \end{bmatrix} dx =$$

$$= \frac{4SE}{L^2} \begin{bmatrix} \frac{7}{6}L & -\frac{4}{3}L & \frac{1}{6}L \\ -\frac{4}{3}L & \frac{8}{3}L & -\frac{4}{3}L \\ \frac{1}{6}L & -\frac{4}{3}L & \frac{7}{6}L \end{bmatrix} = \frac{2SE}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Згідно варіаційному принципу Лагранжа із всіх переміщень, що задовольняють кінематичним граничним умовам, стаціонарне значення потенціальної енергії надають ті переміщення, які задовольняють рівнянням рівноваги. Для нашої задачі маємо

$$\Pi = \frac{1}{2} \{u_1 \quad u_2 \quad u_3\} [K_{(1)}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \{u_3 \quad u_4 \quad u_5\} [K_{(2)}] \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} - [P] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix},$$

де  $[P] = [P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5]$  – вектор вузлових навантажень.

Враховуючи співвідношення для матриць жорсткості, а також жорстке защемлення одного кінця стержня ( $u_1 = 0$ ) та діюче навантаження ( $P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0, P_4 = 0, P_5 = P$ ) отримаємо вираз для потенціальної енергії стержня:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \{0 \quad u_2 \quad u_3\} \frac{2SE}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \\ &+ \frac{1}{2} \{u_3 \quad u_4 \quad u_5\} \frac{2SE}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} - [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad P] \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{SE}{L} \{-8u_2 + u_3 \quad 16u_2 - 8u_3 \quad -8u_2 + 7u_3\} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \\ &+ \frac{SE}{L} \{7u_3 - 8u_4 + u_5 \quad -8u_3 + 16u_4 - 8u_5 \quad u_3 - 8u_4 + 7u_5\} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} - Pu_5 = \\ &= \frac{SE}{3L} ((16u_2 - 8u_3)u_2 + (7u_3 - 8u_2)u_3 + (7u_3 - 8u_4 + u_5)u_3 + \\ &+ (-8u_3 + 16u_4 - 8u_5)u_4 + (u_3 - 8u_4 + 7u_5)u_5) - Pu_5 = \end{aligned}$$

$$= \frac{SE}{3L} (16u_2^2 - 16u_2u_3 + 14u_3^2 - 16u_3u_4 + 2u_3u_5 + 16u_4^2 - 16u_4u_5 + 7u_5^2) - Pu_3.$$

Для того, щоб потенціальна енергія системи приймала екстремальне значення необхідно, щоб

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_3} = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_4} = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_5} = 0, \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = \frac{SE}{3L} (32u_2 - 16u_3) = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_3} = \frac{SE}{3L} (-16u_2 + 28u_3 - 16u_4 + 2u_5) = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_4} = \frac{SE}{3L} (-16u_3 + 32u_4 - 16u_5) = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_5} = \frac{SE}{3L} (2u_3 - 16u_4 + 14u_5) - P = 0. \end{cases}$$

Звідки отримуємо систему

$$\begin{cases} 32u_2 - 16u_3 = 0, \\ -16u_2 + 28u_3 - 16u_4 + 2u_5 = 0, \\ -16u_3 + 32u_4 - 16u_5 = 0, \\ 2u_3 - 16u_4 + 14u_5 = \frac{3LP}{SE}. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, отримаємо

$$u_2 = \frac{PL}{4SE}, u_3 = \frac{PL}{2SE}, u_4 = \frac{3PL}{4SE}, u_5 = \frac{PL}{SE}.$$

### 4.3 Перенос тепла в стержні

Розглянемо приклад використання методу скінченних елементів для розрахунку одновимірного потоку тепла в стержні с теплоізолюваною боковою поверхнею (рис. 3.4). Площа поперечного перетину стержня дорівнює  $S$ . Необхідно знайти розподіл температури по довжині стержня.

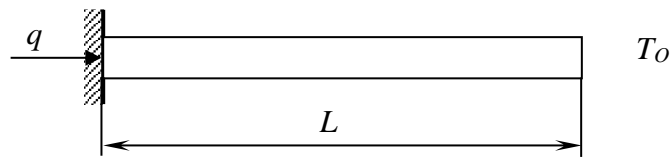


Рис. 3.4 Перенос тепла в стержні

До закріпленого в стіні кінця стержня підводиться тепловий потік заданої інтенсивності  $q$ . На вільному кінці стержня відбувається конвективний обмін тепла. Коефіцієнт теплообміну  $h$ , температура оточуючого середовища  $T_0$ . Стержень теплоізований, так що втрат тепла через бокову поверхню не відбувається. Опис рівноважного процесу переносу тепла базується на мінімізації рівняння:

$$\chi = \int_V \frac{\lambda}{2} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 dV + \int_{S_1} \left[ qT + \frac{1}{2} h(T - T_0)^2 \right] dS_1,$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності матеріалу стержня,  $T$  – температура стержня,  $V$  – об’єм стержня,  $S_1$  – площа зовнішньої поверхні стержня.

Розіб’ємо конструкцію аналогічно попередній задачі на два скінченних елементи (рис. 4.5).

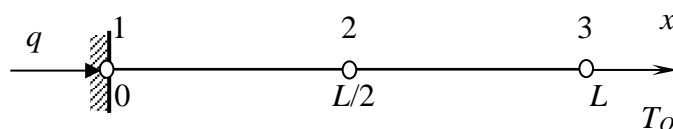


Рис. 3.5 Розрахункова схема для переносу тепла в стержні

Аналогічно співвідношенню (4.1) невідома функція температури всередині скінченного елемента буде визначатися за формулою

$$T = \{N\}\{\delta\},$$

де  $\{N\}$  – матриця функцій форми,  $\{\delta\} = \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix}$  – вектор вузлових температур.

Тоді для кожного скінченного елемента

$$\frac{dT}{dx} = \frac{d(\{N\}\{\delta\})}{dx} = \frac{d\{N\}}{dx}\{\delta\} = [B]\{\delta\}.$$

Вираз для функціонала при такій скінченно-елементній дискретизації прийме вид:

$$\chi = \chi_{(1)} + \chi_{(2)}.$$

Враховуючи, що площа поперечного перетину однакова для стержня та  $dV = Sdx$ , а також граничні умови, отримуємо вираз для функціоналу:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\lambda S}{2} \int_0^{L/2} ([B_{(1)}]\{\delta_{(1)}\})^2 dx + \frac{\lambda S}{2} \int_{L/2}^L ([B_{(2)}]\{\delta_{(2)}\})^2 dx + qT_1S + \frac{hS}{2}(T_3 - T_0)^2 = \\ &= \frac{\lambda S}{2} \int_0^{L/2} \left(-\frac{2T_1}{L} + \frac{2T_2}{L}\right)^2 dx + \frac{\lambda S}{2} \int_{L/2}^L \left(-\frac{2T_2}{L} + \frac{2T_3}{L}\right)^2 dx + qT_1S + \\ &+ \frac{hS}{2}(T_3 - T_0)^2 = \frac{2\lambda S}{L^2}(T_2 - T_1)^2 \int_0^{L/2} dx + \frac{2\lambda S}{L^2}(T_3 - T_2)^2 \int_{L/2}^L dx + qT_1S + \\ &+ \frac{hS}{2}(T_3 - T_0)^2 = \frac{\lambda S}{L}(2T_2^2 + T_1^2 + T_3^2 - 2T_1T_2 - 2T_2T_3) + qT_1S + \\ &+ \frac{hS}{2}(T_3^2 - 2T_0T_3 + T_0^2). \end{aligned}$$

Дійсними значеннями  $T_1$ ,  $T_2$  та  $T_3$  є ті, при яких величина функціонала мінімальна, тому

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \chi}{\partial T_1} = \frac{\lambda S}{L}(2T_1 - 2T_2) + qS = \frac{2\lambda S}{L}(T_1 - T_2) + qS = 0, \\ \frac{\partial \chi}{\partial T_2} = \frac{\lambda S}{L}(4T_2 - 2T_1 - 2T_3) = \frac{2\lambda S}{L}(2T_2 - T_1 - T_3) = 0, \\ \frac{\partial \chi}{\partial T_3} = \frac{\lambda S}{L}(2T_3 - 2T_2) + \frac{hS}{2}(2T_3 - 2T_0) = \frac{2\lambda S}{L}(T_3 - T_2) + hS(T_3 - T_0) = 0. \end{array} \right.$$

Ця система в матричній формі запису представиться в виді

$$\begin{bmatrix} \frac{2\lambda S}{L} & -\frac{2\lambda S}{L} & 0 \\ -\frac{2\lambda S}{L} & \frac{4\lambda S}{L} & -\frac{2\lambda S}{L} \\ 0 & -\frac{2\lambda S}{L} & \frac{2\lambda S}{L} + hS \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -qS \\ 0 \\ hST_0 \end{bmatrix},$$

або

$$[H]\{\delta\} = [F],$$

де матриця  $[H]$  називається матрицею теплопровідності, а вектор  $[F]$  – вектором теплового навантаження.

Розв'язком даної системи є:

$$T_3 = T_0 - \frac{q}{h}, T_2 = T_0 - \frac{q}{h} - \frac{qL}{2\lambda}, T_1 = T_0 - \frac{q}{h} - \frac{qL}{\lambda}.$$

### *Практичне завдання*

#### **Матриця жорсткості одновимірного скінченного елемента**

Згідно номеру варіанта знайти матриці жорсткості для одновимірних скінчених елементів. Скінченний елемент має координати (у метрах) кінців  $c$  та  $d$ . Координати внутрішніх вузлів знаходяться рівномірним розбиттям відрізка  $[c; d]$ . Модуль пружності матеріалу  $E=2$  МПа, площа поперечного перерізу  $S=0,1$  м<sup>2</sup>:

1. Апроксимуюча функція квадратична.  $c=1, d=2$ .
2. Апроксимуюча функція квадратична.  $c=2, d=4$ .
3. Апроксимуюча функція лінійна.  $c=-1, d=1$ .
4. Апроксимуюча функція лінійна.  $c=2, d=6$ .
5. Апроксимуюча функція кубічна.  $c=1, d=2$ .
6. Апроксимуюча функція кубічна.  $c=0, d=3$ .
7. Апроксимуюча функція квадратична.  $c=1, d=4$ .
8. Апроксимуюча функція кубічна.  $c=0, d=3$ .

### *Контрольні запитання*

1. Від яких параметрів залежать коефіцієнти матриці жорсткості при розв'язанні статичних задач теорії пружності.
2. Від чого залежить розмірність матриці жорсткості.
3. Сформулюйте варіаційний принцип Лагранжа.



