Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

М.І. Клименко, Є.В. Панасенко, І.Г. Ткаченко,

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ

Конспект лекцій
для здобувачів ступеня вищої освіти магістра
спеціальності «Математика»
освітньо-професійної програми «Математика»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол №
від

Запоріжжя
2023

УДК 519.71 + 075.8
К 492.

Клименко М.І., Панасенко Є.В., Ткаченко І.Г. Оптимальне керування : конспект лекцій для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2023. 77 с.

Конспект лекцій спрямований на засвоєння студентами теоретичними основами та методами застосування оптимального керування у наукових та прикладних досліджень керованих систем у різних галузях науки та техніки.

У навчальному виданні надано стислий та доступний виклад основних понять та методів сучасної теорії оптимального керування, розглянуті приклади, що ілюструють методику їх застосування. У кінці кожної лекції наведено достатню кількість питань та завдань з матеріалу лекції для самопідготовки студентів, що спрямовані на успішне оволодіння студентами основами оптимального керування.

Для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика».

Рецензент

С.І. Гоменюк, доктор технічних наук, професор, професор кафедри програмної інженерії

Відповідальний за випуск

С.М. Гребенюк, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики

ЗМІСТ

Вступ 5
Лекція 1. Задачі та основні поняття оптимального керування 7
1.1. Основні поняття теорії оптимального керування 7
1.2. Основні типи задач оптимального керування 8
1.3. Приклади задач оптимального керування 9
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 1 11
Лекція 2. Задача оптимального керування та її взаємозв'язок з варіаційними задачами на умовний екстремум 12
2.1. Основні типи варіаційних задач на умовний екстремум 12
2.2. Розв'язання задачі Лагранжа 13
2.3. Задача Больца 21
2.4. Задача Лагранжа у формі Понтрягіна 24
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 2 28
Лекція 3. Принцип максимуму та розв'язування задачі оптимального програмного керування 30
3.1. Принцип максимуму 30
3.2. Постановка задачі оптимального програмного керування 32
3.3. Необхідна умова оптимальності 34
3.4. Алгоритм застосування принципу максимуму 36
3.5. Оптимальне керування лінійними системами 39
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 3 42
Лекція 4. Метод динамічного програмування у неперервних задачах оптимального програмного керування 45
4.1. Функція Беллмана 45
4.2. Достатня умова оптимальності у динамічному програмуванні 46
4.3. Знаходження оптимального керування з повним зворотним зв'язком 48
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 4 51
Лекція 5. Розв'язування методом динамічного програмування задач синтезу оптимальних лінійних регуляторів та оптимальної стабілізації 53
5.1. Синтез оптимальних лінійних регуляторів 53

5.2. Постановка задачі оптимальної стабілізації 60
5.3. Розв'язання задачі оптимальної стабілізації... 62
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 5 63
Лекція 6. Метод динамічного програмування у дискретних задачах 65
6.1. Задача дискретного динамічного програмування 65
6.2. Задача про оптимальне інвестування підприємств 66
6.3. Задача про заміну обладнання 69
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 6 73
Використана література 75

ВСТУП

При математичному моделюванні та дослідженні фізичних та економічних процесів виникає необхідність розв’язувати задачі оптимізації. Сюди відносяться вибір оптимальних параметрів певного типу, мінімізація витрат ресурсів, максимізація прибутку тощо. Для розв’язання багатьох типів таких задач потрібне знання сучасних методів теорії оптимального керування. Оптимальне керування тісно пов’язане з вибором найкращих (оптимальних) режимів керування складними об’єктами, поведінка яких описується системами диференціальних рівнянь, а якість керування – деяким функціоналом (функціоналом якості).

Вивчення дисципліни «Оптимальне керування» є необхідною складовою частиною оволодіння сучасними методами математичного моделювання. Воно створює можливість оволодіння студентами основними ідеями та методологією теорії оптимального керування та динамічного програмування, а також їх застосуванням при розв’язанні оптимізаційних задач. Вміння застосовувати сучасні оптимізаційні методи до проектування керованих систем є необхідним для підготовки сучасних фахівців – математиків. Методи оптимального керування знаходять широке застосування у різноманітних галузях науки та техніки.

Метою вивчення курсу «Оптимальне керування» є оволодіння студентами науковими основами, сучасною методологією та особливостями застосування апарату оптимального керування у наукових дослідженнях. До основних завдань цього курсу відносяться формування у студентів уявлення про сутність оптимальних процесів, принципу максимуму, динамічного програмування та особливості застосування методів оптимального керування до розв’язання оптимізаційних задач.

Значення курсу «Оптимальне керування» полягає у формуванні у студентів методологічної бази для застосування принципу максимуму та динамічного програмування до прикладних досліджень керованих систем у різних галузях науки та техніки.

У результаті вивчення навчальної дисципліни згідно з освітньо-професійної програми спеціальності «Математика» студент повинен набути таких результатів навчання та компетентностей: мати навички використання спеціалізованих програмних засобів комп’ютерної та прикладної математики і використовувати інтернет- ресурси; знати методи математичного моделювання природничих та/або соціальних процесів; знати основні принципи теорії керування та вміти застосовувати їх до розв’язання задач; уміти використовувати наявні знання з математики та інших областей знань, досліджувати джерела (у тому числі іноземними мовами), систематизувати і обробляти отриману інформацію, використовувати відому інформацію для отримання нових результатів, побудови прикладів і дослідження нових математичних моделей об‘єктів і процесів реального світу; здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу; знання й розуміння предметної області та професійної діяльності; здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел; здатність розв’язувати проблеми різної складності та формулювати нові проблеми математичною мовою; уявлення про прикладні задачі, які можуть бути досліджені за допомогою сучасних математичних методів, знання та розуміння, методів побудови та якісного і кількісного аналізу математичних моделей природних, техногенних, економічних та соціальних об'єктів та процесів; здатність користуватися існуючими програмними засобами для проведення обчислень, пошуку інформації, оформлення результатів роботи тощо.

Вивчення курсу «Оптимальне керування» ґрунтується на знаннях студентів, набутих при вивченні дисциплін «Математичний аналіз», «Диференціальні рівняння», «Варіаційне числення та методи оптимізації», «Теорія керування» при здобуття ступеня бакалавра, а також оволодіння студентами дисципліною «Застосування сучасних мов програмування до розв'язування математичних задач», знання та навички, набуті студентами при вивченні оптимального керування, можуть використані при виконанні кваліфікаційної роботи магістра.

Автори конспекту лекцій ставили своєю метою стислий та доступний виклад основних понять та методів сучасної теорії оптимального програмного керування, розгляд прикладів, що ілюструють методику їх застосування, надання достатньої кількості вправ для самостійної роботи студентів.

Лекція 1. Задачі та основні поняття оптимального керування

Мета лекції: сформувати у студентів уявлення про сутність, предмет, основні поняття та задачі оптимального керування.

План

1. Основні поняття оптимального керування.
2. Основні типи задач оптимального керування.
3. Приклади задач оптимального керування.

Ключові терміни та поняття: система керування, фазовий вектор, керування, функціонал якості, програмне керування, основна задача оптимального керування, керування з повним зворотним зв'язком.

1.1. Основні поняття теорії оптимального керування

Під **системою керування** розуміють сукупність об'єкта керування та керуючого пристрою. Стан об'єкта керування у фіксований момент часу t визначається впорядкованою множиною n чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, які називають **фазовими координатами**. Вектор $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ називають **фазовим вектором або фазовим станом системи.**

Фазові координати є функціями часу: $x_i = x_i(t), i = 1, ..., n$. Коли об'єкт керування рухається, тобто його фазові координати з часом змінюються, то точка з радіус-вектором $\overline{x}(t)$ описує криву, яку називають **фазовою кривою** або **фазовою траєкторією**. Керуючий пристрій створює **вхідний сигнал** або **керування** $\overline{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t))$, що діє на об'єкт керування та змінює його фазову траєкторію $\overline{x}(t)$.

Рух об'єкта під дією керування описують системою диференціальних рівнянь виду

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ i = 1, 2, ..., n. \end{cases} \quad (1.1)$$

У векторній формі систему (1.1) можна записати у вигляді:

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \overline{f}(t, \overline{x}, \overline{u}).$$

Якість роботи системи керування описується функціоналом

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0\left(t, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t)\right) dt . \qquad (1.2)$$

Його називають **показником або функціоналом якості**. При досягненні об'єктом керування оптимального стану функціонал якості (1.2) досягає екстремального (найбільшого чи найменшого) значення.

Надалі вважатимемо, що керування $\bar{u}(t)$ є кусково-неперервною вектор-функцією, значення якої належать заданій замкненій обмеженій множині U, тобто задано умову:

$$u(t) \in U . \qquad (1.3)$$

Керування, що задовольняє обмеження (1.3), називають допустимим.

Сформулюємо **основну задачу оптимального керування**: з множини допустимих керувань потрібно обрати керування $\bar{u}^*$, яке переміщує об'єкт керування з початкового стану $\bar{x}(t_0) = \bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ у заданий кінцевий стан $\bar{x}(t_1) = \bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ так, що функціонал якості (1.2) досягає екстремуму. Таке керування $\bar{u}^*(t)$ та відповідний йому фазовий стан $\bar{x}^*(t)$ називають **оптимальним**.

1.2. Основні типи задач оптимального керування

До основних типів задач оптимального керування відносяться наступні задачі.

1. **Задача з обмеженими фазовими координатами**. У цьому випадку $\bar{x}(t) \in G \subset \mathbb{R}^n$, де G – задана обмежена множина з простору $\mathbb{R}^n$.

2. **Задача з фіксованим часом**. Задано час T переходу системи керування у кінцевий стан, $T = t_1 - t_0$.

3. **Задача з рухомою межею**. Умову $\bar{x}(t_1) = \bar{b}$ заміняють умовою потрапляння фазового вектора $\bar{x}(t_1)$ у деяку задану область D: $\bar{x}(t_1) \in D$.

4. **Задача з вільною межею**. Тут кінцевий момент часу t_1 відомий, при цьому відсутні обмеження на положення вектора $\bar{x}(t_1)$.

5. **Задача оптимальної швидкодії**. Потрібно перемістити об'єкт керування з початкового положення $\bar{x}(t_0) = \bar{a}$ у кінцеве положення $\bar{x}(t_1) = \bar{b}$ за мінімальний час. Тут у виразі (1.2) для функціонала якості $f_0 \equiv 1$, $I = t_1 - t_0 \to \min$.

6. **Задача синтезу оптимального керування**. У багатьох практичних задачах початковий стан об’єкта керування до початку його роботи невідомий, тому неможливо попередньо знайти вигляд оптимального керування $\bar{u}^*(t)$, його потрібно визначати як функцію поточних координат та часу: $\bar{u}^* = \bar{u}^*(t, x_1, x_2, ..., x_n)$. Якщо права частина системи диференціальних рівнянь (1.1), які описують стан об’єкта керування, не містить явно змінну часу t, то оптимальне керування $\bar{u}^*$ шукають у вигляді функції, що залежить лише від поточних значень фазових координат: $\bar{u}^* = \bar{u}^*(x_1, x_2, ..., x_n)$.

У основі розглянутої класифікації знаходяться види обмежень на фазові координати системи.

У задачах оптимального керування розрізняють наступні типи керування.

1. Керування $\bar{u} = \bar{u}(t)$, що залежить лише від часу, називають **програмним керуванням**.

2. Керування $\bar{u} = \bar{u}(t, x_1, x_2, ..., x_n)$, що залежить від часу та всіх координат фазового вектора, називають **керуванням з повним зворотним зв’язком.**

3. Керування, що залежить від часу та частини фазових координат об’єкта керування, називають **керуванням з неповним зворотним зв’язком**.

1.3. Приклади задач оптимального керування

<u>**Задача 1.**</u> Нехай візок рухається по горизонтальним рейкам без тертя під дією зовнішньої сили, яку можна змінювати у відомих межах. Необхідно зупинити візок у заданому місці у найкоротший час.

Маємо задачу оптимальної швидкодії. Оскільки візок рухається по прямолінійній траєкторії, то його положення у момент часу t визначається однією координатою $x(t)$. Додатний напрям осі Ox спрямуємо у сторону руху візка. Нехай m – його маса, початкове положення $x(0)=0$, початкова швидкість $\dot{x}(0)=v_0$, $u=u(t)$ – зовнішня сила, обмеження на неї $u_1 \le u(t) \le u_2$, T – час руху візка, $x(T)=a$ – задана точка зупинки візка, швидкість у момент зупинки $\dot{x}(T)=0$.

Математична модель задачі має вигляд:

$$\begin{cases} x(0)=0,\, \dot{x}(0)=v_0, \\ x(T)=a,\, \dot{x}(T)=0, \\ u_1 \le u \le u_2, \\ T=\int\limits_0^T dt \to min. \end{cases}$$

<u>Задача 2</u>. Знайти керування тягою двигунів ракети, що максимізує горизонтальну дальність її польоту за умови, що значення тяги не перевищує задану величину u_0 та вона пропорційна швидкості витрати палива.

Нехай початок координат відповідає початковому положенню ракети при $t=0$, $v_1(t)$ та $v_2(t)$ – проекції вектора швидкості ракети на координатні осі Ox та Oy. Нехай $x(t)$ та $y(t)$ – координати ракети, $m(t)$ – маса ракети з паливом, $u_1(t)$ та $u_2(t)$ – проекції вектора тяги на відповідно на осі Ox та Oy. Тоді $v_1(t)=\dot{x}(t)$, $v_2(t)=\dot{y}(t)$, $u_3(t)=-\dot{m}(t)$ – швидкість зменшення маси ракети. Стан ракети у момент часу t визначається фазовим вектором

$$\big(x(t), y(t), v_1(t), v_2(t), m(t)\big),$$

керування визначається вектором

$$\bar{u}(t)=\big(u_1(t), u_2(t), u_3(t)\big).$$

Нехай c – коефіцієнт пропорційності величини тяги. За другим законом Ньютона отримуємо диференціальні рівняння закону руху ракети у вигляді:

$$\begin{cases} \dot{x}=v_1(t), \\ \dot{y}=v_2(t), \\ \dfrac{d}{dt}\big(m(t)v_1(t)\big)=cu_3(t)u_1(t), \\ \dfrac{d}{dt}\big(m(t)v_2(t)\big)=cu_3(t)u_2(t)-m(t)g, \\ \dot{m}=-u_3. \end{cases} \tag{1.4}$$

Обмеження на керування мають вигляд:

$$\begin{cases} u_1^2+u_2^2 \le u_0^2, \\ 0 \le u_3 \le u_3^{\max}. \end{cases}, \tag{1.5}$$

Положення ракети у початковий та кінцевий моменти часу визначається рівностями:

$$x(0)=0,\, y(0)=0,\, \dot{x}(0)=v_{10},\, \dot{y}(0)=v_{20},\, m(0)=m_0,\; y(t_1)=0. \tag{1.6}$$

У (1.6) t_1 – час завершення польоту.

Функціонал якості має вигляд:

$$I = x(t_1) = \int_0^{t_1} v_1(t)\,dt \to \max . \qquad (1.7)$$

Рівності (1.4) – (1.7) утворюють математичну модель задачі.

<u>Задача 3</u> (найпростіша задача варіаційного числення). Знайти функцію $x(t)$, що надає екстремум заданому функціоналу $I = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x})dt$ та задовольняє крайові умови $x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$.

Цю задачу можна записати у вигляді задачі оптимального керування. Для цього введемо керування $u(t) = \dot{x}(t)$ та нову фазову змінну $y(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, x, u)ds$. Отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = u,$$
$$\dot{y} = f(t, x, u)$$

з крайовими умовами $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, $y(t_0) = 0$, функціонал якості $y(t_1) \to \min$.

Питання та завдання для самоконтролю до лекції 1

1. Надайте означення системи керування. Наведіть приклади.
2. Що називають фазовим вектором?
3. Наведіть приклади функціонала якості об’єкта керування.
4. Яке керування називають оптимальним?
5. Сформулюйте основну задачу оптимального керування.
6. Чим відрізняється задача з фіксованим часом від задачі з рухомою межею?
7. У чому полягає задача оптимального керування з обмеженими фазовими координатами?
8. Сформулюйте задачу оптимальної швидкодії.
9. Розкрийте сутність задачі синтезу оптимального керування.
10. Яке керування називають програмним?
11. Яке керування називають керуванням з повним зворотним зв’язком?
12. У чому полягає задача оптимального керування з вільною межею?

Лекція 2. Задача оптимального керування та її взаємозв'язок з варіаційними задачами на умовний екстремум

Мета лекції: встановити зв'язок між основною задачею оптимального керування та варіаційними задачами на умовний екстремум.

План

1. Основні типи варіаційних задач на умовний екстремум.
2. Розв'язання задачі Лагранжа.
3. Задача Больца.
4. Задача Лагранжа у формі Понтрягіна.
5. Зв'язок між варіаційною задачею Лагранжа та задачею оптимального керування

Ключові терміни та поняття: варіаційна задача на умовний екстремум, диференціальні та ізопериметричні зв'язки, голономні зв'язки, задача Лагранжа, функція Лагранжа, задача Больца, задача Майєра, термінальний функціонал, задача Лагранжа у формі Понтрягіна.

2.1. Основні типи варіаційних задач на умовний екстремум

Варіаційні задачі, що були розглянуті у курсі «Варіаційне числення», характеризувалися тим, що їх розв'язки повинні були задовольняти крайові умови, проте у багатьох задачах, пов'язаних з дослідженням функціоналів на екстремум, на допустимі функції накладаються і інші додаткові умови у вигляді зв'язків.

Нехай потрібно знайти екстремум функціонала

$$J(\bar{y}) = \int_a^b F(x, \bar{y}, \bar{y}')dx \tag{2.1}$$

на множині неперервно диференційовних вектор-функцій $\bar{y}(x) = \left(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\right)$, що задовольняють крайові умови

$$y_1(a) = y_{11}, y_2(a) = y_{21}, ..., y_n(a) = y_{n1},\ y_1(b) = y_{12}, y_2(b) = y_{22}, ..., y_n(b) = y_{n2}, \tag{2.2}$$

а також умовам зв'язків. Умови зв'язків можуть задовольняти як диференціальні співвідношення

$$g_i(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0; i = 1, 2, ..., k; k < n, \tag{2.3}$$

так і інтегральні рівності

$$\int_a^b h_j(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n')dx = L_j,\ j = 1, 2, ..., s. \tag{2.4}$$

При цьому похідні у виразах (2.3) та (2.4) можуть бути відсутніми. Для зв'язків (2.3) вважаємо, що функції $g_j, j = 1,2,...,k$ є неперервно диференційовними за аргументами $y_1', y_2',..., y_n'$, а ранг матриці Якобі за цими змінними є максимальним та дорівнює k. Вважається також, що функції F, g_i, h_j є двічі диференційовними, а крайові умови (2.2) узгоджені з умовами зв'язку.

Якщо у співвідношеннях (2.3) функції g_i не залежать від похідних, то такі зв'язки називають **фазовими обмеженнями або голономними зв'язками**.

Функціонал (2.1) називають функціоналом мети, диференціальні співвідношення (2.3) – **диференціальними зв'язками**, а співвідношення (2.4) – **інтегральними або ізопериметричними зв'язками**.

Дану задачу, сформульовану у загальному вигляді, називають **варіаційною задачею на умовний екстремум**. Окремий випадок цієї задачі, коли на допустиму вектор-функцію накладені лише зв'язки виду (2.3), називають задачею Лагранжа. Варіаційну задачу на умовний екстремум з інтегральними зв'язками (2.4) називають **ізопериметричною задачею**.

Ізопериметричну задачу (2.1), (2.2), (2.4) можна звести до задачі Лагранжа, ввівши нові функції

$$\varphi_i(x) = \int_a^x h_i(t, y_1, y_2,..., y_n, y_1', y_2',..., y_n')dt, i = 1,2,..., s. \tag{2.5}$$

Тоді замість інтегральних співвідношень (2.4) отримаємо диференціальні зв'язки:

$$\varphi_i'(x) = h_i(x, y_1, y_2,..., y_n, y_1', y_2',..., y_n') = 0; i = 1,2,..., s. \tag{2.6}$$

2.2. Розв'язання задачі Лагранжа

Визначимо необхідні умови екстремуму функціонала (2.1) з крайовими умовами (2.2) та рівняннями зв'язків (2.3). Для цього побудуємо допоміжний функціонал

$$\tilde{J}(y_1, y_2,..., y_n) = \int_a^b \left(F + \sum_{j=1}^k \lambda_j(x) g_j \right) dx. \tag{2.7}$$

Вираз $F + \sum_{j=1}^k \lambda_j(x) g_j$ називають **функцією Лагранжа** даної варіаційної задачі, коефіцієнти $\lambda_j(x)$ – **множниками Лагранжа**.

