**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**
**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**
**Кафедра фундаментальної та прикладної математики**

# КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ОБЕРНЕНІСТЬ НЕПЕРЕРВНИХ ОПЕРАТОРІВ, ЗАДАНИХ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1112-з
спеціальності 111 Математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми Математика
(назва освітньої програми)
А.В. Колєснік
(ініціали та прізвище)
Керівник доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, доцент, к.ф.-м.н. Красікова І.В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)
Рецензент професор кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Стєганцева П.Г.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя
2023

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

Освітня програма математика

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики, д.т.н., професор

____________ Гребенюк С.М.
(підпис)

« ____ » __________ 2023 р.

# З А В Д А Н Н Я

## НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Колєснік Аллі Вікторівні
(прізвище, ім'я та по батькові)

1. Тема роботи Оберненість неперервних операторів, заданих на банахових просторах

керівник роботи Красікова Ірина Володимирівна, к.ф.-м.н., доцент
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від «01» травня 2023 р. № 643-с

2. Строк здачі студентом закінченої роботи 30 листопада 2023 року

3. Вихідні данні до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст роботи розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Постановка задачі.
2. Основні теоретичні відомості.
3. Дослідження операторів на оборотність та застосування оберненості операторів до розв'язання рівнянь

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) презентація

6. Консультанти розділів роботи

| Розділ | Прізвище, ініціали та посада консультанта | Підпис, дата | |
|---|---|---|---|
| | | Завдання видав | Завдання прийняв |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

7. Дата видачі завдання 19 травня 2023 року

## К А Л Е Н Д А Р Н И Й  П Л А Н

| № | Назва етапів кваліфікаційної роботи | Строк виконання етапів роботи | Примітка |
|---|---|---|---|
| 1. | Розробка плану роботи. | 20.05.2023 | виконано |
| | | | |
| 2. | Збір вихідних даних. | 20.06.2023 | виконано |
| | | | |
| 3. | Обробка методичних та теоретичних | 21.07.2023 | виконано |
| | джерел. | | |
| | | | |
| 4. | Розробка першого і другого розділу. | 20.09.2023 | виконано |
| | | | |
| 5. | Розробка третього розділу. | 20.10.2023 | виконано |
| | | | |
| 6. | Оформлення і нормоконтроль | 30.11.2023 | виконано |
| | кваліфікаційної роботи. | | |
| | | | |
| 7. | Захист кваліфікаційної роботи. | 12.12.2023 | виконано |

Студент ________________ А.В. Колєснік
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ________________ І.В. Красікова
(підпис) (ініціали та прізвище)

**Нормоконтроль пройдено**

Нормоконтролер________________ ________________
(підпис) (ініціали та прізвище)

# РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Оберненість лінійних неперервних операторів, заданих на банахових просторах»: 57 с., 10 джерел.

АЛГЕБРАЇЧНИЙ ОБЕРНЕНИЙ ОПЕРАТОР, БАНАХІВ ПРОСТІР, ЛІНІЙНИЙ НЕПЕРЕРВНИЙ ОПЕРАТОР, НЕПЕРЕРВНА ОБЕРНЕНІСТЬ ОПЕРАТОРІВ, НОРМОВАНИЙ ПРОСТІР, ОБЕРНЕНИЙ ОПЕРАТОР, ОБЕРНЕНІСТЬ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ОПЕРАТОРІВ

Об’єкт дослідження: лінійні неперервні оператори.

Предмет дослідження: неперервна оберненість лінійних неперервних операторів.

Мета роботи: встановити умови неперервної оберненості окремих класів лінійних неперервних операторів, заданих на банахових просторах.

Метод дослідження – аналітичний.

У роботі розглядаються лінійні неперервні оператори, задані на повних нормованих просторах. Досліджується питання про їх неперервну оберненість, умови існування обернених операторів. Крім теореми Банаха про обернений оператор використовуються також інші твердження про неперервну оберненість. Дкякі з таких тверджень доведено в роботі.

# SUMMARY


Master's Qualification Thesis «The inverse of linear continuous operators defined in Banach spaces»: 57 pages, 10 references.

ALGEBRAIC INVERSE OPERATOR, BANACH SPACE, CONTINUOUS LINEAR OPERATOR, CONTINUOUS INVERTIBILITY OF OPERATORS, NORMED SPACE, INVERSE OPERATOR, INVERTIBILITY OF LINEAR CONTINUOUS OPERATORS

The object of the study: linear continuous operators.

The subject of the study: the continuous invertibility of linear continuous operators.

The aim of the work: to establish conditions for the continuous invertibility of certain classes of linear continuous operators defined on Banach spaces.

Research method: analytical.

The thesis explores linear continuous operators defined on complete normed spaces. The focus is on the question of their continuous invertibility and the conditions for the existence of inverse operators. In addition to Banach's theorem on the inverse operator, other statements regarding continuous invertibility are also employed, and some of these are proven in the thesis.

.

# ЗМІСТ

# ВСТУП

Питання про існування оберненого оператора часто зустрічаються в різноманітних задачах, в яких потрібно розв'язати деяке операторне рівняння. Такими рівняннями є, наприклад, диференціальні та інтегральні рівняння, або деякі рівняння в просторах послідовностей. Причому потрібно не просто знайти обернений оператор (розв'язати рівняння), але й знати його властивості.

Відомо, що якщо рівняння описується лінійним неперервним оператором та існує обернений до цього оператора, то він також буде лінійним оператором. Причому оберненість заданого оператора забезпечується його бієктивністю. Але неперервність оберненого оператора має місце не завжди. Існують твердження про неперервну оберненість лінійних неперервних операторів, серед яких найбільш відомим є теорема Банаха про обернений оператор, яка вважається одним з основних принципів функціонального аналізу. Вона фактично є основою теорії відображень у повних нормованих просторах. Теорема Банаха про обернений оператор стверджує, що у випадку повноти нормованих просторів $X, Y$ для неперервної оборотності лінійного неперервного оператора $A$ достатньо його бієктивності, тобто з оборотності випливає неперервна оборотність.

Питання про залежність розв'язку операторного рівняння $Ax = y$ від його правої частини, тобто від $y \in Y$, є доволі істотним, тому перевірка неперервної оборотності є істотним моментом розв'язання задачі. Тобто важливо знати, які саме умови мають виконуватися, щоб обернений оператор існував та мав певні властивості.

У роботі розглянуті різні класи просторів та операторів на них. З відомих критеріїв неперервної оборотності оператора можна отримати різноманітні умови (необхідні, достатні) існування неперервного оберненого оператора та оцінки для його норми. Найбільш зручними такі умови є в конкретних просторах для цілих класів операторів.

Ми розглядаємо в роботі скінченновимірні простори, простори послідовностей, простори неперервних функції, простори Лебега та окремі класи операторів на таких просторах. Оскільки замкнений лінійний підпростір повного нормованого простору є також повним простором, є можливість розглядати оператори, область визначення яких – саме такий лінійний замкнений підпростір.

Доведено умови існування неперервного оберненого оператора, в деяких задачах цей оператор знайдено безпосередньо. При розв’язанні деяких задач застосовувався критерій неперервної оборотності лінійного неперервного оператора, який використовує обмеження оператора знизу, та отримані з нього наслідки.

# 1 ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ОПЕРАТОРИ НА НОРМОВАНИХ ПРОСТОРАХ

## 1.1 Лінійні нормовані простори

В роботі досліджуються оператори, задані на лінійних нормованих просторах, тому спочатку наведемо основні означення, поняття та факти, що стосуються таких просторів.

Означення 1.1 Множина $E$ називається лінійним простором над полем $\mathbb{K}$, якщо на ній визначені операції додавання та множення на скаляр з поля $\mathbb{K}$, що мають такі властивості:

а) $(\forall x, y \in E)\colon x + y = y + x$ (комутативність додавання);

б) $(\forall x, y, z \in E)\colon x + (y + z) = (x + y) + z$ (асоціативність додавання);

в) $(\exists!\, 0 \in E)\ (\forall x \in E)\colon x + 0 = x$ (існування нуля);

г) $(\forall x \in E)\ (\exists!\, (-x) \in E)\colon x + (-x) = 0$ (існування протилежного елемента);

д) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K})\ (\forall x \in E)\colon \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

е) $1 \cdot x = x$ ($1 -$ одиниця поля $\mathbb{K}$);

ж) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K})\ (\forall x \in E)\colon (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

з) $(\forall \alpha \in \mathbb{K})\ (\forall x, y \in E)\colon \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Означення 1.2 Нехай $E$ – лінійний простір над полем $\mathbb{K}$. Числову функцію $\|x\| \in E \to \|x\| \in \mathbb{R}^{+}$ називають нормою, якщо вона має такі властивості:

а) $(\forall x \in E)\colon \|x\| \geq 0$, при чому $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

б) $(\forall \lambda \in \mathbb{K})\ (\forall x \in E)\colon \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (однорідність);

в) $(\forall x, y \in E)\colon \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (нерівність трикутника).

Означення 1.3 Лінійний простір $E$, в якому задана норма, називається лінійним нормованим простором над полем $\mathbb{K}$. Його називають дійсним лінійним нормованим простором при $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ і комплексним при $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

В роботі ми будемо докладно розглядати дійсні лінійні нормовані простори. Наведемо приклади класичних лінійних нормованих просторів:

а) простір дійсних чисел $\mathbb{R}$, де норма задається формулою $\|x\| = |x|$;

б) простір послідовностей $l_p$, $1 \leq p < \infty$. Елементами цього простору є числові послідовності дійсних або комплексних чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, для яких збігається ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$. Норма елемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$ в просторі $l_p$ задається формулою

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}};$$

в) простір обмежених послідовностей $l_\infty = m$. Елементами цього простору є обмежені числові послідовності дійсних або комплексних чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, з нормою елемента $\|x\| = \sup_i |x_i|$;

г) арифметичний $m$ −вимірний простір $\mathbb{R}_p^m$, $1 \leq p \leq \infty$. Елементами цього простору є $m$ −вимірні вектори з дійсними координатами $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ . Норма задається взалежності від параметра $p$:

$$\text{при } 1 \leq p < \infty \quad \|x\| = \left( \sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

при $p = \infty$ $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|$;

д) простір неперервних функцій $C[a, b]$ з нормою $\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$;

е) простори сумовних функцій $L_p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$. Елементами цього простору є класи еквівалентних функцій, для яких існує інтеграл Лебега

$\int_{[a,b]} |x(t)|^p \, d\mu$. Нагадаємо, що дві функції $x(t)$ та $y(t)$ називаються еквівалентними на множині $[a,b]$, якщо вони майже скрізь на цьому відрізку дорівнюють одна одній, тобто якщо $\mu\{t \in [a,b]: x(t) \neq y(t)\} = 0$. Норма на просторі $L_p[a,b]$ задається формулою

$$\|x\| = \left( \int\limits_{[a,b]} |x(t)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}};$$

ж) простір $C^m[a,b]$, елементами якого будуть $m$-разів неперервно диференційовні на $[a,b]$ функції. Норма на просторі $C^m[a,b]$ задається формулою:

$$\|x\|_m = \sum_{k=0}^{m} \max_{t \in [0;1]} \left| x^{(k)}(t) \right|.$$

Цей простір є повним, тобто банаховим. Зауважимо, що будь-який замкнений підпростір цього простору також буде банаховим [2]. Наприклад, в якості такого підпростору в просторі $C^1[a,b]$ можна розглядати функції, для яких $x(0) = 0$, в просторі $C^2[a,b]$ – функції, для яких виконуються умови $x(0) = x(1) = 0$ тощо.