## 5 ФУНКЦІЇ ФОРМИ ДВОВИМІРНИХ ТА ПРОСТОРОВИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

### 5.1 Функції форми для плоского трикутного скінченного елемента з лінійною апроксимацією переміщень

Розглянемо трикутний скінченний елемент (рис. 5.1). Кожному вузлові поставимо у відповідність координати  $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$  – номери вузлів). Кожен вузол стрижня має два ступеня свободи, обумовлені переміщеннями  $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}$  по напрямку координатних осей  $x_1$  і  $x_2$  відповідно. Повне число ступенів свободи даного трикутного скінченного елемента дорівнює шести.

Вектор переміщень вузлів СЕ  
представимо у виді:

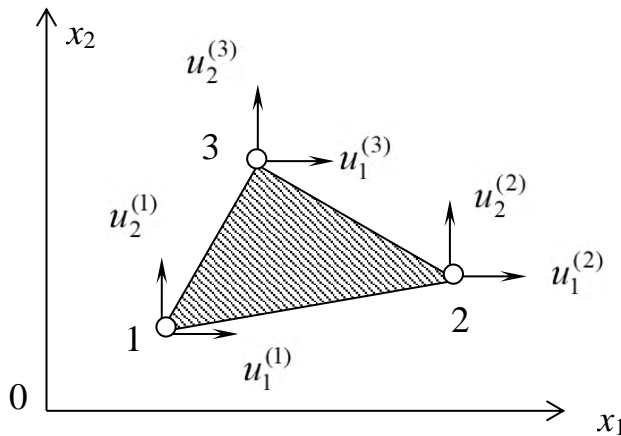


Рис. 5.1

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix}. \quad (5.1)$$

Припустимо, що функція переміщень  $u_1(x_1, x_2)$  і  $u_2(x_1, x_2)$  в межах СЕ підкоряється лінійному закону:

$$u_1(x_1, x_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2, \quad (5.2)$$

$$u_2(x_1, x_2) = \alpha_4 + \alpha_5 x_1 + \alpha_6 x_2. \quad (5.3)$$

Шість постійних  $\alpha_i$  можуть бути знайдені через вузлові переміщення  $u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2)$  і координати вузлів  $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}$  з незалежного розв'язання двох систем рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 x_1^{(1)} + \alpha_3 x_2^{(1)} = u_1^{(1)}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_1^{(2)} + \alpha_3 x_2^{(2)} = u_1^{(2)}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_1^{(3)} + \alpha_3 x_2^{(3)} = u_1^{(3)}; \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} \alpha_4 + \alpha_5 x_1^{(1)} + \alpha_6 x_2^{(1)} = u_2^{(1)}, \\ \alpha_4 + \alpha_5 x_1^{(2)} + \alpha_6 x_2^{(2)} = u_2^{(2)}, \\ \alpha_4 + \alpha_5 x_1^{(3)} + \alpha_6 x_2^{(3)} = u_2^{(3)}. \end{cases} \quad (5.5)$$

Розв'яжемо систему методом Крамера:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ 1 & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{vmatrix} = x_1^{(2)} x_2^{(3)} + x_1^{(1)} x_2^{(2)} + x_1^{(3)} x_2^{(1)} - \\ &\quad - \left( x_1^{(2)} x_2^{(1)} + x_1^{(3)} x_2^{(2)} + x_1^{(1)} x_2^{(3)} \right) = \\ &= \left( x_1^{(2)} x_2^{(3)} - x_1^{(3)} x_2^{(2)} \right) + \left( x_1^{(3)} x_2^{(1)} - x_1^{(1)} x_2^{(3)} \right) + \left( x_1^{(1)} x_2^{(2)} - x_1^{(2)} x_2^{(1)} \right); \end{aligned}$$

– подвоєна площа трикутника.

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha_1} &= \begin{vmatrix} u_1^{(1)} & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{vmatrix} = u_1^{(1)} x_1^{(2)} x_2^{(3)} + u_1^{(2)} x_1^{(1)} x_2^{(2)} + u_1^{(3)} x_1^{(3)} x_2^{(1)} - \\ &\quad - \left( u_1^{(3)} x_1^{(2)} x_2^{(1)} + u_1^{(1)} x_1^{(3)} x_2^{(2)} + u_1^{(2)} x_1^{(1)} x_2^{(3)} \right) = u_1^{(1)} \left( x_1^{(2)} x_2^{(3)} - x_1^{(3)} x_2^{(2)} \right) + \\ &\quad + u_1^{(2)} \left( x_1^{(3)} x_2^{(1)} - x_1^{(1)} x_2^{(3)} \right) + u_1^{(3)} \left( x_1^{(1)} x_2^{(2)} - x_1^{(2)} x_2^{(1)} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha_2} &= \begin{vmatrix} 1 & u_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ 1 & u_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ 1 & u_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{vmatrix} = u_1^{(2)} x_2^{(3)} + u_1^{(1)} x_2^{(2)} + u_1^{(3)} x_2^{(1)} - \\ &\quad - \left( u_1^{(2)} x_2^{(1)} + u_1^{(3)} x_2^{(2)} + u_1^{(1)} x_2^{(3)} \right) = \\ &= u_1^{(1)} \left( x_2^{(2)} - x_2^{(3)} \right) + u_1^{(2)} \left( x_2^{(3)} - x_2^{(1)} \right) + u_1^{(3)} \left( x_2^{(1)} - x_2^{(2)} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha_3} &= \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & u_1^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & u_1^{(2)} \\ 1 & x_1^{(3)} & u_1^{(3)} \end{vmatrix} = u_1^{(3)} x_1^{(2)} + u_1^{(2)} x_1^{(1)} + u_1^{(1)} x_1^{(3)} - \\ &\quad - \left( u_1^{(1)} x_1^{(2)} + u_1^{(2)} x_1^{(3)} + u_1^{(3)} x_1^{(1)} \right) = \end{aligned}$$

$$= u_1^{(1)} (x_1^{(3)} - x_1^{(2)}) + u_1^{(2)} (x_1^{(1)} - x_1^{(3)}) + u_1^{(3)} (x_1^{(2)} - x_1^{(1)}).$$

Уведемо позначення:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1^{(2)} x_2^{(3)} - x_1^{(3)} x_2^{(2)}; \quad a_2 = x_1^{(3)} x_2^{(1)} - x_1^{(1)} x_2^{(3)}; \quad a_3 = x_1^{(1)} x_2^{(2)} - x_1^{(2)} x_2^{(1)}; \\ b_1 &= x_2^{(2)} - x_2^{(3)}; \quad b_2 = x_2^{(3)} - x_2^{(1)}; \quad b_3 = x_2^{(1)} - x_2^{(2)}; \\ c_1 &= x_1^{(3)} - x_1^{(2)}; \quad c_2 = x_1^{(1)} - x_1^{(3)}; \quad c_3 = x_1^{(2)} - x_1^{(1)}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\Delta_{\alpha_1}}{\Delta} = \frac{u_1^{(1)} a_1 + u_1^{(2)} a_2 + u_1^{(3)} a_3}{a_1 + a_2 + a_3}; \\ \alpha_2 &= \frac{\Delta_{\alpha_2}}{\Delta} = \frac{u_1^{(1)} b_1 + u_1^{(2)} b_2 + u_1^{(3)} b_3}{a_1 + a_2 + a_3}; \\ \alpha_3 &= \frac{\Delta_{\alpha_3}}{\Delta} = \frac{u_1^{(1)} c_1 + u_1^{(2)} c_2 + u_1^{(3)} c_3}{a_1 + a_2 + a_3}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Підставимо співвідношення для  $\alpha_i$  у вираз для переміщень (5.2) і (5.3), та перетворимо його до виду:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \frac{u_1^{(1)} a_1 + u_1^{(2)} a_2 + u_1^{(3)} a_3}{a_1 + a_2 + a_3} + \frac{u_1^{(1)} b_1 + u_1^{(2)} b_2 + u_1^{(3)} b_3}{a_1 + a_2 + a_3} x_1 + \\ &+ \frac{u_1^{(1)} c_1 + u_1^{(2)} c_2 + u_1^{(3)} c_3}{a_1 + a_2 + a_3} x_2 = u_1^{(1)} \frac{a_1 + b_1 x_1 + c_1 x_2}{a_1 + a_2 + a_3} + \\ &+ u_1^{(2)} \frac{a_2 + b_2 x_1 + c_2 x_2}{a_1 + a_2 + a_3} + u_1^{(3)} \frac{a_3 + b_3 x_1 + c_3 x_2}{a_1 + a_2 + a_3} = \\ &= u_1^{(1)} N_1 + u_1^{(2)} N_2 + u_1^{(3)} N_3, \end{aligned} \tag{5.7}$$

де функції форми плоского трикутного скінченного елемента з лінійною апроксимацією переміщень мають вид:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{a_1 + b_1 x_1 + c_1 x_2}{a_1 + a_2 + a_3}; \\ N_2 &= \frac{a_2 + b_2 x_1 + c_2 x_2}{a_1 + a_2 + a_3}; \end{aligned}$$

$$N_3 = \frac{a_3 + b_3 x_1 + c_3 x_2}{a_1 + a_2 + a_3}. \quad (5.8)$$

Коефіцієнти  $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$  визначаються із системи (5.5), що відрізняється від системи (5.4) правою частиною. Тому аналогічно формулам (5.6), можемо записати вираження для  $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ , замінюючи вектор  $u_1^{(i)}$  вектором  $u_2^{(i)}$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{u_2^{(1)} a_1 + u_2^{(2)} a_2 + u_2^{(3)} a_3}{a_1 + a_2 + a_3}; \\ \alpha_2 &= \frac{u_2^{(1)} b_1 + u_2^{(2)} b_2 + u_2^{(3)} b_3}{a_1 + a_2 + a_3}; \\ \alpha_3 &= \frac{u_2^{(1)} c_1 + u_2^{(2)} c_2 + u_2^{(3)} c_3}{a_1 + a_2 + a_3}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Тоді вираження для  $u_2(x_1, x_2)$  представиться аналогічно (5.7) у такий спосіб:

$$u_2(x_1, x_2) = u_2^{(1)} N_1 + u_2^{(2)} N_2 + u_2^{(3)} N_3, \quad (5.10)$$

де  $N_1, N_2, N_3$  – функції форми, що знаходяться за формулами (5.8).

Вираження (5.7) та (5.10) у матричній формі запису можна представити як:

$$\{U\} = [N] \{u\}, \quad (5.11)$$

де  $\{U\} = \begin{Bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix}$  – вектор переміщень довільної точки СЕ,

$\{u\}$  – вектор вузлових переміщень виду (1),

$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$  – матриця функцій форми, підібрана таким

чином, щоб після підстановки її у вираження (5.11) одержати формули (5.7) і (5.10).