Розглянемо найпростіший випадок варіаційної задачі Лагранжа, коли функціонал мети (2.1) залежить від двох невідомих функцій $y(x)$ та $z(x)$, задане одне фазове обмеження, тобто розв'язуємо варіаційну задачу про екстремум функціонала

$$J(y,z)=\int_a^b F(x,y,z,y',z')dx \tag{2.8}$$

за наявності крайових умов

$$y(a)=y_a, y(b)=y_b, z(a)=z_a, z(b)=z_b \tag{2.9}$$

та обмеження

$$g(x,y,z)=0. \tag{2.10}$$

Окремим випадком цієї задачі є задача про геодезичні лінії, де потрібно на заданій поверхні знайти криву найменшої довжини, що з'єднує задані точки. У задачі (2.8)– (2.10) допустимими функціями є пари функцій $y(x)$ та $z(x)$, які задають просторову криву, розташовану на поверхні $g(x,y,z)=0$. Для такої задачі можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 2.1 Якщо пара функцій $y^*(x), z^*(x)$, що належать простору $C^1_{[a;b]}$, є розв'язком варіаційної задачі (2.8) – (2.10), причому $\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2 \neq 0$, то існує така функція $\lambda(x)$, що пара функцій $y^*(x), z^*(x)$ є екстремаллю функціонала

$$\tilde{J}(y,z)=\int_a^b \left[F(x,y,z,y',z')+\lambda(x)\cdot g(x,y,z)\right]dx. \tag{2.11}$$

Доведення. Розглянемо випадок, коли рівняння зв'язку (2.10) є розв'язним відносно однієї з змінних, наприклад, z, тобто з нього можна отримати $z=\varphi(x,y)$. Це рівняння дозволяє звести дану задачу до варіаційної задачі з однією невідомою функцією $y^*(x)$, що є розв'язком задачі про екстремум функціонала

$$\int_a^b F\left(x,y,\varphi,\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}y'\right)dx,$$

де $y(a)=y_a$, $y(b)=y_b$. Тому функція $y^*(x)$ задовольняє рівняння Ейлера для функціонала цієї задачі. Дане рівняння після нескладних перетворень можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)-\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0.$$

З цього рівняння, враховуючи, що $\frac{\partial \varphi}{\partial y}=-\frac{g'_y}{g'_z}$, отримуємо:

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)-\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{g'_y}{g'_z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0. \tag{2.12}$$

У рівнянні (2.12) зробимо заміну:

$$\lambda(x)=\frac{1}{g'_z}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)-\frac{\partial F}{\partial z}\right). \tag{2.13}$$

З врахуванням (2.13) рівняння (2.12) набуває вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\lambda(x)\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0, \tag{2.14}$$

а рівність (2.13) можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial F}{\partial z}+\lambda\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)=0. \tag{2.15}$$

Рівняння (2.14) та (2.15) являють собою рівняння Ейлера для допоміжного функціонала (2.11). Таким чином, якщо функції $y^*(x), z^*(x)$ є розв'язком варіаційної задачі (2.8) – (2.10), то вони задовольняють системі рівнянь Ейлера – Лагранжа для допоміжного функціонала (2.11).

Дану теорему можна узагальнити для варіаційної задачі (2.1) – (2.3) для функціонала, що залежить від n функцій $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ за наявності диференціальних зв'язків.

<u>Теорема 2.2</u> Якщо вектор-функція $y^*=(y_1^*(x), y_2^*(x),..., y_n^*(x))$ з простору $C^1_{[a;b]}$ є розв'язком варіаційної задачі (8.1) – (8.3), то існують такі функції $\lambda_1(x),\lambda_2(x),...,\lambda_n(x)$, що y^* є екстремаллю допоміжного функціонала (2.7).

Алгоритм застосування необхідних умов екстремуму функціонала у варіаційній задачі (2.1) – (2.3) на умовний екстремум складається з наступних кроків.

1. Для заданої варіаційної задачі записуємо функцію Лагранжа

$$L=F+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(x)g_j\,. \tag{2.16}$$

2. Складаємо систему з рівнянь Ейлера – Лагранжа для допоміжного функціонала (2.7) та умов зв'язку (2.3):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial y_i}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial L}{\partial y'_i}\right)=0; i=1,2,...,n;\\ g_j(x, y_1, y_2,..., y_n, y'_1, y'_2,..., y'_n)=0,\ j=1,2,...,k.\end{cases} \tag{2.17}$$

3. Знаходимо загальний розв'язок системи (2.17) $y_i(x, C_1, C_2,..., C_{2n})$, $i=1,\ 2,\ ...,\ n$, $\lambda_j(x)$, $j=1,2,...,k$.

4. Визначаємо значення сталих $C_1, C_2,..., C_{2n}$ з крайових умов (2.2) та записуємо вираз для отриманої екстремалі $y(x)=y_1(x), y_2(x),..., y_n(x))$.

<u>Приклад 2.1.</u> Знайти екстремаль функціонала $J(y_1, y_2) = \int\limits_0^1 \left(y_1'^2 + y_2'^2 \right) dx$, що задовольняє крайові умови $y_1(0) = 2,\ y_2(0) = 0,\ y_1(1) = 2\mathrm{ch}1,\ y_2(1) = 2\mathrm{sh}1$ та диференціальний зв'язок $y_1' - y_2 = 0$.

Розв'язання. Функція Лагранжа даної варіаційної задачі має вигляд (2.16):

$$L = y_1'^2 + y_2'^2 + \lambda(y_1' - y_2).$$

Запишемо систему (2.17).

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = 0; \frac{\partial L}{\partial y_1'} = 2y_1' + \lambda; \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y_1'}\right) = 2y_1'' + \lambda'; \ \frac{\partial L}{\partial y_2} = -\lambda; \frac{\partial L}{\partial y_2'} = 2y_2'; \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y_1'}\right) = 2y_2''.$$

Підставляючи ці вирази, а також рівняння зв'язку $g\left(y_1, y_2\right) = y_1' - y_2$ у (8.17), отримуємо систему

$$\begin{cases} 2y_1'' + \lambda' = 0; \\ -\lambda - 2y_2'' = 0; \\ y_1' - y_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, після виключення λ отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l} y_1(x) = C_1 x + C_2 + C_3 e^{-x} + C_4 e^x; \\ y_2(x) = C_1 - C_3 e^{-x} + C_4 e^x. \end{array}\right.$$

Значення сталих інтегрування визначаємо з крайових умов:

$$\begin{cases} y_1(0) = C_2 + C_3 + C_4 = 2; \\ y_2(0) = C_1 - C_3 + C_4 = 0; \\ y_1(1) = C_1 + C_2 + C_3 e^{-1} + C_4 e = e + e^{-1}; \\ y_2(1) = C_1 - C_3 e^{-1} + C_4 e = e - e^{-1}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0; \\ C_2 = 0; \\ C_3 = 1; \\ C_4 = 1. \end{cases}$$

Таким чином, екстремаль даної варіаційної задачі на умовний екстремум визначається співвідношеннями:

$$\begin{cases} y_1 = e^{-x} + e^x; \\ y_2 = -e^{-x} + e^x. \end{cases}$$

Варіаційну задачу Лагранжа отримуємо при знаходженні ліній найменшої довжини (геодезичних ліній), що належать заданій поверхні $g(x, y, z) = 0$ та проходять через задані точки $\left(x_1, y_1, z_1\right)$ та $\left(x_2, y_2, z_2\right)$. Якщо розв'язок даної задачі шукати у вигляді пари функцій $y = y(x), z = z(x)$, то отримаємо задачу дослідження на мінімум функціонала $J(y, z) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z_2'^{}}\,dx$ за умови $g(x, y, z) = 0$ та крайовими умовами $y(x_1) = y_1$, $z(x_1) = z_1$, $y(x_2) = y_2$, $z(x_2) = z_2$, розв'язок якої знаходиться згідно викладеного вище алгоритму розв'язування варіаційної задачі Лагранжа.

Знайдемо розв’язування ізопериметричної задачі. Розглянемо добуток двох величин x та y сума яких дорівнює сталій величині l, тобто $x+y=l$. Відомо, що цей добуток має максимальне значення, якщо співмножники є рівними між собою: $x=y$. Інакше можна сказати, що серед усіх прямокутників, що мають сталий периметр, найбільшу площу має квадрат. Якщо перейти від випадку многокутника зі сталим периметром до більш загальної задачі про фігуру, обмежену замкненою лінією, отримаємо відому ізопериметричну задачу: серед всіх замкнених кривих довжини l знайти таку, що обмежує максимальну площу. Очевидно, що цю площу можна виразити за допомогою формули $S=\int\limits_a^b y(x)dx$ з додатковою умовою

$$\int\limits_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=l.$$

Дану задачу можна узагальнити наступним чином. Нехай задані тричі диференційовані за змінними x, y та y' функції $F=F(x,y,y')$ та $G=G(x,y,y')$, де $x\in\left[a;b\right]$. Потрібно серед всіх допустимих функцій $y=y(x)$ знайти ту, на якій інтеграл $\int\limits_a^b G(x,y,y')dx$ приймає задане значення K, тобто

$$\int\limits_a^b G(x,y,y')dx=K, \tag{2.18}$$

і при цьому функціонал

$$J(y(x))=\int\limits_a^b F(x,y,y')dx \tag{2.19}$$

досягає екстремального значення.

Для розв’язання цієї задачі застосовують метод Лагранжа, який полягає у наступному. На основі виразів (2.18) та (2.19) будуємо допоміжний функціонал

$$H(y(x))=\int\limits_a^b F(x,y,y')dx+\lambda\int\limits_a^b G(x,y,y')dx=\int\limits_a^b\left[F(x,y,y')+\lambda G(x,y,y')\right]dx.$$

Введемо позначення для підінтегрального виразу:

$$L(x,y,y',\lambda)=F(x,y,y')+\lambda G(x,y,y'), \tag{2.20}$$

де $x\in\left[a;b\right]$. Функція (2.20) являє собою функцію Лагранжа ізопериметричної задачі. Множник Лагранжа λ визначається у процесі розв’язання задачі.

Оскільки необхідною умовою екстремуму функціонала $H(y(x))$ є рівність нулю його варіації, то задача про умовний екстремум функціонала (2.19) зводиться до задачі про безумовний екстремум функціонала $H(y(x))$.

Теорема 2.3 Якщо функція $y = y(x)$ реалізує екстремум функціонала (2.19) за умови (2.18), то існує такий сталий параметр λ, що функція $y(x)$ є екстремаллю для функціонала

$$H(y(x)) = \int_a^b L(x, y, y', \lambda)dx, \qquad (2.21)$$

де $L(x, y, y', \lambda)$ – функція Лагранжа (2.20).

Доведення. Необхідна умова екстремуму функціонала $H(y(x))$ має вигляд: $\delta H\left[y(x)\right] = 0$. Тому, якщо функція $y = y(x)$ реалізує екстремум функціонала $H\left[y(x)\right]$, то необхідно, щоб вона задовольняла рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0.$$

Підставляючи сюди вираз (2.20), отримаємо:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \lambda\left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right] = 0. \qquad (2.22)$$

Наслідок. Якщо функції F та G не залежать у явному вигляді від аргументу x, тобто $F = F\left(y, y'\right)$, $G = G(y, y')$, то перший інтеграл для рівняння (2.22) має вигляд

$$F + \lambda G - y'\frac{\partial F}{\partial y'} - \lambda\frac{\partial G}{\partial y'}y' = C.$$

Дану теорему можна узагальнити для варіаційної задачі (2.1), (2.2), (2.4) на умовний екстремум з s інтегральними зв’язками для функціонала, що залежить від n функцій $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ у вигляді наступної теореми.

Теорема 2.4. Якщо функції $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ надають екстремум функціоналу $J(\overline{y})$ у варіаційній задачі (2.1), (2.2), (2.4), то вони є екстремалями функціонала

$$H(y_1, y_2,..., y_n) = \int_a^b\left(F + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j h_j\right)dx. \qquad (2.23)$$

Приклад 2.2. Серед усіх кривих довжиною l, які з’єднують дві задані точки A та B на площині, знайти таку, що разом з відрізком AB обмежує максимальну площу.

Розв’язання. Прийнявши за вісь Ox пряму, що проходить через точки $A(a;0)$ та $B(b;0)$, отримаємо вираз для площі, обмеженої кривою $y = y(x)$ та відрізком AB:

$$J(y(x)) = \int_a^b y(x)dx.$$

Знайдемо максимум даного інтеграла за умови $\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = l$. У цьому випадку функція Лагранжа $L(x, y, y', \lambda)$ набуває вигляду:

$$L(x, y, y', \lambda) = y(x) + \lambda\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

а рівняння Ейлера при $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ можна записати у наступній формі:

$$\frac{d}{dx}\left[F + \lambda G - y'\left(\frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right] = 0$$

або $y(x) + \lambda\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - y' \cdot \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \alpha$.

Звідси після нескладних перетворень знаходимо $y = \alpha - \frac{\lambda}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$.

Прийнявши для інтегрування даного рівняння $\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\varphi$, отримаємо $y = \alpha - \lambda\cos\varphi$.

Таким чином, $\frac{dy}{dx} = \lambda\sin\varphi, \frac{d\varphi}{dx} = \mathrm{tg}\varphi$, тому $dx = \lambda\cos\varphi \cdot d\varphi,\ x = \lambda\sin\varphi + \beta$.

Ми отримали параметричне рівняння кола з центром у точці з координатами $(\alpha;\beta)$ радіуса λ:

$$\begin{cases} x - \beta = \lambda \cdot \sin\varphi; \\ y - \alpha = -\lambda \cdot \cos\varphi. \end{cases}$$

Виключаючи звідси параметр φ, отримуємо рівняння кола у декартових координатах: $(x-\beta)^2 + (y-\alpha)^2 = \lambda^2$.

Сталі інтегрування α, β та невідомий множник λ знаходимо з умов $y(a) = 0$, $y(b) = 0$ та $\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = l$.

<u>Приклад 2.3.</u> Знайти форму абсолютно гнучкого, однорідного каната довжиною l, підвішеного у точках $A(x_1;y_1)$ та $B(x_2,y_2)$ у вертикальній площині xOy.

Розв'язання. Оскільки у положенні рівноваги центр ваги каната повинен займати найбільш низьке положення, то задача зводиться до знаходження статичного моменту каната відносно осі Ox у вертикальній площині xOy. Як відомо, статичний момент каната відносно осі Ox можна визначити за допомогою співвідношення:

$$J\left[y(x)\right]=\int_{x_1}^{x_2} y(s)ds=\int_{x_1}^{x_2} y(x)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx\,.$$

Дослідимо даний функціонал на екстремум. Для цього побудуємо допоміжний функціонал $H\left[y(x)\right]=\int_{x_1}^{x_2} L(y,y',\lambda)dx$, де функція Лагранжа визначається рівністю $L(y,y',\lambda)=(y+\lambda)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

Оскільки необхідною умовою екстремуму функціонала $J\left[y(x)\right]$ є виконання рівняння Ейлера, перший інтеграл якого у даному випадку має вигляд $L(y,y',\lambda)-y'\frac{\partial L}{\partial y'}=C_1$, то звідси випливає, що

$$\left(y+\lambda\right)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}-\frac{\left(y+\lambda\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=C_1.$$

Після нескладних перетворень отримуємо $y+\lambda=C_1\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

Виконавши заміну $\frac{dy}{dx}=\operatorname{sh}t$, знаходимо $y+\lambda=C_1\cdot\operatorname{ch}t$, отримаємо $dx=\frac{dy}{\operatorname{sh}t}=\frac{C_1\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}t}dt=C_1dt$, $x=C_1t+C_2$.

Таким чином, ми отримали параметричне рівняння кривої у вигляді

$$\begin{cases}x=C_1t+C_2;\\ y=C_1\operatorname{ch}t-\lambda.\end{cases}$$

Виключивши з цих рівнянь параметр t, отримуємо рівняння сімейства екстремалей $y=C_1\operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1}-\lambda$, що являє собою рівняння ланцюгової лінії. Значення сталих інтегрування C_1 та C_2, а також множника Лагранжа λ знаходимо з умов:

$$y(x_1)=y_1,\, y(x_2)=y_2,\, \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=l\,.$$

Ці додаткові умови дозволяють однозначно визначити розв’язок цієї задачі.

2.3. Задача Больца

Здійснимо класифікацію варіаційних задач на умовний екстремум у залежності від типу функціонала, що є об’єктом дослідження.

У п. 2.1 розглянуто задачу Лагранжа з функціоналом мети

$$J(y_1,y_2,...,y_n)=\int_a^b F(x,y_1,y_2,...,y_n,y_1',y_2',...,y_n')dx\,. \tag{2.24}$$

Якщо у задачі Лагранжа інтегральний функціонал мети (2.24) замінити на функціонал виду

$$T(y_1,y_2,...,y_n)=T(y_1(a),y_2(a),...,y_n(a),y_1(b),y_2(b),...,y_n(b))\,, \tag{2.25}$$

де T – двічі неперервно диференційовна функція своїх аргументів, отримаємо задачу Майєра. Функціонал (2.25) називають **термінальним функціоналом**.

Варіаційну задачу на екстремум змішаного функціоналу

$$B(y_1,y_2,...,y_n)=I(y_1,y_2,...,y_n)+T(y_1,y_2,...,y_n) \tag{2.26}$$

є **задачею Больца**.

Для всіх трьох типів задач вважаємо, що зв’язки, накладені на функціонал, мають вигляд:

$$g_j(x,y_1,y_2,...,y_n,y_1',y_2',...,y_n')=0;\; j=1,2,...,k;\, k<n, \tag{2.27}$$

а крайові умови мають найбільш загальний вигляд:

$$\varphi_i(a,y_1(a),...,y_n(a),b,y_1(b),...,y_n(b))=0,\, i=1,2,...,s;\, s\le 2n+2. \tag{2.28}$$

Варіаційну задачу відносно змішаного функціонала мети за відсутності умов зв’язків називають елементарною задачею Больца.

Задача Больца, як і задача Майєра, може бути розв’язана шляхом її зведення до задачі Лагранжа. Розглянемо це на прикладі задачі Больца для функціонала

$$B(y_1,y_2,...,y_n)=\int_a^b F(x,y_1,y_2,...,y_n)dx+T(y_1(b),y_2(b),...,y_n(b)) \tag{2.29}$$

з диференціальними зв’язками (2.27) та крайовими умовами:

$$y_1(a)=y_{11},\, y_2(a)=y_{21},...,y_n(a)=y_{n1}\,. \tag{2.30}$$

Відрізок $[a;b]$ при цьому вважаємо фіксованим. Для даної задачі

$$\frac{T(y_1(a),...,y_n(a))}{b-a}=\frac{T(y_{11},...,y_{n1})}{b-a}=\text{const}\,,$$

оскільки $a, b, y_{11},..., y_{n1}$ у задачі є сталими величинами. З врахуванням цього термінальний доданок $T(y_1(b), y_2(b),..., y_n(b))$ у (2.29) можна записати у вигляді:

$$T(y_1(b), y_2(b),..., y_n(b))=\int_a^b\left[\frac{T(y_1(a),...,y_n(a))}{b-a}+\frac{d}{dx}\big(T(y_1(x),...,y_n(x))\big)\right]dx\,.$$

Це дозволяє записати функціонал (2.29) у інтегральній формі:

$$B=\int_a^b\left[F(x, y_1,..., y_n, y_1',..., y_n')+\frac{T(y_1(a),...,y_n(a))}{b-a}+\frac{d}{dx}\big(T(y_1(x),...,y_n(x))\big)\right]dx\,.$$

Таким чином, задача Больца (2.29), (2.27), (2.30) еквівалентна задачі Лагранжа для записаного у інтегральній формі функціонала B при тих же зв'язках (2.27) та крайових умовах (2.30).