Означення 1.4 Говорять, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ елементів нормованого простору $E$ збігається до елемента $x \in E$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. При цьому елемент $x$ називається границею послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Означення 1.5 Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ елементів нормованого простору $E$ називається фундаментальною, якщо

$$(\forall \varepsilon \in 0) \left( \exists N = N(\varepsilon) \right) (\forall m, n > N): \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Означення 1.6 Лінійний нормований простір E називається повним, якщо в цьому просторі збігається будь-яка фундаментальна послідовність. Повний лінійний нормований простір називається банаховим простором.

Прикладами банахових просторів є всі простори, наведені в прикладах 1-7: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_p^n$, $l_p$, $m$, $C[a,b]$, $L_p[a,b], C^m[a,b]$ [1].

## 1.2 Лінійні неперервні оператори

Наведемо основні поняття, які стосуються лінійних неперервних операторів, заданих на нормованих просторах. Оператором будемо називати будь-яке відображення між двома нормованими просторами $X, Y$.

Для початку, дамо означення області визначення та області значення оператора.

Означення 1.7 Областю визначення оператора $A: X \to Y$ будемо називати множину

$$D(A) = \{x \in X: \exists\, y \in Y: y = Ax\}$$

Означення 1.8 Областю значень оператора $A: X \to Y$ будемо називати множину

$$R(A) = \{y \in Y: \exists\, x \in X: y = Ax\}$$

Тепер означимо, яке відображення буде називатися лінійним оператором.

Означення 1.9 Відображення $A: X \to Y$ називається лінійним оператором, якщо $\forall x, y \in X$ та $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ виконується умова

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Зауважимо, що з лінійності оператора випливає, що $A0 = A(x - x) = = Ax - Ax = 0$. Цю умову можна вважати необхідною умовою лінійності оператора.

Означення 1.10 Оператор $A$ називається неперервним в точці $x_0 \in X$, якщо він є неперервним відображенням, тобто якщо

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X: x_n \to x_0 \Rightarrow Ax_n \longrightarrow Ax_0$$

Твердження 1.11 Якщо лінійний оператор $A$ неперервний в одній точці, він буде неперервним на всьому просторі.

Означення 1.12 Оператор $A$ називається обмеженим, якщо існує додатна константа $C$ така, що для будь-якого $x \in X$:

$$\|Ax\| \leq C\|x\|.$$

Між неперервністю та обмеженістю лінійного оператора існує зв'язок, який встановлюється наступним твердженням [2].

Твердження 1.13 Лінійний оператор є неперервним тоді та тільки тоді, коли він обмежений.

Цей факт дає можливість перевірять обмеженість лінійного оператора замість його неперервності, що інколи буває значно простіше.

Означення 1.14 Нормою лінійного неперервного оператора $A$ називають найменше з чисел $C$, що задовольняє нерівність $\|Ax\| \leq C\|x\|$ для всіх $x \in X$. Позначають норму оператора $A$ як $\|A\|$.

Тобто

$$\|A\| = \inf\{C > 0: \forall x \in X \ \|Ax\| \leq C \cdot \|x\|\}. \tag{1.1}$$

З означення норми випливає наступне твердження для обчислення норми.

Твердження 1.15 Норму будь-якого лінійного обмеженого оператора $A$, що діє з нормованого простору в нормований, можна обчислити за формулою

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \tag{1.2}$$

Нехай $X, Y$– лінійні нормовані простори. Позначимо символом $\mathcal{L}(X, \mathrm{Y})$ сукупність всіх лінійних неперервних операторів, діючих з X в Y. У випадку, коли $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$, замість $\mathcal{L}(X, \mathrm{Y})$ будемо використовувати символ $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X, \mathrm{Y}))$. Введемо в $\mathcal{L}(X, \mathrm{Y})$ структуру лінійних просторів таким чином: для будь-яких $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, $\alpha \in \mathbb{R}, \mathrm{x} \in \mathrm{X}$ покладемо

$$(A + B)x \stackrel{\mathrm{def}}{=} Ax + Bx, (\alpha A)x = \alpha(Ax). \tag{1.3}$$

Теорема 1.16 Множина $\mathcal{L}(X, \mathrm{Y})$ із заданими за допомогою (1.3) операціями і нормою $\|A\|$, заданою в означенні 1.14 є лінійним нормованим простором. Якщо Y – банаховий простір, то і $\mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ – також банахів простір.

## 1.3 Оберненість лінійних неперервних операторів

Розглянемо поняття, необхідні для дослідження існування оберненого оператора до лінійного [9].

Означення 1.17 Нехай $A: X \to Y$, $B: Y \to Z -$ лінійні неперервні оператори. Добутком операторів $B$ та $A$ називається оператор, діючий з $X$ в $Z$ за законом

$$(BA)x = B(Ax) \qquad x \in X.$$

Зрозуміло, що $BA$ – лінійний оператор. Відображення $BA: X \to Z$ є композицією неперервних відображень $B$ та $A$ і тому $BA \in \mathcal{L}(X, Z)$.

Зауваження 1.18 Зауважимо, крім того, що добуток двох неперервних операторів, як композиція неперервних відображень, є неперервним оператором.

Отже, якщо $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$, тоді $BA \in \mathcal{L}(X, Z)$. Неперервність добутку можна встановити іншим чином: для довільного $x \in X$

$$\|(BA)x\| \leq \|B\|\|Ax\| \leq \|B\|\|A\|\|x\|.$$

З цього випливає, по-перше, що оператор $BA$ є обмеженим (неперервним), та, по-друге, оцінка $\|BA\| \leq \|B\|\|A\|$.

Звернемо увагу, що множення не має властивості комутативності, тому у загальному випадку не можна стверджувати, що добутки $BA$ та $AB$ рівні. У просторі $\mathcal{L}(X)$ будемо розглядати одиничний (тотожний) оператор $I: x \to x$.

Оператор $A^{-1}: Y \to X$ називається оберненим для оператора $A: X \to Y$, якщо $\forall\, x \in X \;\; A^{-1}\big(A(x)\big) = x, \forall\, y \in Y \;\; A\big(A^{-1}(y)\big) = y$.

Згадаємо, що ін'єктивність відображення виступає критерієм для можливості існування оберненого відображення. При цьому, оператор $A$ називається ін'єктивним, якщо для будь-яких $x_1 \neq x_2$ з області визначення оператора справедливо $Ax_1 \neq Ax_2$.

Твердження 1.19 Нехай $f: X \to Y$ – деяке відображення, $f(X) \subseteq Y$ – область його значень. Для існування оберненого відображення $f^{-1}: f(X) \to X$ необхідно і достатньо, щоб $f$ було ін'єкцією. Якщо $A: X \to Y$ – лінійний оператор, то його ін'єктивність еквівалентна виконанню умови

$$Ker\, A = \{\mathrm{x} \in X |\, A\mathrm{x} = 0\} = \{0\}. \tag{1.4}$$

Означення 1.20 Якщо $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ задовольняє умову (1.4), то оператор $A^{-1}: R(\mathrm{A}) \to X$ будемо називати алгебраїчним оберненим до $A$.

Таким чином, критерієм існування алгебраїчного оберненого оператора $A^{-1}$ є наявність нульового ядра. Однак, навіть у випадку, коли оператор має алгебраїчний обернений, він може бути визначений лише на множині значень оператора $A$, а не на всьому просторі $Y$. З цього випливає наступне означення.

Означення 1.21 Оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ називається оборотним, якщо виконуються такі умови:

а) $R(A) = Y$;

б) існує алгебраїчний обернений $A^{-1}$.

При цьому оператор $A^{-1}$ називається оберненим до оператора $A$.

З цього означення випливає, що оберненість оператора рівносильно його бієктивності, оскільки перша умова в означенні 1.21 – умова ін'єктивності, а друга умова в цьому означенні – умова сюр'єктивності. Отже, оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ називається оберненим, якщо він бієктивний.

Розглянемо деякі властивості обернених операторів. Основне питання, яке постає при дослідженні на оберненість – які властивості має обернене відображення. Виявляється, що зберігається лінійність оператора.

Теорема 1.22 Оператор $A^{-1}$, обернений до лінійного оператора $A$, також лінійний.

Таким чином, така властивість, як лінійність, справедлива і для оберненого оператора. Але неперервність, або ж обмеженість, для оберненого оператора має місце не завжди.

Означення 1.23 Оператор $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ називається неперервно оборотним, якщо він оборотний та обернений оператор $A^{-1}$ є неперервним, тобто $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$.

Існує зручний критерій неперервної оберненості оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. [6]

Теорема 1.25 Оператор $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ з $R(\mathrm{A}) = Y$ неперервно оборотний тоді та тільки тоді, коли виконується умова:

$$\exists m > 0 \ \ \forall x \in X: \ \|Ax\| \geq m\|x\|. \tag{1.4}$$

Насправді виконання умови (1.4) є необхідною умовою неперервної оборотності без додаткової вимоги сюр'єктивності оператора. А з сюр'єктивностю вона стає і достатньою умовою також.

Перепишемо нерівність $\|Ax\| \geq m\|x\|$ в іншому вигляді: $\forall x \neq 0$

$$\|Ax\| \geq m\|x\| \Leftrightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq m \Leftrightarrow \left\|\frac{Ax}{x}\right\| \geq m \Leftrightarrow \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \geq m \Leftrightarrow \|Ay\| \geq m$$

для довільного елемента $y$, норма якого дорівнює одиниці. Перейдемо до інфімуму по всіх таких $y$ і отримаємо еквівалентну форму запису умови (1.4):

$$\inf_{\|y\|=1} \|Ay\| > 0. \tag{1.5}$$

Наведемо ще один критерій неперервної оборотності лінійного неперервного оператора [8].

Теорема 1.26 Оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ є неперервно оборотним тоді та тільки тоді, коли існує такий оператор $B \in \mathcal{L}(Y, X)$, що для довільного елемента $x \in X$ виконується умова $BAx = x$ та для довільного елемента $y \in Y$ виконується умова $ABy = y$.

Зауваження 1.27 Якщо оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ є оборотним, то це відповідає існуванню та єдиності розв'язку рівняння $Ax = y$ для всіх значень $y \in R(\mathrm{A})$. У випадку, коли $A$ є неперервно оборотним оператором, наведене вище рівняння має єдиний розв'язок вигляду $x = A^{-1}y$, що неперервно залежить від $y$, при будь-якій правій частині $y \in Y$. За таких умов, можна стверджувати, що рівняння $Ax = y$ коректно розв'язується на $Y$.

Звернемо увагу, що оборотність та неперервна оборотність є різними поняттями. Неперервна оборотність – більш «сильна» властивість. Існування оберненого оператора $A^{-1}$ не означає, що цей оператор є також неперервним (обмеженим). Проте, за певних умов, коли оборотність оператора еквівалентна його неперервній оборотності. Цей факт встановлюється теоремою Банаха про обернений оператор, яка є одним з основних принципів функціонального аналізу [5].

Теорема 1.28 (Теорема Банаха про обернений оператор). Нехай $A$ – лінійний обмежений оператор, що бієктивно відображає банаховий простір $X$ на банаховий простір $Y$. Тоді обернений оператор $A^{-1}$ неперервний.

Отже, для лінійних неперервних операторів, що діють між банаховими просторами, поняття оборотності та неперервної оборотності є тотожними. Надалі в роботі будемо розглядати лінійні оператори, що діють саме між банаховими просторами та у задачах будемо враховувати еквівалентність цих понять.

