МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ДОСЛІДЖЕННЯ ПОРЯДКОВОЇ СТРУКТУРИ БАНАХОВИХ ПРОСТОРІВ»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1112-з

спеціальності 111 Математика

(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми Математика

(назва освітньої програми)

Т.В. Третьяк

(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, доцент, к.ф.-м.н. Красікова І.В.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент професор кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Стєганцева П.Г.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя

2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет Математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти Магістр

Спеціальність 111 математика
(шифр і назва)

Освітня програма Математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики, д.т.н., професор

______________ Гребенюк С.М.
(підпис)

« _____ » ___________ 2023 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ (СТУДЕНТЦІ)

Третьяк Тетяні Василівні
(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Дослідження порядкової структури банахових просторів

керівник роботи (проекту) Красікова Ірина Володимирівна, к.ф.-м.н., доцент
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 01 » Травня 2023 року № 643-с

2. Строк подання студентом роботи 30 листопада 2023 року

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Ознайомитися з поняттям векторної ґратки та основними властивостями ґраток
2. Дослідити ґраткові властивості класичних банахових просторів.
3. Ознайомитися з різними типами збіжностей у банахових ґратках.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 19 травня 2023 року

К А Л Е Н Д А Р Н И Й П Л А Н

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи магістра	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	20.05.2023	Виконано
2.	Збір вихідних даних.	25.05.2023	Виконано
3.	Обробка методичних та теоретичних	25.06.2023	Виконано
	джерел.		
4.	Розробка першого та другого розділу.	15.08.2023	Виконано
5.	Розробка третього розділу.	29.09.2023	Виконано
6.	Оформлення та нормоконтроль	12.11.2023	Виконано
	кваліфікаційної роботи магістра.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи магістра.	12.12.2023	Виконано

Студент ____________ Т.В. Третьяк
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ____________ І.В. Красікова
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ____________ О.Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Дослідження порядкової структури банахових просторів»: 54 с.,8 рис.,10 джерел.

ВЕКТОРНИЙ ПРОСТІР, ВЕКТОРНА ҐРАТКА, ВПОРЯДКОВАНИЙ ВЕКТОРНИЙ ПРОСТІР, ІНФІМУМ МНОЖИНИ, МОДУЛЬ ЕЛЕМЕНТА, НОРМА, ПОРЯДКОВА ЗБІЖНІСТЬ, ПОРЯДКОВО ОБМЕЖЕНА МНОЖИНА, ПОРЯДКОВА НЕПЕРЕРВНІСТЬ, СУПРЕМУМ МНОЖИНИ.

Об’єкт дослідження: векторні ґратки

Предмет дослідження: порядкова структура банахових просторів

Мета роботи: дослідити порядкову структуру просторів $C[a,b]$, $l_p, L_p[a,b], 1 \leq p < \infty, c_0$ та з’ясувати, які ґраткові властивості мають ці банахові простори

Метод дослідження: аналітичний

У роботі досліджувалися властивості конкретних лінійних просторів, а саме простору неперервних функцій $C[a,b]$, простори Лебега $L_p[a,b]$, простори послідовностей l_p та простір збіжних до нуля послідовностей c_0. З одного боку ці простори розглядалися як банахові, а з іншого – як векторні ґратки. Також розглянуто загальні властивості елементів векторних ґраток.

SUMMARY

Master's Qualifying Theses « Study of Banach Space's Order Structure»: 54 pages,8 figures, 10 references.

VECTOR SPACE, VECTOR LATTICE, ORDERED VECTOR SPACE, INFINIMUM OF A SET, MODULUS OF AN ELEMENT, NORM, ORDERED CONVERGENCE, ORDERED BOUNDED SET, ORDERED CONTINUITY, SUPREME OF A SET.

The object of the study is vector lattices.

The aim of the study is investigation the order structure of the spaces $C[a,b]$, $l_p, L_p[a,b], 1 \leq p < \infty, c_0$ and finding out what lattice properties these Banach spaces have

The method of research is analytical.

The paper investigated the properties of specific linear spaces, namely the space of continuous functions $C[a,b]$, Lebesgue spaces $L_p[a,b]$, spaces of sequences l_p and the space of sequences converging to zero c_0. On the one hand, these spaces were considered as Banach spaces, and on the other hand, as vector lattices. The general properties of elements of vector lattices are also considered.

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія ґраток була започаткована Ф. Ріссом. На болонському міжнародному математичному конгресі у 1928 році він виступив з доповіддю «Про розклад лінійних функціоналів». Вважається, що саме ця доповідь дала початок дослідженню векторних ґраток. Перша монографія "Теорія ґраток" Ґ. Бірkґофа вийшла в світ у 1940 році. Пізніше даною темою зацікавилися й інші вчені: Л.В. Канторович, Х. Фрудентапь, М. Г. Крейн, М.А. Рутман, В.З. Вуліх. В своїх роботах вони продовжили розвиток цієї тематики. У другій половині 20 століття теорією векторних ґраток (які було названо просторами Рісса) почали цікавитися математики різних країн світу. Найбільш плідним часом розвитку теорії ґраток вважають 70-ті роки 20-го століття. До цього часу вийшли вийшли 2 монографії: Schaefer H.H. Banach Lattices and Positive Operators Aliprantis C.D., Burkinshaw O. Positive operators., в яких крім загальних властивостей просторів Рісса досліджувалися властивості додатних операторів, заданих на цих просторах.

Результати теорії ґраток застосовують у різних розділах сучасного функціонального аналізу, зокрема, у теорії додатних операторів, яка тісно пов’язана з теорією інваріантних просторів. Сучасні математики, зокрема, М. Попов, В. Михайлюк, Б. Рандріанантоаніна, також цікавляться просторами Рісса та розвивають теорію операторів на них.

При об’єднанні двох структур – банахового простору та векторної ґратки виникає поняття банахової ґратки. Тобто добре відомі повні нормовані простори можна досліджувати з точки зору їх порядкової структури.

Саме цьому питанню присвячена дана кваліфікаційна робота. В ній досліджуються основні ґраткові властивості та ріні типи збіжності у класичних банахових просторах.

1 ОЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ ТА ВЕКТОРНИХ ҐРАТОК

1.1 Лінійні нормовані простори

Означення 1.1 Непорожня множина X називається лінійним або векторним простором, якщо вона задовольняє наступні умови:

I Для будь-яких двох елементів $x, y \in X$ однозначно визначений третій елемент $z \in X$, названий їх сумою і позначений $x + y$, причому:

а) $x + y = y + x$ (комутативність);

б) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (асоціативність);

в) в X існує такий елемент 0, що $x + 0 = x$ для всіх $x \in X$ (існування нуля);

г) для кожного $x \in X$ існує такий елемент $-x$, називаємий протилежним, що $x + (-x) = 0$ (існування протилежного елементу).

II Для будь-якого числа (дійсного або комплексного) α і будь-якого елемента $x \in X$ визначений елемент $\alpha x \in X$ (добуток елемента x на число α), причому:

а) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

б) $1 \cdot x = x$;

в) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

г) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

У залежності від того, який запас чисел (всі комплексні або тільки дійсні) використовується, розрізняють комплексні і дійсні лінійні простори. В роботі ми будемо розглядати лише дійсні лінійні простори.

Розглянемо деякі приклади дійсних лінійних просторів [9]:

а) пряма лінія $\mathbb{R}$, тобто сукупність дійсних чисел, зі звичайними арифметичними операціями додавання і множення, є лінійним простором;

б) сукупність всіх можливих m- вимірних векторів з дійсними координатами $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, де додавання і множення на число задаються формулами:

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) + (y_1, y_2, \dots, y_m) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m),$$
$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_m) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_m),$$

також є лінійним простором. Він називається дійсним m −вимірним арифметичним простором і позначається символом $\mathbb{R}^m$;

в) неперервні на деякому відрізку $[a, b]$ дійсні функції зі звичайними операціями додавання функцій і множення їх на числа утворюють лінійний простір $C[a, b]$, який є одним із найважливіших для аналізу;

г) простір l_p, в якому елементами є послідовності дійсних чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, для яких виконується умова

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty,$$

з операціями

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) + (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots),$$
$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n, \dots),$$

є лінійним простором;

д) збіжні послідовності $x = (x_1, x_2, \dots)$ з покоординатними операціями додавання і множення на дійсне число утворюють лінійний простір, який позначається c;

е) послідовності, збіжні до 0, з тими ж операціями додавання і множення, також утворюють лінійний простір c_0;

ж) сукупність m всіх обмежених числових послідовностей дійсних чисел, з тими ж операціями додавання і множення на числа, що і в прикладах 4-6, також є лінійним простором.

Означення 1.2 Нехай X – лінійний простір над полем $\mathbb{K}$. Невід'ємну дійсну функцію, задану на X

$$x \to \|x\| \in \mathbb{R}$$

називають нормою, якщо вона задовольняє наступні властивості:

а) $(\forall x \in X)\ \|x\| \geq 0$, причому $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

б) $(\forall \lambda \in \mathbb{K})(\forall x \in \mathrm{X})\colon \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (однорідність);

в) $(\forall x, y \in \mathrm{X})\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (нерівність трикутника).

Лінійний простір X, в якому задана норма, називають лінійним нормованим простором над полем $\mathbb{K}$. Його називають дійсним лінійним нормованим простором при $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ і комплексним при $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. В роботі ми будемо розглядати дійсні лінійні нормовані простори, які будемо називати нормованими просторами.

Дамо означення збіжної та фундаментальної послідовностей.

Означення 1.3 Послідовність (x_n) елементів нормованого простору X називається збіжною до елемента $x \in X$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Іншими словами, послідовність $\{x_n\}$ елементів нормованого простору X збігається до елемента $x \in X$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in N\colon \forall n \geq n_0(\varepsilon)\ \|x_n - x\| < \varepsilon\,.$$

Сформулюємо основні властивості збіжних послідовностей елементів нормованого простору [8]:

а) будь-яка збіжна послідовність елементів нормованого простору збігається до єдиного елементу цього простору.

б) будь-яка збіжна послідовність елементів нормованого простору є обмеженою.

Означення 1.4 Послідовність $\{x_n\}$ нормованого простору X називається фундаментальною, якщо

$$\forall\varepsilon > 0 \exists n_0(x) \in N : \forall n, m \geq n_0(\varepsilon)\ \|x_n - x_m\| < \varepsilon\,.$$

Відмітимо наступні властивості фундаментальних послідовностей [8]:

а) будь-яка фундаментальна послідовність елементів нормованого простору є обмеженою.

б) будь-яка збіжна послідовність елементів нормованого простору є фундаментальною.

Означення 1.5 Лінійний нормований простір X називається повним, якщо в цьому просторі будь-яка фундаментальна послідовність збігається. Повний лінійний нормований простір називається банаховим простором.

Прикладами дійсних банахових просторів є наступні простори: числова пряма $\mathbb{R}$ з нормою $\|x\| = |x|$, арифметичний m - вимірний простір $\mathbb{R}_p^m, 1 \leq p < \infty, x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ з нормою $\|x\| = (\sum_{n=1}^{m} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, простір послідовностей $l_p, 1 \leq p < \infty, x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ з нормою $\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, простори послідовностей $c, c_0, m, x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ з нормою $\|x\| = sup_n |x_n|$, простір неперервних функцій $C[a, b]$ з нормою $\|x\| = max_{t\in[a,b]} |x(t)|$ та простори Лебега $L_p[a, b], 1 \leq p < \infty$, елементами яких є класи еквівалентних функцій, для яких існує інтеграл Лебега $\int_{[a,b]} |x(t)|^p d\mu$, з нормою $\|x\| = \left(\int_{[a,b]} |x(t)|^p d\mu\right)^{1/p}$ [9].