Теорема. 2.5 Якщо допустима неперервно диференційовна вектор-функція $\bar{y}(x)=(y_1(x),..., y_n(x))$ надає екстремум функціоналу (2.29) за наявності диференціальних зв'язків (2.27) та крайових умов (2.30), то існує система k функцій $\lambda_1(x),...,\lambda_k(x)$, при яких функція $\bar{y}(x)$ є екстремаллю функціонала

$$H=\int_a^b\left(F+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j\right)dx\,,$$

що задовольняє умови (2.27), (2.30), а також умови трансверсальності

$$\left.\frac{\partial L}{\partial y_i'}\right|_{x=b}=-\left.\frac{\partial T}{\partial y_i}\right|_{x=b},\ i=1,2,...,n. \qquad (2.31)$$

Тут $L=F+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j$ – функція Лагранжа.

Доведення. Нехай вектор-функція $\bar{y}(x)=(y_1(x), y_2(x),..., y_n(x))$ є точкою екстремуму у задачі Больца (2.29), (2.27), (2.30). Тоді ця функція є також точкою екстремуму у задачі Лагранжа для функціонала B у інтегральній формі за умов (2.27), (2.30). Для цієї задачі Лагранжа існують такі функції $\lambda_1(x), \lambda_2(x),...,\lambda_k(x)$, що $\bar{y}(x)$ є точкою екстремуму допоміжного функціонала

$$B^*=\int_a^b\left[L+\frac{T(y_1(a),...,y_n(a))}{b-a}+\frac{d}{dx}\big(T(y_1(x),...,y_n(x))\big)\right]dx. \qquad (2.32)$$

Запишемо систему рівнянь Ейлера для функціонала (2.32):

$$\frac{\partial f^*}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f^*}{\partial y_i'}\right)=0,\ i=1, 2,..., n, \qquad (2.33)$$

де f^* – підінтегральна функція у (2.32).

Виконаємо перетворення рівнянь системи (2.33).

$$\frac{\partial f^*}{\partial y_i}=\frac{\partial L}{\partial y_i}+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial T}{\partial y_i}\right),\ \frac{\partial f^*}{\partial y_i'}=\frac{\partial L}{\partial y_i'}+\frac{\partial T}{\partial y_i},\ i=1,2,...,n.$$

Ці вирази підставимо у рівняння системи (2.33) і отримаємо рівняння:

$$\frac{\partial L}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y_i'}\right)=0,\, i=1,2,...,n, \tag{2.34}$$

які разом з диференціальними рівняннями зв'язків (2.27) утворюють систему з $n+k$ рівнянь відносно невідомих функцій $y_i(x), i=1,2,...,n, \lambda_j(x), j=1,2,...,k.$ Оскільки значення b є фіксованим, а змінюватись можуть лише значення $y_1(b), y_2(b),..., y_n(b)$, то отримали варіаційну задачу з природними крайовими умовами $\left.\frac{\partial f^*}{\partial y_i'}\right|_{x=b}=0$. Звідси випливають умови (2.31).

Для функціонала

$$B=\int_a^b F(x,y_1,y_2,...,y_n)dx+T_1(y_1(a),...,y_n(a)+T_2(y_1(b),y_2(b),...,y_n(b))$$

при фіксованому проміжку інтегрування $[a;b]$ та довільних значеннях $y(x)$ на його межах до умов трансверсальності (2.31) на правому кінці $x=b$ слід додати умови трансверсальності на лівому кінці $x=a$:

$$\left.\frac{\partial L}{\partial y_i'}\right|_{x=a}=\left.\frac{\partial T_1}{\partial y_i}\right|_{x=a}. \tag{2.35}$$

Приклад 2.4. Знайти екстремалі функціонала $J=\int_1^2 x^2y'^2dx-2y(1)+y^2(2).$

Розв'язання. Маємо елементарну задачу Больца, де відсутні обмеження, тому її функція Лагранжа є підінтегральною функцією заданого функціонала:

$$L=F=x^2y'^2.$$

Рівняння Ейлера для неї має вигляд: $\frac{d}{dx}\left(2x^2y'\right)=0$.

Його розв'язками є сімейство функцій $y=C_2-\frac{C_1}{x}$. Тут $T_1=-2y$, $T_2=y^2$. Для визначення сталих C_1 та C_2 використаємо умови трансверсальності: $\left.\frac{\partial L}{\partial y'}\right|_{x=1}=-2$, $\left.\frac{\partial L}{\partial y'}\right|_{x=2}=-2\left.y\right|_{x=2}$. Звідси отримуємо:

$$y'=\frac{C_1}{x^2},\ \frac{\partial L}{\partial y'}=2x^2y'=2C_1,\ 2C_1=-2\Rightarrow C_1=-1,\ 2C_1=-2\left(C_2-\frac{C_1}{2}\right),\ C_2=\frac{1}{2}.$$

Таким чином, отримали екстремаль задачі: $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$.

Отже, розв’язання задач Больца та Майєра можна звести до розв’язування варіаційної задачі Лагранжа. Далі з’ясуємо, як ця задача пов’язана з основною задачею оптимального керування.

2.4. Задача Лагранжа у формі Понтрягіна

З постановки задачі оптимального керування та задачі Лагранжа зрозуміли, що за математичними моделями вони близькі між собою. Для задачі Лагранжа (2.1) та наявності диференціальних зв’язків виду (2.3) розглянемо окремий її випадок, коли рівняння зв’язків розв’язні відносно похідних, тобто мають вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1\left(t, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m\right); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \dot{x}_n = f_n\left(t, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m\right). \end{cases} \tag{2.36}$$

Змінні $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, що відповідають похідним у лівій частині системи (2.36), будемо розглядати як фазові змінні, а решту змінних – як керування. Для керувань введемо позначення $u_j, j = 1, \ldots, r,\ r = m - n.$ Поділ змінних на фазові змінні та керування дозволить записати рівняння зв’язків (2.36) у векторній формі:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}\left(t, \bar{x}, \bar{u}\right) \tag{2.37}$$

У рівності (2.37) вектори $\bar{x} = \left(x_1, \ldots, x_n\right)^T, \bar{u} = \left(u_1, u_2, \ldots, u_r\right)^T$, $\bar{f} = \left(f_1, \ldots, f_n\right)^T$.

Будемо розглядати задачі, у яких функціонал якості (функціонал мети) має вигляд:

$$J\left(\bar{x}, \bar{u}\right) = \int_a^b f_0\left(t, \bar{x}, \bar{u}\right) dt. \tag{2.38}$$

У (2.39) підінтегральний вираз f_0 не залежить від похідних невідомих функцій. Відрізок $[a; b]$ вважається фіксованим, незмінним і умови на його кінцях мають вид:

$$\bar{\Psi}\left(\bar{x}(a)\right) = \bar{0},\ \bar{\Theta}\left(\bar{x}(b)\right) = \bar{0}, \tag{2.39}$$

де $\bar{\Psi} = \left(\psi_1, \ldots, \psi_s\right)^T, \bar{\Theta} = \left(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_l\right)^T, \quad s, l \le n$.

Задачу (2.37)-(2.39) називають **задачею Лагранжа у формі Понтрягіна**. Тут вважаємо, що всі функції $f_i, i = 0,1, \ldots, n,$ а також вектор-функції $\bar{\Psi}, \bar{\Theta}$ двічі неперервно диференційовані, $\bar{x}(t)$ неперервна диференційовна на відрізку $[a; b]$, $\overline{u(t)}$ неперервна на цьому відрізку. У цій постановка задача Лагранжа відрізняється від задач оптимального керування лише класом допустимих функцій. У задачах оптимального керування фазові траєкторії $\bar{y}(t)$ кусочно гладкі функції, а керування $\bar{u}(t)$ є кусочні неперервні функції, а також відсутні обмеження на фазові координати та керування.

Для розв'язання задачі (2.37)-(2.39) застосуємо метод Лагранжа. Для цього введемо множники Лагранжа, що використовували про розв'язування варіаційної задачу Лагранжа з диференціальними обмеженнями. Складемо допоміжний функціонал для цієї задачі:

$$J^*\left[\bar{x},\bar{u}\right]=\int_a^b L\left(t,\bar{x},\frac{d\bar{x}}{dt},\bar{u}\right)dt+\bar{\mu}^T\Psi\left(x\left(t_1\right)\right)+\bar{\nu}^T\Theta\left(\bar{x}\left(t_2\right)\right) \tag{2.40}$$

Тут функція Лагранжа має вигляд:

$$\begin{aligned} L\left(t,\bar{x},\frac{d\bar{x}}{dt},\bar{u}\right)&=f_0\left(t,\bar{x},\bar{u}\right)+\sum_{i=1}^n\lambda_i\left(t\right)\left(\dot{x}_i-f_i\left(t,\bar{x},\bar{u}\right)\right)=\\ &=f_0+\bar{\lambda}^T\left(\frac{dx_i}{dt}-\bar{f}\right) \end{aligned} \tag{2.41}$$

У рівності (2.41) $\bar{\lambda}^T=\left(\lambda_1\left(t\right),\lambda_2\left(t\right),...,\lambda_n\left(t\right)\right)$, $\bar{\mu}^T=\left(\mu_1,...,\mu_s\right)$, $\bar{\nu}^T=\left(\nu_1,...,\nu_l\right)$, є множниками Лагранжа. Тут множники $\lambda_i\left(t\right)$ враховують диференціальні зв'язки (2.36), а множники μ_i,ν_i – обмеження (2.39).

Теорему 2.1 можна узагальнити для випадку крайових умов (2.39). Це узагальнення означає, що екстремалі задачі Лагранжа є екстремалями допоміжного функціонала $J^*\left[\bar{x},\bar{u}\right]$. Щоб знайти екстремалі задачі Лагранжа, потрібно з екстремалей допоміжного функціонала (2.40) вибрати, що задовольняють крайові умови (2.39) та диференціальні зв'язки (2.36). Отже, екстремалі допоміжного функціонала, що задовольняють крайові умови та диференціальні зв'язки, є екстремалями задачами Лагранжа.

Запишемо рівняння для екстремалей задачі (2.37)-(2.39). Рівняння Ейлера для допоміжного функціонала, з врахуванням поділу змінних на фазові змінні та керування, мають вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{d\left(L'_{\dot{x}_i}\right)}{dt}-L'_{x_i}=0, i=1,2,...,n; \\ \dfrac{d\left(L'_{\dot{u}_j}\right)}{dt}-L'_{u_j}=0,\ j=1,2,...,r. \end{cases} \tag{2.42}$$

Для функції Лагранжа виду (2.41) з (2.42) отримаємо:

$$\frac{d\left(\lambda_i\right)}{dt}=\left(f_0\right)'_{x_i}-\bar{\lambda}^T\bar{f}'_{x_i}, i=1,2,...,n; \tag{2.43}$$

$$\left(f_0\right)'_{u_j}-\bar{\lambda}^T\bar{f}'_{u_j}=0,\ j=1,2,...,r. \tag{2.44}$$

Тут $\bar{f}=\left(f_1,f_2,...,f_n\right)^T$. Рівняння (2.44) є алгебраїчними, оскільки у функцію Лагранжа не входять похідні по часу від керувань. До системи диференціальних рівнянь (2.43) потрібно для її однозначного розв'язати потрібно додати умови трансверсальності на кінцях відрізка інтегрування:

$$\begin{cases} L'_{x_i}\Big|_{t=a} = \overline{\mu}^T\, \overline{\Psi}'_{x_i}\Big|_{t=a},\ i=1,...,n; \\ L'_{u_j}\Big|_{t=a} = \overline{\mu}^T\, \overline{\Psi}'_{u_j}\Big|_{t=a},\ i=j,...,r; \\ L'_{x_i}\Big|_{t=b} = -\overline{\nu}^T\, \overline{\Theta}'_{x_i}\Big|_{t=b},\ i=1,...,n; \\ L'_{u_j}\Big|_{t=b} = -\overline{\nu}^T\, \overline{\Theta}'_{u_j}\Big|_{t=b},\ j=1,...,r. \end{cases} \tag{2.45}$$

З системи (2.45) лише перше та третє рівняння не є тривіальними. З них отримуємо співвідношення:

$$\lambda_i(a) = \overline{\mu}^T\, \overline{\Psi}'_{x_i}\left(\overline{x}(t)\right)\Big|_{t=a},\ i=1,2,...,n, \tag{2.46}$$

$$\lambda_i(b) = -\overline{\nu}^T\, \overline{\Theta}'_{x_i}\left(\overline{x}(t)\right)\Big|_{t=b},\ i=1,2,...,n. \tag{2.47}$$

Щоб визначити екстремалі задачі Лагранжа (2.37)-(2.39) у формі Понтрягіна, потрібно до системи рівнянь (2.43)-(2.47) додати рівняння диференціальних зв'язків (2.37) та крайові умови (2.39). Внаслідок цього ми отримаємо систему $2n+r$ рівнянь, з яких $2n$ рівнянь є диференціальними рівняннями першого порядку, і r рівняння є алгебраїчними, це рівняння (2.44). Розв'язки цієї системи залежать від $2n$ сталих інтегрування та $s+l$ невизначених множників Лагранжа ν_i, μ_i. Для визначення всіх $n+s+l$ невідомих сталих маємо $2n$ умов трансверсальності (2.46), (2.47) та $s+l$ крайових умов (2.39).

Розглянемо задачу Лагранжа у формі Понтрягіна відносно змішаного функціонала мети у вигляді:

$$B[\overline{x},\overline{u}] = \int_a^b f_0(t,\overline{x},\overline{u})dt + \tilde{T}\left(x(a)\right) + T\left(x(b)\right) \tag{2.48}$$

Для цієї задачі допоміжний функціонал згідно методом Лагранжа матиме вигляд:

$$\begin{aligned} B^*[\overline{x},\overline{u}] = \int_a^b L(t,\overline{x},\overline{u})dt + \overline{\mu}^T\overline{\Psi}\left(x(a)\right) + \overline{\nu}^T\overline{\Theta}\left(x(b)\right) + \\ +\tilde{T}\left(\overline{x}(a)\right) + T\left(\overline{x}(b)\right). \end{aligned} \tag{2.49}$$

Для нього функція Лагранжа така ж, як і у попередньої задачі для інтегрального функціонала мети. Тому рівняння Ейлера матимуть такий же вигляд,як і у попередній задачі, тобто (2.43), (2.44). Умови трансверсальності змінюються за рахунок наявності термінальних доданків функціонала (2.48):

$$\lambda_i(a) = \left(\overline{\mu}^T\overline{\Psi}'_{x_i}\left(\overline{x}(t)\right) + \tilde{T}'_{x_i}\left(\overline{x}(t)\right)\right)\Big|_{t=a},\ i=1,...,n,$$

$$\lambda_i(b) = -\left(\overline{\nu}^T\overline{\Theta}'_{x_i}\left(\overline{x}(t)\right) + T'_{x_i}\left(\overline{x}(t)\right)\right)\Big|_{t=b},\ i=1,...,n,$$

Якщо ж обмеження (2.39) відсутні, то отримаємо задачу (2.42) з вільними кінцями. Це третє формулювання задачі Лагранжа у формі Понтрягіна. У цьому умови трансверсальності мають вигляд:

$$\lambda_i(a) = \tilde{T}'_{x_i}\left(\bar{x}(t)\right)\Big|_{t=a}, i = 1,\dots,n,$$

$$\lambda_i(b) = -T'_{x_i}\left(\bar{x}(t)\right)\Big|_{t=b}, i = 1,\dots,n.$$

В усіх розглянутих постановках задачі Лагранжа у формі Понтрягіна, відрізок $[a;b]$ зміни аргумента t є сталим, його кінці не змінюються. Застосування методу Лагранжа дозволяє отримати необхідні умови екстремума функціонала у випадку змінних меж відрізка – точок a та b. Розглянемо цей випадок для задачі (2.37)-(2.39). Тоді екстремалі задачі Лагранжа є екстремалями для допоміжного функціонала (2.40). При цьому допоміжний функціонал (2.40) залежить не лише від вектор-функцій $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$, але й від змінних a, b. Він має вигляд:

$$J^*\left[\bar{x},\bar{u},t_1,t_2\right] = \int_a^b L\left(t,\bar{x},\bar{u}\right)dt + \bar{\mu}^T\bar{\Psi}\left(x(a)\right) + \bar{\nu}^T\bar{\Theta}\left(x(b)\right). \qquad (2.50)$$

Для цього варіація функціонала – це варіація у задачі з рухомими межами, розв’язання якої розглядалось у курсі варіаційного числення. Прирівнюємо цю варіацію до нуля, що є необхідною умовою екстремуму функціонала, отримаємо ці умови для функціонала (2.49). При цьому системи рівнянь (2.42) та (2.45) доповнюється рівняннями:

$$\begin{cases} \left.\left(L - \sum\limits_{i=1}^{n} \dot{x}_i L'_{x_i}\right)\right|_{t=a} = 0, \\ \left.\left(L - \sum\limits_{i=1}^{n} \dot{x}_i L'_{x_i}\right)\right|_{t=b} = 0. \end{cases} \qquad (2.51)$$

Отже, екстремалі функціонали (2.49) задовольняє ті ж рівняння, що й екстремалі функціонала (2.40), крім того, вони повинні задовольняти й умови (2.51).

Таким чином, якщо функції у постановці екстремальної задачі, зокрема, задачі оптимального керування, є диференційовними, то для її розв’язання можна використати метод Лагранжа.

З’ясуємо, як пов’язані варіаційна задача Лагранжа на умовний екстремум функціонала та задача оптимальна керування. Постановка задачі Лагранжа має вигляд:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0\left(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n\right)dt \to \text{extr}$$

за наявності додаткових умов (зв’язків)

$$f_i\left(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n\right) = 0, i = 1, 2, \dots, s, s < n$$

та крайових умов $x_j(t_0)=x_{j0}, x_j(t_1)=x_{j1}, j=1,2,...,n$, узгоджених з рівняннями зв'язків.

Вектор-функція $\bar{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$, що надає розв'язок задачі Лагранжа, повинна задовольняти рівняння Ейлера для допоміжного функціонала

$$I^*=\int_{t_0}^{t_1}\left(f_0+\sum_{i=1}^{s}\lambda_i(t)f_i\right)dt=\int_{t_0}^{t_1}Ldt.$$

У цій рівності $L=f_0+\sum_{i=1}^{s}\lambda_i(t)f_i$ – функція Лагранжа.

Основна задача оптимального керування також є варіаційною задачею на умовний екстремум, проте вона має наступні основні відмінності від задачі Лагранжа.

1. Значення однієї з невідомих функцій – керування $\bar{u}(t)$ належить замкненій множині U, звичайно це обмеження формулюють у вигляді умови $|\bar{u}(t)|\le u_0=\text{const}$.

2. Підінтегральна функція та рівняння зв'язків не залежать від похідних $\dot{u}_i(t)$ компонентів вектора керування, що спрощує рівняння Ейлера.

3. У задачі Лагранжа необхідні умови екстремуму функціонала отримані за умови, що невідомі функції є двічі диференційовними. У задачі оптимального керування допускаються також кусково-неперервні функції, що мають точки розриву типу стрибка.

Ці особливості основної задачі оптимального керування ускладнюють застосування до її розв'язання класичних методів варіаційного числення. Для цієї задачі розроблені спеціальні методи, один з яких грунтуються на використанні принципу максимуму. Його розглянемо на наступній лекції.

Питання та завдання для самоконтролю до лекції 2

1. Навести приклади варіаційних задач на умовний екстремум.
2. Сформулювати варіаційну задачу Лагранжа.
3. Навести формулювання ізопериметричної задачі.
4. Яким чином ізопериметричну задачу можна звести до задачі Лагранжа?
5. Навести класифікацію типів зв'язків у варіаційних задачах на умовний екстремум.
6. Надати означення функції Лагранжа для варіаційних задач з диференціальними та інтегральними типами зв'язків.
7. Навести алгоритм розв'язання варіаційної задачі Лагранжа.
8. Алгоритм розв'язання ізопериметричної задачі.