Нехай  $x_1^{(1)} = 0, x_2^{(1)} = 0, x_1^{(2)} = 1, x_2^{(2)} = 0, x_1^{(3)} = 0, x_2^{(3)} = 1$ . При таких даних одержуємо:

$$a_1 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1; \quad a_2 = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0; \quad a_3 = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 0;$$

$$b_1 = 0 - 1 = -1; b_2 = 1 - 0 = 1; b_3 = 0 - 0 = 0;$$

$$c_1 = 0 - 1 = -1; c_2 = 0 - 0 = 0; c_3 = 1 - 0 = 1.$$

$$N_1 = 1 - x_1 - x_2; N_2 = x_1; N_3 = x_2.$$

$$u_1(x_1, x_2) = u_1^{(1)}(1 - x_1 - x_2) + u_1^{(2)}x_1 + u_1^{(3)}x_2,$$

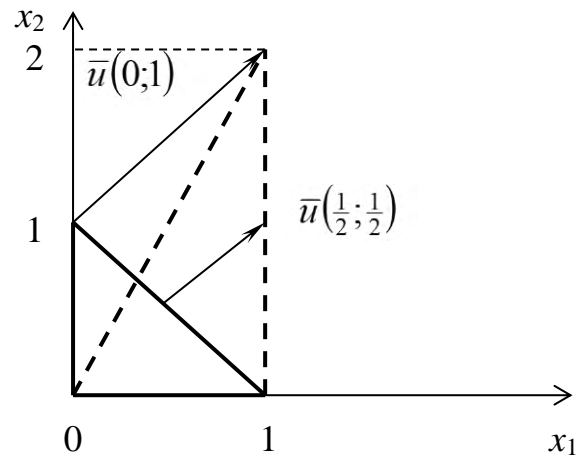
$$u_2(x_1, x_2) = u_2^{(1)}(1 - x_1 - x_2) + u_2^{(2)}x_1 + u_2^{(3)}x_2.$$

Нехай  $u_1^{(1)} = u_2^{(1)} = u_1^{(2)} = u_2^{(2)} = 0, u_1^{(3)} = u_2^{(3)} = 1.$

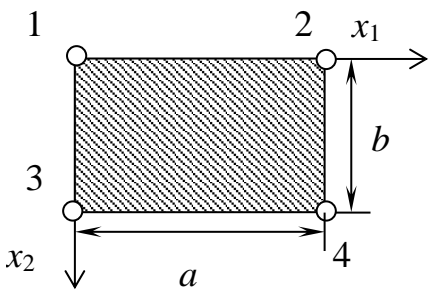
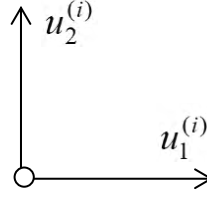
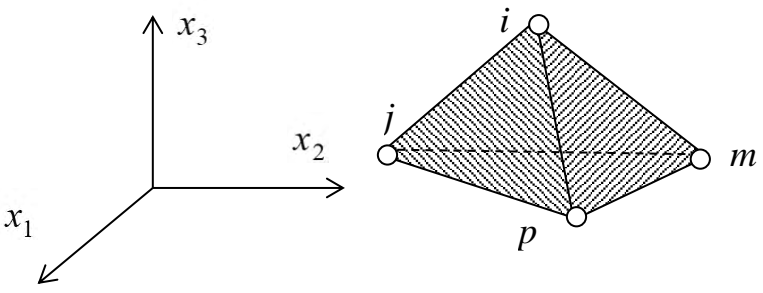
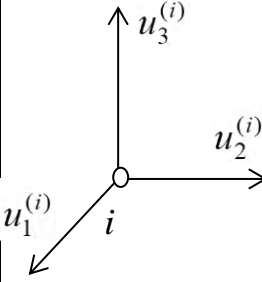
Знайдемо значення переміщень у точці  $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ :

$$u_1\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = 0 + 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$u_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = 0 + 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$



## 5.2 Функції форми для деяких СЕ

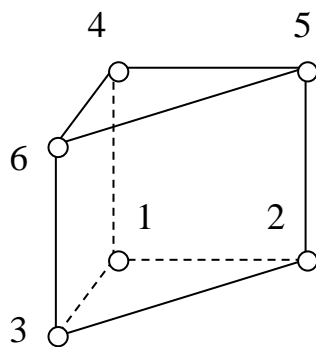
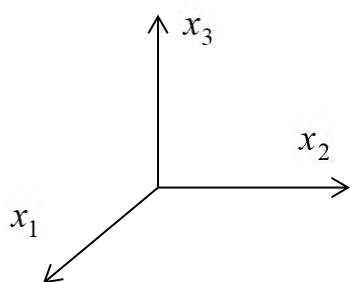
Тип скінченного елемента	Вектор переміщень
<p>Плоский прямокутник з вісьма ступенями свободи</p>  $[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$ $N_1 = \frac{1}{ab}(a - x_1)(b - x_2)$ $N_2 = \frac{1}{ab}x_1(b - x_2)$ $N_3 = \frac{1}{ab}(a - x_1)x_2$ $N_4 = \frac{1}{ab}x_1x_2$	 $\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \\ u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \end{Bmatrix}$
<p>Елемент у виді тетраедра з двадцятьма ступенями свободи</p>  $[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_m & 0 & 0 & N_p & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_m & 0 & 0 & N_p & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_p \end{bmatrix}$ $N_i = \frac{a_i + b_i x_1^{(i)} + c_i x_2^{(i)} + d_i x_3^{(i)}}{6V}$ $a_i = \begin{vmatrix} x_1^{(j)} & x_2^{(j)} & x_3^{(j)} \\ x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & x_3^{(m)} \\ x_1^{(p)} & x_2^{(p)} & x_3^{(p)} \end{vmatrix}; \quad b_i = - \begin{vmatrix} 1 & x_2^{(j)} & x_3^{(j)} \\ 1 & x_2^{(m)} & x_3^{(m)} \\ 1 & x_2^{(p)} & x_3^{(p)} \end{vmatrix};$	

$$c_i = - \begin{vmatrix} x_1^{(j)} & 1 & x_3^{(j)} \\ x_1^{(m)} & 1 & x_3^{(m)} \\ x_1^{(p)} & 1 & x_3^{(p)} \end{vmatrix}; d_i = - \begin{vmatrix} x_1^{(j)} & x_2^{(j)} & 1 \\ x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & 1 \\ x_1^{(p)} & x_2^{(p)} & 1 \end{vmatrix}$$

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(i)} & x_2^{(i)} & x_3^{(i)} \\ 1 & x_1^{(j)} & x_2^{(j)} & x_3^{(j)} \\ 1 & x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & x_3^{(m)} \\ 1 & x_1^{(p)} & x_2^{(p)} & x_3^{(p)} \end{vmatrix}$$

$$\{u\} = \begin{pmatrix} u_1^{(i)} \\ u_2^{(i)} \\ u_3^{(i)} \\ u_1^{(j)} \\ u_2^{(j)} \\ u_3^{(j)} \\ u_1^{(m)} \\ u_2^{(m)} \\ u_3^{(m)} \\ u_1^{(p)} \\ u_2^{(p)} \\ u_3^{(p)} \end{pmatrix}$$

Елемент у виді трикутної призми



$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_6 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = N_4 =$$

$$= \frac{1}{2A} [x_1 (x_2^{(2)} - x_2^{(3)}) + x_2 (x_1^{(3)} - x_1^{(2)}) + x_1^{(2)} x_2^{(3)} - x_1^{(3)} x_2^{(2)}]$$

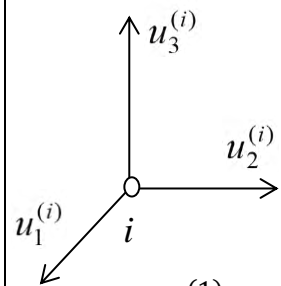
$$N_2 = N_5 =$$

$$= \frac{1}{2A} [x_1 (x_2^{(3)} - x_2^{(1)}) + x_2 (x_1^{(1)} - x_1^{(3)}) + x_1^{(3)} x_2^{(1)} - x_1^{(1)} x_2^{(3)}]$$

$$N_3 = N_6 =$$

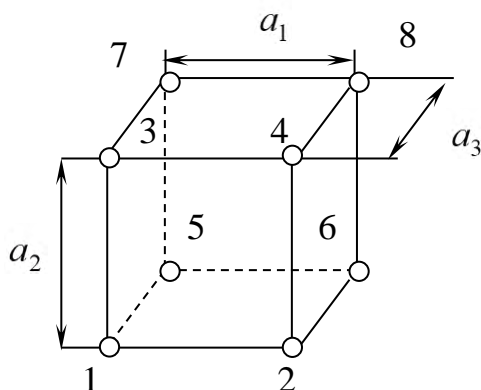
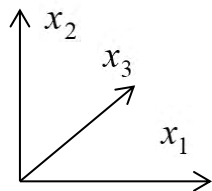
$$= \frac{1}{2A} [x_1 (x_2^{(1)} - x_2^{(2)}) + x_2 (x_1^{(2)} - x_1^{(1)}) + x_1^{(1)} x_2^{(2)} - x_1^{(2)} x_2^{(1)}]$$

$2A$  – подвоєна площа трикутників 1-2-3 або 4-5-6.



$$\{u\} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \\ \vdots \\ u_1^{(6)} \\ u_2^{(6)} \\ u_3^{(6)} \end{pmatrix}$$

Елемент у виді паралелепіпеда (чотирикутної призми)



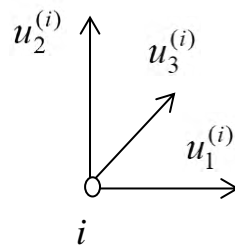
$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right) \left(1 - \frac{x_2}{a_2}\right) \left(1 - \frac{x_3}{a_3}\right); \quad N_2 = \frac{x_1}{a_1} \left(1 - \frac{x_2}{a_2}\right) \left(1 - \frac{x_3}{a_3}\right);$$

$$N_3 = \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right) \frac{x_2}{a_2} \left(1 - \frac{x_3}{a_3}\right); \quad N_4 = \frac{x_1}{a_1} \frac{x_2}{a_2} \left(1 - \frac{x_3}{a_3}\right);$$

$$N_5 = \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right) \left(1 - \frac{x_2}{a_2}\right) \frac{x_3}{a_3}; \quad N_6 = \frac{x_1}{a_1} \left(1 - \frac{x_2}{a_2}\right) \frac{x_3}{a_3};$$

$$N_7 = \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right) \frac{x_2}{a_2} \frac{x_3}{a_3}; \quad N_8 = \frac{x_1}{a_1} \frac{x_2}{a_2} \frac{x_3}{a_3}.$$



$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \\ \vdots \\ u_1^{(8)} \\ u_2^{(8)} \\ u_3^{(8)} \end{Bmatrix}$$

### Практичне завдання

#### Апроксимуючі функції для двовимірних скінченних елементів

Згідно номеру варіанта знайти апроксимуючі функції двовимірного скінченного елемента, форма та розміри якого визначаються координатами характерних точок  $A, B, C$  або  $A, B, C, D$ . Координати внутрішніх вузлів визначаються заданим у варіанті видом апроксимації з використанням рівномірного розбиття. Перевірити правильність отриманих функцій форми. Знайти шукану функцію у точці  $E$ , якщо усі вузлові компоненти шуканої функції дорівнюють нулю, окрім заданих:

1.  $A(0; 0), B(a; 0), C(0; a), D(a; a), E(a/2; a/2)$ . Апроксимація по  $x_1$  – лінійна; по  $x_2$  – лінійна.  $u_1(a; a)=a/10, u_2(a; a)=a/10$ .