1.2 Впорядковані векторні простори та векторні ґратки

Розглянемо поняття векторної ґратки. Воно поєднує в собі дві математичні структури – лінійний простір та відношення часткового порядку. Нехай задано дійсний лінійний простір E. Нагадаємо, що деяке відношення $\leq$ між елементами цього простору називається відношенням часткового порядку, якщо воно є:

- рефлексивним, тобто для будь-якого $x \in E$ $x \leq x$,
- антисиметричним, тобто для будь-яких $x, y \in E$ $\big((x \leq y) \wedge (y \leq x)\big) \Rightarrow (x = y)$,
- транзитивним, тобто для будь-яких $x, y, z \in E$ $((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \Rightarrow (x \leq z)$

Означення 1.6 Лінійний простір E над полем $\mathbb{R}$ називається впорядкованим векторним простором, якщо E є частково впорядкованою множиною, тобто на E задано відношення часткового порядку $\leq$, яке пов'язане з лінійною структурою на E у вигляді наступних двох аксіом:

а) для довільних $x, y \in E$, якщо $x \leq y$, то $x + z \leq y + z$ для кожного $z \in E$;

б) для довільних $x, y \in E$, якщо $x \leq y$, то $\alpha x \leq \alpha y$ для кожного $\alpha \geq 0$.

Розглянемо деякі властивості впорядкованих просторів. Зауважимо, що жодних операцій, крім додавання, множення на скаляр та часткового впорядкування, на просторі E не розглядається.

Твердження 1.7 Нехай $E -$ впорядкований векторний простір, $x, y, u, v \in E$, причому $x \leq y$ і $u \leq v$. Тоді $-x \leq -y$ і $x + u \leq y + v$.

Доведення. Якщо $x \leq y$, тоді за аксіомою (1) з означення 1.6 маємо:

$$x + (-x) \leq y + (-x),$$

звідки випливає, що

$$0 \leq y + (-x).$$

Тепер додамо до лівої та правої частини отриманої нерівності $(-y)$ і отримаємо наступну нерівність:

$$0 + (-y) \leq y + (-y) + (-x),$$

з якої випливає перша нерівність, яку потрібно було довести: $-y \leq -x$.

Якщо $x \leq y$ і $u \leq v$, тоді

$$x + u \leq y + u,$$
$$y + u \leq y + v.$$

З умови транзитивності випливає, що якщо $x + u \leq y + u$, а $y + u \leq \leq y + v$, тобто $x + u \leq \ y + v$.

Означення 1.8 Елемент x впорядкованого векторного простору E називається додатним, якщо $x \geq 0$, а множина всіх додатних елементів простору E позначається так: $E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$.

Означення 1.9 Точною верхньою межею або супремумом непорожньої підмножини A частково впорядкованої множини E називається такий елемент $\sup A \in E$, що

а) $x \leq \sup A$ для довільного $x \in A$;

б) для кожного $z \in E$, якщо $x \leq z$ для всіх $x \in A$, то $\sup A \leq z$.

Означення 1.10 Точною нижньою межею або інфімумом непорожньої підмножини A частково впорядкованої множини E називається такий елемент $\inf A \in E$, що

а) $x \geq \inf A$ для довільного $x \in A$;

б) для кожного $z \in E$, якщо $x \geq z$ для всіх $x \in A$, то $\inf A \geq z$.

Означення 1.11 [10] Впорядкований векторний простір E називається векторною ґраткою або простором Рісса, якщо для довільної пари елементів $x, y \in E$ існують точна верхня і точна нижня межі в E

$$x \vee y = \sup\{x, y\}, x \wedge y = \inf\{x, y\}.$$

Зауважимо, що в означенні векторної ґраткою достатньо існування лише супремуму або інфімуму. Це випливатиме з такого твердження.

Твердження 1.12 Нехай E $-$ впорядкований векторний простір і A – непорожня підмножина E.

а) якщо існує $\inf(-A)$, то існує $\sup A$, причому $\sup A = -\inf(-A)$. Аналогічно, якщо існує $\sup(-A)$, то існує $\inf A$, причому $\inf A = -\sup(-A)$;

б) для довільного $x \in E$ існує супремум множини $a + A = \{a + x: x \in A\}$, причому $\sup(a + A) = a + \sup A$;

в) для довільного $\alpha \geq 0$ існує супремум множини $\alpha A = \{\alpha x: x \in A\}$, причому $\sup(\alpha A) = \alpha \sup A$.

Доведення. Доведемо першу частину твердження. Нехай існує $\inf(-A)$. Задамо $y = -\inf(-A)$ і доведемо, що y є супремумом множини A, виходячи з означення.

а) для довільного $x \in A$ маємо $-x \in -A$ і тому $-x \leq -y = \inf(-A)$, а отже, $x \leq y$, що випливає з Твердження 1.7;

б) нехай для даного $z \in E$ маємо $x \leq z$ для кожного $x \in A$. Це, фактично, означає, що $u \geq -z$ для довільного $u \in -A$, а отже, $\inf(-A) \geq -z$, тобто $-y \geq -z$ або $y \leq z$, що і потрібно було довести.

Доведемо другу частину твердження, тобто нехай існує $\sup(-A)$. Задамо $y = -\sup(-A)$ і доведемо, що y є інфімумом множини A, виходячи з означення.

в) Для довільного $x \in A$ маємо $-x \in -A$ і тому $-x \leq \sup(-A) = -y$, а отже, $x \geq y$.

б) Нехай для даного $z \in E$ маємо $x \geq z$ для кожного $x \in A$. Це, фактично, означає, що $u \leq -z$ для довільного $u \in -A$, а отже, $\sup(-A) \leq -z$, тобто $y \geq z$, що і потрібно було довести.

Нехай $y = \sup A$. Тоді для всіх $x \in A$ $x \leq y$. З означення 1.6. випливає, що $a + x \leq a + y$.

Нехай тепер для кожного $z \in E$, якщо $x \leq z$ для всіх $x \in A$, то $y \leq z$. Отже, якщо $a + x \leq z$ для всіх $x \in A$, тоді $y + a \leq z$, тобто $y + a = sup\,(a + A)$.

Нехай знову $y = \sup A$. Тоді для всіх $x \in A$ $x \leq y$ та $\alpha x \leq \alpha y$ для довільного $\alpha \geq 0$.

Нехай тепер для кожного $z \in E$, якщо $x \leq z$ для всіх $x \in A$, то $y \leq z$. Тобто, якщо $\alpha x \leq z$, то $\alpha y \leq z$, тобто $\alpha \cdot y = \sup(\alpha A)$.

Наслідок 1. 13 Мають місце наступні формули:

а) $\inf(\alpha + A) = -\sup(-a - A) = -(-a + \sup(-A)) = a - \sup(-A) = a + \inf A$

б) $\inf(\alpha A) = -\sup(-\alpha A) = -\sup\left(\alpha \cdot (-A)\right) = -\alpha \sup(-A) = \alpha \cdot (-\sup(-A)) = \alpha \cdot \inf A$

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1.14 Нехай M – деяка непорожня множина. Розглянемо сукупність всіх підмножин множини M з операцією часткового впорядкування за включенням: $A, B \subset M$, тоді $A \leq B \Leftrightarrow A \subset B$. Зрозуміло, що ця сукупність утворює векторну ґратку, оскільки в ній існує супремум двох множин $A \vee B = A \cup B$, який є їх об'єднанням. Максимальним елементом в цій ґратці є сама множина M.

Приклад 1.15 Нехай M – деяка нескінченна множина, а E – сукупність таких підмножин M, які або самі скінченні, або скінченні їх доповнення до M. Зрозуміло, що E є векторною ґраткою, оскільки існує супремум

$$A \vee B = A \cup B.$$

Дійсно, якщо обидві множини скінченні, їх об'єднання також скінченне. Якщо обидві множини мають скінченні доповнення $\bar{A}$ та $\bar{B}$, тоді $\overline{A \cup B} = (\bar{A} \cap \bar{B})$ – скінченна множина. Якщо одна множина скінченна, а інша має скінченне доповнення, тоді їх об'єднання має скінченне доповнення.

1.3 Основні властивості елементів векторних ґраток

Згідно з твердженням 1.12, для довільних елементів x, y векторної ґратки E виконуються рівності:

$$x \vee y = -((-x) \wedge (-y)), x \wedge y = -\big((-x) \ \vee (-y)\big).$$

Задля зручності домовимося у формулах ґраткові операції виконувати перед векторною операцією $+$ або $-$, пропускаючи таким чином дужки.

Наступне твердження встановлює основні властивості операцій супремуму та інфімуму двоелементної множини.

Твердження 1.16 [10] Для довільних елементів x, y, z векторної ґратки E і довільного скаляра $\alpha > 0$ мають місце рівності:

а) $x + y = x \wedge y + x \vee y$;
б) $x + y \vee z = (x + y) \vee (x + z)$;
в) $x + y \wedge z = (x + y) \wedge (x + z)$;
г) $\alpha(x \vee y) = (\alpha x) \vee (\alpha y)$;
д) $\alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge (\alpha y)$.

Для довільного елемента x векторної ґратки E задамо

$$x^+ = x \vee 0, x^- = (-x) \vee 0, |x| = x \vee (-x).$$

Означення 1.17 Елемент x^+ називається додатною частиною, x^- − від'ємною частиною і $|x|$ − модулем елемента x.

З означення випливає, що додатна і від'ємна частини довільного елемента додатні. Додатність модуля випливатиме з наступного твердження.

Твердження 1.18 [6] Нехай E − векторна ґратка і $x \in E$. Тоді

а) $x = x^+ - x^-$;

б) $x^+ \wedge x^- = 0$;

в) якщо $x = y - z$ і $y \wedge z = 0$, то $y = x^+$ і $z = x^-$;

г) $|x| = x^+ + x^-$;

д) $(\alpha x)^+ = \alpha x^+$ для довільного скаляра $\alpha > 0$.

Твердження 1.19 Для довільних елементів x, y векторної ґратки E нерівність $|x| \leq y$ рівносильна двом нерівностям $x \leq y$ і $-x \leq y$.

Доведення. Нехай $x \vee (-x) = |x| \leq y$. З умови 1) в означенні супремуму 1.9 випливає, що $x \leq y$ і $-x \leq y$.

Нехай тепер $x \leq y$ і $-x \leq y$. Тоді $x \vee (-x) \leq y$ – цей факт випливає з другої умови в означенні супремуму.

Твердження 1.20 [10] Для довільних елементів x, y векторної ґратки E мають місце нерівності:

а) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$;

б) $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$;

в) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$;

г) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$;

д) $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}(|x + y| - |x - y|)$.

Зауважимо, що з перших двох пунктів даного твердження випливає, що впорядкований векторний простір E є векторною ґраткою тоді і лише тоді, коли $|x| = x \vee (-x)$ існує для довільного $x \in E$, тобто коли у кожного елемента існує його модуль, який також є елементом ґратки.

Твердження 1.21 Для довільних елементів x, y векторної ґратки E має місце нерівність трикутника:

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Доведення. Спочатку доводимо праву нерівність. Дійсно з нерівностей

$$x + y \leq |x| + |y| \text{ і } -x - y \leq |x| + |y|$$

(див. доведення твердження 1.19) випливає, що $|x + y| \leq |x| + |y|$. Доведемо тепер ліву нерівність. Маємо

$$|x| = |(x + y) - y| \leq |x + y| + |y|,$$

а отже, $|x| - |y| \leq |x + y|$. Аналогічно, $|y| - |x| \leq |x + y|$. Згідно з доведенням твердження 1.19, $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$.

Якщо в даному твердженні y замінити на $-y$, одержимо таке.

Наслідок 1.22 Для довільних елементів x, y векторної ґратки E має місце нерівність трикутника:

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.$$

Твердження 1.23 [5] Для довільних елементів x, y, z векторної ґратки E справедливі нерівності:

а) $|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|$;

б) $|x^+ - y^+| \leq |x - y|$;

в) $|x^- - y^-| \leq |x - y|$;

г) $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|$.

Твердження 1.24 Нехай E − векторна ґратка. Для довільних $x, y, z \in E^+$ маємо $x \wedge (y + z) \leq x \wedge y + x \wedge z$.

Означення 1.25 Два елементи x, y векторної ґратки називаються ортогональними або диз'юнктними, якщо $|x| \wedge |y| = 0$. Цей факт записується так: $x \perp y$.

З п. (v) твердження 1.20 випливає, що $x \perp y$ тоді і тільки тоді, коли $|x + y| = |x - y|$.

Означення 1.26 Дві підмножини A, B векторної ґратки E називаються ортогональними або диз'юнктними, якщо $x \perp y$ для довільних $x \in A$ і $y \in B$. Цей факт позначається так: $A \perp B$. Ортогональне доповнення непорожної множини $A \subseteq E$ визначається так:

$$A^{\perp} = \{x \in E: x \perp y \text{ для довільного } y \in A\}.$$

Твердження 1.27 Якщо $x \perp y$ в векторній гратці E тоді:

а) $\alpha x \perp \beta y$ для довільних дійсних α, β;

б) $|x + y| = |x| + |y|$.