9. Яка крива надає розв’язок задачі Дідони?
10. Який функціонал називають термінальним?
11. Сформулювати задачу Майєра.
12. Сформулювати елементарну задачу Больца.
13. Навести загальне формулювання задачі Больца.
14. Яким чином задачу Больца можна звести до задачі Лагранжа?
15. Вказати етапи розв’язання задачі Больца.
16. Вкажіть формулювання задачі Лагранжа у формі Понтрягіна.
17. Вказіть спільні риси у варіаційній задачі Лагранжа та основній задачі оптимального керування.
18. Назвіть основні відмінності у задачі Лагранжа та задачі оптимального керування.
19. Серед кривих довжини $l = 10\arcsin\frac{3}{5}$, що з’єднують точки $A(-3;0)$ та $B(3;0)$, та розташовані вище осі абсцис, визначити ту, що разом з відрізком AB цієї осі обмежує найбільшу площу.
20. Знайти екстремалі функціонала $I(y) = \int_{e}^{e^2} y'(1 + xy')dx$, що задовольняють умовам $y(e) = 2$, $y(e^2) = 0$, $\int_{e}^{e^2}\left(y' - \frac{1}{x}\right)dx = 1$.
21. Знайти екстремаль у елементарній задачі Больца для функціонала $I(y) = \int_{0}^{\pi/2}\left(y'^2 - y^2\right)dx - y^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2y\left(\frac{\pi}{2}\right)$, якщо $y(0) = 1$.
22. Знайти екстремаль у елементарній задачі Больца для функціонала $I(y) = \int_{0}^{1} y'^2 dx + 5y^2(1)$, якщо $y(0) = 1$.
23. Знайти екстремаль функціонала $I(y) = \int_{0}^{\pi} y'^2 dx, y(0) = 0, y(\pi) = 1,$ якщо $\int_{0}^{\pi} y\sin x dx = 0.$

Лекція 3. Принцип максимуму та розв'язування задачі оптимального програмного керування

Мета лекції: з'ясувати сутність принципу максимуму – необхідної умови оптимальності розв'язку у задачі оптимального керування та його застосування до розв'язування задачі оптимального програмного керування.

План

1. Принцип максимуму.
2. Постановка задачі оптимального програмного керування.
3. Необхідна умова оптимальності.
4. Алгоритм застосування принципу максимуму.
5. Оптимальне керування лінійними системами.

Ключові терміни та поняття: принцип максимуму, функція Гамільтона, задача оптимального програмного керування, оптимальне керування, оптимальна фазова траєкторія, умова трансверсальності.

3.1. Принцип максимуму

Необхідні умови екстремуму функціонала для основної задачі оптимального керування були отримані у працях Л.С. Понтрягіна та його учнів. Ці умови називають принципом максимуму.

Розглянемо основну задачу оптимального керування: серед всіх керувань $\bar{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),...,u_m(t))$, для яких фазова траєкторія $\bar{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ задовольняє умови

$$\frac{dx}{dt}=\bar{f}(t,\bar{x},\bar{u}), \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} \bar{x}(t_0)=\bar{a}=(a_1,a_2,...,a_n), \\ x(t_1)=\bar{b}=(b_1,b_2,...,b_n), \end{cases} \tag{3.2}$$

$$|\bar{u}(t)|\le u_0=\text{const} \tag{3.3}$$

знайти оптимальне керування $\bar{u}^*(t)$ та відповідну оптимальну фазову траєкторію $\bar{x}^*(t)$, для яких функціонал якості системи керування

$$I=\int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x_1(t),...,x_n(t),u_1(t),...,u_m(t))dt\to\min. \tag{3.4}$$

Введемо нову фазову змінну

$$x_0(t)=\int_{t_0}^{t} f_0(\tau,x_1(\tau),...,x_n(\tau),u_1(\tau),...,u_m(\tau))d\tau. \quad (3.5)$$

При $t=t_0$ $x_0(t_1)=I$. З (3.5) випливає, що

$$\dot{x}_0(t_0)=f_0, \quad (3.6)$$

$$x_0(t_0)=0. \quad (3.7)$$

Нехай $\bar{X}=(x_0,x_1,...,x_n)$, $\bar{F}=(f_0,f_1,...,f_n)$. Тоді фазова траєкторія $\bar{X}\in\mathbb{R}^{n+1}$ задовольняє систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\bar{X}}{dt}=\bar{F}(t,\bar{X},\bar{u}) \quad (3.8)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases}\bar{X}(t_0)=\bar{A}=(0,a_1,a_2,...,a_n),\\ \bar{X}(t_1)=\bar{B}=(I,b_1,b_2,...,b_n).\end{cases} \quad (3.9)$$

Будемо вважати, що оптимальне керування $\bar{u}^*(t)$ та оптимальна фазова траєкторія $\bar{x}^*(t)$ вже визначені. Підставивши їх у частинні похідні $\frac{\partial f_j(t,\bar{x},\bar{u})}{\partial x_i}$, $i,j=0,1,...,n$, отримаємо неперервні функції часу t.

Введемо вектор-функцію $\bar{\Psi}=(\psi_0(t),\psi_1(t),...,\psi_n(t))$, координати якої задовольняють лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}\frac{d\psi_i}{dt}=-\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial f_j(t,\bar{x},\bar{u})}{\partial x_i},\\ i=0,1,...,n.\end{cases} \quad (3.10)$$

При фіксованих початкових значеннях $\bar{\Psi}(t_0)$ існує єдиний розв’язок системи (3.10).

Функцію

$$H(\bar{\psi},\bar{x},t,\bar{u})=\bar{F}\cdot\bar{\psi}=\sum_{i=0}^{n} f_i\psi_i \quad (3.11)$$

називають **функцією Гамільтона**.

Якщо зафіксувати значення ψ_i, x_i, t, то скалярний добуток у (3.11) буде залежати лише від компонентів вектора $\bar{u}$.

Нехай $M(\bar{\Psi},\bar{x},t)=\max_{\bar{u}\in U} H(\bar{\Psi},\bar{x},t,\bar{u})$ при фіксованих значеннях $\bar{\Psi},\bar{x},t$, U – множина допустимих значень керувань: $U=\{\bar{u}(t):|\bar{u}(t)|\le U_0\}$. Наведемо без доведення принцип максимуму, що виражає необхідну умову мінімуму функціоналу якості у основній задачі оптимального керування.

Теорема 3.1 (принцип максимуму). Нехай $\bar{u}^*(t)$, $\bar{x}^*(t)$ – оптимальне керування та відповідний йому оптимальний фазовий вектор у задачі оптимального керування (3.1)-(3.4). Існує ненульовий розв'язок $\bar{\Psi}^*(t)$ системи (3.10), такий, що у будь-який момент часу $t \in [t_0; t_1]$ функція Гамільтона $H(\bar{\Psi}^*, \bar{x}^*, t, \bar{u})$ аргументу $\bar{u}$ досягає максимуму за всіма $\bar{u} \in U$ при $\bar{u} = \bar{u}^*$, тобто

$$H(\bar{\Psi}^*, \bar{x}^*, t, \bar{u}^*) = M(\bar{\Psi}^*, \bar{x}^*, t). \tag{3.12}$$

виконуються співвідношення

$$\psi_0(t) = \text{const} \le 0, \tag{3.13}$$

$$M(\bar{\Psi}^*(t), \bar{x}^*(t), t) = -\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_j(t, \bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t))}{\partial t} \cdot \psi_j(t) dt. \tag{3.14}$$

Для задачі з фіксованим часом рівність (3.14) не виконується.

Основний зміст принципу максимуму складає рівність (3.12), згідно з якою оптимальне керування $\bar{u}^*(t)$ у будь-який момент часу t повинен надавати найбільшого значення функції Гамільтона. Тому з рівності (3.12) можна визначити $\bar{u}^*(t)$ як функцію змінних $\bar{\Psi}^*, \bar{x}^*, t$. Підставивши її у рівняння (3.8) та (3.11), отримаємо систему $2n+2$ рівнянь з $2n+2$ невідомими функціями $x_0^*(t)$, $x_1^*(t), \dots, x_n^*(t)$, $\psi_0^*(t), \dots, \psi_n^*(t)$. Невідомі сталі інтегрування у розв'язку цієї системи знаходять з крайових умов (3.9).

3.2. Постановка задачі оптимального програмного керування

Керування, що діє на об'єкт, називають **програмним**, якщо воно явно залежить лише від часу: $\bar{u} = \bar{u}^*(t)$. Керування з повним зворотним зв'язком, подається у вигляді функції, що залежить не лише від часу, але й від всіх фазових змінних. Якщо у виразі для оптимального керування маємо лише частину фазових змінних, то маємо оптимальне керування з неповним зворотним зв'язком. Використанняя принципу максимуму дає змогу визначити програмне оптимальне керування.

Нехай стан об'єкта керування моделюється системою звичайних диференціальних рівнянь, що у векторній формі має наступний вигляд:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)). \tag{3.15}$$

Тут $\bar{x}(t)=(x_1(t),...,x_n(t))$ – фазовий вектор, $\bar{u}(t)=(u_1(t),...,u_m(t))$ – вектор керування, $\bar{u}(t)\in U$, де U – задана множина допустимих значень керування, час $t\in[t_0;t_1]$, $\bar{f}=(f_1(t,\bar{x},\bar{u}),...,f_n(t,\bar{x},\bar{u}))$.

Момент t_0 початку процесу керування задано, момент t_1 завершення процесу визначається першим моментом досягнення точкою $(t,\bar{x}(t))$ деякої заданої поверхні $\Gamma\subset\mathbb{R}^{n+1}$,

$$\Gamma=\left\{(t_1,\bar{x}(t_1)):h_i(t_1,\bar{x}(t_1))=0, i=1,...,l\right\}. \tag{3.16}$$

Тут $h_i(t_1,\bar{x}(t_1)), i=1,...,l$ – задані функції. Отже, правий кінець фазової траєкторії $\bar{x}(t)$ може рухатися по заданій поверхні Γ і у момент часу t_1 повинна виконуватися умова $h_i(t_1,\bar{x}(t_1))=0, i=1,...,l$, $l\le n+1$.

Початкова умова $\bar{x}(t_0)=\bar{x}_0$ визначає початковий стан об’єкту керування. Множина U допустимих керувань складається з кусково-неперервних функцій $\bar{u}(t)$. У точках їх розриву значення керування визначається як права границя.

Під **множиною допустимих процесів керування** розуміють множину D допустимих наборів $d=(t_1,\bar{x}(t),\bar{u}(t))$. Тут функція $\bar{x}(t)$ є неперервною, кусково-диференційовною, вона задовольняє рівняння (3.15), початкову умову та умову (3.16). На множині D допустимих процесів керування досліджують на екстремум функціонал якості керування

$$I=\int_{t_0}^{t_1} f_0(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))dt+g(t_1,x(t_1)), \tag{3.17}$$

де f_0 та g – задані неперервно диференційовні функції своїх аргументів. Доданок $g(t_1,x(t_1))$ називають **термінальним членом**.

Потрібно визначити оптимальний процес керування $d^*=(t_1^*,\bar{x}^*(t),\bar{u}^*(t))$, що надає екстремум функціоналу (3.17). Далі розглядатимемо задачу дослідження функціонала якості на мінімум.

Задачу мінімізації функціонала (3.17) при $g\neq 0$ називають **задачею Больца.** Якщо у функціоналі термінальний член відсутній, то маємо **задачу Лагранжа**. Якщо у функціоналі якості відсутній інтегральний член ($f_0\equiv 0$), то отримуємо **задачу Майєра**. Шукані функції у задачі оптимального програмного керування: $\bar{u}^*(t)$ – **оптимальне керування**, $\bar{x}^*(t)$ – **оптимальна фазова траєкторія**, величина t_1^* – **оптимальний час завершення процесу**.

3.3. Необхідна умова оптимальності

Теорема 3.2 (принцип максимуму для задачі оптимального програмного керування). Нехай на наборі $d^* = \left(t_1^*, \bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t)\right)$ досягається мінімум функціонала (3.17). Тоді існує така вектор-функція $\bar{\psi}(t) = \left(\psi_1(t), \psi_2(t), ..., \psi_n(t)\right)$, що:

1) у кожній точці неперервності керування $\bar{u}(t)$ функція Гамільтона

$$H(t, \bar{\psi}, \bar{x}, \bar{u}) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t) f_j(t, \bar{x}, \bar{u}) - f_0(t, \bar{x}, \bar{u}) \tag{3.18}$$

досягає максимуму по керуванню, тобто

$$\max_{\bar{u} \in U} H(t, \bar{\psi}, \bar{x}, \bar{u}) = H\left(t, \bar{\psi}, \bar{x}^*, \bar{u}^*\right); \tag{3.19}$$

2) виконується **умова трансверсальності**

$$\delta g\left(t_1^*\right) - H\left(t_1^*\right)\delta t_1 + \sum_{j=1}^{n} \psi_j\left(t_1^*\right)\delta x_{j1} = 0 \tag{3.20}$$

для будь-яких варіацій δt_1 та δx_{j1}, що задовольняють систему

$$\begin{cases} h_i\left(t_1^*, \bar{x}^*\left(t_1^*\right)\right) = 0, \\ \delta h_i\left(t_1^*, \bar{x}^*\left(t_1^*\right)\right) = 0, \\ i = 1, 2, ..., l. \end{cases} \tag{3.21}$$

У рівностях (3.20) та (3.21) варіації δg та δh_i у точці t_1^* визначаються за формулами;

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial t_1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j} \delta x_{j1}, \tag{3.22}$$

$$\delta h_i = \frac{\partial h_i}{\partial t_1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \delta x_{j1}; \tag{3.23}$$

Вирази (3.22) та (3.23) обчислюються у точці t_1^*.

3) Функції $\bar{x}^*(t)$ та $\bar{\psi}^*(t)$ задовольняють систему рівнянь

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_j}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \psi_j} = f_j\left(t, \overline{x}, \overline{u}\right), \\
\dfrac{d\psi_j}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_j}, \\
j = 1, 2, ..., n.
\end{cases}
\tag{3.24}
$$

Функції $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ називають **допоміжними змінними**, а систему (3.24) – **системою канонічних рівнянь**. Рівняння $\dfrac{d\psi_j}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, ..., n$, утворюють **спряжену систему рівнянь.**

Компоненти вектор-функції $\overline{x}^*\left(t\right)$ – функції $x_j^*\left(t\right)$ повинні задовольняти крайові умови:

$$
x_j^*\left(t_0\right) = x_{j0}, \; j = 1, 2, ..., n. \tag{3.25}
$$

Якщо момент t_0 початку процесу керування та початковий стан $\overline{x}\left(t_0\right)$ не задані, а разом з кінцевим станом $\overline{x}\left(t_1\right)$ визначаються співвідношеннями

$$
h_i\left(t_0, \overline{x}\left(t_0\right), t_1, \overline{x}\left(t_1\right)\right) = 0, \; i = 1, 2, ..., l, \tag{3.26}
$$

то термінальний член функціонала якості звичайно задають у вигляді різниці

$$
g_1\left(t_1, \overline{x}\left(t_1\right)\right) - g_0\left(t_0, \overline{x}\left(t_0\right)\right). \tag{3.27}
$$

Умова трансверсальності набуває вигляду:

$$
\begin{aligned}
&\left(\delta g_1\left(t_1^*\right) - H\left(t_1^*\right)\delta t_1^* + \sum_{j=1}^{n} \psi_j\left(t_1^*\right)\delta x_{j1}\right) - \\
&-\left(\delta g_0\left(t_0^*\right) - H\left(t_0^*\right)\delta t_0^* + \sum_{j=1}^{n} \psi_j\left(t_0^*\right)\delta x_{j0}\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

У рівностях (3.28) $x_{j0} = x_j\left(t_0\right), x_{j1} = x_j\left(t_1\right)$. При $t = t_0^*$ та $t = t_1^*$ виконуються також умови:

$$
\begin{cases}
\delta h_i\left(t_0^*, \overline{x}^*\left(t_0^*\right), t_1^*, \overline{x}^*\left(t_1^*\right)\right) = 0, \\
h_i\left(t_0^*, \overline{x}^*\left(t_0^*\right), t_1^*, \overline{x}^*\left(t_1^*\right)\right) = 0, \\
i = 1, 2, ..., l.
\end{cases}
\tag{3.29}
$$

Розв’язком задачі тут є набір $\left(t_0^*, t_1^*, \bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t)\right)$, що містить оптимальні моменти початку та завершення процесу керування, а також оптимальну фазову траєкторію та оптимальне керування.

Якщо для керування $\bar{u}$ обмеження відсутні, то максимум функції Гамільтона шукають з допомогою необхідних та достатніх умов безумовного екстремуму функції.

Якщо модель об’єкта керування описується лінійними диференціальними рівняннями, а функціонал якості є квадратичним, то принцип максимуму є необхідною та достатньою умовою оптимальності процесу керування.

3.4. Алгоритм застосування принципу максимуму

Алгоритм застосування принципу максимуму для задачі оптимального програмного керування складається з наступних етапів:

1. Скласти функцію Гамільтона

$$H\left(t, \bar{\psi}, \bar{x}, \bar{u}\right) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j f_j\left(t, \bar{x}, \bar{u}\right) - f_0\left(t, \bar{x}, \bar{u}\right). \tag{3.30}$$

2. З умови максимуму функції Гамільтона по всім допустимим керуванням знайти оптимальне програмне керування $\bar{u}^*(t)$.

3. Скласти систему канонічних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \dfrac{\partial H}{\partial \psi_i} = f_i\left(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\right), \\ \dot{\psi}_i(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}, \\ i = 1, 2, ..., n. \end{cases} \tag{3.31}$$

4. З умови трансверсальності (3.28) отримуємо відсутні крайові умови для рівнянь (3.31). При цьому варіації $\delta t_0, \delta t_1, \delta x_{j0}, \delta x_{j1},\ j = 1, 2, ..., n$, повинні задовольняти систему (3.29). Варіації δg та δh_j визначаються за формулами:

$$\delta g_1 = \frac{\partial g}{\partial t_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} \delta x_{i1},\ \delta g_0 = \frac{\partial g}{\partial t_0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} \delta x_{i0}\,, \tag{3.32}$$

$$\delta h_j = \frac{\partial h_j}{\partial t_0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial x_{i0}} \delta x_{i0} + \frac{\partial h_j}{\partial t_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial x_{i1}} \delta x_{i1}\,. \tag{3.33}$$

5. Розв’язати отриману крайову задачу для системи канонічних рівнянь (3.31), визначити $\bar{u}^*(t)$, $\bar{x}^*(t)$, за необхідності знайти також t_0^*, t_1^*.

<u>Приклад 3.1.</u> Задано модель об'єкта керування $\dot{x} = u(t)$, $x(0) = 0$, $x(1) = \frac{1}{2}$ з функціоналом якості $I = \int_0^1 \left(x^2 + u^2\right) dt \to \min$. Знайти оптимальне керування $u^*(t)$ та оптимальну фазову траєкторію $x^*(t)$, на яких досягається мінімум функціонала якості.

Розв'язання. Запишемо функцію Гамільтона. $f_0 = x^2 + u^2$, $f_1 = u$, $g_1 = g_0 = 0$. $H = \psi_1 f_1 - f_0 = \psi_1 u - x^2 - u^2$. Знаходимо максимум функції Гамільтона по керуванню u, якщо обмеження на керування відсутні.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_1 - 2u = 0 \Rightarrow u^* = \frac{\psi_1}{2}.$$

Оскільки $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2 < 0$, то u^* надає максимум по керуванню функції Гамільтона. Запишемо систему канонічних рівнянь (3.31).

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1 = u, \\ \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = 2x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\psi_1}{2}, \\ \dot{\psi}_1 = 2x. \end{cases}$$

Отримали систему лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Розв'яжемо її, звівши до одного рівняння. Диференціюючи перше з рівнянь системи по t, отримуємо:

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}\dot{\psi}_1 = x.$$

Характеристичне рівняння $k^2 - 1 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm 1$. Розв'язком цього рівняння є функція $x(t) = C_1 \mathrm{ch}t + C_2 \mathrm{sh}t$. З заданих крайових умов знаходимо:

$$x(0) = C_1 = 0,\ x(1) = C_2 \mathrm{sh}1 = \frac{1}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2\mathrm{sh}1}.$$

Отже, $x = x^* = \frac{\mathrm{sh}t}{2\mathrm{sh}1}$, $u = u^* = \dot{x}^* = \frac{\mathrm{ch}t}{2\mathrm{sh}1}$. Оскільки поведінка об'єкта керування моделювалася лінійним диференціальним рівнянням, а функціонал якості є квадратичним, то принцип максимуму є не лише необхідною, але й достатньою умовою оптимальності. Тому знайдені фазова траєкторія та керування є оптимальними.

Відповідь: $x^* = \frac{\mathrm{sh}t}{2\mathrm{sh}1}$, $u^* = \frac{\mathrm{ch}t}{2\mathrm{sh}1}$.

Приклад 3.2. Модель об'єкта керування має вигляд: $\dot{x}=u$, $x(0)=1$, $x(t_1)=t_1-1$, $I=\frac{1}{2}\int_0^{t_1} u^2dt+4x(t_1)\to\min$. Знайти оптимальне керування та оптимальну фазову траєкторію.