# 2 ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАТОРІВ НА ОБЕРНЕНІСТЬ

В цьому розділі розглянемо задачі, які стосуються дослідження лінійних операторів на оборотність та неперервну оборотність [8]. Нагадаємо, що для перевірки на оборотність необхідно і достатньо перевірити виконання двох умов: $Ker\,\mathrm{A} = \{0\}, \mathrm{R(A)} = Y$. У випадку, коли обидва простори банахові, цього достатньо, щоб стверджувати, що оператор є неперервно оберненим.

Твердження 2.1 Нехай $X$ – лінійний нормований простір, $A, B \in \mathcal{L}(X)$ і неперервно оборотні. Тоді оператор $AB$ – неперервно оборотний і $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Доведення. Якщо $A, B \in \mathcal{L}(X)$ – неперервно оборотніі, тоді

$$\exists\, m_1, m_2 > 0{:}\ \|Ax\| \geq m_1\|x\|, \|Bx\| \geq m_2\|x\|$$

для кожного $x \in X$. Розглянемо оператор $AB: X \to X$. Зрозуміло, що $AB \in \mathcal{L}(X)$. Покажемо його неперервну оборотність. Нехай $x$ – довільний елемент $X$, тоді

$$\|ABx\| \geq m_1\|Bx\| \geq m_1 m_2\|x\|,$$

що й означає неперервну оборотність оператора $AB$. При цьому

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

оскільки

$$B^{-1}A^{-1} \cdot AB = I \text{ та } AB \cdot B^{-1}A^{-1} = I.$$

Твердження 2.2 Нехай $X$ – банахів простір, $A \in \mathcal{L}(X)$ та $\|A\| < 1$. Тоді оператор $I + A$ – неперервно оборотний оператор, $(I + A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{-1}A^i$ та $\|(I + A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$.

Доведення. Ідея доведення запозичена в [6]. Покажемо, що ряд $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{-1}A^i$ збігається за нормою простору $\mathcal{L}(X)$. Для цього перевіримо фундаментальність часткових сум такого ряду:

$$\left\|S_{n+p} - S_n\right\| = \left\|\sum_{i=n+1}^{n+p}(-1)^i A^i\right\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p}\left\|A^i\right\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p}\|A\|^i.$$

Оскільки $\|A\| < 1$, при достатньо великих номерах $n$ та довільному $p$ вираз $\left\|S_{n+p} - S_n\right\|$ менше будь-якого наперед заданого числа. Це означає фундаментальність часткових сум ряду $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{-1}A^i$. Враховуючи, що простір $X$ – банахів, простір $\mathcal{L}(X)$ – також банахів, тобто в ньому збігається будь-яка фундаментальна послідовність. Отже, існує лінійний неперервний оператор, заданий в просторі $X$, який подається у вигляді

$$S = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i A^i.$$

Покажемо, що саме цей оператор є оберненим для $I + A$. Відмітимо, що

$$(I + A)S_n = (I + A)\sum_{i=1}^{n}(-1)^i A^i = (I + A)(I - A + A^2 + \cdots + (-1)^n A^n) =$$
$$= I - A + A^2 + \cdots + (-1)^n A^n + A - A^2 + \cdots + (-1)^{n+1}A^{n+1} = I + (-1)^{n+1}A^{n+1},$$

$$\|I - (I + A)S_n\| = \|I - (I + (-1)^{n+1}A^{n+1})\| = \|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1}.$$

Враховуючи неперервність норми, перейдемо в останній нерівності до границі при $n \to \infty$: $\|I-(I+A)S_n\| \to 0$, тобто $(I+A)S_n \to I$ за нормою простору $\mathcal{L}(X)$. Але з іншого боку, $(I+A)S_n \to (I+A)S$. Оскільки границя послідовності операторів єдина, це означає, що $(I+A)S = I$, отже, заданий оператор $I+A$ є неперервно оборотним та

$$(I+A)^{-1} = S = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i A^i.$$

Оцінимо норму цього оператора:

$$\|(I+A)^{-1}\| = \|S\| \le \sum_{i=0}^{\infty} \|A^i\| \le \sum_{i=0}^{\infty} \|A\|^i = \frac{1}{1-\|A\|} = (1-\|A\|)^{-1},$$

що й завершує доведення твердження.

Наслідок 2.3 В умовах теореми рівняння $(I+A)x = y$ має єдиний розв'язок в просторі $X$, який є границею послідовності $x_n = S_n y$.

Зауважимо, що цей $x_n$ є фактично наближеним розв’язком рівняння $(I+A)x = y$, відхилення якого від точного розв’язку оцінюється як

$$\|x - x_n\| = \|(I+A)^{-1}y - S_n y\| = \|((I+A)^{-1} - S_n)y\| \le$$
$$\le \|(I+A)^{-1} - S_n\|\|y\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} (-1)^i A^i \right\| \|y\| \le \sum_{i=n+1}^{\infty} \|A^i\| \, \|y\|$$
$$\le \left( \sum_{i=n+1}^{\infty} \|A\|^i \right) \|y\| = \frac{\|A\|^{n+1}}{1-\|A\|} \|y\|.$$

Твердження 2.4 Нехай $X$ – банахів простір, $A, B \in \mathcal{L}(X)$, існує $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ та $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Тоді оператор $A+B$ – неперервно оборотний оператор, $(A+B)^{-1} = (I + A^{-1}B)^{-1}A^{-1}$.

Доведення. Оскільки $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, маємо наступну оцінку

$$\|A^{-1}B\| \leq \|A^{-1}\|\|B\| < 1,$$

тобто з твердження 2.2 випливає, що оператор $I + A^{-1}B$ є неперервно оборотним, причому

$$(I + A^{-1}B)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i (A^{-1}B)^i.$$

З твердження 2.1 випливає, що оператор $A + B = A(I + A^{-1}B)$ також неперервно оборотний, причому

$$(A + B)^{-1} = (I + A^{-1}B)^{-1}A^{-1}.$$

Отримаємо ще одну оцінку норми операторів умовах твердження 2.4:

$$\|(A + B)^{-1} - A^{-1}\| = \|(I + A^{-1}B)^{-1}A^{-1} - A^{-1}\| = \|((I + A^{-1}B)^{-1} - I)A^{-1}\| =$$
$$= \left\|\left(\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i (A^{-1}B)^i - I\right)A^{-1}\right\| =$$
$$= \|(I - A^{-1}B + (A^{-1}B)^2 - (A^{-1}B)^3 + \cdots - I)A^{-1}\|$$
$$=\|(A^{-1}B - (A^{-1}B)^2 + (A^{-1}B)^3 - \cdots)A^{-1}\| =$$
$$= \|A^{-1}B(I - A^{-1}B + (A^{-1}B)^2 - (A^{-1}B)^3 + \cdots)A^{-1}\| =$$
$$= \left\|A^{-1}B\left(\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i (A^{-1}B)^i\right)A^{-1}\right\| \leq \|A^{-1}\|\|B\| \left\|\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i (A^{-1}B)^i\right\| \|A^{-1}\| \leq$$
$$\leq \|A^{-1}\|^2\|B\| \sum_{i=0}^{\infty}\|A^{-1}B\|^i \leq \|A^{-1}\|^2\|B\| \sum_{i=0}^{\infty}\|A^{-1}\|^i \, \|B\|^i = \frac{\|A^{-1}\|^2\|B\|}{1 - \|A^{-1}\|\|B\|}.$$

Твердження 2.5. Множина неперервно обернених операторів відкрита в просторі $\mathcal{L}(X)$.

Доведення. Нагадаємо, що множина у нормованому просторі називається відкритою, якщо будь-яка точка цієї множини є внутрішньою, тобто якщо вона належить множині разом з деяким своїм околом.

Розглянемо деякий неперервно оборотний на $X$ оператор $A$. Розглянемо $\|A^{-1}\|^{-1}-$ окіл цього оператора в просторі $\mathcal{L}(X)$. Будь-який оператор $C$, який знаходиться в цьому околі, задовольняє умову $\|C-A\|<\|A^{-1}\|^{-1}$. З твердження 2.4 випливає, що за такої умови оператор $A+C-A=C$ є також неперервно оборотним, тобто будь-який оператор з $\|A^{-1}\|^{-1}-$ околу оператора $A$ є неперервно оборотним. Отже, цей окіл оператора $A$ повністю утворений неперервно оборотними операторами, тобто належить множині неперервно оборотних операторів. Враховуючи довільність оператора $A$, множина неперервно оборотних на $X$ операторів є відкритою.

Твердження 2.6 Нехай $X$ – банахів простір, $A\in\mathcal{L}(X)$. Оператор $A$ має неперервний обернений оператор тоді та тільки тоді, коли оператор $A^2$ має неперервний обернений оператор.

Доведення. Нехай спочатку оператор $A$ є неперервно оборотним, тоді оператор $A^2$ буде неперервно оборотним як добуток двох неперервно оборотних операторів (твердження 2.1).

Нехай тепер $A^2$ буде неперервно оборотним оператором, тоді з умови (1.4) в теоремі 1.25 випливає, що $\exists m>0\ \ \forall x\in X\colon\ \|A^2x\|\geq m\|x\|$. Але, враховуючи той факт, що $\|A^2x\|\leq\|A\|\|Ax\|$, отримаємо, що

$$\forall x\in X\colon\ \|A\|\|Ax\|\geq\|A^2x\|\geq m\|x\|,$$
$$\forall x\in X\colon\ \|Ax\|\geq\frac{m}{\|A\|}\|x\|,$$

що в поєднанні з сюр’єктивністю оператора означає його неперервну оборотність.

Твердження 2.7 Нехай $A, BA \in \mathcal{L}(X)$ – неперервно оборотні. Тоді оператор $B$ також неперервно оборотний.

Доведення. Оскільки $A$ та $BA$ – неперервно оборотні, оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ є також неперервно оборотним. Отже, оскільки добуток двох неперервно оборотних операторів є неперервно оборотним, $BA \cdot A^{-1} = B$ – неперервно оборотний оператор.

Твердження 2.8 Нехай $X$ – лінійний нормований простір, $A \in \mathcal{L}(X)$, існує послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ така, що $\|x_n\| = 1$ і $Ax_n \to 0, n \to \infty$. Тоді оператор $A$ не є неперервно оборотним.

Доведення. Припустимо супротивне: нехай оператор $A \in \mathcal{L}(X)$ є неперервно оборотним. Тоді з теореми 1.25 випливає, що існує константа $m > 0$, що для всіх $x \in X$ $\|Ax\| \geq m\|x\|$.

Візьмемо в якості $x$ члени заданої послідовності $\{x_n\}$:

$$\forall n \; \|Ax_n\| \geq m \cdot \|x_n\| = m.$$

З цієї нерівності випливає, що

$$\lim_n \|Ax_n\| \geq m,$$

що заперечує умову $Ax_n \to 0, n \to \infty$, тобто наше припущення було хибним.

Задача 2.9 Розглянемо оператор $A: l_2 \to l_2$ та перевіримо, чи існує до цього оператора неперервний обернений оператор, якщо:

а) $Ax = (0, x_1, 0, x_3, 0, x_5 \dots)$;

б) $Ax = (x_2, x_4, x_6, \dots)$;

в) $Ax = (x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2, x_3 + 2x_4, x_3 - 2x_4, \dots)$;

г) $Ax = (x_1 - 2x_2, x_2 + 3x_3, x_3, x_4, \dots)$.