Доведення: Нехай $x \perp y$, тоді $|x| \wedge |y| = 0$. Оскільки для довільних дійсних α, β $|\alpha| \cdot |x| \wedge |\beta| \cdot |y| = 0$, тоді $|\alpha x| \wedge |\beta y| = 0$, тобто $\alpha x \perp \beta y$.

З наслідку 1.22 випливає, що

$$\underline{|x + y|} \geq \big||x| - |y|\big| = |x| \vee |y| - |x| \wedge |y| = \underline{|x| \vee |y|} = |x| \vee |y| + |x| \wedge |y| =$$
$$= |x| + |y| \geq \underline{|x + y|}.$$

Отже, $|x + y| \geq |x| + |y| \geq |x + y|$, звідки $|x + y| = |x| + |y|$.

2 ПОРЯДКОВА СТРУКТУРА ОСНОВНИХ БАНАХОВИХ ПРОСТОРІВ

У роботі ми докладно розглядаємо основні приклади впорядкованих векторних просторів та векторних ґраток − це простори функцій та простори послідовностей. Зауважимо, що якщо на таких просторах одночасно з ґратковою структурою задано структуру нормованого простору, виникає нове поняття – банахової ґратки. Наша задача полягає в тому, щоб дослідити порядкову структуру цих просторів та з'ясувати, які ґраткові властивості мають ці банахові простори.

Означення 2.1 Нормований (банахів) простір X називається нормованою (банаховою) ґраткою, якщо X є одночасно і векторною ґраткою, причому для довільних елементів $x, y \in X$ з нерівності $|x| \leq |y|$ випливає, що $\|x\| \leq \|y\|$.

Твердження 2.2 [6] Для нормованої векторної ґратки E мають місце наступні властивості:

а) ґраткові операції з неперервними;

б) множина E^+ додатних елементів є замкненою;

в) для кожної зростаючої збіжної послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n x_n.$$

Означення 2.3 Векторна ґратка E називається архімедовою, якщо для довільного $x \in E^+$ послідовність $(n^{-1}x)$ монотонно спадає до нуля.

2.1 Простір неперервних функцій $C[a; b]$

Простір $C[a, b]$ — це сукупність неперервних функцій, заданих на відрізку $[a, b]$, з операціями поточкового додавання та множення на дійсний скаляр. Відносно цих операцій множина неперервних функцій є лінійним простором. Його можна нормувати, якщо задати норму формулою:

$$\|f\| = \max_{a \le t \le b} |f(t)|.$$

Збіжність за нормою цього простору — ці рівномірна збіжність послідовностей неперервних функцій: послідовність функцій $\{f_n(x)\}$ збігається до функції $f(t)$, якщо

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{a \le t \le b} |f_n(t) - f(t)| = 0.$$

Відомо, що простір $C[a, b]$ є сепарабельним простором, тобто таким, в якому існує зліченна всюди щільна множина. В якості зліченної всюди щільної множини у цьому просторі можна вибрати сукупність усіх многочленів з раціональними коефіцієнтами. Простір $C[a, b]$ буде також банаховим (тобто повним) простором. Це випливає з того факту, що фундаментальність послідовності у цьому просторі означає виконання умови критерію Коші рівномірної збіжності послідовності неперервних функцій. Отже, будь-яка фундаментальна послідовність буде рівномірно збіжною, тобто збіжною за нормою простору $C[a, b]$.

З'ясуємо тепер, якими ґратковими властивостями наділено сукупність неперервних функцій.

Твердження 2.3 Довільний лінійний простір F функцій $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ є прикладом впорядкованого векторного простору відносно поточкового порядку: $f \le g$ тоді і тільки тоді, коли $f(t) \le g(t)$ для кожного $t \in [a, b]$.

Доведення. Задамо на впорядкованому векторному просторі операції додавання та множення на скаляр:

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t),$$
$$(\alpha f)(t)=\alpha f(t).$$

З властивостей дійсних чисел [7] випливає, що задане відношення є відношенням часткового порядку:

а) $f(t)\le f(t)$ – рефлексивне;

б) $f(t)\le g(t)\wedge g(t)\le f(t)\Rightarrow f(t)=g(t)$ – антисиметричне;

в) $f(t)\le g(t)\wedge g(t)\le \varphi(t)\Rightarrow f(t)\le \varphi(t)$ – транзитивне.

Покажемо, що для цього відношення виконуються аксіоми з означення впорядкованого векторного простору. Нехай $f\le g$, тобто $f(t)\le g(t)$ $\forall t\in[a,b]$. Тоді $\forall\varphi\in F$ та $\forall\, t\in[a,b]$ $f(t)+\varphi(t)\le g(t)+\varphi(t)$ або $f+\varphi\le g+\varphi$. Крім того, $\forall\,\alpha\in\mathbb{R}$ $\alpha f(t)\le\alpha g(t)$, тобто $\alpha f\le\alpha g$, що означає, що простір F є впорядкованим векторним простором.

Зауважимо, що множина дійсних функцій є саме частково впорядкованою множиною, тому що існують функції, які можна порівняти, а є функції, які порівняти неможливо. Наведемо приклади таких функцій.

Так на рисунку 2.1 ми бачимо графіки двох функцій, які порівняти неможливо тому, що на різних інтервалах вони переважають одна одну. А ось на рисунку 2.2 помітно, що ці функції можна порівняти між собою і сказати, яка з них більша (її графік розташовано вище).

Наслідок 2.4 Простір $C[a,b]$ є впорядкованим векторним простором відносно наведеного вище поточкового порядку.

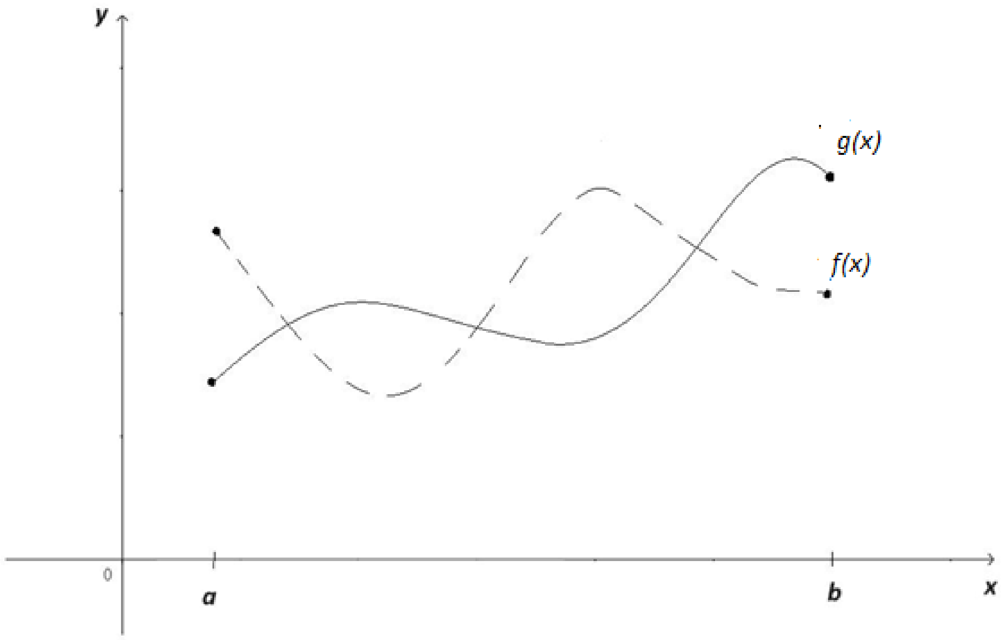

Рисунок 2.1 ─ Приклад графіків двох функцій, які неможливо порівняти

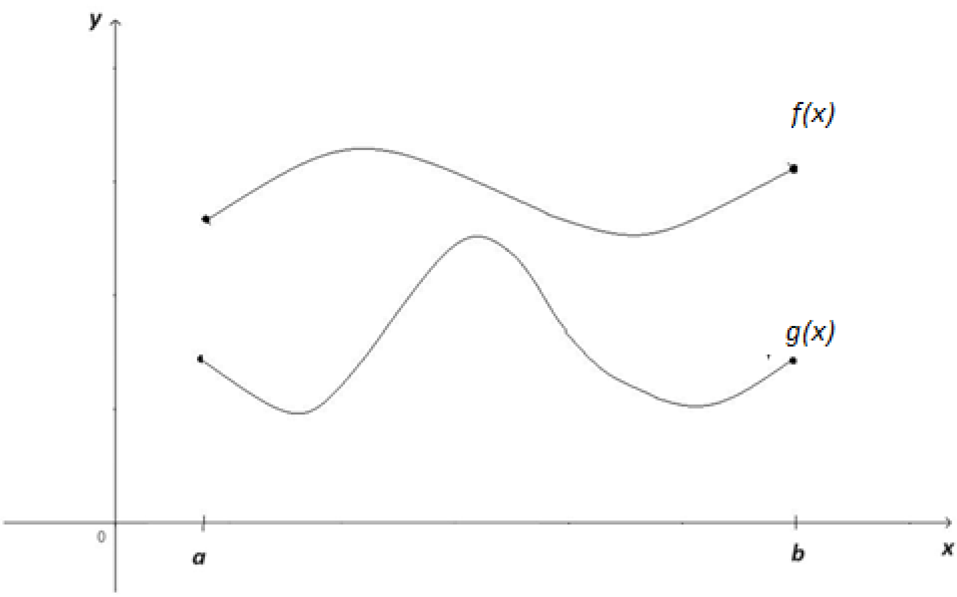

Рисунок 2.2 ─ Приклад графіків двох функцій, які можливо порівняти

Твердження 2.5 Впорядкований векторний простір P всіх многочленів $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не є векторною ґраткою.

Доведення. Оскільки простір многочленів є частковим випадком простору, він є впорядкованим векторним простором.

Задамо два многочлени $p_1(t) = t^2$, $p_2(t) = t^3$. Тоді супремумом цих многочленів буде функція:

$$f(t) = \sup(p_1, p_2) = \begin{cases} t^2, t \in (-\infty; 1), \\ t^3, t \in [1; +\infty). \end{cases}$$

Зрозуміло, що знайдена таким чином функція $f(t)$ не є многочленом, тобто простір многочленів не містить разом з кожною парою многочленів їх супремум. Це означає, що цей простір не є векторною ґраткою.

Таким чином, сукупності многочленів недостатньо для того, щоб впорядкований простір став векторною ґраткою. Встановимо достатню умову того, що певний функціональний простір є векторною ґраткою.

Твердження 2.6 Нехай $F -$ лінійний простір дійснозначних функцій на $[a, b]$. Довести, що якщо для довільних $f, g \in F$ функція $h(t) = \max\{f(t), g(t)\}$ є елементом F, то F є векторною ґраткою, причому $h = f \vee g$. Аналогічно, при цьому $(f \wedge g)(t) = \min\{f(t), g(t)\}$.

Доведення. Нехай

$$h(t) = \max\{f(t), g(t)\} = \begin{cases} f(t), f(t) \geq g(t), \\ g(t), f(t) < g(t). \end{cases}$$

Доведемо, що $h(t) = \sup\{f, g\} = f \vee g$.

Покажемо спочатку, що $f \leq h$ та $g \leq h$. Фактично це випливає з означення функції h: якщо $f(t) \geq g(t)$, то $h(t) = f(t)$ та $f(t) \leq f(t)$, а якщо $f(t) < g(t)$, тоді $h(t) = g(t) > f(t)$. Отже, $f \leq h$. Аналогічно доводимо, що $g \leq h$: якщо $f(t) \leq g(t)$, тоді $h(t) = g(t)$ та $g(t) \leq g(t)$, якщо $f(t) > g(t)$, тоді $h(t) = f(t) > g(t)$. Отже, $g \leq h$.

Перевіримо тепер виконання другої умови з означення супремуму. Нехай $\forall\varphi \in F$ виконується умова: $f \le \varphi$ та $g \le \varphi$, тобто $\forall\, t \in [a,b]\; f(t) \le \varphi(t)$ та $g(t) \le \varphi(t)$. Очевидно, що $\max\{f(t), g(t)\} \le \varphi(t)\; \forall t \in [a,b]$, тобто $h(t) \le \varphi(t)$, що означає виконання другої умови з означення супремуму.