2.  $A(0; 0), B(a; 0), C(0; a/2), D(a; a/2), E(a/2; a/3)$ . Апроксимація по  $x_1$  – лінійна; по  $x_2$  – лінійна.  $u_1(a; a/2)=a/10, u_2(a; a/2)=a/10$ .
3.  $A(0; 0), B(a; 0), C(0; a), D(a; a), E(a/2; a/2)$ . Апроксимація по  $x_1$  – квадратична; по  $x_2$  – лінійна.  $u_1(a; a)=a/10, u_2(a; a)=a/10$ .
4.  $A(0; 0), B(a; 0), C(0; a/2), D(a; a/2), E(a/2; a/3)$ . Апроксимація по  $x_1$  – квадратична; по  $x_2$  – лінійна.  $u_1(a; a/2)=a/10, u_2(a; a/2)=a/10$ .
5.  $A(0; 0), B(a; 0), C(0; a), D(a; a), E(a/2; a/2)$ . Апроксимація по  $x_1$  – лінійна; по  $x_2$  – квадратична.  $u_1(a; a)=a/10, u_2(a; a)=a/10$ .
6.  $A(0; 0), B(a; 0), C(0; a/2), D(a; a/2), E(a/2; a/3)$ . Апроксимація по  $x_1$  – лінійна; по  $x_2$  – квадратична.  $u_1(a; a/2)=a/10, u_2(a; a/2)=a/10$ .
7.  $A(0; 0), B(a; 0), C(0; a), E(a/3; a/3)$ . Апроксимація по  $x_1$  – лінійна; по  $x_2$  – лінійна.  $u_1(a; 0)=a/5$ .
8.  $A(a; a), B(a; 0), C(0; a), E(3a/4; 3a/4)$ . Апроксимація по  $x_1$  – лінійна; по  $x_2$  – лінійна.  $u_1(a; a)=a/5, u_2(a; a)=a/5$ .

### *Контрольні запитання*

1. Функції форми у двовимірному випадку.
2. Типи двовимірних скінченних елементів і їх функції форми.

## 6 МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ ПЛОСКОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТУ ДЛЯ ІЗОТРОПНОГО МАТЕРІАЛУ

### 6.1 Основні співвідношення плоскої теорії пружності

В плоскій задачі теорії пружності незалежними компонентами тензора напружень є нормальні напруження  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  та дотичні  $\sigma_{12}$ . Тензор деформацій також має три незалежні компоненти – лінійні деформації  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$  та кут зсуву  $\gamma_{12}$ . Запишемо перераховані компоненти в векторному виді:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}; \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (6.1)$$

Рівняння рівноваги запишуться в виді

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + G_1 = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + G_2 = 0, \end{cases}$$

або в матричній формі запису  $[\partial]\{\sigma\} + \{G\} = \{0\}$ , де матриця диференціювання приймає вид:

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}.$$

Вектор зовнішнього навантаження:

$$\{G\} = \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix}.$$

Вектор переміщень представляється в виді

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}.$$

Геометричні рівняння

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1},$$

або в матричному виді  $\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\}$ .

Фізичні рівняння (закон Гука)

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (2\mu + \lambda)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{22} &= \lambda\varepsilon_{11} + (2\mu + \lambda)\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{12} &= \mu\gamma_{12}. \end{aligned}$$

В матричній формі ці співвідношення запишуться в виді:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\},$$

де матриця пружних сталей матеріалу має вид:

$$[E] = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнти  $\mu$  та  $\lambda$  виражаються через модуль пружності  $E$  та коефіцієнт Пуассона  $\nu$ :

для плоскої деформації

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)},$$

для плоского напруженого стану

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \lambda = \frac{E\nu}{(1 - \nu^2)}$$

Враховуючи наведені співвідношення матриця пружних сталей прийме вид:

для плоскодеформованого стану

$$[E] = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

для плосконапруженого стану

$$[E] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

Розглянемо трикутний скінченний елемент, переміщення для него можна записати у такому виді:

$$\{U\} = [N] \{\delta\}, \quad (6.2)$$

де  $\{U\} = \begin{Bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix}$  – вектор переміщень довільної точки СЕ,

$\{\delta\}$  – вектор вузлових переміщень розмірності  $6 \times 1$ ,

$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$  – матриця функцій форми.

Визначимо величину пружної енергії деформування скінченного елемента:

$$U = \int_V \frac{\{\varepsilon\}^T \{\sigma\}}{2} dV = t \int_S \frac{\{\varepsilon\}^T \{\sigma\}}{2} dS, \quad (6.3)$$

де  $t$  – товщина скінченного елемента,  $S$  – його площа.

Враховуючи співвідношення Коші

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][N]\{\delta\} = [B]\{\delta\},$$

де  $[B] = [\partial][N]$ , та закон Гука

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} = [E][B]\{\delta\},$$

будемо мати

$$U = \frac{1}{2} t \int_S ([B]\{\delta\})^T [E][B]\{\delta\} dS. \quad (6.4)$$

Враховуючи, що  $([B]\{\delta\})^T = \{\delta\}^T [B]^T$ , отримаємо

$$U = \frac{1}{2} t \{\delta\}^T \int_S [B]^T [E][B] dS \cdot \{\delta\}. \quad (6.5)$$

Вираз під знаком інтеграла називають матрицею жорсткості скінченного елемента:

$$[K] = t \int_S [B]^T [E][B] dS.$$

## 6.2 Матриця жорсткості трикутного скінченного елемента для ізотропного матеріалу

Розглянемо побудову матриці жорсткості трикутного скінченного елемента, зображеного на рис. 6.1. Товщина дорівнює  $t$ . Пружні сталі матеріалу: модуль пружності  $E$  та коефіцієнт Пуассона  $\nu$ .

Тоді функції форми для скінченного елемента будуть дорівнювати:

$$N_1 = 1 - x_1 - x_2, N_2 = x_1, N_3 = x_2.$$

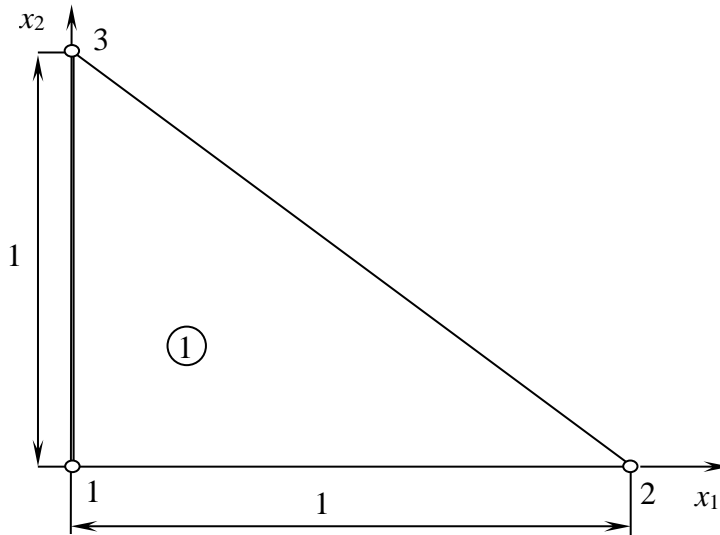


Рис. 6.1

Враховуючи співвідношення Коші для трикутного скінченного елемента отримуємо:

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][N]\{\delta\} = [B]\{\delta\},$$

де  $[B] = [\partial][N]$  – матриця векторів деформацій від одиничних переміщень вузлів скінченного елемента. Будемо мати:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матриця жорсткості трикутного скінченного елемента буде дорівнювати

$$[K] = t \int_0^1 \int_0^{1-x_1} [B]^T [E] [B] dx_2 dx_1 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{Et}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \times \\
&\quad \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} dx_2 dx_1 = \frac{Et}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \times \\
&\quad \times \begin{bmatrix} \frac{3-4\nu}{2} & \frac{1}{2} & \nu-1 & -\frac{1-2\nu}{2} & -\frac{1-2\nu}{2} & -\nu \\ \frac{1}{2} & \frac{3-4\nu}{2} & -\nu & -\frac{1-2\nu}{2} & -\frac{1-2\nu}{2} & \nu-1 \\ \nu-1 & -\nu & 1-\nu & 0 & 0 & \nu \\ \frac{1-2\nu}{2} & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ -\frac{1-2\nu}{2} & -\frac{1-2\nu}{2} & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ -\frac{1-2\nu}{2} & -\frac{1-2\nu}{2} & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ -\nu & \nu-1 & \nu & 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

### Практичне завдання

#### Матриця жорсткості двовимірного скінченного елемента із ізотропного матеріалу

Згідно номеру варіанта для скінченного елемента, форма та розміри якого визначаються координатами характерних точок  $A, B, C$  або  $A, B, C, D$  (товщина  $t$ ), побудувати матрицю жорсткості для плосконапруженого (непарні варіанти) та плоскодеформованого стану (парні варіанти). Модуль пружності матеріалу –  $E$ , коефіцієнт Пуассона –  $\nu$ :

1.  $A(0; 0), B(a; 0), C(0; a), D(a; a)$ . Апроксимація по  $x_1$  – лінійна; по  $x_2$  – лінійна.
2.  $A(0; 0), B(a; 0), C(0; a/2), D(a; a/2)$ . Апроксимація по  $x_1$  – лінійна; по  $x_2$  – лінійна.
3.  $A(0; 0), B(a; 0), C(0; a), D(a; a)$ . Апроксимація по  $x_1$  – квадратична; по  $x_2$  – лінійна.

4.  $A(0; 0), B(a; 0), C(0; a/2), D(a; a/2)$ . Апроксимація по  $x_1$  – квадратична; по  $x_2$  – лінійна.
5.  $A(0; 0), B(a; 0), C(0; a), D(a; a)$ . Апроксимація по  $x_1$  – лінійна; по  $x_2$  – квадратична.
6.  $A(0; 0), B(a; 0), C(0; a/2), D(a; a/2)$ . Апроксимація по  $x_1$  – лінійна; по  $x_2$  – квадратична.
7.  $A(0; 0), B(a; 0), C(0; a)$ . Апроксимація по  $x_1$  – лінійна; по  $x_2$  – лінійна.
8.  $A(a; a), B(a; 0), C(0; a)$ . Апроксимація по  $x_1$  – лінійна; по  $x_2$  – лінійна.