Розв’язання: а) щоб перевірити оператор у банаховому просторі $l_2$ на неперервну оборотність, достатньо (згідно з теоремою 1.28) показати, бієктивність оператора $A$. Тобто треба довести, що оператор є ін’єктивним, що відповідає умові $Ker\,A = \{0\}$, та сюр’єктивним, що відповідає умові $\mathrm{R(A)} = l_2$.

Спершу, перевіримо умову ін’єкції, тобто розв’яжемо однорідне рівняння $Ax = 0$:

$$\left.\begin{array}{c} 0 = 0, \\ x_1 = 0, \\ 0 = 0, \\ x_3 = 0, \\ \dots, \\ x_n = 0, \\ \dots \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0.$$

Таким чином, $Ker\,A = \{0\}$, що доводить умову ін’єктивності для заданого оператора, тобто заданий оператор має алгебраїчний обернений.

Тепер перевіримо існування розв’язку неоднорідного рівняння $Ax = y$ для всіх $y = (y_k) \in l_2$. Це рівняння має вигляд:

$$(0, x_1, 0, x_3, 0, x_5 \dots) = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \dots)$$

або

$$\left\{\begin{array}{c} 0 = y_1 \\ x_1 = y_2 \\ 0 = y_3 \\ x_3 = y_4 \\ \dots \\ x_n = y_{n+1.} \end{array}\right.$$

Зрозуміло, що за умови $y_{2k-1} \neq 0$, рівняння не буде мати розв’язків, тобто заданий оператор не є сюр’єктивним. Наприклад, для $y = (1,1,1,0,0,0,0 \dots)$ не існує $x \in l_2$, для якого буде виконуватись $Ax = y$. Отже, оператор $A$ не є навіть просто оборотним, оскільки не є бієктивним.

Зауважимо додатково, що якщо цей оператор розглядати не в просторі $l_2$, а в довільному $l_p, p \geq 1$, він також залишиться не сюр'єктивним, тобто не стане оборотним в іншому просторі.

б) аналогічно до минулого прикладу, перевіримо даний оператор на бієктивність. Спочатку перевіримо умову ін'єктивності, тобто знайдемо ядро цього оператора $Ker\,A$, для чого розв'яжемо рівняння $Ax = 0$:

$$\left.\begin{array}{c} x_2 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_6 = 0, \\ \dots, \\ x_{2n} = 0, \\ \dots \end{array}\right\} \Rightarrow x = (x_1, 0, x_3, 0, \dots) \in Ker\,A.$$

З вигляду розв'язку видно, що всі непарні координати можуть мати довільні ненульові значення, тобто ядро оператора не є нульовим. Наприклад, ядру буде належати ненульовий елемент $(1,0,1,0,0,0,0\dots)$ Тобто заданий оператор не є ін'єктивним, тобто не є бієкцією, а значить, не має навіть алгебраїчного оберненого. Знову ж таки, цей факт буде мати місце в будь-якому просторі $l_p, p \geq 1$.

в) перевірку існування неперервного оберненого оператора почнемо знову з умови $Ker\,A = \{0\}$. Шукаємо розв'язок рівняння $Ax = 0$:

$$\left.\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 = 0, \\ x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_3 - 2x_4 = 0, \\ \dots, \\ x_n + 2x_{n+1} = 0, \\ x_n - 2x_{n+1} = 0, \\ \dots \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0.$$

Таким чином, даний оператор є ін'єкцією та має алгебраїчний обернений. Далі перевіримо чи буде операторне рівняння $Ax = y$ мати однозначний розв'язок для довільного $y = (y_k) \in l_2$. Для даного оператора рівняння буде мати вигляд:

$$(x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2, x_3 + 2x_4, x_3 - 2x_4, \dots) = (y_1, y_2, y_3, \dots)$$

або

$$x_{2n-1} = \frac{y_{2n-1} + y_{2n}}{2}, x_{2n} = \frac{y_{2n-1} - y_{2n}}{4}.$$

Отже, формально знайдений розв'язок має вигляд:

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) =$$
$$= \left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{4}, \frac{y_3 + y_4}{2}, \frac{y_3 - y_4}{4}, \dots, \frac{y_{2n-1} + y_{2n}}{2}, \frac{y_{2n-1} - y_{2n}}{4}, \dots\right).$$

Покажемо, що такий елемент належить простору $l_2$ при довільному $y \in l_2$, тобто за умови $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 < \infty$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{\infty} 4|y_{2i-1} + y_{2i}|^2 + |y_{2i-1} - y_{2i}|^2 =$$
$$= \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{\infty} \left(5y_{2i-1}^2 + 6y_{2i-1}y_{2i} + 5y_{2i}^2\right) \le \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{\infty} \left(5y_{2i-1}^2 + 3y_{2i-1}^2 + 3y_{2i}^2 + 5y_{2i}^2\right) =$$
$$= \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{\infty} \left(8y_{2i-1}^2 + 8y_{2i}^2\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 < \infty.$$

Отже, рівняння $Ax = y$ має єдиний розв'язок у просторі $l_2$ при будь-якому $y \in l_2$, тобто заданий оператор є неперервно оберненим, і обернений оператор задається формулою:

$$A^{-1}y = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{4}, \frac{y_3 + y_4}{2}, \dots, \frac{y_{2n-1} + y_{2n}}{2}, \frac{y_{2n-1} - y_{2n}}{4}, \dots\right).$$

г) Для початку, перевіримо чи буде справедлива для оператора умова $Ker\,A = \{0\}$. Знайдемо ядро оператора:

$$\left.\begin{array}{c} x_1 - 2x_2 = 0, \\ x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ \dots, \\ x_n = 0, \\ \dots \end{array}\right\} \Longrightarrow x = 0.$$

Оскільки виконується умова $Ker\,A = \{0\}$, то оператор є ін’єкцією. Наступним кроком, для дослідження оператора на неперервну оборотність, перевіримо операторне рівняння $Ax = y$ на наявність однозначного розв’язку при будь-якому $y = (y_k) \in l_2$. Це рівняння має вигляд:

$$(x_1 - 2x_2, x_2 + 3x_3, x_3, x_4, \dots) = (y_1, y_2, y_3, \dots).$$

З цього випливає, що

$$\begin{array}{c} x_1 = y_1 + 2y_2 - 6y_3, \\ x_2 = y_2 - 3y_3, \\ x_3 = y_3, \\ x_4 = y_4, \\ \dots, \\ x_n = y_n, \\ \dots \end{array}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots) = (y_1 + 2y_2 - 6y_3, y_2 - 3y_3, y_3, y_4, \dots, y_n, \dots).$$

Таким чином, рівняння має єдиний формальний розв’язок

$$x = A^{-1}y = (y_1 + 2y_2 - 6y_3, y_2 - 3y_3, y_3, y_4, \dots, y_n, \dots),$$

Який належить простору $l_2$ при будь – якому $y \in l_2$, оскільки

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = |y_1 + 2y_2 - 6y_3|^2 + |y_2 - 3y_3|^2 + \sum_{i=3}^{\infty} |y_i|^2 < \infty,$$

отриманий елемент $A^{-1}y = (y_1 + 2y_2 - 6y_3, y_2 - 3y_3, y_3, y_4, \dots, y_n, \dots) \in l_2$.

Отже, $A^{-1} \in \mathcal{L}(\, l_2)$, тоді даний оператор $Ax = (x_1 - 2x_2, x_2 + 3x_3, x_3, x_4, \dots)$ є неперервно оборотним.

Доведемо тепер деякі твердження, яку характеризують властивості оберненості оператора.

Задача 2.10 У просторі $C[0,1]$ оператори $A$ і $B$ визначаються формулами

$$(Ax)(t) = (t+1)x(t);\ (Bx)(t) = x(t^2), t \in [0,1].$$

Знайдемо оператори $(AB)^{-1}$ та $(BA)^{-1}$. Спочатку визначимо оператори, які є добутками заданих операторів:

$$(ABx)(t) = A\big(Bx(t)\big) = A\big(x(t^2)\big) = (t+1)x(t^2),$$
$$(BAx)(t) = B\big(Ax(t)\big) = B\big((t+1)x(t)\big) = (t^2+1)x(t^2).$$

Тепер знаходимо обернені оператори, розв’язуючи два рівняння:

$$(ABx)(t) = y(t) = (t+1)x(t^2), \qquad x(t^2) = \frac{y(t)}{(t+1)}, x(t) = \frac{y(\sqrt{t})}{\sqrt{t}+1},$$
$$(BAx)(t) = y(t) = (t^2+1)x(t^2), x(t^2) = \frac{y(t)}{(t^2+1)}, x(t) = \frac{y(\sqrt{t})}{\sqrt{t}+1},$$
$$((AB)^{-1}y)(t) = \frac{y(t)}{\sqrt{t}+1}, ((BA)^{-1}y)(t) = \frac{y(t)}{t+1}.$$

Задача 2.11 Знайти оператор, обернений до $A$, або довести, що його не існує:

а) $A: C[0,1] \to C[0,1], Ax(t) = (1-t)x(t)$;

б) $A: L_1[0,1] \to L_1[0,1], Ax(t) = \sqrt{1-t} \cdot x(t)$;

в) $A: C[0,1] \to C[0,1], Ax(t) = \int_0^1 t^2(s-2)x(s)ds + (3+t)x(t)$.

а) спочатку перевіримо заданий оператор на ін'єктивність. В просторі $C[0,1]$ розв'яжемо однорідне рівняння $Ax = 0$: $(1-t)x(t) = 0$.

Зрозуміло, що $x(t) = 0$ для всіх $t \in [0,1)$. Але оскільки функція $x(t)$ – неперервна на $[0,1]$, то $x(1) = 0$, тобто $x(t) \equiv 0$ та $Ker\, A = \{0\}$.

Тепер перевіряємо оператор на сюр'єктивність, тобто розв'язуємо рівняння

$Ax = y$: $(1-t)x(t) = y(t)$.

Розв'язком цього рівняння є функція $x(t) = \frac{y(t)}{1-t}$, але ця функція не визначена в точці $t = 1$, і більш того, є необмеженою в лівому півоколі цієї точки, оскільки $\frac{y(t)}{1-t} \longrightarrow \infty$ при $t \longrightarrow 1-0$. З цього випливає, що рівняння $Ax = y$ не має розв'язків в просторі неперервних функції, тобто заданий оператор не є бієктивним і, значить, не має оберненого.

б) зауважимо, що оператор дуже схожий на попередній, але розглядається в іншому просторі. Знову перевіримо його ін'єктивність, розв'яжемо однорідне рівняння $Ax = 0$ в просторі $L_1[0,1]$: $\sqrt{1-t} \cdot x(t) = 0$.

Зрозуміло, що $x(t) = 0$ для майже всіх $t \in [0,1]$, тобто $Ker\, A = \{0\}$.

Тепер перевіряємо оператор на сюр'єктивність, тобто розв'язуємо рівняння

$Ax = y$: $\sqrt{1-t} \cdot x(t) = y(t)$.

Розв'язком цього рівняння є функція $x(t) = \frac{y(t)}{\sqrt{1-t}}$, але вона не належить простору $L_1[0,1]$ для кожної функції. Наприклад, візьмемо $y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$. Ця функція належить простору $L_1[0,1]$, оскільки інтеграл $\int_{[0,1]} \frac{1}{\sqrt{1-t}} d\mu$ є скінченним.