Аналогічно доводиться частина твердження щодо інфімуму та мініміму двох функцій.

Зобразимо на рисунку супремум двох неперервних функцій (рис. 2.3).

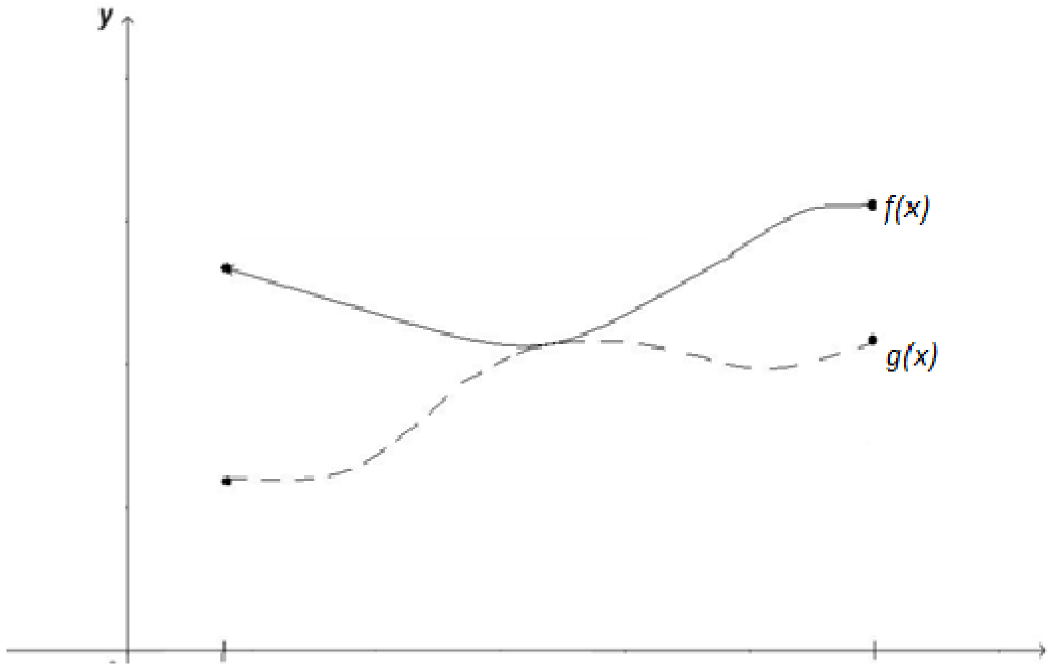

Рисунок 2.3 – Графік супремуму двох функцій

Таким чином, в просторі дійсних функцій існування максимуму двох функцій, який належить просторові, гарантує існування супремуму цих функцій, тобто те, що цей простір є векторною ґраткою.

З цієї достатньої умови випливає наступний важливий результат, який дасть нам можливість розглядати простір неперервних функцій як векторну ґратку.

Твердження 2.7 Простір неперервних функцій $C[a,b]$ є векторною ґраткою відносно поточкового порядку.

Доведення. З наслідку 2.4 випливає, що $C[a,b]$ − впорядкований векторний простір. Доведемо, що $\forall\, f,g \in C[a,b]$ існує $f \vee g \in C[a,b]$. Згідно з твердженням 2.6, достатньо довести, що $h(t) = \max\{f,g\} \in C[a,b]$, тобто, що максимум двох неперервних функцій є функцією неперервною.

При тих значеннях t, де $h(t) = f(t)$ або $h(t) = g(t)$, $h(t)$ є функцією неперервною. Дослідження вимагають лише ті точки, в яких $f(t) = g(t)$. t_0 – така точка, тобто $f(t_0) = g(t_0)$, а $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ − довільна послідовність з $[a,b]$ така, що $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$. Тоді маємо:

$$h(t_n) = \begin{cases} f(t_n), f(t_n) \geq g(t_n), \\ g(t_n), g(t_n) \geq f(t_n). \end{cases}$$

Оскільки кожна з функцій f,g неперервна, виконуються такі умови $f(t_n) \to f(t_0)$ та $g(t_n) \to g(t_0)$ при $n \to \infty$.

Це означає, що яку б послідовність $h(t_n)$ ми не утворили, усі її підпослідовності будуть збігатися до $f(t_0) = g(t_0)$, а отже, і вона сама буде збігатися до $f(t_0) = g(t_0)$ при $n \to \infty$, що означає неперервність функції h в точці t_0. Тобто ця функція, яка є одночасно супремумом (максимумом) двох неперервних функцій, належить просторові $C[a,b]$. Це й означає, що простір $C[a,b]$ є векторною ґраткою.

Зауважимо, що в цій ґратці поняття додатної, від'ємної частин та модуля елемента збігається з добре відомими поняттями для функцій.

Твердження 2.8 Простір $C[a,b]$ є банаховою ґраткою.

Дійсно, якщо $|f| \leq |g|$ для будь-якого $t \in [a,b]$, тоді цілком очевидно, що

$$\max_{a \leq t \leq b} |f(t)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |g(t)|,$$

тобто що $\|f\| \leq \|g\|$. Це дає нам можливість зробити висновок, що простір $C[a,b]$ є банаховою ґраткою.

2.2 Простори Лебега $L_P[a; b], 1 \le p < \infty$

Елементами простору $L_p[a, b], 1 \le p < +\infty$ є класи еквівалентних функцій, для яких існує інтеграл Лебега

$$\int_{[a,b]} |f(x)|^p d\mu.$$

Норма у просторі $L_p[a, b]$ задається формулою

$$\|f\| = \left(\int_{[a,b]} |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Цей простір також є прикладом повного (банахового) сепарабельного простору. В ньому істотне значення відіграє поняття «майже скрізь».

Означення 2.9 Говорять, що деяка властивість виконується майже скрізь на деякій вимірній множині A, якщо множина тих точок множини A, в яких ця властивість не виконується, має нульову міру.

Твердження 2.10 Простір $L_p[a, b]$ є впорядкованим векторним простором відносно порядку: $f \le g$ тоді та тільки тоді коли $f(t) \le g(t)$ майже скрізь.

Доведення. Відомо [10], що $L_p[a, b]$ є лінійним простором. Покажемо, що задане в умові відношення майже скрізь є відношенням часткового порядку. Для нього виконуються умови:

а) рефлексивність: $f(t) \le f(t)$ навіть для всіх $t \in [a, b]$;

б) антисиметричність: нехай $f(t) \le g(t)$ майже скрізь та $g(t) \le f(t)$ майже скрізь. Позначимо

$$A_1 = \{t \in [a,b]: f(t) > g(t)\},$$
$$A_2 = \{t \in [a,b]: f(t) < g(t)\}.$$

Зрозуміло, що $\mu(A_1) = 0, \mu(A_2) = 0$. Якщо $t \notin A_1 \cup A_2$, тоді $f(t) \leq g(t)$ та $g(t) \leq f(t)$, тобто $f(t) = g(t)$. Якщо ж $t \in A_1 \cup A_2$, тоді такий висновок зробити не можна, тобто $f(t) \neq g(t)$. Але, оскільки, $\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2) = 0 + 0 = 0$, тобто $\mu(A_1 \cup A_2) = 0$ та умова $f(t) = g(t)$ не виконується на множині нульової міри, тобто виконується майже скрізь.

в) транзитивність: нехай $f(t) \leq g(t)$ майже скрізь та $g(t) \leq \varphi(t)$ майже скрізь. Знову покладемо

$$A_1 = \{t \in [a,b]: f(t) > g(t)\},$$
$$A_2 = \{t \in [a,b]: g(t) > \varphi(t)\}.$$

Якщо $t \notin A_1 \cup A_2$, тоді $f(t) \leq g(t), g(t) \leq \varphi(t)$, тобто $f(t) \leq \varphi(t)$. Якщо ж $t \in A_1 \cup A_2$, тоді такий висновок зробити не можна. Але оскільки $\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2) = 0 + 0 = 0$, тобто $\mu(A_1 \cup A_2) = 0$, то умова $f(t) \leq \varphi(t)$ виконується майже скрізь [19].

Це означає, що задане відношення «майже скрізь» є відношенням часткового порядку. Покажемо, що для цього відношення виконуються аксіоми з означення впорядкованого векторного простору. Нехай $f \leq g$, тобто $f(t) \leq g(t)$ майже скрізь на $[a,b]$. Тоді $\forall \varphi \in L_p[a,b]$ та для майже всіх $t \in [a,b]$ $f(t) + \varphi(t) \leq g(t) + \varphi(t)$ або $f + \varphi \leq g + \varphi$. Крім того, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ майже скрізь на $a,b]$ $\alpha f(t) \leq \alpha g(t)$, тобто $\alpha f \leq \alpha g$, що означає, що простір $L_p[a,b]$ є впорядкованим векторним простором.

Зауважимо ще раз, що для порівняння двох функцій умова $f(t) \leq g(t)$ має виконуватися лише майже скрізь на відрізку. На рисунку 2.4 зображено дві функції, одна з яких більше за іншу саме майже скрізь.

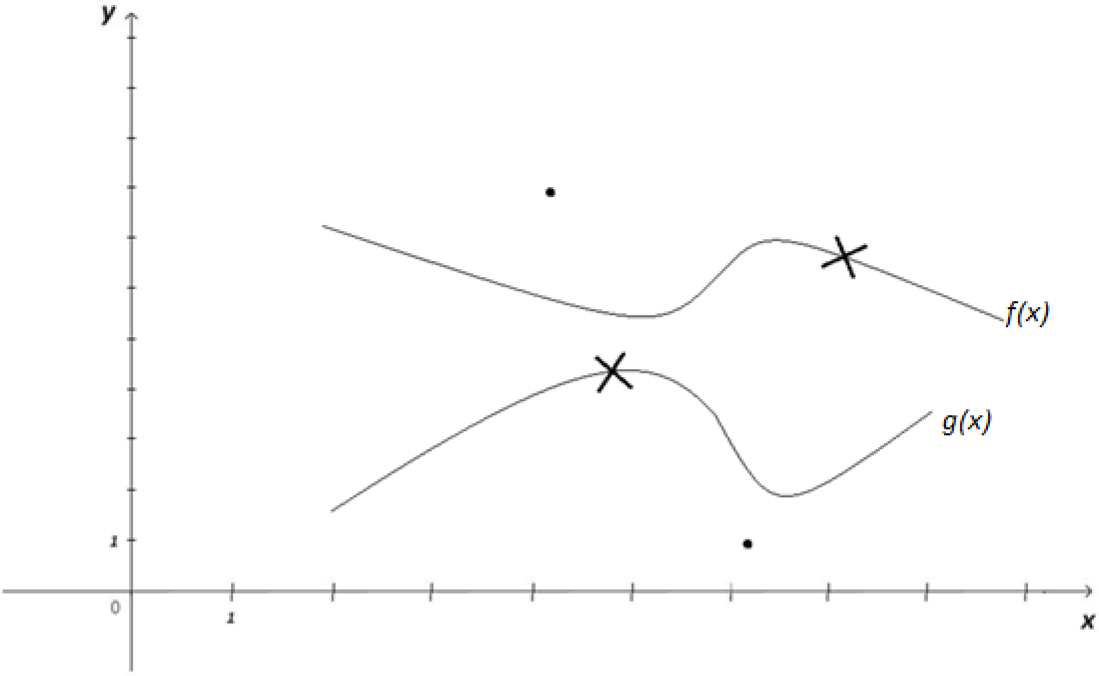

Рисунок 2.4 – Порівняння функцій відношенням «майже скрізь»

Твердження 2.11 Нехай $1 \leq p < \infty$. Тоді, простір $L_p[a;\ b]$ – векторна ґратка відносно порядку майже скрізь: $f, g\ \in\ L_p[a;\ b]\ , f\ \leq g$ тоді і тільки тоді, коли $f(t) \leq g(t)$ для майже всіх $t \in [a;\ b]$.

Доведення. З твердження 2.10 випливає, що $L_p[a;\ b]$ – це впорядкований векторний простір. Покладемо для довільних функцій $f, g\ \in$ $L_p[a;\ b]$

$$h(t) = \max\{f(t), g(t)\}\ = \begin{cases} f(t), f(t) \geq g(t), \\ g(t), f(t) < g(t) \end{cases}$$

та доведемо, що $h(t) = f \vee g$.