### *Контрольні запитання*

1. Ізотропний матеріал. Пружні сталі для ізотропного матеріалу. Закон Гука.
2. Матриця пружних сталих ізотропного матеріалу у випадку плоскодеформованого та плосконапруженого стану.
3. Розмірність матриці жорсткості у двовимірному випадку. Властивості матриці жорсткості. Функції форми у двовимірному випадку.



## 7 ГЛОБАЛЬНА МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ КОНСТРУКЦІЇ

Розглянемо балку, жорстко закріплену з одного краю під дією зосередженої сили на другому краї (рис. 7.1). Товщину балки прийємо рівною  $b/4$ . Модуль пружності матеріалу балки дорівнює  $E$ , а коефіцієнт Пуассона –  $\nu$ .

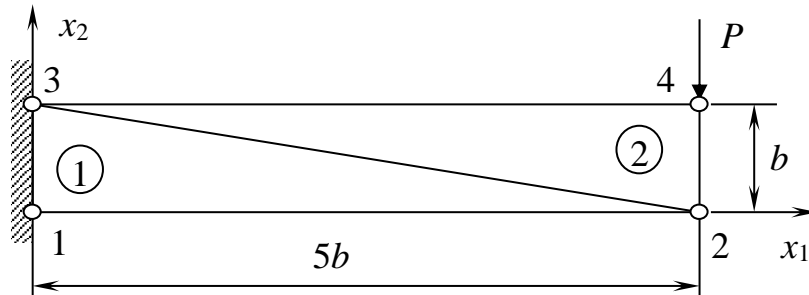


Рис. 7.1

Розіб'ємо конструкцію на два скінченних елемента як показано на рис. 7.1. При побудові матриць жорсткості окремих елементів доцільно спочатку скористатися місцевими системами координат, а потім перетворити їх у глобальну (базисну), пов'язану із конструкцією систему координат (рис. 7.2).

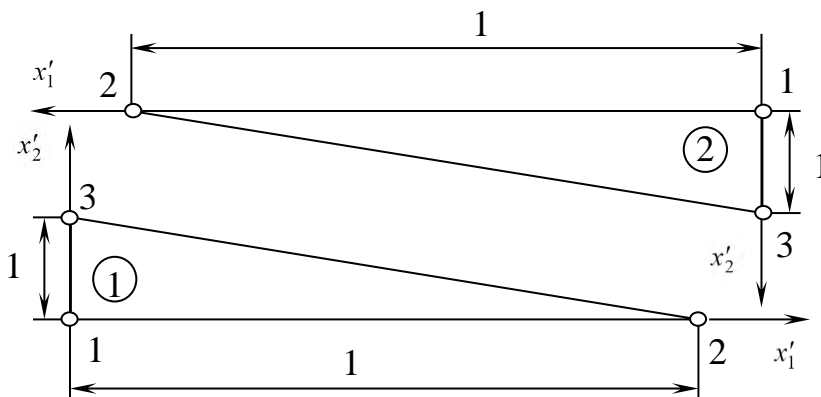


Рис. 7.2

У місцевих системах координат (див. рис. 7.2) обидва елементи будуть абсолютно ідентичними і будуть співпадати із скінченним елементом, матриця жорсткості для якого побудована у попередньому розділі. Тому скористаємося вже отриманими функціями форми.

Залежність між базисною системою координат та локальними системами координат визначається залежностями:

для першого скінченного елемента маємо

$$x'_1 = \frac{x_1}{5b}; x'_2 = \frac{x_2}{b}$$

для другого скінченного елемента маємо

$$x'_1 = 1 - \frac{x_1}{5b}; x'_2 = 1 - \frac{x_2}{b}.$$

Тоді функції форми для першого скінченного елемента будуть дорівнювати:

$$N_1 = 1 - \frac{x_1}{5b} - \frac{x_2}{b}; N_2 = \frac{x_1}{5b}; N_3 = \frac{x_2}{b}.$$

А функції форми для другого скінченного елемента будуть дорівнювати

$$N_2 = 1 - \frac{x_2}{b}; N_3 = 1 - \frac{x_1}{5b}; N_4 = \frac{x_1}{5b} + \frac{x_2}{b} - 1.$$

Враховуючі співвідношення Коші для трикутного скінченного елемента отримуємо:

$$[B_{(1)}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5b} & 0 & \frac{1}{5b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ -\frac{1}{b} & -\frac{1}{5b} & 0 & \frac{1}{5b} & \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}.$$

Для другого трикутного скінченного елемента маємо:

$$[B_{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{5b} & 0 & \frac{1}{5b} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ -\frac{1}{b} & 0 & 0 & -\frac{1}{5b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{5b} \end{bmatrix}.$$

Матриця жорсткості першого скінченного елемента буде дорівнювати:

$$\begin{aligned}
[K_{(1)}] &= t \int_0^{5b} \int_0^{b-\frac{x_1}{5}} [B_{(1)}]^T [E] [B_{(1)}] dx_2 dx_1 = \\
&= \frac{Et}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_0^{5b} \int_0^{b-\frac{x_1}{5}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{5b} & 0 & -\frac{1}{b} \\ 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{1}{5b} \\ \frac{1}{5b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5b} \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \times \\
&\times \begin{bmatrix} -\frac{1}{5b} & 0 & \frac{1}{5b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ -\frac{1}{b} & -\frac{1}{5b} & 0 & \frac{1}{5b} & \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix} dx_2 dx_1 = \frac{5Et}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \times \\
&\times \begin{bmatrix} \frac{27-52\nu}{50} & \frac{1}{10} & -\frac{1-\nu}{25} & -\frac{1-2\nu}{10} & -\frac{1-2\nu}{2} & -\frac{\nu}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{51-52\nu}{50} & \frac{\nu}{5} & -\frac{1-2\nu}{50} & -\frac{1-2\nu}{10} & \nu-1 \\ -\frac{1-\nu}{25} & -\frac{\nu}{5} & \frac{1-\nu}{25} & 0 & 0 & \frac{\nu}{5} \\ \frac{1-2\nu}{10} & -\frac{1-2\nu}{50} & 0 & \frac{1-2\nu}{50} & \frac{1-2\nu}{10} & 0 \\ -\frac{1-2\nu}{2} & -\frac{1-2\nu}{10} & 0 & \frac{1-2\nu}{10} & \frac{1-2\nu}{4} & 0 \\ -\frac{\nu}{5} & \nu-1 & \frac{\nu}{5} & 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Для другого скінченного елемента маємо:

$$\begin{aligned}
[K_{(2)}] &= t \int_0^{5b} \int_{b-\frac{x_1}{5}}^b [B_{(2)}]^T [E] [B_{(2)}] dx_2 dx_1 = \\
&= \frac{Et}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_0^{5b} \int_{b-\frac{x_1}{5}}^b \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{b} \\ 0 & -\frac{1}{b} & 0 \\ -\frac{1}{5b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5b} \\ \frac{1}{5b} & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & \frac{1}{b} & \frac{1}{5b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \times \\
&\times \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{5b} & 0 & \frac{1}{5b} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ -\frac{1}{b} & 0 & 0 & -\frac{1}{5b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{5b} \end{bmatrix} dx_2 dx_1 = \frac{5Et}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \times \\
&\times \begin{bmatrix} \frac{27-52\nu}{50} & \frac{1}{10} & -\frac{1-\nu}{25} & -\frac{1-2\nu}{10} & -\frac{1-2\nu}{2} & -\frac{\nu}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{51-52\nu}{50} & \frac{\nu}{5} & -\frac{1-2\nu}{50} & -\frac{1-2\nu}{10} & \nu-1 \\ -\frac{1-\nu}{25} & -\frac{\nu}{5} & \frac{1-\nu}{25} & 0 & 0 & \frac{\nu}{5} \\ -\frac{1-2\nu}{10} & -\frac{1-2\nu}{50} & 0 & \frac{1-2\nu}{50} & \frac{1-2\nu}{10} & 0 \\ -\frac{1-2\nu}{2} & -\frac{1-2\nu}{10} & 0 & \frac{1-2\nu}{10} & \frac{1-2\nu}{4} & 0 \\ -\frac{\nu}{5} & \nu-1 & \frac{\nu}{5} & 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Враховуючи умови навантаження та закріплення, будемо мати такі крайові умови:

$$u_1^{(1)} = u_2^{(1)} = u_1^{(3)} = u_2^{(3)} = 0,$$

$$P_1^{(1)} = P_2^{(1)} = P_1^{(2)} = P_2^{(2)} = P_1^{(3)} = P_2^{(3)} = P_1^{(4)} = 0; P_2^{(4)} = -P.$$

Для побудови глобальної матриці жорсткості конструкції доцільно записати матрицю інциденцій, яка однозначно показує відповідність глобальної нумерації вузлів з локальною нумерацією вузлів кожного скінченного елемента. Дана матриця має розмірність  $n \times m$ , де  $n$  – загальна кількість вузлів конструкції помножена на кількість ступенів свободи,  $m$  – кількість вузлів скінченного елемента помножена на кількість ступенів свободи вузла. Кількість матриць інциденцій дорівнює кількості скінченних елементів конструкції. Матриця інциденцій має структуру:

		Номера вузлів скінченного елемента							
		1		2		...		$m$	
		Напрямы							
		1	2	1	2	...	1	2	
Номера вузлів конструкції	1	1	$i_{11}$	$i_{12}$	$i_{13}$	$i_{14}$	...	$i_{1\ 2m-1}$	$i_{1\ 2m}$
		2	$i_{21}$	$i_{22}$	$i_{23}$	$i_{24}$	...	$i_{2\ 2m-1}$	$i_{2\ 2m}$
	2	1	$i_{31}$	$i_{32}$	$i_{33}$	$i_{34}$	...	$i_{3\ 2m-1}$	$i_{3\ 2m}$
		2	$i_{41}$	$i_{42}$	$i_{43}$	$i_{44}$	...	$i_{4\ 2m-1}$	$i_{4\ 2m}$
	3	1	$i_{51}$	$i_{52}$	$i_{53}$	$i_{54}$	...	$i_{5\ 2m-1}$	$i_{5\ 2m}$
		2	$i_{61}$	$i_{62}$	$i_{63}$	$i_{64}$	...	$i_{6\ 2m-1}$	$i_{6\ 2m}$
	...	...	...	...	...	...	...	...	
	$n$	1	$i_{2n-1\ 1}$	$i_{2n-1\ 2}$	$i_{2n-1\ 3}$	$i_{2n-1\ 4}$	...	$i_{2n-1\ 2m-1}$	$i_{2n-1\ 2m}$
		2	$i_{2n\ 1}$	$i_{2n\ 2}$	$i_{2n\ 3}$	$i_{2n\ 4}$	...	$i_{2n-1\ 2m-1}$	$i_{2n\ 2m}$

Глобальна матриця жорсткості системи має вид:

$$[\tilde{K}] = \sum_{e=1}^l [i_{(e)}]^T [K_{(e)}] [i_{(e)}],$$

де  $l$  – загальна кількість скінченних елементів,

$[i_{(e)}]$  – матриця інциденцій  $e$ -го скінченного елемента,

$[K_{(e)}]$  – матриця жорсткості  $e$ -го скінченного елемента.