Але тоді $x(t) = \frac{y(t)}{\sqrt{1-t}} = \frac{1}{1-t}$ не належить простору $L_1[0,1]$, оскільки інтеграл $\int_{[0,1]} \frac{1}{1-t} d\mu$ не існує. Отже, в просторі $L_1[0,1]$ заданий оператор множення на функцію також не має оберненого оператора.

в) знайдемо ядро оператора $A$ в просторі $C[0,1]$. Для цього розглянемо однорідне рівняння

$$\int_0^1 t^2(s-2)x(s)\,ds + (3+t)x(t) = 0.$$

Позначимо $\int_0^1 (s-2)x(s)\,ds = c$, тоді рівняння набуде вигляду

$$ct^2 + (3+t)x(t) = 0.$$

Звідки, оскільки $3 + t \neq 0\ \forall t \in [0,1]$,

$$x(t) = -\frac{ct^2}{3+t}.$$

Визначимо константу $c$. Для цього останню рівність домножимо на $(t-2)$ та результат проінтегруємо від 0 до 1:

$$c = -c\int_0^1 \frac{t^2(t-2)}{3+t}\,dt.$$

Останній інтеграл обчислимо окремо:

$$\int_0^1 \frac{t^2(t-2)}{t+3}\,dt = \int_0^1 \left(t^2 - 5t + 15 - \frac{45}{t+3}\right) dt =$$

$$= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 15t - 45\ln|t+3|\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 15 - 45\ln 4 + 45\ln 3 =$$

$$= \frac{77}{6} - 45\ln\frac{4}{3}.$$

Таким чином,

$$c\left(\frac{83}{6} - 45\ln\frac{4}{3}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

Тоді $x(t) = -\frac{0\cdot t^2}{3+t} = 0$, або $Ker\,A = \{0\}$.

Операторне рівняння $Ax(t) = y(t)$ на просторі $C[0,1]$ має вигляд

$$\int_0^1 t^2(s-2)x(s)\,ds + (3+t)x(t) = y(t).$$

Розв'яжемо його відносно $x(t)$:

$$(3+t)x(t) = y(t) - t^2\int_0^1 (s-2)x(s)\,ds\,;$$

$$x(t) = \frac{1}{3+t}\left(y(t) - t^2\int_0^1 (s-2)x(s)\,ds\right).$$

Використавши вже введене позначення $\int_0^1 (s-2)x(s)\,ds = c$, матимемо, що

$$x(t) = \frac{1}{3+t}\left(y(t) - t^2 c\right).$$

Для знаходження сталої $c$ домножимо ліву і праву частини останньої рівності на $(t-2)$ і проінтегруємо в межах від 0 до 1:

$$\int_0^1 (t-2)x(t)\,dt = \int_0^1 \frac{t-2}{3+t} y(t)\,dt - c\int \frac{t^2(t-2)}{t+3}\,dt.$$

Або ж

$$c = \int_0^1 \frac{t-2}{3+t} y(t)\,dt - c\int \frac{t^2(t-2)}{t+3}\,dt.$$

Оскільки $\int_0^1 \frac{t^2(t-2)}{3+t} dt = \frac{77}{6} - 45\ln\frac{4}{3}$, то

$$c = \frac{1}{\frac{83}{6} - 45\ln\frac{4}{3}} \int_0^1 \frac{t-2}{t+3} y(t)\,dt$$

та

$$x(t) = \frac{1}{3+t}\left( y(t) - \frac{6t^2}{83 - 270\ln\frac{4}{3}} \int_0^1 \frac{s-2}{s+3} y(s)\,ds \right).$$

Зрозуміло, що для довільної неперервної на $[0,1]$ функції $y(t)$ отримана функція $x(t)$ є також неперервною на $[0,1]$, тобто рівняння $Ax(t) = y(t)$ на просторі $C[0,1]$ має єдиний розв'язок, що означає неперервну оберненість оператора $A$.

Отже,

$$A^{-1}y(t) = \frac{y(t)}{3+t} - \frac{6t^2}{(3+t)\left(83 - 270\ln\frac{4}{3}\right)}\int_0^1 \frac{s-2}{s+3}y(s)\,ds.$$

Оцінимо норму операторів $A$ та $A^{-1}$

$$\|Ax(t)\| = \max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 t^2(s-2)x(s)\,ds + (3+t)x(t)\right| \le$$

$$\le \max_{t\in[0,1]}\left(\int_0^1 |t^2(s-2)x(s)|\,ds + |3+t||x(t)|\right) \le$$

$$\le \max_{t\in[0,1]}\left(\int_0^1 |t^2(s-2)| \max_{0\le\tau\le1}|x(\tau)|\,ds + \max_{0\le t\le1}(|3+t||x(t)|)\right) =$$

$$= \left(-\int_0^1 (s-2)\,ds + 4\right)\|x\| = \left(-\frac{(s-2)^2}{2}\bigg|_0^1 + 4\right)\|x\| = \frac{11}{2}\|x\|,$$

$$\|A^{-1}y(t)\| = \left\|\frac{y(t)}{3+t} - \frac{6t^2}{(3+t)\left(83 - 270\ln\frac{4}{3}\right)}\int_0^1 \frac{s-2}{s+3}y(s)\,ds\right\| =$$

$$= \max_{t\in[0,1]}\left|\frac{y(t)}{3+t} + \frac{6t^2}{(3+t)\left(83 - 270\ln\frac{4}{3}\right)}\int_0^1 \frac{2-s}{s+3}y(s)\,ds\right| \le$$

$$\le \max_{t\in[0,1]}\left(\frac{6t^2}{(3+t)\left(83 - 270\ln\frac{4}{3}\right)}\int_0^1 \frac{2-s}{s+3}\max_{0\le\tau\le1}|y(\tau)|\,ds\right) +$$

$$+ \max_{0\le t\le1}\left(\left|\frac{1}{3+t}\right| |y(t)|\right) \le \frac{3\|y\|}{2\left(83 - 270\ln\frac{4}{3}\right)}\int_0^1 \frac{s-2}{s+3}ds + \frac{\|y\|}{3} =$$

$$\left(\frac{3\left(5\ln\frac{4}{3}-1\right)}{2\left(83-270\ln\frac{4}{3}\right)}+\frac{1}{3}\right)\|y\|.$$

Отже,

$$\|A\|\leq\frac{11}{2},\ \|A^{-1}\|\leq\frac{3\left(5\ln\frac{4}{3}-1\right)}{2\left(83-270\ln\frac{4}{3}\right)}+\frac{1}{3}.$$

# 3 НЕПЕРЕРВНА ОБЕРНЕНІСТЬ КЛАСІВ ОПЕРАТОРІВ

В цьому розділі розглянемо загальні типи операторів в різних просторах, для яких доведемо умови неперервної оборотності. Слід зауважити, що питання неперервної оберненості оператора еквівалентно питанню існування та єдиності розв’язку операторного рівняння. Тому наведені результати можна використовувати при розв’язанні операторних рівняннь.

## 3.1 Оберненість в скінченновивірному просторі та просторах послідовностей

Твердження 3.1 Для лінійного оператора $A: \mathbb{R}_p^m \to \mathbb{R}_p^m, 1 \leq p \leq +\infty$, наведені твердження еквівалентні:

а) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$;

б) оператор $A$ має неперервний обернений $A^{-1}$;

в) матриця $[A]$ є невиродженою;

г) рівняння $Ax = y$ має єдиний розв’язок для кожного $y \in \mathbb{R}^m$.

Доведення. Відомо, що будь-який лінійний неперервний (обмежений оператор у скінченновимірному просторі задається матрицею. Зокрема, оператор $A: \mathbb{R}_p^m \to \mathbb{R}_p^m$ задається квадратною матрицею розміру $m \times m$:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}.$$

В такому випадку дія оператора $A$ на векторі $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ задається як множення на матрицю, тобто

$$Ax = [A]x = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mm}x_m \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

В таких термінах умова а) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ еквівалентна умові, що рівняння $[A]x = 0$ має лише нульовий розв'язок. Враховуючи, що це рівняння еквівалентно однорідній системі $m$ рівнянь з $m$ невідомими, отримуємо, що визначник цієї системи (визначник матриці $[A]$) не дорівнює нулю. Тобто $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ тоді та тільки тоді, коли $\det[A] \neq 0$.

З цього фактично і випливає доведення твердження:

в) ⇔ а): матриця $[A]$ невироджена тоді та тільки тоді, коли її визначник не дорівнює нулю.

г) ⇔ а): неоднорідне рівняння $Ax = y$ має єдиний розв'язок для кожного $y \in \mathbb{R}^m$ тоді та тільки тоді, коли однорідне рівняння має лише нульовий розв'язок, тобто тоді та тільки тоді, коли визначник цієї матриці не дорівнює нулю, тобто умова а) виконується.

в) ⇔ б): матриця $[A]$ є невиродженою тоді та тільки тоді, коли існує обернена до неї матриця $[A]^{-1}$. Але обернена матриця визначає оператор, обернений до оператора $A$, або, іншими словами, в просторі $\mathbb{R}_p^m$ існує такий лінійний неперервний оператор $B$, заданий матрицею $[A]^{-1}$, для якого виконуються умови $BAx = [A]^{-1}[A]x = x$ для довільного елемента $x$ та $ABy = [A][A]^{-1}y = y$ для довільного елемента $y$. Згідно з теоремою 1.26, це має місце тоді та тільки тоді, коли оператор $A$ є неперервно оборотним, тобто має неперервний обернений $A^{-1}$, який як раз і задається оберненою матрицею.

Доведене твердження характеризує неперервну оберненість лінійних неперервних операторів в скінченновимірному просторі.

Твердження 3.2 Нехай оператор $A: l_p \to l_p$ задано формулою $A: (x_1, x_2, \dots) \to (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots)$, де $(x_1, x_2, \dots) \in l_p$, $\sup_k |\alpha_k| < +\infty$. Оператор $A$ має неперервний обернений тоді та тільки тоді, коли $\inf_k |\alpha_k| > 0$.

Доведення. Необхідність. Нехай оператор $A: l_p \to l_p$ має неперервний обернений. Тоді з умови (1.5) випиває, що $\inf\limits_{\|y\|=1} \|Ay\| > 0$. В якості елементів одиничної норми виберемо елементи вигляду $e_n = \left(\underbrace{0,\dots,0}_{n-1}, 1,0,0,\dots\right)$. Тоді

$$0 < \inf_{\|y\|=1} \|Ay\| \le \inf_k \|Ae_k\| = \inf_k |\alpha_k|,$$

що й доводить необхідність умови.

Достатність. Нехай $\inf_k |\alpha_k| > 0$. Оскільки $l_p$ $-$ банахів простір, для перевірки його неперервної оборотності застосуємо теорему Банаха, тобто перевіримо оператор на бієктивність.

Знайдемо ядро оператора $A$, для чого розв'яжемо рівняння $Ax = 0$. Це рівняння рівносильно системі

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 = 0, \\ \alpha_2 x_2 = 0, \\ \qquad \dots \end{cases}$$

Зрозуміло, що $\alpha_i x_i = 0$, коли або $\alpha_i = 0$, або $x_i = 0$. Але, враховуючи умову $\inf_k |\alpha_k| > 0$ , зрозуміло, що $\alpha_i \neq 0$ при всіх $i$. Це означає, що $\forall i \;\; x_i = 0$, тобто розв'язком однорідного рівняння є лише нульовий елемент простору $l_p$, що доводить ін'єктивність заданого оператора.