Покажемо спочатку, що $f \leq h$ та $g \leq h$. Фактично це випливає з означення функції h: якщо $f(t) \geq g(t)$, то $h(t) = f(t)$ та $f(t) \leq f(t)$, а якщо $f(t) < g(t)$, тоді $h(t) = g(t) > f(t)$. Отже, $f \leq h$. Аналогічно доводимо, що $g \leq h$: якщо $f(t) \leq g(t)$, тоді $h(t) = g(t)$ та $g(t) \leq g(t)$, якщо $f(t) > g(t)$, тоді $h(t) = f(t) > g(t)$. Отже, $g \leq h$.

Перевіримо тепер виконання другої умови з означення супремуму. Нехай $\forall \varphi \in L_p[a;\ b]$ виконується умова: $f \leq \varphi$ та $g \leq \varphi$, тобто для майже всіх $t \in\ [a, b]\ f(t) \leq \varphi(t)$ та $g(t) \leq \varphi(t)$. Очевидно, що $\max\{f(t), g(t)\} \leq \varphi(t)$ для майже всіх $t \in [a, b]$, тобто $h(t) \leq \varphi(t)$ майже скрізь на $[a, b]$, що означає виконання другої умови з означення супремуму: $h \leq \varphi$.

Залишилося довести, що для будь-яких $f, g\ \in L_p[a;\ b]$ функція $h \in L_p[a;\ b]$. Оскільки $f \in\ L_p[a;\ b]$ і $g\ \in\ L_p[a;\ b]$, тоді

$$\int_{[a;\,b]} |f(t)|^p d\mu < \infty,\ \int_{[a;\,b]} |g(t)|^p d\mu < \infty.$$

Доведемо, що $\int_{[a;\,b]} |h(t)|^p d\mu < \infty$. Позначимо

$$B_1 = \{t \in [a; b]: f(t) = h(t)\},$$
$$B_2 = \{t \in [a; b]: g(t) = h(t)\}.$$

Тоді з властивостей інтеграла Лебега [13] випливає:

$$\int_{[a;\,b]} |h(t)|^p d\mu = \int_{B_1} |f(t)|^p d\mu\ +\ \int_{B_2} |g(t)|^p d\mu \leq$$
$$\leq\ \int_{[a;\,b]} |f(t)|^p d\mu\ +\ \int_{[a;\,b]} |g(t)|^p d\mu < \infty.$$

Отже, $\int_{[a;\,b]} |h(t)|^p d\mu < \infty$, тобто простір $L_p[a;\ b]$ є векторною ґраткою.

Як і у просторі неперервних функцій, додатна, від'ємна частина та модуль елемента в цій ґратці – це додатна, від'ємна частини та модуль функції. Оскільки простори Лебега є банаховими, має місце наступний результат.

Твердження 2.11 Простір $L_p[a;\ b]$ при $1 \leq p < \infty$ є банаховою ґраткою.

Доведення. Нехай $f, g \in L_p[a;\ b]$. З нерівності $|f| \leq |g|$ випливає, що майже скрізь на $[a, b]$ $|f(t)| \leq |g(t)|$. З властивостей інтеграла Лебеґа [9] випливає

$$\|f\| = \left(\int_{[a;\ b]} |f(t)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{[a;\ b]} |g(t)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|g\|.$$

А з цієї нерівності в свою чергу випливає, що простір $L_p[a;\ b]$ є банаховою ґраткою.

2.3 Простір послідовностей $\boldsymbol{l_p}, \boldsymbol{1 \leq p < \infty}$

Елементами простору l_p при $1 \leq p < \infty$ є послідовності дійсних чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, для яких виконується умова $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Норма на просторі задається формулою

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Відомо [2], що цей простір є банаховим та сеперабельним — в якості зліченої всюди щільної множини у цьому просторі можна вибрати множину послідовностей з раціональними членами, які з певного для кожної послідовності номера дорівнюють нулю.

Твердження 2.12 Простір послідовностей l_p є впорядкованим векторним простором відносно покоординатного порядку:

$$x \leq y \Leftrightarrow \ \forall\, n \in \mathbb{N}\; x_n \leq y_n \ .$$

Доведення. Те, що простір l_p – лінійний, є добре відомим фактом [10], який випливає з нерівності Мінковського (тут і далі $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), y = (y_1, y_2, \dots, y, \dots)$):

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Покажемо, що задане в умові твердження відношення $\leq$ є відношенням часткового порядку:

а) $x \leq x$: нерівність $x_n \leq x_n$ очевидно виконується для всіх $n \in \mathbb{N}$;

б) нехай $x \leq y\,, y \leq x$, це означає, що $x_n \leq y_n$ та $y_n \leq x_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}\; x_n = y_n$, тобто $x = y$;

в) нехай $x \leq y\,, y \leq z$, тобто $x_n \leq y_n$ та $y_n \leq z_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що $x_n \leq z_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тобто $x \leq z$.

Таким чином, на просторі l_p дійсно задане відношення часткового порядку. Перевіримо, чи буде цей простір впорядкованим векторним простором, тобто чи виконуються аксіоми з означення 1.6.

Нехай $x, y \in l_p$ та $x \leq y$, тоді для всіх $n \in \mathbb{N}\; x_n \leq y_n$. Значить, для довільної послідовності $z = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots) \in l_p$ та для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$x_n + z_n \leq y_n + z_n \ ,$$

тобто $x + z \leq y + z$ для кожного $z \in l_p$.

Нехай знову $x, y \in l_p$ та $x \leq y$, тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$ $x_n \leq y_n$. Тобто для всіх $n \in \mathbb{N}$ та для кожного дійсного $\alpha \geq 0$

$$\alpha x_n \leq \alpha y_n,$$

тобто $\alpha x \leq \alpha y$ для кожного $\alpha \geq 0$. Виконання останніх двох умов означає, що l_p є впорядкованим векторним простором.

Знову звернемо увагу на те, що не будь-які послідовності можна порівняти між собою. Наприклад, $x = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right) \leq y = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$ в просторі l_2, оскільки $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$. А послідовності $x = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$ та $y = \left(1, -\frac{1}{2}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}, \dots\right)$ порівняти між собою неможливо.

Твердження 2.13 Простір l_p є векторною ґраткою відносно покоординатного порядку: $x \leq y \Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}\ x_n \leq y_n$.

Доведення. Потрібно довести, що $\forall x, y \in l_p$ $\sup\{x, y\} = x \vee y \in l_p$. Позначимо $x \vee y = g = (g_1, g_2, \dots, g_n, \dots)$, де

$$g_n = \max\{x_n, y_n\} = \begin{cases} x_n, \text{якщо } x_n \geq y_n, \\ y_n, \text{якщо } y_n > x_n. \end{cases}$$

Зрозуміло, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_n \leq g_n \\ y_n \leq g_n \end{cases}$ тобто $x \leq g, y \leq g$. Нехай $\forall z \in l_p$ $x \leq z, y \leq z$, тоді $\begin{cases} x_n \leq z_n, \\ y_n \leq z_n, \end{cases}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, отже, $max\{x_n, y_n\} = g_n \leq z_n$, що означає $g \leq z$.

Виконання останніх двох умов означає, що побудований нами елемент $g = (g_1, g_2, \dots, g_n, \dots)$ є дійсно супремумом елементів x, y.

Розіб'ємо натуральний ряд на дві підмножини $\mathbb{N}_1$ та $\mathbb{N}_2$, де

$$\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N}: g_n = x_n\}, \mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N}: g_n = y_n\}.$$

Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty}|g_n|^p = \sum_{n\in\mathbb{N}_1}|g_n|^p + \sum_{n\in\mathbb{N}_2}|g_n|^p = \sum_{n\in\mathbb{N}_1}|x_n|^p + \sum_{n\in\mathbb{N}_2}|y_n|^p \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p < \infty,$$

тобто $g \in l_p$ і простір l_p є векторною ґраткою.

Зауважимо, що в цьому просторі додатною частиною кожного елемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ є елемент $x^+ = (x_1 \vee 0, x_2 \vee 0, \dots, x_n \vee 0, \dots)$, від'ємною частиною – елемент $x^- = x - x^+$, а модулем – елемент $|x| = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|, \dots)$.

Оскільки l_p є банаховим простором, отримуємо наступний результат.

Твердження 2.14 Простір послідовностей l_p є банаховою ґраткою.

Доведення. Нехай $x, y \in l_p$. Норми елементів x та y простору l_p мають відповідно наступний вигляд: $\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, $\|y\| = (\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. Оскільки модулем елемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ у просторі l_p буде елемент $|x| = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|, \dots)$, то з нерівності $|x| \le |y|$ випливає, що $\forall\, n\ |x_n| \le |y_n|$. Тоді $\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p)^{\frac{1}{p}} = \|y\|$ і простір l_p є банаховою ґраткою.

2.4 Простір c_0 збіжних до нуля послідовностей

Елементами цього простору є послідовності дійсних чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, які збігаються до 0, тобто $\lim\limits_{n} x_n = 0$. Зрозуміло, що кожна збіжна послідовність є обмеженою. Норма на просторі c_0 задається формулою

$$\|x\| = \sup_n |x_n|,$$

та відносно цієї норми простір c_0 є банаховим [13].

Твердження 2.15 Простір послідовностей c_0 з покоординатним порядком: $x \le y \Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}\ x_n \le y_n$ є впорядкованим векторним простором.

Доведення. Те, що простір c_0 є лінійним, випливає безпосередньо з властивостей нескінченно малих послідовностей, а саме: якщо $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in c_0, y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in c_0$, тоді

$$\lim_n (x_n + y_n) = \lim_n x_n + \lim_n y_n = 0,$$
$$\lim_n \alpha x_n = \alpha \lim_n x_n = 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

тобто $x + y \in c_0, \alpha x \in c_0$.

Те, що відношення покоординатного порядку є дійсно відношенням часткового порядку на просторі c_0 виконуються аксіоми означення 1.6, доводиться аналогічно відповідним результатам у просторі l_p:

а) $x \le x$: нерівність $x_n \le x_n$ очевидно виконується для всіх $n \in \mathbb{N}$;

б) нехай $x \le y\,, y \le x$, це означає, що $x_n \le y_n$ та $y_n \le x_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}\ x_n = y_n$, тобто $x = y$;

в) нехай $x \le y\,, y \le z$, тобто $x_n \le y_n$ та $y_n \le z_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що $x_n \le z_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тобто $x \le z$.

Таким чином, на просторі c_0 дійсно задане відношення часткового порядку. Перевіримо аксіоми з означення 1.6.

Нехай $x, y \in c_0$ та $x \leq y$, тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$ $x_n \leq y_n$. Значить, для довільної послідовності $z = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots) \in c_0$ та для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$x_n + z_n \leq y_n + z_n,$$

тобто $x + z \leq y + z$ для кожного $z \in c_0$.

Нехай знову $x, y \in c_0$ та $x \leq y$, тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$ $x_n \leq y_n$. Тобто для всіх $n \in \mathbb{N}$ та для кожного дійсного $\alpha \geq 0$

$$\alpha x_n \leq \alpha y_n,$$

тобто $\alpha x \leq \alpha y$ для кожного $\alpha \geq 0$. Виконання останніх двох умов означає, що c_0 є впорядкованим векторним простором.

Твердження 2.16 Простір послідовностей c_0 з покоординатним порядком: $x \leq y \Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}\ x_n \leq y_n$ є векторною ґраткою.

Доведення. У твердженні 2.15 було доведено, що c_0 — впорядкований векторний простір. Доведемо, що $\forall x, y \in c_0\ \sup\{x, y\} = x \vee y \in c_0$. Позначимо $x \vee y = g = (g_1, g_2, \dots, g_n, \dots)$, де

$$g_n = max\{x_n, y_n\} = \begin{cases} x_n, \text{якщо } x_n \geq y_n, \\ y_n, \text{якщо } y_n > x_n. \end{cases}$$

Зрозуміло, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_n \leq g_n \\ y_n \leq g_n \end{cases}$ тобто $x \leq g, y \leq g$. Нехай $\forall z \in c_0$ $x \leq z, y \leq z$, тоді $\begin{cases} x_n \leq z_n, \\ y_n \leq z_n, \end{cases}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, отже, $\max\{x_n, y_n\} = g_n \leq z_n$, що означає $g \leq z$. Виконання цих умов означає, що побудований нами елемент $g = (g_1, g_2, \dots, g_n, \dots)$ є дійсно супремумом елементів x, y.