Відомі з крайових умов значення вектору переміщень дозволяють зменшити розмірність системи викреслюванням відповідних рядків та стовбців, для даної задачі остаточний результат можна отримати з системи:

$$\begin{bmatrix} k_{33}^{(1)} + k_{55}^{(2)} & k_{34}^{(1)} + k_{56}^{(2)} & k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} \\ k_{43}^{(1)} + k_{65}^{(2)} & k_{44}^{(1)} + k_{66}^{(2)} & k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} \\ & k_{15}^{(2)} & k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ & k_{25}^{(2)} & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix}.$$

### Практичне завдання

#### Розв'язання плоскої задачі теорії пружності для ізотропного матеріалу методом скінченних елементів

Розглянемо балку, жорстко зацмлену з одного краю під дією зосередженого навантаження на іншому краю (див. рис. 7.3). Товщину балки приймемо рівною 0,1 м. Модуль пружності матеріалу балки дорівнює  $E$ , а коефіцієнт Пуассона –  $\nu$ . Використовуючи матрицю жорсткості скінченного елемента, отриману у попередньому розділі, побудувати глобальну матрицю жорсткості конструкції, розбивши її на два скінченних елементи.

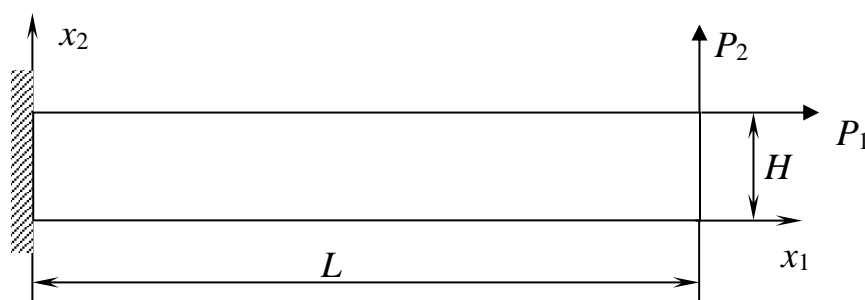


Рис. 7.3

Розв'язати плоску задачу теорії пружності (плосконапружений (непарні варіанти) та плоскодеформований стан (парні варіанти)) при таких даних:

1.  $L=2a$ ,  $H=a$ ,  $a=1$  м.  $E=1$  МПа,  $\nu=0,3$ .  $P_1=-1000$  Н;  $P_2=0$  Н.
2.  $L=2a$ ,  $H=a/2$ ,  $a=1$  м.  $E=1$  МПа,  $\nu=0,3$ .  $P_1=1000$  Н;  $P_2=100$  Н.
3.  $L=2a$ ,  $H=a$ ,  $a=1$  м.  $E=2$  МПа,  $\nu=0,3$ .  $P_1=-100$  Н;  $P_2=1000$  Н.



4.  $L=2a, H=a/2, a=1$  м.  $E=2$  МПа,  $\nu=0,3$ .  $P_1=0$  Н;  $P_2=1000$  Н.
5.  $L=2a, H=a, a=1$  м.  $E=2$  МПа,  $\nu=0,3$ .  $P_1=100$  Н;  $P_2=-100$  Н.
6.  $L=2a, H=a/2, a=1$  м.  $E=2$  МПа,  $\nu=0,3$ .  $P_1=-500$  Н;  $P_2=0$  Н.
7.  $L=a, H=a, a=1$  м.  $E=2$  МПа,  $\nu=0,3$ .  $P_1=-100$  Н;  $P_2=1000$  Н.
8.  $L=a, H=a, a=1$  м.  $E=2$  МПа,  $\nu=0,3$ .  $P_1=100$  Н;  $P_2=-1000$  Н.

### *Контрольні запитання*

1. Глобальна матриця жорсткості конструкції. Її розмірність.
2. Матриця інциденцій.
3. Врахування вузлових навантажень у системі розв'язувальних рівнянь.
4. Врахування умов закріплення конструкції у системі розв'язувальних рівнянь.

## 8 МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТУ ІЗ АНІЗОТРОПНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

Розглянемо трикутний скінченний елемент (рис. 8.1). Кожному вузлові поставимо у відповідність координати  $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$  – номери вузлів). Кожен вузол стрижня має два ступеня свободи, обумовлені переміщеннями  $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}$ , по напрямку координатних осей  $x_1$  і  $x_2$  відповідно. Повне число ступенів свободи даного трикутного скінченного елемента дорівнює шести.

Матеріал елемента має анізотропні властивості, таке можливе, наприклад, у випадку композиційного матеріалу, коли матеріал складається із матриці й армуючого волокна. Тоді осі анізотропії відповідають напрямку армування та перпендикулярному йому напрямку ( $x_{1'}$  – напрям армуючого волокна,  $x_{2'}$  – перпендикулярний волокну напрям). Ці осі направлені під певним кутом  $\varphi$  до системи координат  $Ox_1x_2$ . При побудові матриці жорсткості скінченного елемента потрібно враховувати зв'язок між системами координат, тому що пружні сталі задаються у системі анізотропії  $Ox_{1'}x_{2'}$ , а матриця жорсткості будується у системі координат  $Ox_1x_2$ .

Вектор переміщень вузлів СЕ представимо, як і для ізотропного матеріалу у виді:

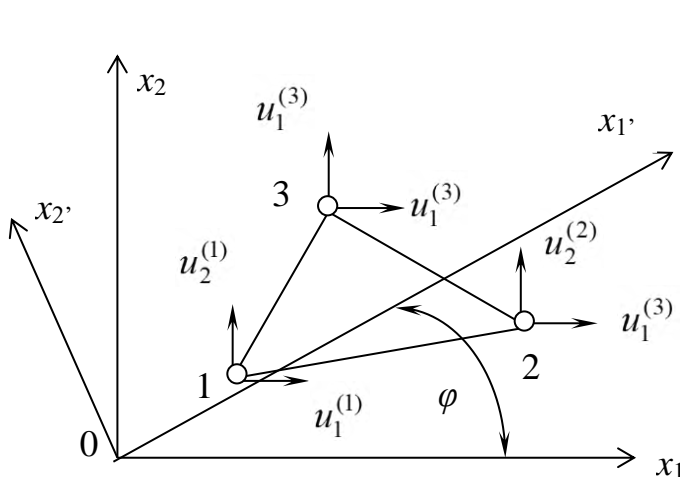


Рис. 8.1

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix}. \quad (8.1)$$

Припустимо, що функція переміщень  $u_1(x_1, x_2)$  і  $u_2(x_1, x_2)$  в межах СЕ підкоряється лінійному закону будемо мати такі співвідношення:

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, x_2) &= \frac{u_1^{(1)}a_1 + u_1^{(2)}a_2 + u_1^{(3)}a_3}{a_1 + a_2 + a_3} + \frac{u_1^{(1)}b_1 + u_1^{(2)}b_2 + u_1^{(3)}b_3}{a_1 + a_2 + a_3}x_1 + \\
&+ \frac{u_1^{(1)}c_1 + u_1^{(2)}c_2 + u_1^{(3)}c_3}{a_1 + a_2 + a_3}x_2 = u_1^{(1)}\frac{a_1 + b_1x_1 + c_1x_2}{a_1 + a_2 + a_3} + \\
&+ u_1^{(2)}\frac{a_2 + b_2x_1 + c_2x_2}{a_1 + a_2 + a_3} + u_1^{(3)}\frac{a_3 + b_3x_1 + c_3x_2}{a_1 + a_2 + a_3} = \\
&= u_1^{(1)}N_1 + u_1^{(2)}N_2 + u_1^{(3)}N_3, \tag{8.2}
\end{aligned}$$

$$u_2(x_1, x_2) = u_2^{(1)}N_1 + u_2^{(2)}N_2 + u_2^{(3)}N_3, \tag{8.3}$$

де

$$N_1 = \frac{a_1 + b_1x_1 + c_1x_2}{a_1 + a_2 + a_3}; \quad N_2 = \frac{a_2 + b_2x_1 + c_2x_2}{a_1 + a_2 + a_3}; \quad N_3 = \frac{a_3 + b_3x_1 + c_3x_2}{a_1 + a_2 + a_3} -$$

– функції форми плоского трикутного скінченного елемента з лінійною апроксимацією переміщень:

$$\begin{aligned}
a_1 &= x_1^{(2)}x_2^{(3)} - x_1^{(3)}x_2^{(2)}; \quad a_2 = x_1^{(3)}x_2^{(1)} - x_1^{(1)}x_2^{(3)}; \quad a_3 = x_1^{(1)}x_2^{(2)} - x_1^{(2)}x_2^{(1)}; \\
b_1 &= x_2^{(2)} - x_2^{(3)}; \quad b_2 = x_2^{(3)} - x_2^{(1)}; \quad b_3 = x_2^{(1)} - x_2^{(2)}; \\
c_1 &= x_1^{(3)} - x_1^{(2)}; \quad c_2 = x_1^{(1)} - x_1^{(3)}; \quad c_3 = x_1^{(2)} - x_1^{(1)}.
\end{aligned}$$

Основні співвідношення механіки деформівного твердого тіла для анізотропного матеріалу такі самі як і для ізотропного окрім опису пружних сталей. Матриця пружних сталей анізотропного матеріалу у системі координат анізотропії має вид (для плосконапруженого стану):

$$[E'] = \begin{bmatrix} \frac{E_{1'}}{1 - \nu_{1'2'}\nu_{2'1'}} & \frac{E_{1'}\nu_{2'1'}}{1 - \nu_{1'2'}\nu_{2'1'}} & 0 \\ \frac{E_{1'}\nu_{2'1'}}{1 - \nu_{1'2'}\nu_{2'1'}} & \frac{E_{2'}}{1 - \nu_{1'2'}\nu_{2'1'}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{1'2'} \end{bmatrix}, \tag{8.4}$$

де  $E_{1'}, E_{2'}$  – модулі пружності анізотропного матеріалу по відповідним напрямкам,  $\nu_{1'2'}, \nu_{2'1'}$  – коефіцієнти Пуассона,  $G_{1'2'}$  – модуль зсуву.