Розв'язання. Оскільки функціонал якості містить інтегральний та термінальний члени, то маємо задачу Больца. Функція Гамільтона для задачі має вигляд:

$$H=\psi_1 f_1-f_0=\psi_1 u-\frac{u^2}{2}.$$

Знайдемо максимум цієї функції по керуванню u.

$$\frac{\partial H}{\partial u}=\psi_1-u=0 \Rightarrow u^*=\psi_1,\ \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}=-1<0.$$

У точці $u^*=\psi_1$ досягається максимум. Канонічні рівняння набувають вигляду:

$$\begin{cases}\dot{x}=u=\psi_1,\\ \dot{\psi}_1=-\dfrac{\partial H}{\partial x}=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\psi_1=C\\ \dot{x}=C\end{cases}\Rightarrow x(t)=Ct+A.$$

З крайової умови $x(0)=1$ знаходимо:

$$x(0)=A=1\Rightarrow x(t)=Ct+1.$$

Запишемо для даної задачі умову трансверсальності (3.28). Вона має наступний вигляд:

$$\delta g_1(t_1)-H(t_1)\delta t_1+\psi_1\delta x_1=0.$$

Тут функція Гамільтона $H(t_1)=\left.\left(\psi_1 u-\frac{u^2}{2}\right)\right|_{t=t_1}=C^2-\frac{C^2}{2}=\frac{C^2}{2}$. За формулою (3.3) $\delta g_1(t_1)=4\delta x_1$. Тоді умова трансверсальності набуває вигляду:

$$4\delta x_1-\frac{C^2}{2}\delta t_1+C\delta x_1=0\Rightarrow(4+C)\delta x_1-\frac{C^2}{2}\delta t_1=0.$$

Зв'язок між величинами δx_1 та δt_1 знаходимо, використовуючи умови на рухомій межі $t=t_1$:

$$x_1-t_1+1=0\Rightarrow\delta x_1-\delta t_1=0\Rightarrow\delta x_1=\delta t_1.$$

Отже, з умови трансверсальності отримуємо:

$$\left(4+C-\frac{C^2}{2}\right)\delta t_1=0\Rightarrow 4+C-\frac{C^2}{2}=0\Rightarrow C^2-2C-8=0.$$

Коренями останнього квадратного рівняння є значення $C_1 = -4$, $C_2 = -2$. Нехай $C = -2$. Тоді $x(t) = x^*(t) = 1 - 2t, u = u^* = -2$. Значення t_1^* знаходимо з умови перетину кривої $x(t_1) = t_1 - 1$, по якій рухається гранична точка, та фазової траєкторії у точці $t = t_1$:

$$t_1 - 1 = 1 - 2t_1 \Rightarrow t_1 = t_1^* = \frac{2}{3}.$$

Розглянемо випадок, коли $C = 4$. Отримуємо:

$$x(t) = x^*(t_1) = 4t + 1, u(t) = u^*(t) = \dot{x}^* = 4,$$

$$t_1 - 1 = 4t_1 + 1 \Rightarrow t_1 = t_1^* = -\frac{2}{3} < 0.$$

Оскільки $t_1 > 0$, то при $C = 4$ задача не має розв'язку.

Відповідь: $x^*(t) = 1 - 2t, u^* = -2$, $t \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$.

3.5. Оптимальне керування лінійними системами

Розглянемо об'єкт керування, модель якого подається у вигляді системи лінійних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t) \cdot \overline{x}(t) + B(t) \cdot \overline{u}(t), \tag{3.34}$$

де $\overline{x}^T = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, $\overline{u}^T = (u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t))$, $A(t), B(t)$ – матриці, порядок яких відповідно дорівнює $n \times n$ та $m \times m$, їх елементи є неперервними на $[t_0, t_1]$ функціями, моменти t_0 та t_1 початку та завершення процесу керування відомі, обмеження на керування $\overline{u}(t)$ відсутні, права межа $\overline{x}(t_1)$ фазової траєкторії вільна. Початкова умова $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ задана та визначає початковий стан системи.

Функціонал якості є квадратичним:

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left(\overline{x}^T(t) S(t) \overline{x}(t) + \overline{u}^T Q(t) \overline{u}(t)\right) dt + \frac{1}{2}\left[\overline{x}^T(t_1) P \overline{x}(t_1)\right], \tag{3.35}$$

де S та P – невід'ємно визначені симетричні матриці порядку $n \times n$, $Q(t)$ – додатно визначена симетрична матриця порядку $m \times m$.

Потрібно знайти оптимальне керування $\overline{u}^*(t)$ та оптимальну фазову траєкторію $\overline{x}^*(t)$, на яких функціонал (3.35) досягає мінімуму.

Порівнюючи сформульовану задачу з загальною постановкою задачі оптимального керування, маємо:

$$\overline{f} = A(t)\cdot\overline{x}(t) + B(t)\cdot\overline{u}(t),\ f_0 = \overline{x}^T(t)S(t)\overline{x}(t) + \overline{u}^T Q(t)\overline{u}(t),$$

$$g_1\left(\overline{x}(t_1)\right) = g\left(\overline{x}(t_1)\right) = \frac{1}{2}\left[\overline{x}^T(t_1)P\overline{x}(t_1)\right].$$

Застосуємо до сформульованої задачі оптимального керування лінійними системами (3.34), (3.35) принцип максимуму. При цьому використаємо відомі формули матричного числення:

1) $\dfrac{\partial\left(A\overline{x}\right)}{\partial\overline{x}} = A^T$; 2) $\dfrac{\partial\left(\overline{x}^T A\overline{x}\right)}{\partial\overline{x}} = A\overline{x} + A^T\overline{x}$; 3) $\left(AB\right)^T = B^T A^T$.

Згідно з алгоритмом принципу максимуму виконуємо наступні кроки.

1. Складемо функцію Гамільтона:

$$H\left(t,\overline{\psi},\overline{x},\overline{u}\right) = \overline{\psi}^T\left(A\overline{x} + B\overline{u}\right) - \frac{1}{2}\left(\overline{x}^T S\overline{x} + \overline{u}^T Q\overline{u}\right).$$

2. Знаходимо максимум функції Гамільтона по керуванню. Оскільки обмеження на керування відсутні, то застосуємо необхідну умову безумовного екстремуму:

$$\frac{\partial H}{\partial\overline{u}} = B^T\overline{\psi} - \frac{1}{2}Q\overline{u} - \frac{1}{2}Q^T\overline{u} = 0.$$

Враховуючи, що матриця Q є симетричною і $Q = Q^T$, з останньої рівності отримуємо:

$$B^T\overline{\psi} - Q\overline{u} = 0 \Rightarrow \overline{u} = \overline{u}^* = Q^{-1}B^T\overline{\psi}. \tag{3.36}$$

Знайдене керування забезпечує максимум функції Гамільтона по керуванню $\overline{u}$, оскільки $\dfrac{\partial^2 H}{\partial\overline{u}^2} = -Q$ – від'ємно визначена матриця (матриця Q визначена додатно).

3. Запишемо умову трансверсальності. Оскільки час t_1 заданий, а фазовий вектор $\overline{x}(t_1)$ є вільним, то $\delta t_1 = 0$, $\delta\overline{x}(t_1)$ може набувати довільних значень. Отримуємо:

$$g\left(\overline{x}\right) = \frac{1}{2}\overline{x}^T P\overline{x},\ \delta g = \left[\frac{\partial g}{\partial\overline{x}}\right]^T\delta\overline{x} = \overline{x}^T P\delta\overline{x}.$$

Умова трансверсальності набуває вигляду:

$$\left[\overline{x}^T P + \overline{\psi}^T\right]\Big|_{t=t_1}\cdot\delta\overline{x}(t_1) = 0.$$

Оскільки $\delta\overline{x}(t_1)$ є довільним і $\left(AB\right)^T = B^T A^T$, то отримуємо рівність:

$$\overline{\psi}(t_1) = -P\overline{x}(t_1). \tag{3.37}$$

4. Запишемо систему канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = A\overline{x} + B\overline{u}, \\ \dfrac{d\overline{\psi}}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \overline{x}} = -A\overline{\psi} + S\overline{x}. \end{cases} \tag{3.38}$$

Фазовий вектор $\overline{x}$ повинен у початковий момент часу задовольняти умову:

$$\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0. \tag{3.39}$$

Отже, використовуючи принцип максимуму, отримали крайову задачу у вигляді системи (3.9) та крайових умов (3. 37), (3.39).

<u>Приклад 3.3</u> Записати крайову задачу для задачі оптимального керування лінійною системою:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_3 - u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 4x_2 - x_3 + u_1, \\ \dot{x}_3 = 2x_1 + x_2 + 3u_{2,} \end{cases} \qquad \overline{x}(0) = (0,1,2),$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + u_1^2 + 4u_1u_2 + u_2^2 \right) dt +$$
$$+2x_1^2(2) + x_2^2(2) + 3x_3^2(2) + 2x_1(2)x_2(2) + 4x_1(2)x_3(2) \to \min.$$

Розв'язання. Запишемо матриці A, B, S, Q, P для рівнянь (3.37) – (3.39).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \ S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Підставивши ці матриці у канонічну систему рівнянь (3.38), отримуємо:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ \dfrac{dx_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d\psi_1}{dt} \\ \dfrac{d\psi_2}{dt} \\ \dfrac{d\psi_3}{dt} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

При $t=0$ маємо $\left(x_1(0), x_2(0), x_3(0)\right) = (0,1,2)$, умови трансверсальності на рухомій межі $t=2$ мають вигляд:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(2) \\ \psi_2(2) \\ \psi_3(2) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \\ x_3(2) \end{pmatrix}.$$

Питання та завдання для самоконтролю до лекції 3

1. Наведіть загальний вигляд функції Гамільтона.

2. Сформулюйте загальний принцип максимуму.

3. Поясніть, чим відрізняється програмне керування від керування зі зворотним зв'язком.

4. Наведіть постановку задачі оптимального програмного керування.

5. У чому полягають відмінності між задачами Больца, Майєра та Лагранжа?

6. У чому полягає принцип максимуму для задачі оптимального програмного керування?

7. У чому полягає умова трансверсальності для задачі оптимального програмного керування?

8. Як обчислюються варіації термінального члена та кривих, на яких знаходяться рухомі межі допустимих фазових кривих задачі оптимального керування?

9. Запишіть систему канонічних рівнянь та спряжену систему для принципу максимуму у задачі оптимального програмного керування.

10. Сформулюйте алгоритм застосування принципу максимуму для задачі оптимального програмного керування.

11. У якому випадку принцип максимуму є достатньою умовою оптимальності керування?

12. Наведіть приклад квадратичного функціонала якості.

13. Сформулюйте крайову задачу принципу максимуму для лінійної моделі об'єкта керування з квадратичним функціоналом якості.

14. Задано модель об’єкта керування $\dot{x}(t)=u(t)$, $x(0)=0$, $x(1)=0{,}5$, $t\in[0;1]$, $J=\int_0^1\left(x^2+u^2\right)dt\to\min$. Знайдіть оптимальне керування $u^*(t)$ та оптимальний стан об’єкта керування $x^*(t)$, на яких досягається мінімум функціонала J.

15. Задано модель об’єкта керування $\dot{x}_1=x_2$, $\dot{x}_2=u$, $x_1(0)=x_2(0)=1$, $x_1(2)=x_2(2)=0$, функціонал якості $J=\int_0^2 u^2(t)dt\to\min$. Знайдіть оптимальну траєкторію та оптимальне керування.

16. Задано модель об’єкта керування $\dot{x}_1(t)=x_2(t)$, $\dot{x}_2(t)=x_1(t)+u(t)$ з крайовими умовами $x_1(0)=2$, $x_2(0)=-\frac{3}{2}$, $x_1(1)=\frac{e}{2}$, $x_2(1)=-\frac{1}{e}$, функціонал якості має вигляд: $J=\int_0^1 u^2dt\to\min$. Знайдіть оптимальне програмне керування $u^*(t)$ та оптимальну траєкторію $x^*(t)=\left(x_1^*(t),x_2^*(t)\right)$.

17. Задано модель об’єкта керування $\dot{x}(t)=x(t)+u(t)$, $x(0)=0$ та функціонал якості $J=\int_0^1 u^2(t)dt-x(t_1)\to\min$. Знайдіть оптимальну траєкторію та оптимальне керування.

18. Для заданої моделі об’єкта керування $\dot{x}_1=x_2$, $\dot{x}_2=-x_1+u$, $|u|\le 1$, $x_1(0)=x_2(0)=0$, $J=x_2(2\pi)\to\min$. Знайдіть мінімальне значення функціонала якості для оптимальної траєкторії та відповідного їй оптимального керування.

6. Модель об’єкта керування має вигляд: $\dot{x}(t)=u(t)$, $x(0)=1$, функціонал якості $J=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}u^2(t)dt+4x(t_1)\to\min$, $x(t_1)=t_1-1$. Знайдіть оптимальний час завершення процесу t_1, оптимальне керування $u^*(t)$ та оптимальну траєкторію $x^*(t)$.

19. Знайдіть оптимальне за швидкодією керування, відповідну йому фазову траєкторію та час, потрібний для переходу з положення $x_1(0)=0, x_2(0)=-4$ у початок координат для об'єкта керування, моделлю якого є система звичайних диференціальних рівнянь $\dot{x}_1=x_2, \dot{x}_2=u, |u|\le 1$.

20. Розв’яжіть наступні задачі оптимальної швидкодії (T – оптимальний час здійснення процесу керування):

а) $T \to \min$, $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u \end{cases}$, $|u| \le 1$, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $x(T) = y(T) = 0$.

б) $T \to \min$, $-3 \le \ddot{x} \le 1$, $x(0) = 3$, $\dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0$, $x(T) = 5$.

21 Знайдіть оптимальну траєкторію та оптимальне керування, якщо $J\left(x_1(t), x_2(t), u(t)\right) = \int\limits_0^{2\pi} u(t)dt + x_2(2\pi) \to \min$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1 + 2u$, $-\frac{1}{2} \le u \le 1$, $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 1$.

Лекція 4. Метод динамічного програмування у неперервних задачах оптимального програмного керування

Мета лекції: з’ясувати розв’язування задачі оптимального програмного керування методом динамічного програмування.

План

1. Функція Беллмана.
2. Достатня умова оптимальності у неперервному динамічному програмуванні
3. Знаходження оптимального керування з повним зворотним зв’язком

Ключові терміни та поняття: функція Беллмана, рівняння Беллмана, динамічне програмування.

4.1. Функція Беллмана

Розглянемо задачу оптимального керування:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \bar{x}, \bar{u}) dt + g(t_1, \bar{x}(t_1)) \to \min, \tag{4.1}$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}), \tag{4.2}$$

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \bar{u}(t) \in U, t \in [t_0, t_1]. \tag{4.3}$$

У цих рівностях $\bar{f} = \left(f_1(t, \bar{x}, \bar{u}), f_2(t, \bar{x}, \bar{u}), \ldots, f_n(t, \bar{x}, \bar{u})\right)$, t_0 – фіксований момент початку керування, t_1 – момент його завершення, який потрібно визначити. Необхідно також визначити керування $\bar{u}$ та фазовий вектор $\bar{x}$, для яких функціонал якості (4.1) досягає мінімуму.

Нехай $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – замкнена множина, якій належить точка $(t_1, \bar{x}(t_1))$. Позначимо $U_{s,\bar{y}}$ множину допустимих керувань, що переміщують об’єкт керування з положення $(s, \bar{y})$ у множину M.

Функцію $B(s, \bar{y}) = \min\limits_{\bar{u} \in U_{s,\bar{y}}} I(t_1, \bar{x}(t_1))$ називають **функцією Беллмана** задачі оптимального керування (4.1)-(4.3). Якщо $U_{s,\bar{y}} = \varnothing$, то вважають, що $B(s, \bar{y}) = \infty$.

<u>**Теорема 4.1.**</u> Для функції Беллмана $B(s, \bar{y})$ виконуються наступні властивості:

1) $B(s,\bar{y}) = g(s,\bar{y})$ при $(s,\bar{y}) \in M$;

2) якщо $\bar{u}(t) \in U_{t_0,\bar{x}_0}$ а $\bar{x}(t)$ – фазова траєкторія що відповідає керуванню $\bar{u}(t)$, то функція Беллмана $B(t,\bar{x}(t))$ є неспадною на відрізку $[t_0,t_1]$ вздовж цієї траєкторії;

3) функція Беллмана є сталою на оптимальній траєкторії $\bar{x}^*(t)$.

Ці властивості функції Беллмана є необхідними умовами оптимальності керування.

Теорема 4.2 (Беллмана). Для того, щоб керування $\bar{u}^*(t) \in U_{t_0,\bar{x}_0}$ та відповідна йому фазова траєкторія $\bar{x}^*(t)$ були оптимальними, необхідно та достатньо, щоб існувала функція Беллмана $B(s,\bar{y}) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, така, що задовольняє умови:

1) $B(t_1,\bar{x}(t_1)) = g(t_1,\bar{x}(t_1))$;

2) якщо $\bar{u}(t) \in U_{t_0,\bar{x}_0}$, а $\bar{x}(t)$ – фазова траєкторія, що відповідає керуванню $\bar{u}(t)$, то функція $B(t,\bar{x}(t))$ є скінченною та неспадною на $[t_0,t_1]$;

3) $B(t,\bar{x}^*(t)) = \text{const}$, якщо $t \in [t_0,t_1]$.

Нехай функція Беллмана $B(t,\bar{x}(t))$ є неперервно диференційованою. Тоді вона задовольняє нелінійне диференціальне рівняння з частинними похідними:

$$\min_{\bar{u}\in U}\left(\frac{\partial B}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial B}{\partial x_i}\cdot f_i(t,\bar{x},\bar{u}) + f_0(t,\bar{x},\bar{u})\right) = 0. \tag{4.4}$$

Крайова умова для цього рівняння має вигляд:

$$B(t_1,\bar{x}(t_1)) = g(t_1,\bar{x}(t_1)). \tag{4.5}$$

4.2. Достатня умова оптимальності у динамічному програмуванні

Рівняння (4.4) називають **рівнянням Беллмана**, а метод розв'язання задач оптимального керування з допомогою функції Беллмана називають **методом динамічного програмування**.

Теорема 4.3 (достатня умова оптимальності у динамічному програмуванні). Якщо функція Беллмана $B(t,\bar{x}(t))$ є розв'язком рівняння Беллмана (4.4), таким, що $B(t_1,\bar{x}(t_1)) = g(t_1,\bar{x}(t_1))$, $\bar{u}^*(t) \in U_{t_0,\bar{x}_0}$, $\bar{x}^*(t)$ –

фазова траєкторія, що відповідає керуванню $\bar{u}^*(t)$, для якої виконується рівність

$$\frac{\partial B\left(t,\bar{x}^*\right)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial B}{\partial x_i}\cdot f_i\left(t,\bar{x}^*,\bar{u}^*\right)+f_0\left(t,\bar{x}^*,\bar{u}^*\right)=0, \qquad (4.6)$$

то $\bar{u}^*(t)$ є оптимальним керуванням для задачі (4.1) – (4.3).

<u>Приклад 4.1.</u> Для задачі оптимальної швидкодії $t_1-t_0\to\min$, $\ddot{x}=u$, $|u|\le 1$, $x(0)=1$, $x(t_1)=\dot{x}(t_1)=0$ виразити оптимальне керування через функцію Беллмана, що не містить керування у явному вигляді.

Розв'язання. Перейдемо у моделі об'єкта керування до системи двох рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=u,\end{cases}$$

де $x(0)=y(0)=1,\ x(t_1)=y(t_1)=0,\ |u|\le 1.$

Функція Беллмана залежить від трьох змінних: t,x,y: $B=B(t,x,y)$.