Покажемо тепер його сюр'єктивність, для чого розв'яжемо неоднорідне рівняння $Ax = y$ для будь-якого $y = (y_k) \in l_p$.

Рівняння $Ax = y$ в даному випадку має вигляд системи:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 = y_1, \\ \alpha_2 x_2 = y_2, \\ \quad \dots, \\ \alpha_n x_n = y_n, \\ \quad \dots, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{y_1}{\alpha_1}, \\ x_2 = \dfrac{y_2}{\alpha_2}, \\ \quad \dots, \\ x_n = \dfrac{y_n}{\alpha_n}. \end{cases}$$

Отже, $x = A^{-1}y = (\frac{y_1}{\alpha_1}, \frac{y_2}{\alpha_2}, \dots, \frac{y_n}{\alpha_n}, \dots)$. Покажемо, що отриманий елемент $A^{-1}y$ належить простору $l_p$, тобто дослідимо на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{y_n}{\alpha_n}\right|^p$.

Позначимо $\alpha = \inf_k |\alpha_k| > 0$, тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{y_n}{\alpha_n}\right|^p \leq \frac{1}{\alpha^p} \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \leq \infty,$$

тобто оператор є сюр’єктивним, а значить, згідно з теоремою Банаха про обернений оператор, неперервно оборотним.

Доведене твердження характеризує неперервну оберненість цілого класу операторів вигляду $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots)$ в просторах послідовностей. Обернений оператор має вигляд $A^{-1}y = (\frac{y_1}{\alpha_1}, \frac{y_2}{\alpha_2}, \dots, \frac{y_n}{\alpha_n}, \dots)$.

## 3.2 Оберненість в функціональних просторах

Розглянемо один і той самий оператор множення на функцію спочатку у просторі неперервних функцій $C[a, b]$, потім у просторах Лебега $L_p[a, b]$, та порівняємо, які умови має задовольняти функція в означенні оператора, щоб оператор був неперервно оборотним.

Твердження 3.3 Оператор $A: C[a, b] \to C[a, b]$, де $(Ax)(t) = \alpha(t)x(t)$, $\alpha(t) \in C[a, b]$, є неперервно оборотним тоді й тільки тоді, коли $\alpha(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$.

Доведення. Необхідність. Нехай оператор $A: C[a,b] \to C[a,b]$ має неперервний обернений. Припустимо, що в деякій точці з відрізка $[a,b]$ функція $\alpha(t)$ дорівнює нулю. Покажемо, що тоді оператор не є сюр'єктивним. Дійсно, Розв'яжемо рівняння $(Ax)(t) = y(t)$, де оберемо функцію $y(t) \equiv 1$. Тоді

$$\alpha(t) \cdot x(t) = 1 \;\; \Rightarrow x(t) = \frac{1}{\alpha(t)}.$$

Але отримана функція не є неперервною на $[a,b]$. Більше того, вона навіть не задана на всьому відрізку, оскільки в деякій точці відрізка знаменник отриманого дробу дорівнює нулю. Отже, оператор $A$ не є оборотним, тобто наше припущення про рівність нулю функції $\alpha(t)$ в деякій точці є хибним.

Достатність. Згідно з теоремою 1.26, достатньо показати існування лінійного неперервного оператора $B$, для якого $BAx = x$ для довільної функції $x$ та $ABy = y$ для довільної функції $y$. В якості такого оператора виберемо $(Bx)(t) = \frac{x(t)}{\alpha(t)}$. Тоді довільних $x(t), y(t) \in C[a,b]$

$$(BAx)(t) = \frac{\alpha(t)x(t)}{\alpha(t)} = x(t), (ABy)(t) = \alpha(t)\frac{y(t)}{\alpha(t)} = y(t).$$

Лінійність оператора $B$ очевидна. Покажемо, що він є обмеженим (неперервним). Дійсно, оскільки $\alpha(t) \in C[a,b]$, тоді $|\alpha(t)| \in C[0,1]$, причому $|\alpha(t)|$ досягає на відрізку $[a,b]$ свого мінімуму, який є додатним числом. Це випливає з того, що в жодній точці відрізка функція $|\alpha(t)|$ не дорівнює нулю. Нехай $\min\limits_{t\in[0,1]} |\alpha(t)|$, тоді для довільної функції $x(t) \in C[a,b]$

$$\|Bx\| = \max_{t\in[a,b]} \left|\frac{x(t)}{\alpha(t)}\right| \leq \frac{1}{\alpha} \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = \frac{1}{\alpha} \|x\|,$$

тобто оператор $B$ є неперервним. Отже, умови теореми 1.26 виконано, значить, оператор $A$ є неперервно оборотним.

Твердження 3.5 Нехай $X = L_p[a,b], \alpha(t) \in L_p[a,b], (Ax)(t) = \alpha(t)x(t)$. Тоді

а) $\operatorname{Ker} A = \{0\} \Leftarrow |p(t)| > 0$ майже скрізь на $[a,b]$;

б) $A$ – неперервно оборотний $\Leftrightarrow \alpha^{-1}(t) \in L_\infty[a,b]$.

Доведення; а) Знайдемо ядро оператора: $\alpha(t)x(t) = 0$. Якщо $|\alpha(t)| > 0$ майже скрізь на $[a,b]$, тоді це рівняння має лише нульовий розв'язок (точніше, розв'язком є клас функцій простору Лебега, якому належить нульова функція).

б) необхідність. Припустимо, що заданий оператор є неперервно оборотним, але при цьому $\alpha^{-1}(t) \notin L_\infty[a,b]$. Позначимо

$$\Delta_\varepsilon = \left\{t \in [a,b] : |\alpha^{-1}(t)| \geq \frac{1}{\varepsilon}\right\} = \{t \in [a,b] : |\alpha(t)| \leq \varepsilon\}, \varepsilon > 0$$

Умова $\alpha^{-1}(t) \notin L_\infty[a,b]$ еквівалентна умові, що $\forall\, \varepsilon > 0 : \mu(\Delta_\varepsilon) > 0$. Означимо наступні функції:

$$x_\varepsilon(t) = \frac{\chi_{\Delta_\varepsilon}(t)}{\sqrt[p]{\mu(\Delta_\varepsilon)}} \in L_p[a,b].$$

Тут $\chi_{\Delta_\varepsilon}(t)$ – характеристична функція множини $\Delta_\varepsilon$. Зрозуміло, що

$$\|x_\varepsilon\| = \sqrt[p]{\int_a^b |x_\varepsilon(t)|^p dt} = \sqrt[p]{\int\limits_{\Delta_\varepsilon} \frac{1}{\mu(\Delta_\varepsilon)} dt} = 1,$$

$$\|Ax_\varepsilon\| = \sqrt[p]{\int_a^b |\alpha(t)x_\varepsilon(t)|^p dt} = \leq \sqrt[p]{\int\limits_{\Delta_\varepsilon} |\alpha(t)|^p \frac{1}{\mu(\Delta_\varepsilon)} dt} \leq \varepsilon \sqrt[p]{\int\limits_{\Delta_\varepsilon} \frac{1}{\mu(\Delta_\varepsilon)} dt} = \varepsilon.$$

Тоді $\inf\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \inf\limits_{\varepsilon>0} \|Ax_\varepsilon\| \leq \inf\limits_{\varepsilon>0} \varepsilon = 0$ і з теореми 1.25 випливає, що $A$ не є неперервно оборотним оператором.

Достатність. Згідно з теоремою 1.26, достатньо показати існування лінійного неперервного оператора $B$, для якого $BAx = x$ для довільної функції $x$ та $ABy = y$ для довільної функції $y$. В якості такого оператора виберемо $(Bx)(t) = \frac{x(t)}{\alpha(t)}$. Тоді для довільних $x(t), y(t) \in L_2[a, b]$

$$(BAx)(t) = \frac{\alpha(t)x(t)}{\alpha(t)} = x(t), (ABy)(t) = \alpha(t)\frac{y(t)}{\alpha(t)} = y(t).$$

Лінійність оператора $B$ очевидна. Покажемо, що він є обмеженим (неперервним). Дійсно, оскільки $\alpha^{-1}(t) \in L_\infty[a, b]$, тоді $|\alpha^{-1}(t)| \in L_\infty[a, b]$, тобто існує істотний максимум цієї функції $m = \operatorname*{ess\,max}\limits_{t\in[a,b]} |\alpha^{-1}(t)|$. Тоді для довільної функції $x(t) \in L_2[a, b]$

$$\|Bx\| = \sqrt[p]{\int_a^b \left|\frac{x(t)}{\alpha(t)}\right|^p dt} = \sqrt[p]{\int_a^b |\alpha^{-1}(t)x(t)|^p dt} \leq m \cdot \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)|^p dt} = m\|x\|,$$

тобто оператор $B$ є неперервним. Отже, умови теореми 1.26 виконано, значить, оператор $A$ є неперервно оборотним.

### 3.3 Оберненість диференціальних та інтегральних операторів

Окремо розглянемо ще два класи лінійних неперервних оператоів – диференціальних та інтегральних. Оскільки ці оператори використовуються в диференціальних та інтегральних рівняннях, питання про їх неперервну оборотність (тобто про існування та єдиність розв'язків таких рівнянь) є доволі важливим.

Твердження 3.6 Нехай $X_1 = \{x \in C^1[0;1]: x(0) = 0\}$, – простір неперервно диференційовних на $[0;1]$ функцій $x(t)$, таких, що $x(0) = 0$, з нормою $\|x\| = \max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)| + \max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)|$. Тоді оператор $A: C_0^1[0,1] \to C[0;1]$: $(Ax)(t) = (t^2 + 1)x'(t) - 2tx(t)$, де $t \in [0;1]$, є неперервно оборотним.

Доведення. Оскільки $C_0^1[0,1]$ $-$ банахів простір, то для його неперервної оборотності достатньо показати, що оператор $A$ є бієктивним. Покажемо, що $Ker\ A = \{0\}$ та $R(A) = C[0;1]$. Перевірка цих властивостей фактично приводить до розв'язання двох диференціальних рівнянь – однорідного та неоднорідного.

Доведемо, що $KerA = \{0\}$, тобто перевіримо, чи є оператор $A$ ін'єктивним. Розглянемо однорідне рівняння $Ax = 0$: $(t^2 + 1)x'(t) - 2tx(t)$, з початковою умовою $x(0) = 0$.

Це однорідне диференціальне рівняння першого порядку, в якому можна розділити змінні:

$$(t^2 + 1)x'(t) = 2tx(t), (t^2 + 1)\frac{dx}{dt} = 2tx(t), \frac{dx}{x} = \frac{2tdt}{t^2+1}.$$

Інтегруючи останній вираз $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2tdt}{t^2+1}$, отримаємо, що $\ln|x| = \ln|t^2 + 1| + \ln c = \ln|c(t^2 + 1)|$. Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд $x = c(t^2 + 1)$. Враховуючи початкову умову $x(0) = 0$, визначимо константу:

$$0 = c(0 + 1) \Rightarrow c = 0.$$

Отже, $x(t) \equiv 0$. З цього випливає, що $Ker\, A = \{0\}$, тобто оператор $A$ – ін'єктивний.