Оскільки $\lim\limits_{n} x_n = 0$ та $\lim\limits_{n} y_n = 0$, будемо мати, що

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N_1 : \forall\, n \geq\ N_1\ |x_n| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N_2 \colon \forall\, n \geq\ N_2\ |y_n| < \varepsilon.$$

Виберемо номер $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді $\forall\, n \geq N$ одночасно будуть виконуватися дві нерівності: $|x_n| < \varepsilon, |y_n| < \varepsilon$. Отже, $g_n = max\{x_n, y_n\} < \varepsilon$. Це означає, що $\lim\limits_{n} g_n = 0$, тобто $g \in\ c_0$ і простір c_0 є векторною ґраткою.

Зауважимо, що в цьому просторі також додатною частиною кожного елемента $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ є елемент $x^+ = (x_1 \vee 0, x_2 \vee 0, \ldots, x_n \vee 0, \ldots)$, від'ємною частиною – елемент $x^- = x - x^+$, а модулем – елемент $|x| = (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|, \ldots)$.

Твердження 2.17 Простір послідовностей c_0 є банаховою ґраткою.

Доведення. Нехай $x, y \in c_0$ та $|x| \leq |y|$. З цієї нерівності випливає, що $\forall\, n\ |x_n| \leq |y_n|$. Отже, $\|x\| = \sup\limits_{n} |x_n| \leq \sup\limits_{n} |y_n| = \|y\|$. А це означає, що простір c_0 є банаховою ґраткою.

Зауважимо, що всі розглянуті вище приклади є архімедовими ґратками, оскільки для довільного додатного x в кожному просторі виконується нерівність

$$\frac{x}{n} \geq \frac{x}{n+1}.$$

В функціональних просторах це означає, що для будь-якої невід'ємної (майже скрізь невід'ємної функції)

$$\frac{x(t)}{n} \geq \frac{x(t)}{n+1}.$$

В просторах послідовності це означає, що якщо $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots)$, то

$$\frac{x}{n} = \left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \ldots, \frac{x_k}{n}, \ldots\right) \geq \frac{x}{n+1} = \left(\frac{x_1}{n+1}, \frac{x_2}{n+1}, \ldots, \frac{x_k}{n+1}, \ldots\right).$$

При цьому в кожному просторі $\left\|\frac{x}{n}\right\| = \frac{1}{n}\|x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Зауважимо також, що далі в роботі ми будемо розглядати лише архімедові ґратки.

3 ЗБІЖНІСТЬ У БАНАХОВИХ ҐРАТКАХ

Нехай M – впорядкована множина та $x, y \in M$, причому $x \leq y$. Тоді порядковим інтервалом між x та y будемо називати множину

$$[x, y] = \{z \in M: x \leq z \leq y\}.$$

Відповідно, підмножина A векторної ґратки E буде називатися порядково обмеженою, якщо вона буде міститися в деякому порядковому інтервалі.

Векторна ґратка E називається повною за Дедекіндом, якщо в ній кожна непорожня порядково обмежена множина має супремум та інфімум.

3.1 Порядкова збіжність у векторних ґратках

Означення 3.1 Кажуть, що частково впорядкована множина $(P, \leq)$ є напрямленою, якщо для довільних індексів $\alpha, \beta \in P$ існує індекс $\gamma \in P$ такий, що $\alpha \leq \gamma$ і $\beta \leq \gamma$. Узагальнену послідовність $(x_\alpha)_{\alpha \in P}$ елементів векторної ґратки E, заіндексовану елементами частково впорядкованої множини P, називатимемо сіткою, або напрямленістю в E.

Поняття напрямленості або сітки [1] узагальнює поняття послідовності. Якщо в якості множини P вибрати натуральний ряд, ми отримуємо замість напрямленості звичайну послідовність. Напрямленість може бути континуальною множиною, тоді як послідовність завжди зліченна.

Означення 3.2 Напрямленість $(x_\alpha)_{\alpha \in P}$ називатимемо спадною і при цьому писатимемо $x_\alpha \downarrow$, якщо $x_\alpha \geq x_\beta$ при $\alpha \leq \beta$. Запис $x_\alpha \downarrow x$ означає, що $x_\alpha \downarrow$ і одночасно $\inf\{x_\alpha : \alpha \in P\} = x$.

Означення 3.3 Напрямленість $(x_a)_{a \in P}$ називатимемо зростаючою і при цьому писатимемо $x_a \uparrow$, якщо $x_a \leq x_\beta$ при $\alpha \leq \beta$. Запис $x_a \uparrow x$ означає, що $x_a \uparrow$ і одночасно $\sup\{x_a : a \in P\} = x$.

Означення 3.4 Кажуть, що напрямленість $(x_a)_{a \in P}$ у векторній ґратці E порядково збігається до елемента $x \in E$ (позначення: $x_\alpha \xrightarrow{0} x$), якщо існує напрямленість $(y_a)_{a \in P}$в E така, що $|x_a - x| \leq y_a$ для кожного a і $y_a \downarrow 0$. При цьому також кажуть, що напрямленість $(x_a)_{a \in P}$ є порядково збіжною в E, а елемент x є порядковою границею цієї напрямленості.

Твердження 3.5 Порядкова границя напрямленості єдина.

Доведення. Припустимо що напрямленість $(x_a)_{a \in P}$ має дві порядкові границі x, y. Оскільки $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ та $x_\alpha \xrightarrow{0} y$, існують такі дві монотонні напрямленості $(y_a)_{a \in P}, (z_a)_{a \in P}$ в E, що $y_a \downarrow 0, z_a \downarrow 0$ та для кожного a $|x_a - x| \leq y_a, |x_a - y| \leq z_\alpha$.

Отримаємо наступну оцінку:

$$0 \leq |x - y| \leq |x_a - x| + |x_a - y| \leq y_a + z_\alpha.$$

У цій нерівності перейдемо до інфімуму по a:

$$0 \leq |x - y| \leq \inf\, y_a + \inf z_\alpha = 0.$$

Це означає, що $0 = |x - y|$, тобто $x = y$, тобто припущення про існування двох порядкових границь є хибним.

Порядкова збіжність має деякі властивості збіжності числових послідовностей.

Твердження 3.6 [10] Нехай (x_a), (y_a), (z_a), (x_n) – напрямленості у векторній ґратці E, $x, y \in E$, $a, a_n \in \mathbb{R}$:

а) якщо $x_a \downarrow 0$ і $a \geq 0$, то $a x_a \downarrow 0$;

б) якщо $x_\alpha \downarrow 0$ і $y_\alpha \downarrow 0$, то $x_\alpha + y_\alpha \downarrow 0$;

в) якщо $x_\alpha \xrightarrow{0} x$, то $a x_\alpha \xrightarrow{0} a x$;

г) якщо $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ і $y_\alpha \xrightarrow{0} y$, то $x_\alpha + y_\alpha \xrightarrow{0} x + y$;

д) якщо $x_\alpha \le y_\alpha$ для кожного α, $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ і $y_\alpha \xrightarrow{0} y$, то $x \le y$;

е) якщо $x_\alpha \le y_\alpha \le z_\alpha$ для кожного α, $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ і $z_\alpha \xrightarrow{0} x$, то $y_\alpha \xrightarrow{0} x$;

ж) якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ і $x_n \xrightarrow{0} x$, то $a_n x_n \xrightarrow{0} a x$.

Відомо, що обмеженість послідовності у нормованому просторі є необхідною умовою збіжності. Аналогічний результат має місце і у векторних ґратках.

Твердження 3.7 Кожна порядково збіжна послідовність у векторній ґратці є порядково обмеженою.

Доведення. Нехай E – векторна ґратка, $x, x_n \in E$ і $x_n \xrightarrow{0} x$. Тоді, згідно з означеннями, $|x_n - x| \le y_n \downarrow 0$, а отже,

$$-y_1 + x \le y_n + x \le x_n \le y_n + x \le y_1 + x.$$

Приклад 3.8 Твердження 3.7 втрачає силу, якщо послідовність замінити напрямленістю [15]. За множину індексів візьмемо множину $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел, то напрямленість $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ у векторній ґратці $\mathbb{R}$, яка визначається рівністю $x_n = min\{0, n\}$, є порядково збіжною, але порядково необмеженою.

Дійсно, розглянута напрямленість має вигляд:

$$x_n = min\{0, n\} = \begin{cases} 0, n \in \mathbb{N} \cap [0; +\infty); \\ n, n \in \mathbb{Z} \cap (-\infty; 0). \end{cases}$$

Оскільки $(|x_n|)_{n\in\mathbb{Z}} = (\dots, n, \dots, 3, 2, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$, послідовність $(|x_n|)_{n\in\mathbb{Z}}$ монотонно спадає. Крім того, $\forall n \in \mathbb{Z}$ $|x_n| \ge 0$ та якщо деяке число z більше усіх елементів послідовності, тоді $z \geq 0$, тобто, згідно з означенням 1.8, $|x_n| \downarrow 0$.

Зрозуміло також, що ця послідовність не є порядково обмеженою, оскільки при $n \in \mathbb{Z} \cap (-\infty; 0)$ члени послідовності містять числа $-1, -2, -3, \ldots$.

Отже, суттєвим є те, що у твердженні йдеться про напрямленість.

3.2 Порядково неперервні відображення

Розглянемо ще один клас відображень, заданих у векторних ґратках – це порядково неперервні відображення. Це поняття є певним аналогом поняття неперервного відображення у нормованому просторі.

Означення 3.9 Нехай E, F – векторні ґратки і $A \subseteq E$. Відображення $\varphi: A \to F$ називається порядково неперервним в точці $x \in A$, якщо для довільної напрямленості (x_α) з A з умови $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ випливає, що $f(x_\alpha) \xrightarrow{0} f(x)$. Відображення f називається порядково неперервним (порядково неперервним на множині $B \subseteq A$), якщо воно є неперервним в кожній точці $x \in A$ $(x \in B)$.

Прикладами порядково неперервних відображень є ґраткові операції, що стверджується у наступному твердженні.

Твердження 3.10 Нехай E – векторна ґратка. Ґраткові операції однієї змінної $x^+, x^-, |x|$, а також двох змінних $x \vee y, x \wedge y$ є порядково неперервними.

Доведення. Нехай $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ і $y_\alpha \xrightarrow{0} y$, тобто $|x_\alpha - x| \leq u_\alpha \downarrow 0$ і $|y_\alpha - y| \leq v_\alpha \downarrow 0$ для деяких напрямленостей (u_α) і (v_α). Тоді

$$|{x_\alpha}^+ - x^+| \leq |x_\alpha - x| \leq u_\alpha \downarrow 0,$$

тобто $x_\alpha{}^+ \xrightarrow{0} x^+$;

$$|x_a{}^- - x^-| \le |x_a - x| \le u_\alpha \downarrow 0,$$

тобто $x_\alpha{}^- \xrightarrow{0} x^-$;

$$\big||x_a| - |x|\big| \le |x_a - x| \le u_\alpha \downarrow 0,$$

тобто $|x_\alpha| \xrightarrow{0} |x|$.

Аналогічні міркування застосуємо для операцій з двома змінними:

$$\begin{aligned} |x_a \vee y_a - x \vee y| = \ & |x_a \vee y_a - x_a \vee y + x_a \vee y - x \vee y| \le \\ & \le |x_a \vee y_a - x_a \vee y| + |x_a \vee y - x \vee y| \le \\ & \le |y_a - y| + |x_a - x| \le v_\alpha + u_\alpha \downarrow 0, \end{aligned}$$

отже, $x_a \vee y_a \xrightarrow{0} x \vee y$;

$$\begin{aligned} |x_a \wedge y_a - x \wedge y| = \ & |x_a \wedge y_a - x_a \wedge y + x_a \wedge y - x \wedge y| \le \\ & \le |x_a \wedge y_a - x_a \wedge y| + |x_a \wedge y - x \wedge y| \le \\ & \le |y_a - y| + |x_a - x| \le v_\alpha + u_\alpha \downarrow 0. \end{aligned}$$

отже, $x_a \wedge y_a \xrightarrow{0} x \wedge y$.