Запишемо рівняння Беллмана. Оскільки $I=\int_0^{t_1}dt\to\min$, то $f_0=1$, $f_1=y$, $f_2=u$. Рівняння Беллмана набуває вигляду:

$$\min_{|u|\le 1}\left(\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial x}y+\frac{\partial B}{\partial y}u+1\right)=0.$$

Оскільки перші два доданки від u не залежать, то останнє рівняння набуває вигляду:

$$\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial x}y+\min_{|u|\le 1}\left(\frac{\partial B}{\partial y}u\right)=-1.$$

Значення $\min\limits_{|u|\le 1}\left(\frac{\partial B}{\partial y}u\right)$ дорівнює:

$$\min_{|u|\le 1}\left(\frac{\partial B}{\partial y}u\right)=\begin{cases}-\frac{\partial B}{\partial y},\frac{\partial B}{\partial y}>0,u=u^*=-1,\\ \frac{\partial B}{\partial y},\frac{\partial B}{\partial y}\le 0,u=u^*=1.\end{cases}$$

Отже, $\min\limits_{|u|\le 1}\left(\frac{\partial B}{\partial y}u\right) = -\left|\frac{\partial B}{\partial y}\right|$. Отримали рівняння Беллмана, що не містить керування u у явному вигляді:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x}y - \left|\frac{\partial B}{\partial y}\right| = -1.$$

Розв'язавши це рівняння, знаходимо у явному вигляді функцію Беллмана $B = B(t,x,y)$. Далі знаходимо області у просторі $\mathbb{R}^3$, для яких $\frac{\partial B}{\partial y}$ зберігає знак, звідки для кожної точки $(t,x,y)\in\mathbb{R}^3$ знаходимо оптимальне керування $u^*(t,x,y)$. Підставивши його у систему диференціальних рівнянь $\begin{cases}\dot{x} = y,\\ \dot{y} = u,\end{cases}$ знаходимо оптимальну фазову траєкторію $\left(x^*(t), y^*(t)\right)$.

Основна складність таких задач полягає у розв'язанні рівняння Беллмана.

У багатьох задачах оптимального керування рівняння Беллмана застосовують у формі, еквівалентній (4.4):

$$\max_{\bar{u}\in U}\left(\frac{\partial B}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial B}{\partial x_i}\cdot f_i(t,\bar{x},\bar{u}) - f_0(t,\bar{x},\bar{u})\right) = 0. \tag{4.7}$$

При цьому повинна виконуватися умова

$$B\left(t_1,\bar{x}(t_1)\right) = -g\left(t_1,\bar{x}(t_1)\right), \tag{4.8}$$

Функція Беллмана, знайдена з рівняння (4.8), відрізняється від розв'язку рівняння (4.4) лише знаком.

4.3. Знаходження оптимального керування з повним зворотним зв'язком

При розв'язанні задачі з повним зворотним зв'язком для знаходження оптимального керування використовують інформацію про час t і всі координати фазового вектора $\bar{x}$. Оптимальне керування $\bar{u}^*\left(t,\bar{x}^*\right)$, що належить множині U допустимих керувань з повним зворотним зв'язком, надає мінімум функціоналу якості

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t,\bar{x},\bar{u})\,dt + g\left(t_1,\bar{x}(t_1)\right) \tag{4.9}$$

за умов:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}\left(t, \bar{x}, \bar{u}\right), \tag{4.10}$$

$$\bar{x}\left(0\right) = \bar{x}_0 = \left(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}\right), \tag{4.11}$$

$$h_i\left(t_1, \bar{x}\left(t_1\right)\right) = 0, i = 1, 2, ..., l, l \le n+1. \tag{4.12}$$

Достатні умови оптимальності у задачі (4.9) – (4.12) надаються наступною теоремою.

<u>Теорема 4.4.</u> Якщо існує функція Беллмана $B = B\left(t, \bar{x}\right)$, що задовольняє рівняння Беллмана

$$\max_{\bar{u}\in U}\left(\frac{\partial B}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial B}{\partial x_i}\cdot f_i\left(t, \bar{x}, \bar{u}\right) - f_0\left(t, \bar{x}, \bar{u}\right)\right) = 0 \tag{4.13}$$

та крайову умову

$$B\left(t_1, \bar{x}\left(t_1\right)\right) = -g\left(t_1, \bar{x}\left(t_1\right)\right), \tag{4.14}$$

а керування $\bar{u}^*\left(t, \bar{x}\right) \in U$ таке, що на ньому вираз $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial B}{\partial x_i} f_i\left(t, \bar{x}, \bar{u}\right) - f_0\left(t, \bar{x}, \bar{u}\right)$ досягає максимуму на множині U, то $\bar{u}^*\left(t, \bar{x}\right)$ є оптимальним керуванням з повним зворотним зв'язком і при цьому $\min I = -B\left(t_0, \bar{x}_0\right)$.

Алгоритм знаходження оптимального керування з повним зворотним зв'язком складається з наступних етапів.

1. Записати рівняння Беллмана (4.13) з крайовою умовою (4.14).

2. Визначити структуру оптимального керування $\bar{u}^*\left(t, \bar{x}\right)$ з повним зворотним зв'язком шляхом знаходження максимуму по $\bar{u}$ виразу $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial B}{\partial x_i} f_i\left(t, \bar{x}, \bar{u}\right) - f_0\left(t, \bar{x}, \bar{u}\right)$. При цьому $\bar{u}^*$ звичайно виражається через $\frac{\partial B}{\partial x_i}$.

3. Підставити отримане у п. 2 керування у рівняння Беллмана та розв'язати це рівняння.

4. За знайденою функцією Беллмана $B\left(t, \bar{x}\right)$ та її похідним знаходимо оптимальне керування $\bar{u}^*\left(t, \bar{x}\right)$.

При застосуванні цього алгоритму використовують і іншу форму рівняння Беллмана. Його записують у вигляді (4.4) з крайовою умовою (4.5). Функція Беллмана у цьому випадку відрізнятиметься від розв'язку задачі (4.13), (4.14) лише знаком. При цьому $\min I = B\left(t_0, \bar{x}_0\right)$.

<u>Приклад 4.2.</u> Модель об'єкта керування має вигляд: $\dot{x} = u$, $t \in [0;1]$, Функціонал якості $I = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 dt + \frac{1}{2}x^2(1) \to \min$. Знайти оптимальне керування $\bar{u}^*(t, \bar{x})$.

Розв'язання. В умовах даного прикладу $f = u$, $f_0 = \frac{1}{2}u^2$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$. Розв'язуємо задачу Больца. Запишемо для неї рівняння Беллмана (4.13) та крайову умову (4.14).

$$\max_{\bar{u} \in U}\left(\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x}u - \frac{1}{2}u^2\right) = 0,\ B(1, x(1)) = -\frac{1}{2}x^2(1).$$

Знаходимо максимум квадратного тричлена відносно змінної u. Оскільки коефіцієнт при u^2 є від'ємним, то точкою його абсолютного максимуму є абсциса вершини параболи $u^* = \frac{\partial B}{\partial x}$. Підставимо знайдене значення u^* у рівняння Беллмана:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2 = 0,\ \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2 = 0,\ B(1, x) = -\frac{x^2}{2}.$$

Шукаємо розв'язок цього рівняння у вигляді $B(t, x) = k(t)x^2$. Підставивши цей вираз у рівняння Беллмана, отримуємо:

$$\frac{dk}{dt}x^2 + \frac{1}{2}k^2 \cdot 4x^2 = 0,\ \frac{dk}{dt} = -2k^2,\ k(t) = \frac{1}{2t + C},$$

$$B(1, x) = k(1) \cdot x^2 = -\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow k(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2 + C} = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = -4.$$

$$B(t, x) = \frac{x^2}{2(t-2)},\ u^* = \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{x}{t-2}.$$

Покажемо, що оптимальне керування $u^* = \frac{x}{t-2}$ з повним зворотним зв'язком породжує оптимальне програмне керування $u^*(t)$ та оптимальну фазову траєкторію $x^*(t)$ для будь-якого початкового стану $x(0) = x_0$. Отримуємо:

$$\dot{x} = u^* = \frac{x}{t-2} \Rightarrow x = C|t-2| = C(2-t), t \in [0;1],$$

$$x(0) = 2C = x_0 \Rightarrow C = \frac{x_0}{2},\ x^*(t) = \frac{x_0}{2}(2-t),\ u^* = \frac{x^*}{t-2} = -\frac{x_0}{2}.$$

Визначимо оптимальне програмне керування $u^*(t)$ та оптимальну фазову траєкторію $x^*(t)$, використавши принцип максимуму. Функція Гамільтона має вигляд: $H = \psi u - \frac{u^2}{2}$, $u^* = \psi$, $\dot{x} = \psi, \dot{\psi} = 0 \Rightarrow \psi = A = \text{const}$. $x = At + B$, $x(0) = B = x_0$, $x = At + x_0$.

Умова трансверсальності має вигляд:

$$\delta g(t_1) - H(t_1)\delta t_1 + \psi \cdot \delta x = 0.$$

Оскільки $t_1 = 1 = \text{const}$, $\delta g(t_1) = x(1)\delta x_1$, то з останнього рівняння випливає, що $x(1) + \psi(1) = 0$, тобто $A + x_0 + A = 0$, $A = -\frac{x_0}{2}$, $x^* = x_0 - \frac{x_0}{2}t$, $u^* = \psi = A = -\frac{x_0}{2}$.

Питання та завдання для самоконтролю до лекції 4

1. Сформулюйте постановку задачі, для якої використовують метод динамічного програмування.

2. Дайте означення, функції Беллмана.

2. Вкажіть основні властивості функції Беллмана.

3. Сформулюйте теорему Беллмана.

4. Наведіть рівняння Беллмана.

5. Для чого призначений метод динамічного програмування?

6. Наведіть необхідну умову оптимальності у динамічному програмуванні.

6. Сформулюйте достатню умову оптимальності у динамічному програмуванні.

7. У чому полягає задача оптимального керування з повним зворотним зв’язком?

8. Наведіть алгоритм знаходження оптимального керування у задачі з повним зворотним зв’язком.

9. Поясніть, чи можна, використовувати метод динамічного програмування, знайти програмне оптимальне керування.

10. Для задачі оптимального керування $\dot{x} = u, x(0) = x_0$, $I = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 + u^2)dt \to \min$ знайдіть оптимальне керування $u^*(t,x)$ з повним зворотним зв’язком, оптимальне програмне керування $u^*(t)$ та оптимальну фазову траєкторію $x^*(t)$.

11. Розв’яжіть наступні задачі оптимального керування:

а) $J=\frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)\,dt+\frac{1}{2}x^2(T)\to\min$, $\dot{x}=-ax+bu$, $x(0)=x_0$.

б) $J=\int_1^2\left(tx^2(t)+\frac{u^2(t)}{t}\right)dt\to\min$, $\dot{x}=u$, $x(1)=x_0$.

в) $J=\int_0^1\left(x^2(t)+u^2(t)\right)dt\to\min$, $\dot{x}=x+u$, $x(1)=1$.

Лекція 5. Розв'язування методом динамічного програмування задач синтезу оптимальних лінійних регуляторів та оптимальної стабілізації

Мета лекції: з'ясувати зміст задачі синтезу оптимального лінійного регулятора та оптимальної стабілізації, розв'язування їх методом динамічного програмування.

План

1. Синтез оптимальних лінійних регуляторів.
2. Постановка задачі оптимальної стабілізації.
3. Розв'язання задачі оптимальної стабілізації.

Ключові терміни та поняття: оптимальний лінійний регулятор, задача синтеза оптимальних лінійних регуляторів, матричне рівняння Рікатті, задача оптимальної стабілізації, задача Лєтова-Кальмана.

5.1. Синтез оптимальних лінійних регуляторів

Нехай стан об'єкта керування моделюється системою

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\overline{x}(t) + C(t)\overline{u}(t). \tag{5.1}$$

У (5.1) $A(n\times n), C(n\times m)$ – матриці, елементами яких є неперервні функції, $\overline{x}^T = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, $\overline{u}^T = (u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t))$, обмеження на керування $\overline{u}$ відсутні.

Досліджується на екстремум квадратичний функціонал якості

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(\overline{x}^T S\overline{x} + \overline{u}^T Q\overline{u}\right)dt + \frac{1}{2}\overline{x}^T(t_1)P\overline{x}(t_1). \tag{5.2}$$

Тут S та P – невід'ємно означені симетричні матриці розміру $(n\times n)$, Q – додатно означена симетрична матриця розміру $(m\times m)$. Потрібно знайти оптимальне керування $\overline{u}^*(x,t)$ з повним зворотним зв'язком.

Поставлену задачу називають **задачею синтезу оптимального лінійного регулятора.** Її розв'язують методом динамічного програмування.

Введемо позначення:

$$\overline{f}(t,\overline{x},\overline{u}) = A\overline{x} + C\overline{u},\ f_0(t,\overline{x},\overline{u}) = \frac{1}{2}\left(\overline{x}^T S\overline{x} + \overline{u}^T Q\overline{u}\right),\ g(\overline{x}) = \frac{1}{2}\overline{x}^T P\overline{x}.$$

Далі будемо використовувати наступні формули:

$$\frac{\partial\left(A\overline{x}\right)}{\partial\overline{x}}=A^T; \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial\left(\overline{x}^T A\overline{x}\right)}{\partial\overline{x}}=A\overline{x}+A^T\overline{x}; \tag{5.4}$$

$$\overline{x}^T A\overline{x}=0\Leftrightarrow A+A^T=\left[0\right]. \tag{5.5}$$

У останній формулі $\left[0\right]$ – нульова матриця.

Рівняння Беллмана для задачі синтезу оптимального лінійного регулятора набуває вигляду:

$$\max_{\overline{u}}\left(\frac{\partial B}{\partial t}+\left(\frac{\partial B}{\partial\overline{x}}\right)^T\left(A\overline{x}+C\overline{u}\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{x}^T S\overline{x}+\overline{u}^T Q\overline{u}\right)\right)=0. \tag{5.6}$$

Тут $\frac{\partial B}{\partial\overline{x}}=\left(\frac{\partial B}{\partial x_1},\frac{\partial B}{\partial x_2},...,\frac{\partial B}{\partial x_n}\right)$. Крайова умова для розв'язку рівняння (5.6):

$$B\left(t_1,\overline{x}\left(t_1\right)\right)=-\frac{1}{2}\overline{x}^T\left(t_1\right)P\overline{x}\left(t_1\right). \tag{5.7}$$

З рівняння (5.6) визначимо $\overline{u}^*$, що надає максимум виразу

$$\frac{\partial B}{\partial t}+\left(\frac{\partial B}{\partial\overline{x}}\right)^T\left(A\overline{x}+C\overline{u}\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{x}^T S\overline{x}+\overline{u}^T Q\overline{u}\right).$$

Продиференціюємо цей вираз по $\overline{u}$ і прирівняємо отриману похідну до нуля. Отримуємо:

$$C^T\frac{\partial B}{\partial\overline{x}}-\frac{1}{2}\left(Q+Q^T\right)\overline{u}=\overline{0}\Rightarrow\left(Q+Q^T\right)\overline{u}=2C^T\left(\frac{\partial B}{\partial\overline{x}}\right).$$

З останньої рівності, враховуючи симетрію матриці Q, знаходимо:

$$\overline{u}^*=Q^{-1}C^T\frac{\partial B}{\partial\overline{x}}. \tag{5.8}$$

Підставивши (5.8) у (5.6), отримаємо рівняння відносно невідомої функції Беллмана:

$$\frac{\partial B}{\partial t}+\left(\frac{\partial B}{\partial\overline{x}}\right)^T\left(A\overline{x}+CQ^{-1}C^T\frac{\partial B}{\partial\overline{x}}\right)-\frac{1}{2}\overline{x}^T S\overline{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B}{\partial\overline{x}}\right)^T CQ^{-1}QQ^{-1}C^T=0.$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді:

$$B\left(t,\overline{x}\right)=\frac{1}{2}\overline{x}^T K\left(t\right)\overline{x}. \tag{5.9}$$

Підставивши (5.9) у отримане рівняння, знайдемо рівняння відносно невідомої функціональної матриці K. Воно є **матричним рівнянням Ріккаті:**

$$\frac{dK}{dt} = -A^T K - KA - KCQ^{-1}C^T K + S\,, \tag{5.10}$$

$$K\left(t_1\right) = -P\,. \tag{5.11}$$

Розв'язавши матричне диференціальне рівняння (5.10) з крайовою умовою (5.11), знаходимо матрицю $K\left(t\right)$. Підставивши її у (5.9) і далі у (5.8), отримуємо явний вигляд оптимального керування $\bar{u}^*$ з повним зворотним зв'язком або **оптимального лінійного регулятора**

$$\bar{u}^*\left(t,\bar{x}\right) = Q^{-1}C^T K\bar{x}\,. \tag{5.12}$$

<u>Приклад 5.3.</u> Для задачі оптимального керування $\dot{x} = -x + u$, $x\left(0\right) = x_0$, $I = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 dt + \frac{1}{2}x^2\left(1\right)$ знайти оптимальний лінійний регулятор $\bar{u}^*\left(t,\bar{x}\right)$.

Розв'язання. Запишемо матричне рівняння Ріккаті. Оскільки у нашому випадку функції $x\left(t\right), u\left(t\right)$ є скалярними величинами, то рівняння Ріккаті є скалярним, а не векторним. Тут $A = -1, C = 1, Q = 1, S = 0, P = 1, t_0 = 0, t_1 = 1$.

Рівняння Ріккаті та відповідна крайова умова набувають вигляду:

$$\frac{dK}{dt} = K + K - K^2 = 2K - K^2,\; K\left(1\right) = -1.$$

Отримали диференціальне рівняння, у якому можна розділити змінні. З нього знаходимо:

$$dt = \frac{dK}{2K - K^2} \Rightarrow \ln\left|\frac{K-2}{K}\right| = C_1 - 2t \Rightarrow \frac{2}{K} = 1 - e^{C_1 - 2t} \Rightarrow K = \frac{2}{1 - e^{C_1 - 2t}}\,.$$

Для знаходження сталої інтегрування C_1 використаємо умову $K\left(1\right) = -1$. З отриманого рівняння $-1 = \frac{2}{1 - e^{C_1 - 2}}$ знаходимо, що $C_1 = 2 + \ln 3$. Отже, розв'язок рівняння Ріккаті має вигляд:

$$K\left(t\right) = \frac{2}{1 - 3e^{2-2t}}\,.$$

Оптимальне керування з повним зворотним зв'язком або оптимальний лінійний регулятор знаходимо за формулою (5.12):

$$u^*\left(t,x\right) = Q^{-1}C^T Kx = \frac{2x}{1 - 3e^{2-2t}}\,.$$

Знайдемо оптимальну фазову траєкторію та оптимальне програмне керування, що породжуються отриманим лінійним регулятором $u^*\left(t,x\right)$ для різних початкових станів $x\left(0\right) = x_0$.

Рівняння моделі об'єкта керування набуває вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = -x + \frac{2x}{1-3e^{2-2t}}.$$

Після поділу змінних у отриманому рівнянні та подальшого інтегрування отримуємо його загальний розв'язок:

$$x(t) = \frac{D\left(3e^{2-2t}-1\right)}{e^{1-t}}.$$

З врахуванням початкової умови $x(0) = x_0$ знаходимо відповідне значення сталої D:

$$D = \frac{x_0 e}{3e^2 - 1}.$$

Отже, оптимальна фазова траєкторія $x^*(t)$ та відповідний лінійний регулятор $u^*(t)$ мають вигляд:

$$x^*(t) = \frac{3x_0 D\left(3e^{2-2t}-1\right)}{\left(3e^2-1\right)e^{1-t}},\ u^* = \frac{2x^*(t)}{1-3e^{2(1-t)}} = -\frac{2x_0 e^t}{3e^2-1}.$$

<u>Приклад 5.4.</u> Для задачі оптимального керування $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1$, $I = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 dt + \frac{1}{2}\left(x_1^2(2) + x_2^2(2)\right) \to \min$ побудувати матричне рівняння Ріккаті та записати його у вигляді системи диференціальних рівнянь.