Тепер перевіримо сюр'єктивність оператора, тобто що рівняння $Ax = y$ однозначно розв'язується для будь-якого $y(t) \in C[0;1]$. Це рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням першого порядку:

$$(t^2+1)x'(t) - 2tx(t) = y(t).$$

Розв'яжемо його. Зробимо заміну $x = u \cdot v$. Отримаємо

$$(t^2+1)(u'v + uv') - 2tuv = y.$$
$$(t^2+1)u'v + (t^2+1)uv' - 2tuv = y,$$
$$(t^2+1)u'v + u\big((t^2+1)v' - 2tv\big) = y.$$

Функцію $v(t)$ оберемо так, щоб $(t^2+1)v' - 2tv = 0$:

$$(t^2+1)\frac{dv}{v} - 2tv = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{dv}{v} = \frac{2tdt}{(t^2+1)},$$
$$\ln v = \ln(t^2+1) \;\; \Rightarrow \;\; v = t^2+1.$$

Підставляючи в початкове диференціальне рівняння, одержимо:

$$(t^2+1)u' \cdot (t^2+1) = y \;\; \Rightarrow \;\; (t^2+1)^2\, u' = y,$$
$$u' = \frac{y}{(t^2+1)^2} \;\; \Rightarrow \;\; \frac{du}{dt} = \frac{y(t)}{(t^2+1)^2},$$
$$du = \frac{y(t)}{(t^2+1)^2}\, dt.$$

Враховуючи початкову умову $x(0) = 0$, отримаємо $u(t)$ у вигляді:

$$u(t) = \int_0^t \frac{y(\tau)}{(\tau^2+1)^2} d\tau.$$

Підставляючи у заміну $u(t)$ та $v(t)$, отримаємо $x(t)$:

$$x(t) = u(t) \cdot v(t) = t^2 + 1 \int_0^t \frac{y(\tau)}{t^2 + 1^2} d\tau.$$

Оскільки функція $y(t)$ є неперервною, функція $x(t)$, яка подається у вигляді інтеграл від неперервної функції зі змінною межею інтегрування, також є неперервною та навіть неперервно диференційовною. Отже, оператор $A$ є сюр'єктивним та ін'єктивним, тобто бієктивним. З цього випливає, що існує неперервний обернений оператор $A^{-1}$:

$$(A^{-1}y)(t) = (t+1) \int_0^t \frac{y(\tau)}{(\tau+1)^2} d\tau.$$

Твердження 3.7 Нехай $X_2 = \{x \in C^2[0;1]: x(0) = x'(0) = 0\}$, $\|x\|_2 = \sum_{k=0}^{2} \max_{t\in[0;1]} \left|x^{(k)}(t)\right|$. Лінійний неперервний оператор $A: X_2 \to C[0;1]$, $(Ax)(t) = x''(t) - 9x(t)$, $t \in [0;1]$ є неперервно оборотним.

Доведення. Доведемо, що оператор $A$ неперервно обернений. Оскільки $X_2$ — банахів простір, знову покажемо, що оператор $A$ є бієктивним. Тобто що $Ker\ A = \{0\}$ та $R(A) = C[0;1]$.

Знайдемо ядро оператора, для чого розв'яжемо однорідне рівняння другого порядку $Ax = 0$: $x''(t) - 9x(t) = 0$ з початковою умовою $x(0) = x'(0) = 0$.

Складемо характеристичне рівняння $k^2 - 9 = 0$. Його коренями будуть числа $k_1 = 3,\ k_2 = -3$.

Значить, загальний розв'язок цього лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами подамо у вигляді:

$$x(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}.$$

Знайдемо розв'язок, враховуючи початкову умову:

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ x'^{(0)} = 3C_1 - 3C_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2, \\ -C_2 + C_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow x(t) \equiv 0.$$

Отже, однорідне рівняння має лише нульовий розв'язок, тобто $KerA = \{0\}$ та оператор $A$ є ін'єктивним.

Тепер розв'яжемо неоднорідне рівняння $Ax = y$ для будь-якого $y(t) \in C[0;1]$. Рівняння $Ax = y$ в даному випадку є лінійним неоднорідним рівнянням другого порядку:

$$x''(t) - 9x(t) = y(t).$$

Розв'яжемо його. Знайдемо $y_{\text{одн.}}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, тобто рівняння $x''(t) - 9x(t) = 0$. Вище це рівняння вже було розв'язано, тобто скористаємося отриманим результатом:

$$y_{\text{одн.}}(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}.$$

Будемо шукати загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння за допомогою загального розв'язку однорідного лінійного рівняння, вважаючи, що довільні сталі є функціями незалежної змінної $t$, тобто у вигляді $y(t) = C_1(t)e^{3t} + C_2(t)e^{-3t}$. Знайдемо функції $C_1(t)$, $C_2(t)$ з системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(t)e^{3t} + C_2'(t)e^{-3t} = 0, \\ 3C_1'(t)e^{3t} - 3C_2'(t)e^{-3t} = y(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(t)e^{3t} = -C_2'(t)e^{-3t}, \\ -6C_2'(t)e^{-3t} = y(t), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(t)e^{3t} = -C_2'(t)e^{-3t}, \\ C_2'(t) = -\dfrac{1}{6}y(t)e^{3t}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(t) = \dfrac{1}{6}y(t)e^{-3t}, \\ C_2'(t) = -\dfrac{1}{6}y(t)e^{3t}. \end{cases}$$

Оскільки функція $C_1'(t) = \frac{1}{6}y(t)e^{-3t}$, тоді $\int_0^t C_1'(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{1}{6}y(\tau)e^{-3\tau}$. Тоді

$$C_1(t) = \frac{1}{6}\int_0^t y(\tau)e^{-3\tau}d\tau + A,$$

де $A$ – довільна стала.

Оскільки функція $C_2'(t) = -\frac{1}{6}y(t)e^{3t}$, тоді

$$C_2(t) = -\frac{1}{6}\int_0^t y(\tau)e^{3\tau}d\tau + B,$$

де $B$ – довільна стала.

Підставляючи $C_1(t)$, $C_2(t)$ в загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння, отримаємо

$$x(t) = \left(\int_0^t \frac{1}{6}y(\tau)e^{-3\tau}d\tau + A\right)e^{3t} + \left(\int_0^t -\frac{1}{6}y(\tau)e^{3\tau}d\tau + B\right)e^{-3t} =$$
$$= Ae^{3t} + Be^{-3t} + \frac{1}{6}\int_0^t (e^{3(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)})y(\tau)d\tau.$$

З врахуванням початкових умов, для визначення $A, B$ отримаємо систему:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ 3A - 3B = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = 0. \end{cases}$$

Отже, шуканий розв'язок задачі Коші має вигляд

$$x(t) = \frac{1}{6}\int_0^t (e^{3(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)})y(\tau)d\tau.$$

Зрозуміло, що отримана функція є двічі неперервно диференційовною, тобто заданий оператор є бієктивним, тобто неперервно оборотним. При цьому обернений оператор $A^{-1}$ задається формулою

$$(A^{-1}y)(t) = \frac{1}{6}\int_0^t (e^{3(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)})y(\tau)d\tau, \qquad \forall y(t) \in C[0;1].$$

Твердження 3.8 Нехай $X_3 = \{x \in C^3[0;1] \mid x(0) = x'(0) = x''(0) = 0\}$, $\|x\|_3 = \sum_{k=0}^{3} \max_{t\in[0;1]} \left|x^{(k)}(t)\right|$. Оператор $A: X_3 \to C[0;1]$, $Ax(t) = x'''(t) - x''(t)$, $t \in [0;1]$ є неперервно оборотним.

Доведення Знову скористаємося теоремою Банаха про обернений оператор, оскільки заданий оператор діє між банаховими просторами. Перевіримо заданий оператор на бієктивність.

Спочатку перевіримо ін'єктивність оператора, для чого розв'яжемо лінійне однорідне рівняння третього порядку: $Ax = 0$: $x'''^{(t)} - x''^{(t)} = 0$ з початковою умовою $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

Зменшимо порядок рівняння за допомогої заміни $x''(t) = u(t)$, де $u(t) -$ нова невідома функція. При цьому отримаємо лінійне однорідне рівняння першого порядку $u'(t) - u(t) = 0$. Загальним розв'язком цього рівняння буде функція $u(t) = C_1e^t$, де $C_1 -$ довільна стала. Таким чином, отримуємо, що

$$x''(t) = u(t) = C_1e^t.$$

Інтегруючи двічі цей вираз, отримаємо загальний розв'язок однорідного рівняння у вигляді $x(t) = C_1e^t + C_2t + C_3$, де $C_1$, $C_2$, $C_3$ – довільні сталі, а функції $x_1(t) = e^t,\ x_2(t) = t,\ x_3(t) = 1$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння.

Враховуючи початкові умови, визначимо невідомі сталі:

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_3 = 0, \\ x'(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ x''(0) = C_1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -C_3 = 0, \\ C_1 = -C_2 = 0, \\ C_1 = 0. \end{cases}$$

Отже, однорідне рівняння має лише нульовий розв'язок, тобто $KerA = \{0\}$ та оператор $A$ є ін'єктивним.

Тепер покажемо, що неоднорідне рівняння $Ax = y$ має розв'язок для будь-якого $y(t) \in C[0;1]$. Рівняння $Ax = y$ – це лінійне неоднорідне рівняння третього порядку:

$$x'''(t) - x''(t) = y(t).$$

Знаходимо фундаментальну систему розв'язків відповідного однорідного рівняння $x'''(t) - x''(t) = 0$. Загальний розв'язок однорідного рівняння було знайдено вище, тому $\tilde{x}(t) = C_1 e^t + C_2 t + C_3$.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо методом варіації довільних сталих у вигляді

$$x(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)t + C_3(t),$$

де функції $C_1(t),\ C_2(t),\ C_3(t)$ визначаються з системи рівнянь. Знайдемо $C_1'(t)$, $C_2'(t),\ C_3'(t)$:

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + C_2'(t)t + C_3'(t) = 0, \\ C_1'(t)e^t + C_2'(t) = 0, \\ C_1'(t)e^t = y(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3'(t) = y(t)(t-1), \\ C_2'(t) = -y(t), \\ C_1'(t) = y(t)e^{-t}. \end{cases}$$

Інтегруємо функції $C_1'(t),\ C_2'(t),\ C_3'(t)$ та отримуємо

$$\mathrm{C}_1(t) = \int_0^t y(\tau)e^{-\tau}d\tau + a, \qquad C_2(t) = \int_0^t -y(\tau)d\tau + b,$$

$$C_3(t) = \int_0^t y(\tau)(\tau - 1)d\tau + c,$$

де $a, b, c$ – довільні сталі, $t \in [0; 1]$.

Підставляємо отримані функції $C_1(t),\ C_2(t),\ C_3(t)$ в загальний розв'язок неоднорідного рівняння та отримуємо загальний розв'язок початкового рівняння:

$$x(t) = ae^t + bt + c + \int_0^t (e^{t-\tau} - t + \tau - 1)y(\tau)d\tau.$$

Врахуємо наявність початкових умов:

$$x'(t) = ae^t + b + \int_0^t (e^{t-\tau} - 1)y(\tau)d\tau + (e^{t-t} - t + t - 1)y(t) = =$$

$$= ae^t + b + \int_0^t (e^{t-\tau} - 1)y(\tau)d\tau,$$

$$x''(t) = ae^t + \int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau + (e^{t-t} - 1)y(t) = ae^t + \int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau.$$

$$\begin{cases} a + c = 0, \\ a + b = 0, \\ a = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0, \\ b = 0, \\ a = 0. \end{cases}$$

Таким чином, єдиний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд:

$$x(t) = \int_0^t (e^{t-\tau} - t + \tau - 1)y(\tau)d\tau.$$

Отримана функція є тричі неперервно диференційовною, тобто належить простору $X_3$.Це означає бієктивність і, відповідно, неперервну оборотність заданого оператора $A$, при цьому обернений оператор має вигляд:

$$(A^{-1}y)(t) = \int_0^t (e^{t-\tau} - t + \tau - 1)y(\tau)d\tau, \qquad \forall y(t) \in C[0;1].$$

Доведені вище твердження показують, як можна показати неперервну оборотність диференціальних операторів. Як видно, в цих твердженнях істотним є те, що вимагається неперервна диференційовність функцій.