Для переходу із системи анізотропії  $Ox_1, x_2$ , до у системи координат  $Ox_1, x_2$  скористаємося матрицями перетворень:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & -2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix}, \quad (8.5)$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ 2 \sin \varphi \cos \varphi & -2 \sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix}, \quad (8.6)$$

$$[T_2]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi \\ -2 \sin \varphi \cos \varphi & 2 \sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix}, \quad (8.7)$$

Матриця пружних сталих анізотропного матеріалу у системі координат  $Ox_1, x_2$  матиме вид (для плосконапруженого стану):

$$[E] = [T_1][E'][T_2]^{-1}. \quad (8.8)$$

А матриця жорсткості скінченного елемента для анізотропного матеріалу із врахуванням (8.8) прийме стандартний вид:

$$[K_{(e)}] = t \iint_S [B_{(e)}]^T [E] [B_{(e)}] dS. \quad (8.9)$$

### *Практичне завдання*

#### **Розв'язання плоскої задачі теорії пружності для анізотропного матеріалу методом скінченних елементів**

Розглянемо балку, жорстко защемлену з одного краю під дією зосередженого навантаження на іншому краю (див. рис. 8.2). Товщину балки приймемо рівною 0,1 м. Пружні характеристики матеріалу у системі координат анізотропії, що визначається кутом  $\varphi$ , такі  $E_{1'}$ ,  $E_{2'}$ ,  $\nu_{1'2'}$ ,  $G_{1'2'}$  ( $\nu_{2'1'} =$

$\nu_{1/2}, E_{2/1}/E_{1/2}$ ). Побудувати глобальну матрицю жорсткості конструкції, розбивши її на два скінченних елементи.

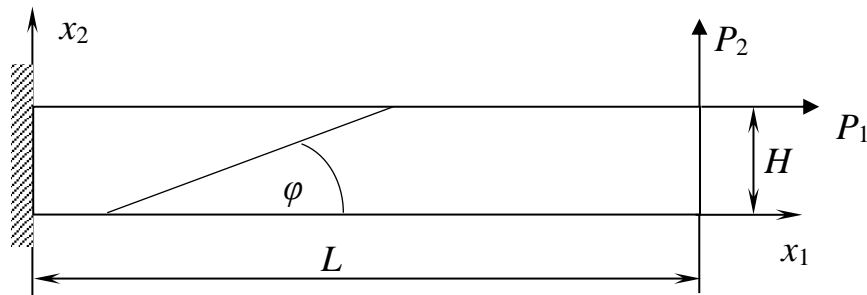


Рис. 8.2

Розв'язати плоску задачу теорії пружності для плосконапруженого стану при таких даних:

1.  $L=2a, H=a, a=1$  м.  $E_{1/1} = 60$  МПа,  $E_{2/2} = 5$  МПа,  $\nu_{1/2/1} = 0,35, G_{1/2/1} = 2$  МПа.  $P_1=-1000$  Н;  $P_2=0$  Н.  $\varphi = 0^\circ$ .
2.  $L=2a, H=a/2, a=1$  м.  $E_{1/1} = 60$  МПа,  $E_{2/2} = 5$  МПа,  $\nu_{1/2/1} = 0,35, G_{1/2/1} = 2$  МПа.  $P_1=1000$  Н;  $P_2=100$  Н.  $\varphi = 30^\circ$ .
3.  $L=2a, H=a, a=1$  м.  $E_{1/1} = 60$  МПа,  $E_{2/2} = 5$  МПа,  $\nu_{1/2/1} = 0,35, G_{1/2/1} = 2$  МПа.  $P_1=-100$  Н;  $P_2=1000$  Н.  $\varphi = 45^\circ$ .
4.  $L=2a, H=a/2, a=1$  м.  $E_{1/1} = 60$  МПа,  $E_{2/2} = 5$  МПа,  $\nu_{1/2/1} = 0,35, G_{1/2/1} = 2$  МПа.  $P_1=0$  Н;  $P_2=1000$  Н.  $\varphi = 60^\circ$ .
5.  $L=2a, H=a, a=1$  м.  $E_{1/1} = 60$  МПа,  $E_{2/2} = 5$  МПа,  $\nu_{1/2/1} = 0,35, G_{1/2/1} = 2$  МПа.  $P_1=100$  Н;  $P_2=-100$  Н.  $\varphi = 90^\circ$ .
6.  $L=2a, H=a/2, a=1$  м.  $E_{1/1} = 60$  МПа,  $E_{2/2} = 5$  МПа,  $\nu_{1/2/1} = 0,35, G_{1/2/1} = 2$  МПа.  $P_1=-500$  Н;  $P_2=0$  Н.  $\varphi = 0^\circ$ .
7.  $L=a, H=a, a=1$  м.  $E_{1/1} = 60$  МПа,  $E_{2/2} = 5$  МПа,  $\nu_{1/2/1} = 0,35, G_{1/2/1} = 2$  МПа.  $P_1=-100$  Н;  $P_2=1000$  Н.  $\varphi = 30^\circ$ .
8.  $L=a, H=a, a=1$  м.  $E_{1/1} = 60$  МПа,  $E_{2/2} = 5$  МПа,  $\nu_{1/2/1} = 0,35, G_{1/2/1} = 2$  МПа.  $P_1=100$  Н;  $P_2=-1000$  Н.  $\varphi = 45^\circ$ .

### Контрольні запитання

1. Анізотропний матеріал. Система координат анізотропії.
2. Пружні характеристики анізотропного матеріалу. Матриця пружних сталих анізотропного матеріалу.

3. Матриці перетворень із системи координат скінченного елемента в систему координат анізотропії.

## 9 МОМЕНТНА СХЕМА СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТУ ДЛЯ СЛАБКОСТИСЛИВОГО МАТЕРІАЛУ

При практичному використанні традиційних схем МСЕ у формі метода переміщень, побудованих на базі варіаційного принципу Лагранжа для розв'язання задач з особливостями (наприклад, врахування слабкої стисливості матеріалу та ін.), виникають суттєві труднощі.

Стандартний МСЕ у формі методу переміщень, вимагаю щоб поле переміщень точок всередині СЕ апроксимувалось поліноміальними функціями, а контакт на межах елементів відбувався при виконанні умов неперервності. Цей варіант МСЕ має повільну збіжність в силу того, що поліноміальні функції, що апроксимують поля переміщень, не включали доданки, що описують жорсткі зміщення СЕ та не враховують «ефекти хибного зсуву».

Природа зниження точності результатів, що породжує такі ефекти, як жорсткі зміщення та хибний зсув, полягає в тому, що прийнятими законами апроксимації функцій переміщень неможливо правильно описати усі види деформацій, що входять в матриці жорсткості СЕ. Для ілюстрації розглянемо прямокутний СЕ у задачі про плоску деформацію при полілінійному законі апроксимації для переміщень.

Представимо градієнт вектору переміщень як суму тензорів деформацій та жорсткого повороту елементарного об'єму у виді

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \varepsilon_{12} + \omega_{12}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \varepsilon_{12} - \omega_{12}, \quad (9.1)$$

де

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right); \quad \omega_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right). \quad (9.2)$$

Апроксимацію переміщень виразимо так:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_2 + a_4 x_1 x_2; \\ u_2 &= b_1 + b_2 x_1 + b_3 x_2 + b_4 x_1 x_2. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Деформації та жорсткі повороти представимо розкладанням у ряд Тейлора в околі початку координат:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} &= \varepsilon_{12}^{(0)} + x_1 \varepsilon_{12}^{(1)} + x_2 \varepsilon_{12}^{(2)} + x_1 x_2 \varepsilon_{12}^{(3)}; \\ \omega_{12} &= \omega_{12}^{(0)} + x_1 \omega_{12}^{(1)} + x_2 \omega_{12}^{(2)} + x_1 x_2 \omega_{12}^{(3)}.\end{aligned}\quad (9.4)$$

Наближені значення градієнтів знайдемо виходячи з (3):

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = a_3 + a_4 x_1; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = b_2 + b_4 x_2. \quad (9.5)$$

Ці ж значення визначимо на основі виразів (9.4) та (9.1):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= \varepsilon_{12}^{(0)} + \omega_{12}^{(0)} + x_1 \left( \varepsilon_{12}^{(1)} + \omega_{12}^{(1)} \right) + x_2 \left( \varepsilon_{12}^{(2)} + \omega_{12}^{(2)} \right) + x_1 x_2 \left( \varepsilon_{12}^{(3)} + \omega_{12}^{(3)} \right), \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= \varepsilon_{12}^{(0)} - \omega_{12}^{(0)} + x_1 \left( \varepsilon_{12}^{(1)} - \omega_{12}^{(1)} \right) + x_2 \left( \varepsilon_{12}^{(2)} - \omega_{12}^{(2)} \right) + x_1 x_2 \left( \varepsilon_{12}^{(3)} - \omega_{12}^{(3)} \right).\end{aligned}\quad (9.6)$$

Зіставляючи формули (9.5) та (9.6), переконуємося, що вираз (9.6) не відповідає за кількістю членів виразу (9.5) й тому підкреслені члени (9.6) необхідно вилучити. Тоді

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \varepsilon_{12}^{(0)} + \frac{1}{2} x_1 \left( \varepsilon_{12}^{(1)} + \omega_{12}^{(1)} \right) + \frac{1}{2} x_2 \left( \varepsilon_{12}^{(2)} - \omega_{12}^{(2)} \right). \quad (9.7)$$

Із аналізу формули (9.7) можна зробити висновок, що в розкладанні компонент деформацій поруч із коефіцієнтами розкладання деформацій присутні коефіцієнти розкладання жорстких поворотів. Ця обставина й викриває причину повільної збіжності МСЕ, тому що при розрахунку конструкцій, частини яких випробовують окрім деформацій ще й жорсткі повороти, накопичуються похибки обчислень за рахунок їх членів й рівняння МСЕ мають меншу точність. В МССЕ усунення цього протиріччя досягається вилученням підкреслених членів у (9.7) або їх мінімізацією. Цей підхід залишається справедливим і для інших типів СЕ.



Аналогічна ситуація виникає у випадку застосування МССЕ для розрахунку слабкостисливих матеріалів з урахуванням апроксимації функції зміни об'єму.