3.3 Порядкова збіжність у банахових ґратках

Оскільки робота присвячена дослідженню операторів у банахових ґратках, зупинимося на дослідженні особливостей порядкової збіжності у таких просторах, тобто у векторних ґратках, які одночасно є банаховими просторами та в яких для довільних елементів $x, y \in X$ з нерівності $|x| \leq |y|$ випливає, що $\|x\| \leq \|y\|$. Нагадаємо, що прикладами таких ґраток є простори $C[a, b], L_p[a, b], l_p$ при $1 \leq p \leq \infty$.

Крім того, одержуємо такі властивості.

Твердження 3.11 Нехай X – нормована ґратка і $x, y \in X$. Тоді

а) $\|x^+ - y^+\| \leq \|x - y\|$;

б) $\|x^- - y^-\| \leq \|x - y\|$;

в) $\||x| - |y|\| \leq \|x - y\|$.

Доведення. Ці нерівності випливають з властивостей елементів векторних ґраток [10]. Оскільки $x = x^+ - x^-$, $y = y^+ - y^-$, та

$$|x^+ - y^+| \leq |x - y|, |x^- - y^-| \leq |x - y|, \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|,$$

тобто

$$\|x^+ - y^+\| \leq \|x - y\|, \|x^- - y^-\| \leq \|x - y\|, \||x| - |y|\| \leq \|x - y\|.$$

З цих нерівностей випливає, що в нормованій ґратці операції взяття додатної, від’ємної частин і модуля рівномірно неперервні.

Зауважимо, що у банахових ґратках порядкова збіжність та збіжність за нормою мають різний зміст. Розглянемо послідовність $x_n(t) = t^n$ в просторі $C[0; 1]$. Зауважимо, що ця послідовність є монотонно спадною на $[0; 1]$. Крім того, $\inf t^n = 0$, тобто послідовність $x_n(t) = t^n$ порядково збігається до нуля. Але при цьому $\|t^n\| = 1$, тобто за нормою простору $C[0; 1]$ послідовність до нуля не збігається.

Для характеризації порядкової збіжності в банахових ґратках введемо таке поняття.

Означення 3.12 Вважатимемо, що послідовність (x_n) елементів векторної ґратки E відносно порядково збігається до елемента $x \in E$ (позначення: $x_n \xrightarrow{t} x$), якщо з кожної підпослідовності (y_n) послідовності (x_n) можна виділити підпослідовність (z_n) таку, що $z_n \xrightarrow{0} x$. Послідовність (x_n) елементів E відносно порядково збіжна, якщо $x_n \xrightarrow{t} x$ для деякого $x \in E$.

Твердження 3.13 Якщо відносно порядкова границя існує, вона єдина.

Доведення. Припустимо що послідовність (x_n) має дві відносно порядкові границі x, y. Нехай $x_n \xrightarrow{t} x$ та $x_n \xrightarrow{t} y$, тобто з кожної підпослідовності (y_n) послідовності (x_n) можна виділити дві підпослідовності $(z_n), (p_n)$ такі, що $z_n \xrightarrow{0} x$ та $p_n \xrightarrow{0} y$. Це означає, існування такої монотонної послідовності (u_n), в E, що $u_n \downarrow 0$ та для кожного n $|z_n - x| \leq u_n$. Зрозуміло, що така ж умова буде виконуватися і для довільної підпослідовності послідовності (z_n), тобто будь-яка її підпослідовність також порядково збігається до x. А це суперечить тому, що у кожної підпослідовності послідовності (x_n) можна виділити підпослідовність, порядково збіжну до y: з підпослідовності (z_n) таку підпослідовність виділити неможливо. Припущення про існування двох порядкових границь є хибним.

Твердження 3.14 Нехай E – векторна ґратка і $x, x_n \in E$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Якщо $x_n \xrightarrow{0} x$, то $x_n \xrightarrow{t} x$. Іншими словами, з порядкової збіжності послідовності випливає її відносна порядкова збіжність. Зворотне твердження хибне.

Доведення. Нехай $|x_n - x| \leq u_n \downarrow 0$. Оскільки будь-яка підпослідовність (w_n) послідовності (u_n) також спадаючи прямує до нуля, то будь-яка підпослідовність (y_n) послідовності (x_n) порядково збігається до x, а отже, $x_n \xrightarrow{t} x$, згідно з означенням.

Покажемо тепер, що зворотне твердження не виконується.

Приклад 3.15 Існує така послідовність (x_n) у банаховій ґратці $L_p\,[0,1], 1 \leq p \leq \infty$, яка відносно порядково збігається до нуля, але не збігається порядково. В якості такої послідовності виберемо

$$x_{2^n+k-1} = \chi_{\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)}, \text{де } n = 0,1,2, \dots \text{ і } k = 1, \dots, 2^n.$$

Тут символом

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, t \in A; \\ 0, t \notin A \end{cases}$$

позначають характеристичну функцію множини A. Задана послідовність – це система характеристичних функцій півінтервалів $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$. Випишемо декілька членів цієї послідовності.

Нехай $n = 0$, тоді $k = 1$ та $x_1 = \chi_{[0,1)}(t) = 1, t \in [0,1)$ (рис.3.1)

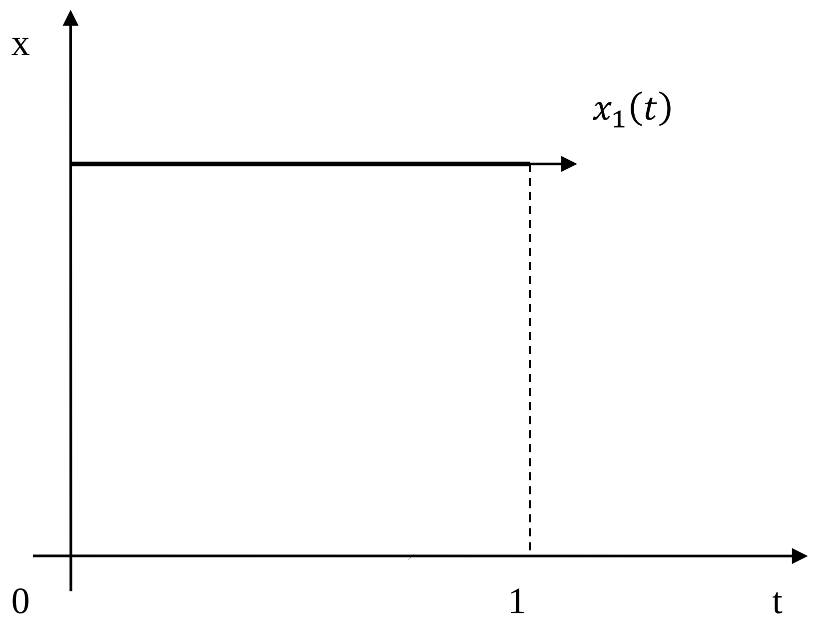

Рисунок 3.1

Числу $n = 1$ відповідає дві функції $(k = 1,2)$ (рис.3.2), (рис.3.3):

$$x_2 = \chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right)}(t) = 1, t \in \left[0, \frac{1}{2}\right); \;\; x_3 = \chi_{\left[\frac{1}{2},1\right)}(t) = 1, t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right).$$

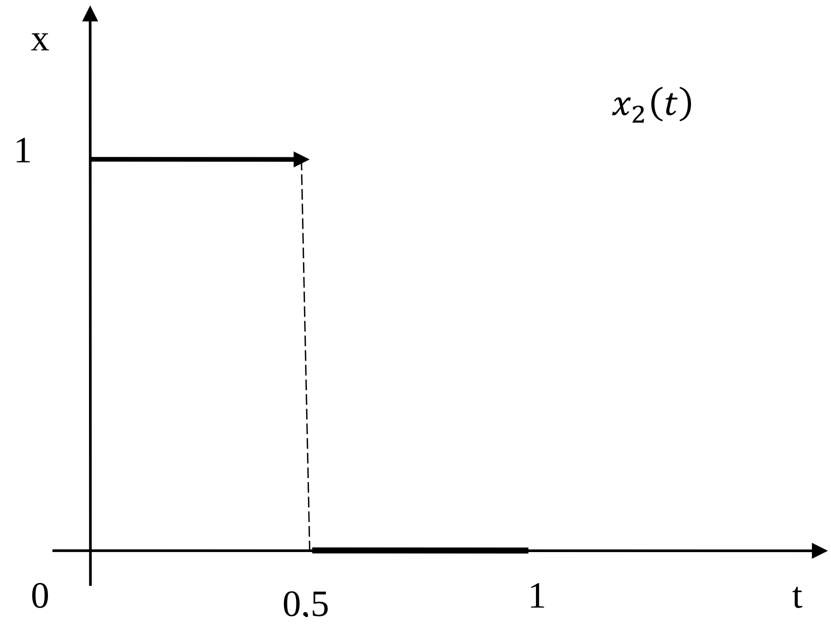

Рисунок 3.2

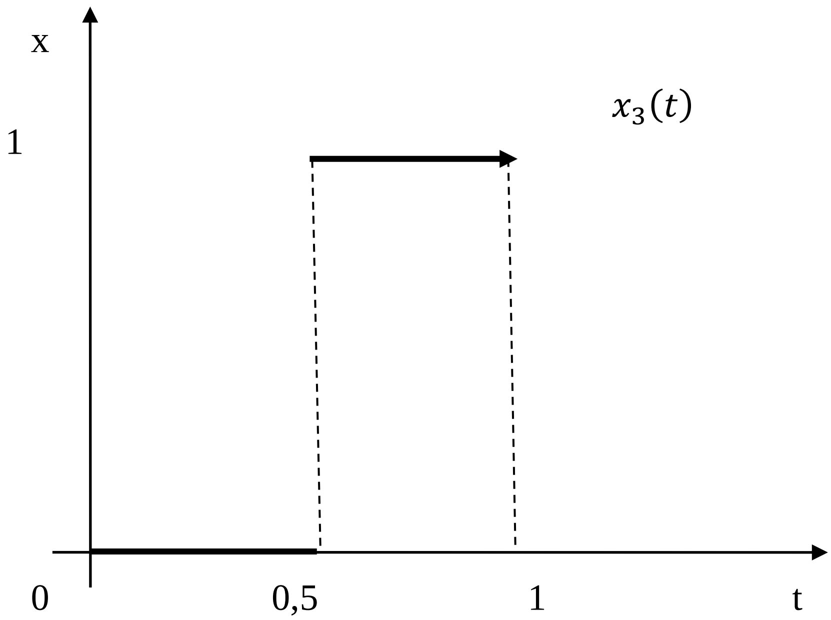

Рисунок 3.3

Числу $n = 2$ відповідають чотири функції ($k = 1,2,3,4$) (рис.3.4):

$$x_4 = \chi_{\left[0,\frac{1}{4}\right)}(t) = 1, t \in \left[0, \frac{1}{4}\right); \;\; x_5 = \chi_{\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)}(t) = 1, t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right),$$

$$x_6 = \chi_{\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)}(t) = 1, t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right); \;\; x_7 = \chi_{\left[\frac{3}{4},1\right)}(t) = 1, t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right).$$

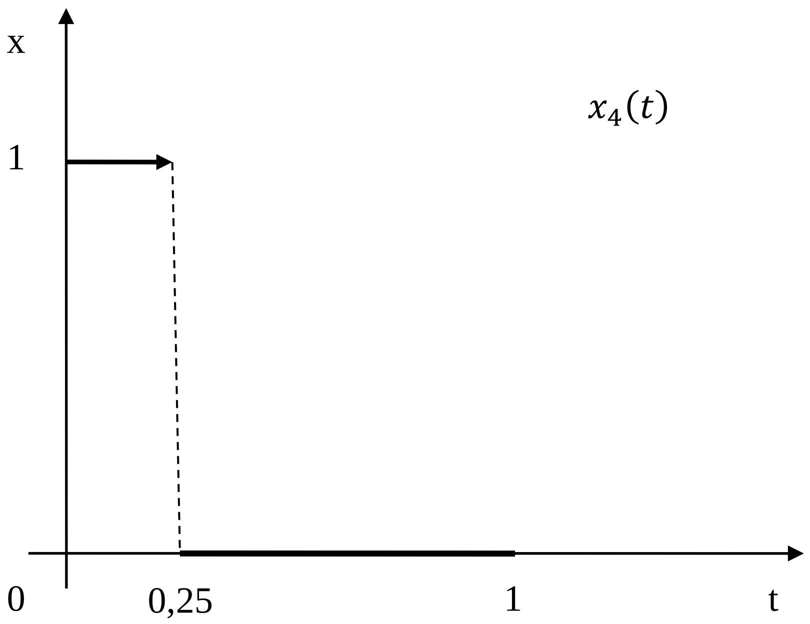

Рисунок 3.4

Якщо $i = 2^n + k$, то число n називатимемо рівнем члена послідовності x_i і позначимо $n = r(x_i)$. Доведемо, що $x_i \xrightarrow{t} 0$.