Розв'язання. Матричне рівняння Ріккаті має вигляд:

$$\frac{dK}{dt} = -A^T \cdot K - K \cdot A - K \cdot C \cdot Q^{-1} \cdot C^T \cdot K + S,\ K(t_1) = -P.$$

Тут $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = 1$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Підставивши ці матриці та вектори у матричне рівняння Ріккаті, отримуємо:

$$\frac{dK}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{dk_{11}}{dt} & \frac{dk_{12}}{dt}\\ \frac{dk_{12}}{dt} & \frac{dk_{22}}{dt}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{12} & k_{22}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{12} & k_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{12} & k_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{12} & k_{22}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}k_{11}^2+2k_{12} & k_{12}k_{11}+k_{22}\\ k_{22}+k_{12}k_{11} & k_{12}^2\end{pmatrix}.$$

Отримане матричне рівняння у скалярній формі набуває вигляду:

$$\begin{cases}\frac{dk_{11}}{dt}=-2k_{12}-k_{11}^2,\\ \frac{dk_{12}}{dt}=-k_{22}-k_{12}k_{11},\\ \frac{dk_{22}}{dt}=-k_{12}^2.\end{cases}$$

При $t=2$ маємо:

$$k_{11}(2)=k_{22}(2)=-1, k_{12}(2)=0.$$

Для полегшення обчислювальної праці при розв’язанні матричного рівняння Ріккаті замість матриці K можна використовувати матрицю $R=-K$. Продиференціюємо по t рівність $R(t)\cdot R^{-1}(t)=E$. Отримаємо рівність:

$$\frac{dR}{dt}\cdot R^{-1}+R\cdot\frac{dR^{-1}}{dt}=[0].$$

Звідси знаходимо:

$$\frac{dR^{-1}}{dt}=-R^{-1}\cdot\frac{dR}{dt}\cdot R^{-1}. \tag{5.13}$$

З матричного рівняння Ріккаті (5.10) маємо:

$$\frac{dR}{dt}=-\dot{K}=-A^T\cdot R-R\cdot A+R\cdot C\cdot Q^{-1}\cdot C^T\cdot R-S.$$

Підставляючи цей вираз у (5.13), з врахуванням умови (5.11) знаходимо:

$$\begin{cases}\frac{dR^{-1}}{dt}=R^{-1}\cdot A^T+A\cdot R^{-1}-C\cdot Q^{-1}\cdot C^T+R^{-1}\cdot S\cdot R^{-1},\\ R^{-1}(t_1)=P^{-1}.\end{cases} \tag{5.14}$$

Оптимальне керування має вигляд:

$$\overline{u}^*(t,\overline{x})=-Q^{-1}\cdot C^T\cdot R\cdot\overline{x}, \tag{5.15}$$

мінімум функціонала якості:

$$\min I = \frac{1}{2}\bar{x}_0^T \cdot R(t_0)\cdot \bar{x}_0. \qquad (5.16)$$

З (3.28) отримуємо:

$$\begin{cases} \dot{G} = G\cdot A^T + A\cdot G - C\cdot Q^{-1}\cdot C^T + G\cdot S\cdot G, \\ G(t_1) = P^{-1}. \end{cases} \qquad (5.17)$$

$G(t)$ є симетричною матрицею. Після її знаходження з (5.17) визначають матрицю $R(t) = G^{-1}(t)$, далі знаходять матрицю $F(t) = Q^{-1}\cdot C^T \cdot R$ та оптимальне керування з повним зворотним зв'язком $\bar{u}^*(t,\bar{x}) = -F(t)\cdot \bar{x}$.

<u>Приклад 5.5.</u> Об'єкт керування визначається моделлю: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$. Функціонал якості має вигляд: $I = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 dt + \frac{1}{2}\bar{x}^T(1)\cdot P\cdot \bar{x}(1) \to \min$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$. Знайти оптимальне керування $u^*(t,\bar{x})$ з повним зворотним зв'язком.

Розв'язання. Для даної задачі $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = 1$.

Запишемо систему (5.17). $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$. Отримаємо:

$$\begin{pmatrix} \dot{g}_{11} & \dot{g}_{12} \\ \dot{g}_{12} & \dot{g}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} g_{12} & 0 \\ g_{22} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{12} & g_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2g_{12} & g_{22} \\ g_{22} & -1 \end{pmatrix}.$$

Додаткові умови при $t = 1$:

$$G(1) = \begin{pmatrix} g_{11}(1) & g_{12}(1) \\ g_{12}(1) & g_{22}(1) \end{pmatrix} = P^{-1} = 2\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{g}_{11} = 2g_{12}, \\ \dot{g}_{12} = g_{22}, \\ \dot{g}_{22} = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{22} = A_1 - t, \\ g_{12} = A_1 t - \dfrac{t^2}{2} + A_2, \\ g_{11} = A_1 t^2 - \dfrac{t^3}{3} + A_2 t + A_3. \end{cases}$$

Значення сталих A_1, A_2, A_3 знаходимо з умов при $t = 1$:

$$\begin{cases} g_{22}(1) = A_1 = 2, \\ g_{12}(1) = 2 - \dfrac{1}{2} + A_2 = 0, \\ g_{11}(1) = 2 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{2} + A_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 2, \\ A_2 = -\dfrac{3}{2}, \\ A_3 = \dfrac{5}{6}. \end{cases}$$

Отже, матриця $G(t)$ має вигляд:

$$G(t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{t^3}{3} + 2t^2 - \dfrac{3}{2}t + \dfrac{5}{6} & -\dfrac{t^2}{2} + 2t - \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{t^2}{2} + 2t - \dfrac{3}{2} & 2 - t \end{pmatrix}.$$

Обернена матриця $G^{-1}(t) = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}$.

$$\Delta = g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2 = \left(-\frac{t^3}{3} + 2t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{5}{6}\right)(2 - t) - \left(-\frac{t^2}{2} + 2t - \frac{3}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{t^4 - 8t^3 + 26t - 7}{12}.$$

$$R(t) = G^{-1}(t) = \frac{1}{t^4 - 8t^3 + 26t - 7}\begin{pmatrix} 12(2 - t) & 6\left(t^2 - 4t + 3\right) \\ 6\left(t^2 - 4t + 3\right) & 2\left(-2t^3 + 12t^2 - 9t + 5\right) \end{pmatrix}.$$

$$F(t) = Q^{-1} \cdot C^T \cdot R(t) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{t^4 - 8t^3 + 26t - 7} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 12(2 - t) & 6\left(t^2 - 4t + 3\right) \\ 6\left(t^2 - 4t + 3\right) & 2\left(-2t^3 + 12t^2 - 9t + 5\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{t^4 - 8t^3 + 26t - 7} \times$$

$$\times \left(6\left(t^2 - 4t + 3\right) \quad 2\left(-2t^3 + 12t^2 - 9t + 5\right)\right).$$

Оптимальне керування з повним зворотним зв'язком $u^*(t,\bar{x}) = -F(t)\cdot\bar{x}$ набуває вигляду:

$$u^*(t,x_1,x_2) = -\frac{6\left(t^2-4t+3\right)x_1 + 2\left(-2t^3+12t^2-9t+5\right)x_2}{t^4-8t^3+26t-7}.$$

5.2. Постановка задачі оптимальної стабілізації

Нехай диференціальна модель об'єкта керування має вигляд:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{F}(t,\bar{x},\bar{u}) \tag{5.18}$$

при заданому керуванні $\bar{u} = \bar{u}(t)$ та заданій початковій умові $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$, а відповідна фазова траєкторія записана у формі: $\bar{x} = \bar{\xi}(t)$. Цей рух об'єкта керування будемо називати **незбуреним рухом**.

Задача стабілізації незбуреного руху $\bar{x} = \bar{\xi}(t)$ полягає у виборі такого відхилення (поправки) керування $\Delta\bar{u}(t) = \bar{v}(t) - \bar{u}(t)$, для якого рух $\eta(t)$, що відповідає керуванню $\bar{v}(t) = \bar{u}(t) + \Delta\bar{u}(t)$, є асимптотично стійким.

Нехай $\bar{x}(t) = \bar{\eta}(t) - \bar{\xi}(t)$. Рівняння руху (5.18) набуває вигляду:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d\bar{\eta}}{dt} - \frac{d\bar{\xi}}{dt} = \bar{F}\left(t,\bar{\xi}+\bar{x},\bar{u}+\Delta\bar{u}\right) - \bar{F}\left(t,\bar{\xi},\bar{\eta}\right).$$

Вважаючи траєкторію $\bar{\xi}(t)$ та керування $\bar{u}(t)$ фіксованими, отримаємо рівняння:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(t,\bar{x},\Delta\bar{u}). \tag{5.19}$$

Рівняння (5.19) називають рівнянням **збуреного руху**.

Нехай виконуються наступні умови:

1) всі компоненти фазового вектора $\bar{x}(t)$ у будь-який момент часу відомі;

2) за траєкторією $\bar{x}(t)$ можна відновити вектор керування $\Delta\bar{u}(t,\bar{x})$;

3) керування $\Delta\bar{u}(t,\bar{x})$ повинне забезпечувати асимптотичну стійкість незбуреного руху $\bar{x}(t) \equiv 0$;

4) $\Delta\bar{u}(t,\bar{0}) \equiv \bar{0}$;

5) вектор-функція $\bar{u}(t,\bar{x})$ визначена та неперервна у області $D: t \ge 0, |\bar{x}| \le L = \text{const}$;

6) праві частини рівнянь системи (5.19) задовольняють умови теореми Коші про існування та єдиність розв’язку системи звичайних диференціальних рівнянь при довільних початкових умовах у області D (розв’язок системи (5.19) існує і єдиний, якщо компоненти вектор-функції $\bar{f}$ – функції f_i є неперервними у області D за всіма своїми аргументами і ці функції задовольняють умову Ліпшиця по змінним $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\left| f_i\left(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n\right) - f_i\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right)\right| \le K\sum_{j=1}^{n}\left|\tilde{x}_j - x_j\right|, K = \text{const} \ge 0,$$

$i = 1, 2, ..., n.$

7) на вектор керування $\Delta\bar{u}$ обмеження відсутні.

Нехай вибрано критерій якості стабілізації, що відображає вимоги до процесу стабілізації, наприклад, мінімізацію обсягів використаних ресурсів. Цей критерій відображається функціоналом якості виду:

$$I\left(\bar{x}, \Delta\bar{u}\right) = \int_{t_0}^{+\infty} f_0\left(t, \bar{x}, \Delta\bar{u}\right)dt \to \min . \tag{5.20}$$

Потрібно визначити керування $\Delta\bar{u} = \bar{u}^*\left(t, \bar{x}\right)$, що забезпечує асимптотичну стійкість незбуреного руху $\bar{x}\left(t\right) \equiv \bar{0}$ згідно з рівнянням (5.19), і яке серед усіх керувань, що забезпечують асимптотичну стійкість незбуреного руху, надає функціоналу (5.20) мінімальне значення.

Початкові умови $\bar{x}\left(t_0\right) = \bar{x}_0$ відображають початкове збурення. Асимптотична стійкість означає, що початкове збурення при русі компенсується за рахунок керування. Сформульовану задачу називають **задачею оптимальної стабілізації**.

Приймемо $t_0 = 0$. Задача оптимальної стабілізації – це задача оптимального керування для системи з законом руху (5.19), функціоналом якості (5.20), початок процесу керування $t_0 = 0$, завершення – $t_1 = +\infty$, $\bar{x}\left(0\right) = \bar{x}_0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \bar{x}\left(t\right) = \bar{x}\left(+\infty\right) = \bar{0}$.

Цю задачу можна повністю розв'язати, якщо керування є скалярною величиною ($\Delta u \in \mathbb{R}$), рівняння (5.19) мають вигляд:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A \cdot \bar{x} + \bar{c}\Delta u, \tag{5.21}$$

матриця A та вектор $\bar{c}$ є сталими, $f_0\left(t, \bar{x}, \Delta u\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{x}^T S\bar{x} + Q\left(\Delta u\right)^2\right)$ є квадратичною формою зі сталою додатно визначеною матрицею S та константою $Q > 0$. Замінивши Δu на u, отримаємо задачу синтезу оптимального лінійного регулятора.

5.3. Розв'язання задачі оптимальної стабілізації

Розв'язання задачі оптимальної стабілізації є аналогічним до розв'язання задачі синтезу оптимального лінійного регулятора $u^*(t, \overline{x})$ для задачі оптимального керування:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = A\overline{x} + \overline{c}u, \\ \overline{x}(0) = \overline{x}_0,\ \overline{x}(+\infty) = \overline{0}, \end{cases} \tag{5.22}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(\overline{x}^T S \overline{x} + Q(u)^2 \right) dt \to \min, \tag{5.23}$$

де $\overline{x}^T = \left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t) \right)$, A – стала матриця, $\overline{c}$ – сталий вектор, u – скалярна величина. S – стала додатно визначена симетрична матриця, константа $Q > 0$.

Задачу (5.22), (5.23) називають **задачею Лєтова-Кальмана аналітичного конструювання оптимальних регуляторів.** Для цієї задачі оптимальне керування $u = u^*(\overline{x})$ не залежить явно від t та визначається за формулою:

$$u^*(\overline{x}) = -\frac{1}{Q} \cdot \overline{c}^T \cdot K \cdot \overline{x}, \tag{5.24}$$

де K – додатно визначена симетрична матриця, що визначається з **алгебраїчного рівняння Ріккаті**

$$-A^T \cdot K - K \cdot A + K \cdot \overline{c} \cdot \frac{1}{Q} \cdot \overline{c}^T \cdot K - S = [0]. \tag{5.25}$$

Розв'язок цього рівняння, що задовольняє критерій Сильвестра (всі головні мінори матриці повинні бути додатними), є єдиним.

<u>**Приклад 5.6**</u>. Для диференціальної моделі об'єкта керування $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$ з функціоналом якості $I = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(x_1^2 + 2x_2^2 + u^2 \right) dt \to \min$ знайти оптимальне керування $u^*(x_1, x_2)$ з повним зворотним зв'язком.

Розв'язання. Запишемо матричне алгебраїчне рівняння Ріккаті відносно невідомої матриці K:

$$-A^T \cdot K - K \cdot A + K \cdot \overline{c} \cdot \frac{1}{Q} \cdot \overline{c}^T \cdot K - S = [0].$$

Тут $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \overline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Q = 1,\ S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{pmatrix}.$

Підставивши ці матриці та вектори у алгебраїчне рівняння Ріккаті, після перетворень отримуємо:

$$\begin{pmatrix} k_{12}^2 - 1 & -k_{11} + k_{12}k_{22} \\ -k_{11} + k_{12}k_{22} & -2k_{12} + k_{22}^2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, отримали систему нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} k_{12}^2 - 1 = 0, \\ -k_{11} + k_{12}k_{22} = 0, \\ -2k_{12} + k_{22}^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Можливі наступні випадки:

а) $k_{12} = 1, k_{11} = k_{22} = \pm 2$.

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ або } K = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

б) $k_{12} = -1, k_{11} = 0 = k_{22}$.

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Додатно визначеною є лише матриця $K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. За формулою (5.24) оптимальне керування $u^*(x_1, x_2)$ з повним зворотним зв’язком має вигляд:

$$u^*(x_1, x_2) = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1 - 2x_2.$$

Питання та завдання для самоконтролю до лекції 5

1. Поясніть змісту поняття «лінійний регулятор».
2. Що розуміють під оптимальним лінійним регулятором?
3. У чому полягає задача синтезу оптимального лінійного регулятора?
4. Запишіть загальний вигляд оптимального лінійного регулятора.

5. Вкажіть кроки, з яких складається алгоритм синтезу оптимального лінійного регулятора.

6. Поясніть зміст поняття «асимптотична стійкість».

7. У чому полягає задача оптимальної стабілізації?

8. Сформулюйте задачу Лєтова-Кальмана.

9. Модель об’єкта керування має вигляд: $\dot{x}=u, |u| \le 1,\quad 0 \le t \le t_1$. Знайти оптимальне керування з повним зворотним зв'язком $u^*(t,x)$, що переміщує об'єкт керування з початкового положення $x(0)=x_0$ у початок координат за найкоротший час.

10. Модель об’єкта керування має вигляд: $\dot{x}=ux, u \in \mathbb{R}$, функціонал якості $I=\beta\int_0^1 u^2 dt+\alpha \ln^2 x(1) \to \min,\quad \alpha>0, \beta>0$. Знайти оптимальне керування $u^*(t,x)$ з повним зворотним зв'язком.

7. Знайти оптимальне керування з повним зворотним зв’язком у наступних задачах.

а) $J=\frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt+\frac{1}{2}\left(x_1^2(2)+x_2^2(2)\right) \to \min,\ \dot{x}_1(t)=u(t),\ \dot{x}_2(t)=x_1(t)$.

б) $T \to \min,\ \dot{x}(t)=u(t),\ |u| \le 1,\ x(T)=0$

Лекція 6. Метод динамічного програмування у дискретних задачах

Мета лекції: оволодіння студентами застосування методу динамічного програмування для дискретних задач.

План

1. Задача дискретного динамічного програмування.
2. Задача про оптимальне інвестування підприємств
3. Задача про заміну обладнання

Ключові терміни та поняття: метод дискретного динамічного програмування, функція Беллмана та рівняння Беллмана задачі дискретного динамічного програмування,

6.1. Задача дискретного динамічного програмування

Нехай процес оптимізації розбито на n кроків. На кожному кроці маємо дві змінні – змінну стану x та змінну керування u. Змінна x визначає, у якому стані може знаходитися об'єкт керування на k-му кроці процесу оптимізації. У залежності від значення x на цьому кроці можна вибрати деяке керування u_k. Внаслідок цього отримуємо результат $W_k\left(x,u_k\right)$. При цьому об'єкт керування переходить у новий стан $x'\left(x,u_k\right)$. Для кожного можливого стану об'єкта на k-му кроці серед усіх можливих керувань вибирається оптимальне керування u_k^*, таке, щоб результат, який досягається з k-го по n-й кроки, виявився оптимальним. Числову характеристику цього результату $B_k\left(x\right)$ називають **функцією Беллмана задачі дискретного динамічного програмування**. Вона залежить від номера кроку k та стану об'єкта x.

Перший етап розв'язання задачі дискретного динамічного програмування називають **умовною оптимізацією**. На цьому етапі визначають функцію Беллмана та оптимальне керування для всіх можливих станів об'єкта на кожному кроці, починаючи з останнього. На останньому, n-му кроці знаходять оптимальне керування u_n^* з умови $W_n\left(x,u_n\right)\to\max$ за всіма можливими значеннями u_n. Відповідне значення функції Беллмана

$$B_n=\max_{u_n}\left\{W_n\left(x,u_n\right)\right\}.$$

У залежності від умови задачі максимум замінюють на мінімум.

Рівнянням Беллмана задачі дискретного динамічного програмування називають рекурентне рівняння

$$B_k(x) = \max_{u_k} \left\{ W_k(x, u_k) + B_{k+1}\left(x'(x, u_k)\right) \right\}. \qquad (6.1)$$

За необхідності максимум заміняють на мінімум.

Після знаходження функції Беллмана та відповідних оптимальних керувань для всіх кроків, з n-го по перший, переходять до другого етапу розв'язання задачі – **безумовної оптимізації**. На першому кроці безумовної оптимізації стан об'єкта є відомим – це його початковий стан x_0. Використавши його, знаходимо оптимальний результат $B_1(x_0)$ за всі n кроків та оптимальне керування u_1^* на першому кроці, що надає цей результат.

Після застосування оптимального керування u_1^* об'єкт переходить у новий стан $x'(x, u_1^*)$. Знаючи цей стан та використавши результати, отримані на етапі умовної оптимізації, можна знайти оптимальне керування u_2^*. Процес продовжується до n-го кроку.

6.2. Задача про оптимальне інвестування підприємств

Однією з найважливіших практичних задач, що виникають у економічній діяльності, є задача про оптимальне інвестування підприємств. Розглянемо розв'язання цієї задачі методом дискретного динамічного програмування.

Нехай потрібно інвестувати кошти обсягом a грошових одиниць у n підприємств, прибуток від яких, у залежності від величини u інвестованих коштів наведено у таблиці 6.1.

Таблиця 6.1 Розподіл прибутку від підприємств у залежності від обсягів інвестованих у них коштів.

u	g_1	g_2	...	g_n
u_1	$g_1(u_1)$	$g_2(u_1)$	...	$g_n(u_1)$
u_2	$g_1(u_2)$	$g_2(u_2)$	...	$g_n(u_2)$
...	...	...	...	...
u_n	$g_1(u_n)$	$g_2(u_n)$	...	$g_n(u_2)$

Тут $g_i(u_j)$ – прибуток j-го підприємства при інвестуванні у нього u_j грошових одиниць. Потрібно розподілити інвестиції таким чином, щоб загальний прибуток від діяльності всіх підприємств був максимальним.

Розіб'ємо процес оптимізації на n кроків. На k-му кроці оптимізуємо інвестиції з k-го по n-е підприємство, для чого є кошти $0 \le a \le x_k$, x_k – змінна стану. Змінна керування u_k – це обсяг коштів, що інвестуються у k-е підприємство. Функція Беллмана $B_k\left(x_k\right)$ – максимальний прибуток від інвестування підприємств з k-го по n-е суми x_k грошових одиниць (г. о.).