Функцію зміни об'єму представимо у лінійному випадку у вигляді

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}, \quad (9.8)$$

Компоненти деформацій  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  та функцію зміни об'єму  $\theta$  розкладемо в ряд Тейлора в околі початку координат:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{11}^{(0)} + \underline{x_1 \varepsilon_{11}^{(1)}} + x_2 \varepsilon_{11}^{(2)} + \underline{x_1 x_2 \varepsilon_{11}^{(3)}}; \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_{22}^{(0)} + x_1 \varepsilon_{22}^{(1)} + \underline{x_2 \varepsilon_{22}^{(2)}} + \underline{x_1 x_2 \varepsilon_{22}^{(3)}}; \\ \theta &= \theta^{(0)} + x_1 \theta^{(1)} + x_2 \theta^{(2)} + x_1 x_2 \theta^{(3)}, \end{aligned} \quad (9.9)$$

де

$$\begin{aligned} \theta^{(0)} &= \varepsilon_{11}^{(0)} + \varepsilon_{22}^{(0)}; \theta^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{22}^{(1)}; \\ \theta^{(2)} &= \varepsilon_{11}^{(2)} + \varepsilon_{22}^{(2)}; \theta^{(3)} = \varepsilon_{11}^{(3)} + \varepsilon_{22}^{(3)}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

На основі (9.3)

$$\tilde{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} = a_2 + a_4 x_2; \quad \tilde{\varepsilon}_{22} = \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} = b_3 + b_4 x_1. \quad (9.11)$$

Зіставляючи формули (9.11) та (9.9), бачимо, що

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(0)} &= a_2; \varepsilon_{11}^{(2)} = a_4; \varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(3)} = 0; \\ \varepsilon_{22}^{(0)} &= b_3; \varepsilon_{22}^{(1)} = b_4; \varepsilon_{22}^{(2)} = \varepsilon_{22}^{(3)} = 0. \end{aligned}$$

В цьому випадку функція зміни об'єму представляється виразом

$$\tilde{\theta} = \tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22} = a_2 + b_3 + b_4 x_1 + a_4 x_2. \quad (9.12)$$

Якщо в (9.12) зробити заміну згідно формули (9.10), то

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^{(0)} + \varepsilon_{22}^{(0)} &= \theta^{(0)}; \varepsilon_{22}^{(1)} = \theta^{(1)} - \varepsilon_{11}^{(1)}; \varepsilon_{11}^{(2)} = \theta^{(2)} - \varepsilon_{22}^{(1)}, \\ \tilde{\theta} &= \theta^{(0)} + x_1 \left( \theta^{(1)} - \varepsilon_{11}^{(1)} \right) + x_2 \left( \theta^{(2)} - \varepsilon_{22}^{(1)} \right).\end{aligned}\tag{9.13}$$

Таким чином, приходимо до висновку, що в коефіцієнти розкладання для  $\theta$  входять ще й коефіцієнти розкладання деформацій  $\varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{22}^{(1)}$ .

Для слабкостисливих матеріалів як лінійні деформації, так і коефіцієнти їх розкладання в ряд Тейлора суттєво перевищують функцію зміни об'єму та її похідні. Тому коефіцієнти розкладання лінійних деформацій ( $\varepsilon_{11}^{(1)}$  та  $\varepsilon_{22}^{(1)}$ ) у виразі для  $\theta$  зазвичай вносять суттєві похибки у розв'язок, враховуючи, що для слабкостисливих матеріалів  $\theta$  входить у вираз варіації енергії деформації із надзвичайно великим модулем  $\lambda$  ( $\nu \rightarrow 0,5; \lambda \rightarrow \infty$ ). У зв'язку з цим підкресленими членами в формулі (9.13) слід знехтувати.

Це дає уявлення про рівень апроксимації для функції зміни об'єму, який повинен відповідати заданій апроксимації переміщень, щоб не з'явилися ефекти, пов'язані з виродженням задачі, тобто вдається теоретично знайти грань максимально точної апроксимації деформацій та функції зміни об'єму із збереженням максимальної кількості членів.

Підкреслені члени у (9.13) можуть бити вилучені, мінімізовані або прийняті за додаткові невідомі, які виключаються з матриці жорсткості методом статичної конденсації.

### *Практичне завдання*

#### **Розв'язання просторової задачі теорії пружності для слабкостисливого матеріалу**

Використовуючи програмний комплекс «МІРЕЛА+» провести розрахунок конструкції із слабкостисливого матеріалу при різних сітках розбиття. Модуль пружності матеріалу дорівнює  $E=2$  МПа, а коефіцієнт Пуассона –  $\nu=0,499$ .

Розв'язати просторову задачу теорії пружності при таких даних:

1. Згин консольної балки силою, прикладеною на одному кінці й защемленої на іншому. Розміри консольної балки: довжина – 8 см, ширина – 1 см, висота – 1 см, сила, прикладена на кінці балки, дорівнює 0,0008 МПа.
2. Порожнистий циліндр, защемлений по зовнішньому контуру, під дією внутрішнього тиску. Розміри циліндра: внутрішній радіус – 0,025 м, зовнішній радіус – 0,1 м, довжина – 0,01 м, внутрішній тиск – 1 МПа.
3. Кругла плита, защемлена по контуру, під дією рівномірно розподіленого поверхневого навантаження. Розміри плити: радіус – 0,3 м, товщина – 0,01 м, поверхнєве навантаження 0,002 МПа.
4. Квадратна плита, защемлена по контуру, під дією рівномірно розподіленого поверхневого навантаження. Розміри плити: сторона плити – 0,2 м, товщина – 0,01 м, поверхнєве навантаження 0,002 МПа.
5. Згин консольної балки силою, прикладеною на одному кінці й защемленої на іншому. Розміри консольної балки: довжина – 0,1 м, ширина – 0,02 м, висота – 0,01 м, сила, прикладена на кінці балки, дорівнює 0,001 МПа.
6. Порожнистий циліндр, защемлений по зовнішньому контуру, під дією внутрішнього тиску. Розміри циліндра: внутрішній радіус – 0,05 м, зовнішній радіус – 0,1 м, довжина – 0,05 м, внутрішній тиск – 2 МПа.
7. Кругла плита, защемлена по контуру, під дією рівномірно розподіленого поверхневого навантаження. Розміри плити: радіус – 0,2 м, товщина – 0,02 м, поверхнєве навантаження 0,005 МПа.
8. Квадратна плита, защемлена по контуру, під дією рівномірно розподіленого поверхневого навантаження. Розміри плити: сторона плити – 0,4 м, товщина – 0,02 м, поверхнєве навантаження 0,004 МПа.

Проаналізувати напружено-деформований стан конструкції.

### *Контрольні запитання*

1. В чому різниця між стисливими, слабкостисливими та нестисливими матеріалами?
2. В чому полягають проблеми при розрахунках конструкцій із слабкостисливих та нестисливих матеріалів?

3. Основна ідея моментної схеми скінченного елемента для слабкостисливих матеріалів?
4. Які недоліки традиційного методу скінченних елементів усуває моментна схема?

## ПРИКЛАДИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

### *Змістовна частина завдання*

Індивідуальна робота полягає у вивченні та викладенні теоретичних основ запропонованих методів, постановок відповідних задач, описі основних розрахункових формул та схем, прикладі застосування відповідного чисельного метода.

Індивідуальна робота оформлюється у вигляді звіту, загальна схема якого може містити наступні елементи:

1. Теоретична частина (орієнтовний обсяг – 1-2 сторінки формату А4):

- для яких типів задач використовується;
- основні кроки реалізації чисельного методу;
- переваги та недоліки в порівнянні з іншими методами або порівняльний аналіз для кількох методів.

2. Практична частина:

- постановка практичної задачі;
- розрахункові формули та схеми;
- застосування метода до розв'язання задачі.

До звіту може включатися програма реалізації розрахунку.

### *Перелік тем для виконання індивідуального завдання*

1. Скінченно-різницевий метод розв'язання задач теорії пружності.
2. Метод Рітца розв'язання задач теорії пружності.
3. Чисельні методи розв'язання задач термов'язкопружності.
4. Застосування скінченно-різницевого методу до розв'язання задач інтегральної теорії в'язкопружності.
5. Метод граничних елементів розв'язання задач теорії пружності.
6. Варіаційно-різницевий метод розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла.
7. Метод колокацій розв'язання задач теорії пружності.
8. Скінченно-різницевий метод розв'язання задач теплопровідності.
9. Напіваналітичний метод скінченних елементів розв'язання задач теорії пружності.
10. Чисельні методи розв'язання динамічних задач.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл. Київ: КНУБА, 2005. 298 с.
2. Бреславський Д. В., Коритко Ю. М., Татарінова О. А. Проектування та розробка скінченноелементного програмного забезпечення. Харків: Вид-во «Підручник НТУ "ХП"», 2017. 232 с.
3. Гребенюк С. М., Гоменюк С. І., Клименко М. І. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів. Херсон: Гельветика, 2019. 350 с.
4. Гребенюк С. М., Гоменюк С. І. Чисельні методи розв'язання механічних задач: навчальний посібник для здобувачів третього освітньо-наукового рівня спеціальності «Прикладна математика» освітньо-наукової програми «Прикладна математика». Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2022. 80 с.
5. Дегтярьов О.В., Грищак В.З., Акімов Д.В., Гоменюк С.І., Гребенюк С.М., Дегтяренко П.Г., Д'яченко Н.М., Клименко Д.В., Клименко М.І., Кудін О.В., Ларіонов І.Ф., Сіренко В.М., Чопоров С.В. Математичні моделі та прогнозування руйнівних навантажень в ракетно-космічних системах. Запоріжжя: Видавничий дім «Гельветика», 2020. 260 с.
6. Зражевський Г.М. Чисельні методи в задачах механіки. Частина І. Теоретична та прикладна механіка. Методичний посібник. Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, 2015. 99 с.
7. Зражевський Г.М. Чисельні методи в задачах механіки. Частина ІІ. Механіка суцільного середовища. Розв'язання граничних задач. Навчально-методичний посібник. Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, 2020. 56 с.
8. Кузьменко В.І., Козакова Н.Л. Конспект лекцій із курсу «Числові методи математичної фізики». Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2013. 49 с.
9. Asadzadeh M. An Introduction to the Finite Element Method for Differential Equations. Hoboken (NJ): John Wiley & Sons, 2020. 334 p.
10. Epperson J.F. An Introduction to Numerical Methods and Analysis. Hoboken: Wiley. 2021. 672 p.
11. Ern A., Guermond J.-L. Finite Elements I. Approximation and Interpolation. Cham: Springer Nature Switzerland. 2021. 325 p.
12. Felippa C.A. Introduction to Finite Element Methods. Boulder: University of

- Colorado, 2004. 791 p.
13. Fish J., Belytschko T. A First Course in Finite Elements. Chichester: John Wiley & Sons, 2007. 327 p.
  14. Grebenyuk S.M., Klymenko M.I. Finite element modeling of the stress-strain state of a composite material with a viscoelastic matrix / Mathematical and computer modelling of engineering systems: Collective monograph. Riga: Baltija Publishing. 2020. Pp. 19-34.
  15. Gupta R.K. Numerical Methods: Fundamentals and Applications. Cambridge: Cambridge University Press. 2019. 824 p.
  16. Larson M.G., Bengzon F. The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications. Berlin: Springer Heidelberg, 2012. 385 p.
  17. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Oxford: Elsevier, 2014. 657 p.
  18. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Nithiarasu P. The Finite Element Method for Fluid Dynamics Seventh Edition. Butterworth-Heinemann: Elsevier, 2014. 544 p.

**Навчальне видання**  
(українською мовою)

Гребенюк Сергій Миколайович  
Гоменюк Сергій Іванович

## **ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ МЕХАНІЧНИХ ЗАДАЧ**

Навчальний посібник  
для здобувачів третього освітньо-наукового рівня  
спеціальності «Прикладна математика»  
освітньо-наукової програми «Прикладна математика»

Рецензент *С.В. Чопоров*  
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*  
Коректор *М.І. Клименко*