Нехай (y_i) – довільна підпослідовність послідовності (x_i). Виберемо з (y_i) таку підпослідовність (z_i), яка не містить більше одного елемента з кожного рівня. Доведемо, що $z_i \xrightarrow{t} 0$. Задамо $u_i = sup_{j \geq i} z_j$ (супремум існує, оскільки $z_j \leq 1$ і простір $L_p[0,1]$ порядково повний [1]). Тоді $|z_i| = z_i \leq u_i \downarrow$. Залишається довести, що $inf_i u_i = 0$. Для цього задамо $A_i = supp\, z_i$. Оскільки послідовність (z_i) не містить більше одного елемента з кожного рівня, то $\mu(A_{i+1}) \leq \mu(A_i)/2$, а отже, $\mu(A_i) \leq 2^{-i}$ для всіх i.

Оскільки $supp\, u_i \subseteq \bigcup_{j\geq i} A_j$, то $\mu(supp\, u_i) \leq \sum_{j\geq i} \mu(A_i) \leq 2^{-i+1}$. Тоді отримуємо, що $inf_i u_i = 0$.

Доведемо тепер, що послідовність (x_i) не збігається порядково. Нехай, навпаки $x_i \xrightarrow{0} x$. Але тоді й $x_i \xrightarrow{t} x$, а отже, $x = 0$ (див. твердження 3.1). Нехай (u_i) – така послідовність з E, що $x_i = |x_i| \leq u_i \downarrow 0$. Нехай 1 – функція, що тотожно дорівнює 1. Оскільки $1 \leq u_i$ не може виконуватися для всіх i (інакше було б $1 \leq 0$), то існують $i_0 \in \mathbb{N}$ і множина $A \subseteq [0,1]$ міри $\mu(A) > 0$, такі, що $u_{i_0}(t) < 1$ для всіх $t \in A$. Виберемо $n \in \mathbb{N}$ так, щоби $2^n > i_0$. Оскільки $A = \bigcup_{k=1}^{2^n}(A \cap \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right))$, то існує номер $k \leq 2^n$, такий, що $\mu(A \cap \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)) > 0$. З іншого боку, для майже всіх $t \in A \cap \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$ маємо

$$1 = x_{2^n+k}(t) \leq x_{i_0}(t) \leq u_{i_0}(t) < 1,$$

а отже, суперечність.

Покажемо тепер, що відносна порядкова збіжність у банахових ґратках є слабкішою, ніж збіжність за нормою ґратки.

Твердження 3.16 Нехай X – банахова ґратка, $x \in X$ і (x_n) – послідовність у X. Якщо $\|x_n - x\| \to 0$, то $x_n \xrightarrow{t} x$.

Доведення. Очевидно, достатньо розглянути випадок $x = 0$. Нехай $\|x_n\| \to 0$ і (y_m) – довільна підпослідовність послідовності (x_n). Виберемо підпослідовність (z_j) послідовності (y_m) з умовою $\|z_j\| \leq 2^{-j}$ і доведемо, що $z_j \xrightarrow{0} 0$. Задамо $u_j = \sum_{k=j}^{\infty}|z_k|$ (зазначимо, що ряд збігається абсолютно в X, оскільки $\||z_j|\| = \|z_j\| \leq 2^{-j}$) для кожного $j \in \mathbb{N}$. Таким чином, $|z_j| \leq u_j \downarrow$.

Залишається довести, що $inf_j u_j = 0$. Нерівність $0 \leq u_j$ для всіх j випливає з твердження 3.10, п. 2). Нехай $u \in X$, такий, що $u \leq u_j$ для кожного j. Але оскільки $u \leq u_j$ і $0 \leq u_j$, то $u^+ = u \vee 0 \leq u_j$ для всіх j. Далі, з цієї ж нерівності $|u^+| = u^+ \leq u_j = |u_j|$ отримуємо, що $\|u^+\| \leq \|u_j\| \leq 2^{-j+1}$ для кожного j, а отже, $u^+ = 0$, звідки одержуємо, що $u = -u^- \leq 0$. Таким чином, $z_j \xrightarrow{0} 0$, тобто $x_n \xrightarrow{t} x$.

Для доведення інших властивостей збіжних послідовностей у банахових ґратках нам знадобиться критерій порядкової збіжності.

Твердження 3.17 (Критерій порядкової збіжності) Нехай $x_\alpha \uparrow$ – напрямленість у векторній ґратці E і $x \in E$. $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ тоді і тільки тоді, коли x_α $\uparrow x$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $x_\alpha \xrightarrow{0} x$, тобто існує напрямленість (y_α) в E така, що виконується нерівність $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \ \forall\ \alpha$ і $y_\alpha \downarrow 0$.

Покажемо, що $x_\alpha \uparrow x$. Монотонність напрямленості випливає з умови твердження. Покажемо, що $sup x_\alpha = x$. Припустимо, що існує такий елемент x_{α_0}, що $x_{\alpha_0} > x$. Тоді, завдяки монотонності напрямленості, маємо, що $\forall \alpha \geq \alpha_0$, $x_\alpha \geq x_{\alpha_0} > x$. Але ж нерівність $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$, яка виконується при всіх α, означає, що

$$-y_\alpha + x \leq x_\alpha \leq y_\alpha + x.$$

З правої частини цієї нерівності випливає, що $\forall \alpha\ y_\alpha \geq x_\alpha - x$. Але оскільки $\forall \alpha \geq \alpha_0$, $x_\alpha - x \geq x_{\alpha_0} - x > 0$, будемо мати, що $\forall \alpha \geq \alpha_0$, $y_\alpha \geq x_{\alpha_0} - x > 0$. Перейдемо в цій нерівності до інфімуму по α: $inf y_\alpha \geq x_{\alpha_0} - x > 0$, що заперечує властивості напрямленості $y_\alpha \downarrow 0$. Отже, $\forall \alpha\ x_\alpha \leq x$.

Розглянемо тепер такий довільний y, що $x_\alpha \leq y$ для всіх α та покажемо, що $x \leq y$. Знову припустимо, що це не так, тобто що $x > y$. Нерівність $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ з умови порядкової збіжності перепишемо у вигляді

$$-y_\alpha \leq x_\alpha - y + y - x \leq y_\alpha,$$
$$-y_\alpha + (x - y) \leq x_\alpha - y \leq y_\alpha + (x - y).$$

Ця нерівність виконується для всіх α. Оскільки за припущенням $x - y > 0$, а $inf y_\alpha = 0$, для деяких α ліва частина нерівності буде додатною, тобто

$$0 < -y_\alpha + (x - y) \leq x_\alpha - y,$$

що суперечить умові $x_\alpha \leq y$ для всіх α. Отже, наше припущення хибне, тобто $sup x_\alpha = x$ та $x_\alpha \uparrow x$.

Достатність. Нехай тепер $x_\alpha \uparrow x$. Доведемо, що ця напрямленість порядково збігається до x. Умова $sup x_\alpha = x$ означає одночасне виконання двох умов: для будь якого α виконується $x_\alpha \leq x$ та для будь якого y, якщо $x_\alpha \leq y$ для всіх α, то $x \leq y$. Оскільки $x_\alpha \uparrow$, в якості напрямленості (y_α) з умови порядкової збіжності можна вибрати саме $y_\alpha = x - x_\alpha$ – ця напрямленість монотонно спадає та $inf y_\alpha = inf(x - x_\alpha) = 0$ та при цьому $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$. Отже, $x_\alpha \xrightarrow{0} x$.

Твердження 3.18 [10] Нехай $(x_n), (y_n), (z_n)$ – послідовності у банаховій ґратці X, $x, y \in X$, $a, a_n \in \mathbb{R}$:

а) якщо $x_n \leq y_n$ для кожного n, $\|x_n - x\| \to 0$ і $\|y_n - y\| \to 0$, то $x \leq y$;

б) якщо $x_n \leq y_n \leq z_n$ для кожного n, $\|x_n - x\| \to 0$ і $\|z_n - x\| \to 0$, то $\|y_n - x\| \to 0$;

в) якщо $x_n \geq 0$ і ряд $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ збігається за нормою, то сума $\sum_{k=1}^{n} x_k \xrightarrow{0} x$, причому $x_n \leq x$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. а) випливає з умови б) твердження 3.6 та твердження 3.14.

в) Для кожного $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$-|x_n - x| - |z_n - x| \leq -|x_n - x| \leq x_n - x \leq y_n - x \leq z_n - x \leq$$
$$\leq |z_n - x| \leq |x_n - x| + |z_n - x|,$$

звідки отримуємо $|y_n - x| \leq |x_n - x| + |z_n - x|$, а отже, $\|y_n - x\| \leq \|x_n - x\| + \|z_n - x\|$.

Задамо $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Оскільки $x_k \geq 0$, то послідовність S_n монотонно зростає. Згідно з твердженням 3.14, $S_n \xrightarrow{t} x$. Нехай $k_1 < k_2 < \cdots$ – така послідовність номерів, що $S_{k_n} \xrightarrow{0} x$. З твердження випливає, що $S_{k_n} \uparrow x$. Тому $S_n \uparrow x$, а отже, $S_n \xrightarrow{0} x$ і $x_n \leq S_n \leq x$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

ВИСНОВКИ

У другій половині минулого століття векторними ґратками почали займатися багато математиків з різних країн. Найплідніших періодом у розвитку цієї науки вважаються 70-і роки 20 століття. У 21 столітті теорія векторних ґраток і додатних операторів є важливою складовою функціонального аналізу, яка тісно пов’язана з теорією операторів, зокрема, з проблематикою інваріантних підпросторів.

У кваліфікаційній роботі розглянуто такі основні поняття як впорядкований векторний простір, векторна ґратка. У першому розділі були означені поняття впорядкованого векторного простору та векторної ґратки, досліджені загальні властивості елементів векторних ґраток та доведені умови того, що певний лінійний простір є впорядкованим векторним простором або векторною ґраткою.

Наступні два розділи присвячені дослідженню порядкової структури відомих нормованих (банахових) – функціональних просторів та просторів послідовностей. Так було доведено, що кожний з чотирьох розглянутих банахових просторів можна розглядати як впорядкований векторний простір відносно певного порядку, і навіть як векторну та банахову ґратку.

Оскільки одним з найважливіших понять в математиці є поняття збіжності, в третьому розділі ми досліджували різноманітні типи збіжностей напрямленостей та послідовностей, встановили зв’язок між ними та показали відмінності між збіжностями послідовностей та напрямленостей.

Сучасна теорія векторних ґраток є важливою складовою функціонального аналізу, яка тісно пов’язана з теорією операторів, зокрема, з проблематикою інваріантних підпросторів. Результати теорії векторних ґраток використовуються в інших розділах функціонального аналізу.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Aliprantis C., Burkinshaw O. Positive operators. Orlando : Academic Press, Inc, 1985. 367 p.
2. Kôsaku Yosida. Classics in Mathematics. *Functional analysis*. 6th Edition. Springer, 1995. 501 c.
3. Krasikova I., Pliev M., Popov M. Measurable Riesz spaces. Karpathian Mathemetical Publications. 2021. Vol.13, No.1. P. 81-88.
4. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. Vol.2, Function spaces. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1979. 243 p.
5. Meyer-Nieberg P. Banach Lattices. Springer : Berlin etc., 1991. 395 p.
6. Schaefer H. H. Banach Lattices and Positive Operators. Springer : Berlin etc., 1974. 376 p.
7. Popov M., Randrianantoanina B. Narrow operators on function spaces and vector lattices – Berlin–Boston: De Gruyter, 2013. 319 p.
8. Березанский Ю. М., Шефтель З. Г., Ус Г. Ф. Функціональний аналіз. Львів : Число, 2014. 559 с.
9. Кадець В. М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Львів : Чижиков І. Е., 2014. 558 с.
10. Попов М. М. Векторні ґратки і додатні оператори. Чернівці : Рута, 2008. 45 с.