При інвестуванні у k-е підприємство u_k г. о. отримуємо прибуток $g_k\left(u_k\right)$. При цьому об'єкт керування до $\left(k+1\right)$-го кроку перейде у стан $x_{k+1}=x_k-u_k$, x_{k+1} г. о. залишається на інвестування з $\left(k+1\right)$-го по n-е підприємства.

На першому кроці умовної оптимізації $\left(k=n\right)$ значення функції Беллмана дорівнює прибутку лише з n-го підприємства, x_n – кошти, які можна використати для його інвестування. Щоб отримати максимум прибутку від цього підприємства, у нього потрібно інвестувати всі кошти, тобто $B_n\left(x_n\right)=g_n\left(x_n\right), u_n^*=x_n$.

На кожному з наступних кроків для обчислення функції Беллмана використаємо результати попереднього кроку. Нехай на k-му кроці для інвестування підприємств з k-го по n-е залишилось x_k г. о. Від інвестування у k-е підприємство u_k г. о. прибуток складе $g_k\left(u_k\right)$, на інвестування решти підприємств залишиться $x_{k+1}=x_k-u_k$ г. о. Максимальний прибуток, який можна отримати з k-го по n-е підприємства:

$$B_k\left(x_k\right)=\max_{u_k}\left\{g_k\left(u_k\right)+B_{k+1}\left(x_k-u_k\right)\right\}.$$

Максимум досягається при $u_k=u_k^*$ – оптимальному керуванні на k-му кроці для стану x_k. Таким чином знаходять значення функції Беллмана та оптимальні керування до кроку $k=1$ включно. Функція Беллмана $B_1\left(a\right)$ дорівнює максимальному прибутку, який можна отримати з усіх n підприємств, u_1^* – оптимальний обсяг інвестицій у перше підприємство. Для всіх наступних кроків обчислюємо $x_k=x_{k-1}-u_{k-1}$, оптимальне керування u_k^* повинне надавати максимум прибутку для стану об'єкта x_k.

<u>Приклад 6.1.</u> Розподілити $a=80$ г. о. по трьом підприємствам з метою отримання максимального загального прибутку. Обсяги прибутку при інвестуванні u г. о. наведені у таблиці 6.2.

Розв'язання. Перший етап розв'язання задачі – умовна оптимізація.

1) $k=n=3$. $B_3\left(x_3\right)=g_3\left(x_3\right)$. Будуємо таблицю для першого кроку – умовної оптимізації. Це таблиця 6.3. На цьому кроці ($k=3$) прибуток можемо отримати лише з третього підприємства. Тому значення функції Беллмана – це прибуток від третього підприємства. Щоб отримати від нього максимальний прибуток, у нього потрібно інвестувати всі кошти.

Таблиця 6.2. Залежність величини прибутку g_i (г. о.) від величини інвестицій u_j (г. о.)

u	g_1	g_2	g_3
0	0	0	0
20	34	21	33
40	47	23	40
60	67	34	50
80	70	90	80

Таблиця 6.3. Перший крок умовної оптимізації, $k=3$.

u_3 / x_3	0	20	40	60	80	$B_3(x_3)$	u_3^*
0	0	–	–	–		0	0
20	–	33	–	–	–	33	20
40	–	–	40	–	–	40	40
60	–	–	–	50	–	50	60
80	–	–	–	–	80	80	80

2) Перейдемо до наступного етапу умовної оптимізації.

$k=2$, $B_2(x_2)=\max\limits_{u_2\le x_2}\left\{g_2(u_2)+B_3(x_2-u_2)\right\}$.

Таблиця 6.4. Другий крок умовної оптимізації, $k=2$.

u_2 / x_2	0	20	40	60	80	$B_2(x_2)$	u_2^*
0	0+0	–	–	–		0	0
20	0+33	21+0	–	–	–	33	0
40	0+40	21+33	23+0	–	–	54	20
60	0+50	21+40	23+33	34+0	–	61	20
80	0+80	21+50	23+40	34+33	80+0	90	80

3) $k=1$, $B_1(x_1)=\max\limits_{u_1\le x_1}\left\{g_1(u_1)+B_2(x_1-u_1)\right\}$.

Другий етап розв'язання задачі – безумовна оптимізація.

1) $x_1=a=80, B_1(x_1)=101, u_1^*=40$.

2) $x_2=x_1-u_1^*=80-40=40, B_2(x_2)=54, u_2^*=20$.

3) $x_3=x_2-u_2^*=40-20=20, B_3(x_3)=33, u_3^*=20$.

Таблиця 6.5. Третій крок умовної оптимізації, $k=1$.

u_1 / x_1	0	20	40	60	80	$B_1(x_1)$	u_1^*
0	0+0	–	–	–		0	0
20	0+33	34+0	–	–	–	34	20
40	0+54	34+33	47+0	–	–	67	20
60	0+61	34+54	47+33	67+0	–	88	20
80	0+90	34+61	47+54	67+33	70+0	101	40

Оптимальний план інвестування $\left(u_1^*, u_2^*, u_3^*\right) = (40, 20, 20)$. Максимальний прибуток при цьому складає $B_1(x_1) = B_1(80) = 101$ г. о.

6.3. Задача про заміну обладнання

Планується експлуатація обладнання на протязі n років. Зі зносом обладнання його продуктивність зменшується і відповідно зменшується річний прибуток від його експлуатації $r(t)$, де t – вік обладнання.

На початку кожного року є можливість продати застаріле обладнання за ціну $s(t)$ та придбати нове обладнання за ціну p. Потрібно визначити оптимальний план заміни обладнання так, щоб загальний прибуток підприємства від його експлуатації за всі n років був максимальним, враховуючи, що до початку експлуатації вік обладнання становив t_0 років.

Вихідними даними до задачі є прибуток $r(t)$ від експлуатації обладнання протягом року, залишкова вартість обладнання $s(t)$, його вік t_0 до початку експлуатації та вартість p придбання нового обладнання.

На k-му кроці оптимізуємо план заміни обладнання з k-го по n-ий роки. Величина максимального прибутку залежить від графіка заміни обладнання та його віку. Вік обладнання t є змінною стану. Вона набуває значень $t = t_0, t_0+1, t_0+2, \dots, t_0+n$. Змінною керування є логічна змінна, що приймає значення $u = u_1$ – зберегти обладнання або $u = u_2$ – замінити його.

Функція Беллмана $B_k(t)$ – це максимальний прибуток від експлуатації обладнання з k-го по n-ий рік, якщо до початку k-го року вік обладнання складав t років.

Застосувавши вибране керування, переводимо систему у новий стан: якщо на початку k-го року обладнання зберегти, то на початок $(k+1)$-го року змінна стану $t' = t+1$. Якщо вибрана заміна обладнання, то на початок $(k+1)$-го року $t' = 1$.

Для кожного варіанту керування прибуток визначають як суму двох величин – безпосереднього результату керування та його наслідків. Якщо на початку k-го року зберігаємо обладнання віком t років, то за k-й рік воно дасть прибуток $r(t)$. На початок $(k+1)$-го року його вік досягне $t+1$ років, а максимальний прибуток за решту років, з k-го по n-ий рік, складе $B_{k+1}(t+1)$.

Якщо на початку k-го року міняють обладнання, то спочатку продають старе обладнання віком t років за $s(t)$ г. о., купляють нове обладнання за p г. о. Воно експлуатується на протязі k-го року з прибутком $r(0)$ г. о. На початок наступного року його вік складе 1 рік і з k-го по n-ий роки максимальний прибуток складе $B_{k+1}(1)$ г. о. З двох можливих варіантів керування вибираємо той, що максимізує прибуток і таким чином знаходимо функцію $B_k(t)$:

$$B_k(t) = \max \begin{cases} r(t) + B_{k+1}(t+1) - u = u_1, \\ s(t) - p + r(0) + B_{k+1}(1) - u = u_2. \end{cases}$$

На кожному кроці потрібно обчислити цю функцію для всіх $t_0 \le t \le t_0 + k - 1$. Керування, на якому досягається максимум прибутку, є оптимальним.

Функція Беллмана для першого кроку $(k = n)$ має вигляд:

$$B_n(t) = \max \begin{cases} r(t) - u = u_1, \\ s(t) - p + r(0) - u = u_2. \end{cases}$$

Знаючи цю функцію, знаходимо $B_{n-1}(t), B_{n-2}(t), ..., B_1(t)$. $B_1(t_0)$ дорівнює максимальному прибутку з 1-го по n-й роки. Цей максимум досягається при деякому керуванні, застосувавши яке на 1-му році, ми визначаємо вік обладнання до початку 2-го року ($t = 1$ або $t = t_0 + 1$). Для цього віку обладнання за результатами, отриманими на етапі умовної оптимізації, вибираємо керування, при якому досягається максимум прибутку за період з 2-го по n-й роки і т. д. На етапі безумовної оптимізації визначають роки, на початку яких потрібно замінити обладнання.

Приклад 6.2. Визначити оптимальний термін заміни обладнання на протязі наступних 6 років, якщо річний прибуток $r(t)$ та залишкова вартість $s(t)$ наведені у таблиці. Вартість нового обладнання 13 г. о. Вік обладнання на початок планового періоду $t_0 = 1$ рік.

Таблиця 6.6. Річний прибуток $r(t)$ від експлуатації обладнання та його залишкова вартість $s(t)$

t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	12	11	11	10	8	6	3
$s(t)$	13	10	8	7	5	3	1

Розв'язання. Першим етапом розв'язання задачі є умовна оптимізація.

1) $k=n=6$, $1\le t\le 6$. $B_6(t)=\max\begin{cases} r(t)-u=u_1, \\ s(t)-p+r(0)-u=u_2. \end{cases}$

$$B_6(1)=\max\begin{cases}11, \\ 10-13+12.\end{cases}=11, u=u_1,\ B_6(2)=\max\begin{cases}11, \\ 8-13+12.\end{cases}=11, u=u_1,$$

$$B_6(3)=\max\begin{cases}10, \\ 7-13+12.\end{cases}=10, u=u_1,\ B_6(4)=\max\begin{cases}8, \\ 5-13+12.\end{cases}=8, u=u_1,$$

$$B_6(5)=\max\begin{cases}6, \\ 3-13+12.\end{cases}=6, u=u_1,\ B_6(6)=\max\begin{cases}3, \\ 1-13+12.\end{cases}=3, u=u_1.$$

2) $k=5$, $1\le t\le 5$, $B_5(t)=\max\begin{cases} r(t)+B_6(t+1)-u=u_1, \\ s(t)-p+r(0)+B_6(1)-u=u_2. \end{cases}$

$$B_5(1)=\max\begin{cases}11+11=22, \\ 10-13+12+11=20.\end{cases}=22, u=u_1,$$

$$B_5(2)=\max\begin{cases}11+10=21, \\ 8-13+12+11=19.\end{cases}=21, u=u_1,$$

$$B_5(3)=\max\begin{cases}10+8=18, \\ 7-13+12+11=17.\end{cases}=18, u=u_1,$$

$$B_5(4)=\max\begin{cases}6+6=12, \\ 5-13+12+11=15.\end{cases}=15, u=u_2,$$

$$B_5(5)=\max\begin{cases}6+3=9, \\ 3-13+12+11=13\end{cases}=13, u=u_2.$$

3) $k=4$, $1\le t\le 4$, $B_4(t)=\max\begin{cases} r(t)+B_5(t+1)-u=u_1, \\ s(t)-p+r(0)+B_5(1)-u=u_2. \end{cases}$

$$B_4(1)=\max\begin{cases}11+21=32, \\ 10-13+12+22=31.\end{cases}=32, u=u_1,$$

$$B_4(2)=\max\begin{cases}11+18=29,\\8-13+12+22=29.\end{cases}=29,\ u=u_1,$$

$$B_4(3)=\max\begin{cases}10+15=25,\\7-13+12+22=28.\end{cases}=28,\ u=u_2,$$

$$B_4(4)=\max\begin{cases}8+13=21,\\5-13+12+22=26.\end{cases}=26,\ u=u_2.$$

4) $k=3$, $1\le t\le 3$, $B_3(t)=\max\begin{cases}r(t)+B_4(t+1)-u=u_1,\\s(t)-p+r(0)+B_4(1)-u=u_2.\end{cases}$

$$B_3(1)=\max\begin{cases}11+29=40,\\10-13+12+32=41.\end{cases}=41,\ u=u_2,$$

$$B_3(2)=\max\begin{cases}11+28=39,\\8-13+12+32=39.\end{cases}=39,\ u=u_1,$$

$$B_3(3)=\max\begin{cases}10+26=36,\\7-19+12+32=38.\end{cases}=38,\ u=u_2.$$

5) $k=2$, $1\le t\le 2$, $B_2(t)=\max\begin{cases}r(t)+B_3(t+1)-u=u_1,\\s(t)-p+r(0)+B_3(1)-u=u_2.\end{cases}$

$$B_2(1)=\max\begin{cases}11+39=50,\\10-13+12+41=50.\end{cases}=50,\ u=u_1,$$

$$B_2(2)=\max\begin{cases}11+38=49,\\8-13+12+41=48.\end{cases}=49,\ u=u_1.$$

6) $k=1$, $t=1$, $B_1(t)=\max\begin{cases}r(t)+B_2(t+1)-u=u_1,\\s(t)-p+r(0)+B_2(1)-u=u_2.\end{cases}$

$$B_1(1)=\max\begin{cases}11+49=60,\\10-13+12+50=59.\end{cases}=60,\ u=u_2.$$

Другим етапом розв’язання задачі є безумовна оптимізація. Результати обчислень подамо у вигляді таблиці 6.7 (k – рік експлуатації, t – вік обладнання). Елементами таблиці є значення функції Беллмана $B_k(t)$.

Максимальний прибуток за 6 років експлуатації обладнання становить $B_1(1)=60$ г. о. Він досягається, якщо на 1-му році не міняти обладнання. Тоді до початку 2-го року вік обладнання складе 2 роки. У цьому випадку максимальний прибуток з 2-го по 6-й роки досягається за умови збереження обладнання.

До початку 3-го року $t=3$, $B_3(3)=38$, $u=u_2$.

Для отримання максимуму прибутку з 3-го по 6-й роки обладнання потрібно замінити. Далі $B_4(1)=32$, $u=u_1$; $B_5(2)=21$, $u=u_1$; $B_6(3)=10$, $u=u_1$.

Таблиця 6.7. Значення функції Беллмана $B_k(t)$.

t / k	1	2	3	4	5	6
1	60	–	–	–	–	–
2	50	49	–	–	–	–
3	41	39	38	–	–	–
4	32	29	28	26	–	–
5	22	21	18	15	13	–
6	11	11	10	8	6	3

Отже, замінити обладнання потрібно на початку 3-го року його експлуатації.

Питання та завдання для самоконтролю до лекції 6

1. У чому полягає метод дискретного динамічного програмування?
2. Яку функцію називають функцією Беллмана у дискретному динамічному програмуванні?
3. У чому полягає етап умовної оптимізації у методі дискретного динамічного програмування?
4. Охарактеризуйте етап безумовної оптимізації у методі дискретного динамічного програмування.
5. Наведіть рівняння Беллмана для методу дискретного динамічного програмування.
6. Сформулюйте постановку задачі про оптимальне інвестування підприємств.
7. У чому полягає алгоритм методу дискретного динамічного програмування для розв’язання задачі про оптимальне інвестування підприємств?
8. Запишіть функцію Беллмана для задачі про оптимальне інвестування підприємств.
9. У чому полягає алгоритм методу дискретного динамічного програмування для розв’язання задачі про заміну обладнання?
10. Планується діяльність чотирьох промислових підприємств на черговий рік. Загальна сума інвестицій становить 5 умовних одиниць. Обсяги інвестицій у кожне підприємство кратні 1 умовній одиниці. Щорічний прибуток від

інвестування k-го підприємства, який отримують у кінці року, становить $f_k(x)$, де x – обсяг інвестицій. Значення функцій $f_k(x)$ наведено у таблиці.

$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
8	6	3	4
10	9	4	6
11	11	7	8
12	13	11	13
18	15	18	16

Величина прибутку $f_k(x)$ не залежить від інвестицій у інші підприємства. Загальний прибуток дорівнює сумі прибутків, отриманих від кожного з підприємств. Визначити обсяг інвестицій у кожне підприємство, щоб загальний прибуток від інвестування був максимальним.

3. Знайти оптимальний план заміни обладнання на термін 6 років, якщо річний прибуток від його експлуатації та остаточна вартість наведені у таблиці.

t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	9	8	7	5	3	3	2
$s(t)$	7	7	5	3	2	2	1

11. Термін експлуатації обладнання складає 5 років, після чого його реалізують за залишковою вартістю. На початку кожного року вирішується, зберегти обладнання чи замінити його новим. Вартість придбання нового обладнання складає $p_0 = 4000$ умовних грошових одиниць. Після t років експлуатації ($1 \le t \le 5$) обладнання можна продати за $g(t) = p_0 \cdot 2^{-t}$ умовних грошових одиниць. Витрати на експлуатацію обладнання на протязі року у залежності від його віку t дорівнюють $r(t) = 600(t+1)$ умовних грошових одиниць. Визначити оптимальну стратегію експлуатації обладнання, щоб загальні витрати на придбання та експлуатацію з врахуванням його продажу були мінімальними.

12. Розв’язати задачу 11, якщо вартість придбання нового обладнання залежить від року придбання (k): $p_k = 5000 + 500(k-1)$.

13. Використовуючи рекурентне співвідношення Р. Беллмана, розв’язати задачу про оптимальне завантаження контейнера. Маємо контейнер місткістю V куб. м., у який можна завантажити вантаж максимальною масою M т. У нього можна завантажити N типів виробів, для кожного з яких відомі вартість c_i, маса m_i та об’єм v_i. Потрібно розмістити у контейнері набір виробів максимальної вартості. Розв’язати задачу для наступних значень її параметрів: $M = 7$, $V = 7$, $N = 3$, $c_1 = 4$, $c_2 = 5$, $c_3 = 1$, $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $m_3 = 1$, $v_1 = 1$, $v_2 = 3$, $v_3 = 3$.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Клименко М.І., Швидка С.П., Кондрат'єва Н.О. Варіаційне числення та методи оптимізації. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2020. 93 с.
2. Перестюк М.О., Станжицький О.М., Капустян О.В., Ловейкін Ю.В. Варіаційне числення та методи оптимізації. Київ : Київський національний університет імені Т. Шевченка, 2010. 121 с.
3. Ладієва Л.Р. Оптимальне керування системами. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2000. 187 с.
4. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Київ : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2019. 380 с.
5. Моклячук М.П. Збірник задач з варіаційного числення та методів оптимізації. Київ : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2014. 256 с.
6. Мартинюк П.М., Мічута О.Р. Методи оптимізації та дослідження операцій. Рівне : Національний університет водного господарства та природокористування, 2011. 283 с.
7. Григорків В.С. Оптимальне керування в економіці. Чернівці : Чернівецький національний університет, 2021. 200 с.
8. Башняков О.М., Пічкур В.В. Задача синтезу в теорії керування. Київ : Сталь, 2012. 116 с.
9. Мартинюк П.М., Мічута О.Р. Методи оптимізації та дослідження операцій. Рівне : Національний університет водного господарства та природокористування, 2011. 283 с.
10. Башняков О.М., Пічкур В.В. Задача синтезу в теорії керування. Київ : Сталь, 2012. 116 с.
11. Крак Ю.В., Шатирко А.В. Теорія керування для інформатиків. Київ : Видавничо-поліграфічний центр, 2015, 175 с.
12. Луцька Н.М. Оптимальні системи управління. Київ : Видавництво Ліра-К, 2013. 144 с.
13. Соколов С.В. Оптимальні та адаптивні системи. Суми : Сумський державний університет, 2018. 221 с.
14. Evans L.C. An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory. Barkley : Universe of California, 2014. 126 p.
15. Kirk Donald E. Optimal Control Theory: An Introduction. Mineola, New York : Courier Corporation, Dover Publications, 2012. 480 p.
16. Kurzhansky A., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston : IASA and Birkhauster, 2017. 321 p.

Навчальне видання
(*українською мовою*)

Клименко Михайло Іванович
Панасенко Євген Валерійович
Ткаченко Ірина Григорівна

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ

Конспект лекцій для здобувачів ступеня вищої освіти магістра
спеціальності «Математика»
освітньо-професійної програми «Математика»

Рецензент *С.І. Гоменюк*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *Є.В. Панасенко*