Розглянемо тепер інтегральні оператори. Дослідження таких операторів на неперервну оборотність, як правило, пов’язане з розв’язанням лінійних інтегральних рівнянь.

Інтегральними рівняннями прийнято називають такі рівняння, які містять невідому функцію під знаком інтеграла. Наприклад, інтегральним рівнянням відносно функції $x(t)$ є рівняння

$$\alpha(t)x(t) + f(t) = \lambda \int_a^b k(t,s)x(s)ds,$$

де $\alpha(t), f(t), k(t,s)$ – відомі функції (змінні $t, s$ пробігають тут деякий фіксований відрізок, а функції і параметр $\lambda$ можуть приймати як дійсні, так і комплексні значення).

Як правило, передбачається, що ядро $k(t,s)$ та вільний член $f(t)$ є квадратично сумовними функціями (ядро – на квадраті $[a;b] \times [a;b]$, вільний член – на відрізку $[a;b]$).

Розглянемо неперервну оборотність інтегрального оператора з виродженим ядром.

Твердження 3.9 Нехай ядро $K = K(t,s) \in C[0;1]$, причому $K(t,s) = k(t)l(s)$, де $k, l \in C[0;1]$, не є тотожними нулями і $\int_0^1 k(t)l(t)\,dt \neq 1$. Тоді оператор $A: C[0;1] \to C[0;1]$, де $(Ax)(t) = x(t) - \lambda \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$, $t \in [0;1]$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, є неперервно оборотним.

Доведення. Для доведення неперервної оборотності оператора $A$ в просторі $C[0;1]$ знову застосуємо теорему Банаха про обернений оператор. Для цього покажемо, що заданий оператор є бієктивним, що рівняння $Ax = y$ має єдиний розв'язок для будь-якого $y(t) \in C[0;1]$:

$$(Ax)(t) \equiv x(t) - \lambda \int_0^1 k(t)l(s)x(s)ds = y(t).$$

Враховуючи, що інтегральне рівняння має вироджене ядро, скористаємося методами розв'язання таких рівняння. Розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$x(t) = y(t) + \lambda \int_0^1 k(t)l(s)x(s)ds = y(t) + \lambda c k(t), \text{ де } c = \int_0^1 l(s)x(s)ds.$$

$$x(t)l(t) = y(t)l(t) + \lambda c k(t)l(t),$$

$$\int_0^1 l(s)x(s)ds = \lambda c c_0 + \int_0^1 l(s)y(s)ds,$$

де $c_0 = \int_0^1 l(s)k(s)ds$ , $c_0 \neq \frac{1}{\lambda}$.

Оскільки $\int_0^1 l(s)x(s)ds = c$, рівняння запишеться у вигляді

$$c = \boldsymbol{\lambda c c_0} + \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \boldsymbol{l(s)y(s)ds}, c = \frac{1}{1 - \lambda c_0} \int_0^1 l(s)y(s)ds.$$

Отже,

$$x(t) = \frac{\lambda}{1-\lambda c_0}\int_0^1 K(t,s)y(s)ds + y(t) = (A^{-1}y)(t),$$

звідки випливає єдиність розв'язку рівняння. Покажемо, що ця функція дійсно є розв'язком рівняння $Ax = y$ при будь-якій правій частині $y(t) \in C[0;1]$:

$$x(t) - \lambda\int_0^1 k(t)l(s)x(s)ds = \frac{\lambda}{1-\lambda c_0}\int_0^1 k(t)l(s)y(s)ds + y(t) -$$

$$-\lambda\int_0^1 k(t)l(s)\left(\frac{\lambda}{1-\lambda c_0}\int_0^1 k(s)l(\tau)y(\tau)d\tau + y(s)\right)ds =$$

$$= \frac{\lambda}{1-\lambda c_0}\int_0^1 k(t)l(s)y(s)ds + y(t) -$$

$$-\frac{\lambda^2}{1-\lambda c_0}\int_0^1 k(t)l(s)\left(\int_0^1 k(s)l(\tau)y(\tau)d\tau\right)ds - \lambda\int_0^1 k(t)l(s)y(s)ds =$$

$$= y(t) + \frac{\lambda}{1-\lambda c_0}\int_0^1 k(t)l(s)y(s)ds - \frac{\lambda^2}{1-\lambda c_0}\int_0^1 k(s)l(s)ds\int_0^1 k(t)l(\tau)y(\tau)d\tau -$$

$$-\lambda\int_0^1 k(t)l(s)y(s)ds = y(t) + \frac{\lambda}{1-\lambda c_0}\int_0^1 k(t)l(s)y(s)ds -$$

$$-\frac{\lambda^2 c_0}{1-\lambda c_0}\int_0^1 k(t)l(s)y(s)ds - \lambda\int_0^1 k(t)l(s)y(s)ds =$$

$$= y(t) + \left(\frac{\lambda}{1-\lambda c_0} - \frac{\lambda^2 c_0}{1-\lambda c_0} - \lambda\right)\int_0^1 k(t)l(s)y(s)ds = y(t).$$

Тобто, оператор $A$ є неперервно оборотним, а оберненим для нього буде оператор

$$(A^{-1}y)(t) = \frac{\lambda}{1-\lambda c_0}\int_0^1 K(t,s)y(s)ds + y(t).$$

Зауважимо, що отриманий в твердженні 3.9 результат застосовується для певного класу операторів. Наприклад, візьмемо $K(t,s) = te^s$, $\lambda = 2$.

Тоді $c_0 = \int_0^1 se^s ds = se^s - e^s |_0^1 = 1$, тобто оберненим для оператора $(Ax)(t) \equiv x(t) - 2\int_0^1 te^s x(s)ds$ є оператор $(A^{-1}y)(t) = -2\int_0^1 te^s y(s)ds + y(t)$.

Твердження 3.10 Нехай $X_0 = X_1 = \{x \in C^1[0,1]: x(0) = 0\}$ і на $X_i$ розглядаються норми $\|x\|_0 = \max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$, $\|x\|_1 = \max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|$, відповідно. Нехай також

$$A_i: C([0,1]) \to X_i, (A_i x)(t) = \int_0^t x(s)\, ds.$$

Тоді оператор $A_1$ є неперервно оборотним, а оператор $A_0$ не є неперервно оборотним.

Доведення. Зауважимо, що не всі простори, про які йдеться в твердженні є банаховими відносно відповідних норм.

Ядром кожного з двох операторів буде лише нульова функція, оскільки умова $\int_0^t x(s)\, ds = 0$ має виконуватися при всіх $t \in [0,1]$. Область значень кожного оператора утворює лінійний простір неперервно диференційовних на $[0,1]$ функцій, для яких виконується умова $y(0) = 0$, оскільки $\int_0^t x(s)\, ds = 0$ при $t = 0$. Отже, заданий оператор є бієктивним.

Знайдемо формальний розв’язок рівняння $(A_i x)(t) = \int_0^t x(s)\, ds = y(t)$, де $y(t) \in X_i$, тобто $y(t)$ є неперервно диференційовною функцією.

Продиференцюємо обидві частини рівняння:

$$\left(\int_0^t x(s)\, ds\right)' = y'(t), x(t) = y'(t),$$

причому $y(0) = 0$. Тобто обернений оператор існує та має вигляд

$$(A_i^{-1}y)(t) = y'(t),$$

але стверджувати, що він є неперервним, ми можемо лише у випадку простору $X_1$, оскільки він є банаховим і для оператора $A_1$ має виконуються умови теореми Банаха, тобто цей оператор є неперервно оберненим.

Оскільки простір $X_0$ не є повним, застосувати теорему Банаха до оператора $A_0$. Більше того, покажемо, що оператор $A_0^{-1}$ взагалі не є неперервним. Виберемо в просторі $X_0$ послідовність $y_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$, яка збігається до нуля, оскільки $\left\|\frac{\sin nt}{n}\right\| \leq \frac{1}{n}$. Але при цьому послідовність $(A_0^{-1}y_n)(t) = \cos nt$ не збігається до $A_0^{-1}0 = 0$, оскільки $\|\cos nt\| = \max\limits_{t \in [0;1]} |\cos nt| = 1$. Отже, оператор, $A_0$ є оборотним, але не є неперервно оборотним.

Доведене твердження демонструє, що для перевірки оператора на неперервну оберненість обов'язково потрібно враховувати властивості просторів, в яких цей оператор задано.

# ВИСНОВКИ

Кваліфікаційна робота присвячена питанню неперервної оберненості лінійних неперервних операторів, заданих на банахових просторах. Загальновідомими твердженнями про неперервну оберненість операторів є теорема Банаха про обернений оператор та критерій неперервної оберненості обмеженого знизу оператора. Ми довели декілька тверджень, які стосуються умов неперервної оберненості або в загальних банахових просторах, або в конкретних просторах та для конкретних класів операторів.

У першому розділі наведено основні поняття теорії лінійних неперервних операторів, заданих на лінійних нормованих просторах. Найбільшу увагу приділено питанням оберненості та неперервної оберненості лінійних неперервних операторів. Наведені також критерій неперервної оборотності та теорема Банаха про обернений оператор.

Другий розділ присвячено умовам існування обернених операторів, та властивостям таких операторів. Наведені приклади знаходження таких операторів в різних просторах.

Третій розділ демонструє застосування поняття неперервної оберненості оператора до дослідження на неперервну оборотність класів операторів в скінченновимірному просторі, просторах послідовностей, просторах неперервних функцій та просторах Лебега. Розглянуто такі типи операторних рівнянь – матричні, рівняння у просторах послідовностей, множення на функцію, диференціальні та інтегральні рівняння у функціональних просторах.

Результати роботи можуть бути використані при викладанні відповідної теми у курсі функціонального аналізу, а також при підготовці методичних видань.

# ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ


1. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. Vol.2, Function spaces. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1979. 243 p.
2. Erwin Kreyszig. Introductory Functional Analysis with Applications. Wiley, 1989. 704 с.
3. Kôsaku Yosida. Classics in Mathematics. *Functional analysis*. 6th Edition. Springer, 1995. 501 с.
4. Peter D. Lax. Functional Analysis. Wiley-Interscience, 2002. 608 с.
5. Банах С. С. Курс функціонального аналізу. Київ : Радянська школа, 1948. 45 с.
6. Березанский Ю. М., Шефтель З. Г., Ус Г. Ф. Функціональний аналіз. Львів : Число, 2014. 559 с.
7. Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Львів : Чижиков І.Е., 2014. 558 с.
8. Константінов О. Ю., Мішура Ю. С. та ін. Збірник задач з функціонального аналізу. Київ : ВПЦ «Київський університет». 2004. 123 с.
9. Красікова І. В., Д'яченко Н. М. Функціональний аналіз та теорія міри й інтеграла : методичні рекомендації до самостійної роботи для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2020. 70 с.
10. Сторож О. Г. Збірник задач з теорії міри і функціонального аналізу. Львів : Чижиков І.Е., 2011. 151 с.