МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ ТИХОНОВА ДО ПОГАНО ОБУМОВЛЕНИХ СИСТЕМ»**

Виконав: студент 2 курсу, групи 8.1111
спеціальності 111 Математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми Математика
(назва освітньої програми)
Г. М. Науменко
(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, доцент, к.ф.-м.н. Панасенко Є.В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри програмної інженерії, доцент, к.ф.-м.н. Кудін О.В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя
2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 Математика

(шифр і назва)

Освітня програма Математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики, д.т.н., професор

________________ Гребенюк С.М.

(підпис)

« _______ » ___________ 2023 р.

ЗАВДАННЯ

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

Науменку Геннадію Миколайовичу

(прізвище, ім'я та по батькові)

1. Тема роботи Застосування методу регуляризації Тихонова до погано обумовлених систем

керівник роботи Панасенко Євген Валерійович, к.ф-м.н., доцент

(прізвище, ім'я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 01 » 05 2023 року № 642-с

2. Строк подання студентом роботи 05.12.2023

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Постановка задачі
2. Основні теоретичні відомості
3. Задача

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) ___________
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 05.05.2023

К А Л Е Н Д А Р Н И Й П Л А Н

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	26.09.2023	
2.	Збір вихідних даних.	28.09.2023	
3.	Обробка методичних та теоретичних	02.10.2023	
	джерел.		
4.	Розробка першого розділу.	05.10.2023	
5.	Розробка другого та третього розділу.	25.10.2023	
6.	Оформлення та нормоконтроль	22.11.2023	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	14.12.2023	

Студент ______________ Г.М. Науменко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ______________ Є.В. Панасенко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ______________ О.Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Застосування методу регуляризації Тихонова до погано обумовлених систем»: 51 с., 1 таблиця, 17 джерел.

ВИРОДЖЕНА СИСТЕМА, МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ, МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ, ПСЕВДОРОЗВ'ЯЗОК СИСТЕМИ, СИСТЕМА ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ.

Об’єкт дослідження – погано обумовлені системи і некоректно поставленої задачі.

Мета роботи: знаходження розв’язку некоректно поставленої задачі.

Метод дослідження: аналітичний.

У кваліфікаційній роботі приведені основні означення та теореми по методу регуляризації Тихонова до вироджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь та теорії псевдообернених матриць. На основі цього матеріалу побудовано розв’язок погано обумовленої системи з різними параметрами регуляризації. Знайдено псевдорозв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis «Application of Tikhonov's Method to Ill-Conditioned Systems»: 51 pages, 1 table,17 references.

DEGENERATE SYSTEM, METHOD OF LEAST SQUARES, REGULARIZATION METHOD, PSEUDOSOLUTION OF THE SYSTEM, SYSTEM OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATION.

The object of the study is ill-conditioned systems and incorrectly posed problems.

The aim of the study is finding a solution to an incorrectly posed problems.

The method of research is analytical.

The qualification paper presents the main definitions and theorems on the Tikhonov regularization method for degenerate systems of linear algebraic equations and the theory of pseudoinverse matrices. On the basis of this material, the solution of an ill-conditioned system with various regularization parameters was constructed. We were found a pseudosolution of the system of linear algebraic equations.

ЗМІСТ

ВСТУП

Як відомо [13, 14], при дослідження фізичних процесів виникають проблеми при розв’язанні реальних задач, що представляє складну математичку проблему. Такі проблеми привели до розробки й побудови методів розв’язування нестійких по відношенню до вхідних даних задач та їх застосування, що розглядалися у роботах А. Н. Тихонова та В. К. Іванова [17].

«Некоректно поставлені задачі» – це термін, що використовується в математиці та фізиці для опису задач, які не відповідають умовам теореми про існування, єдність та стабільність розв’язку. Це можуть бути задачі, де мала зміна вхідних даних призводить до великої зміни в результатах, або де розв’язок не існує або не єдиний [8, 9, 17].

Некоректно поставлені задачі не мають стабільного розв’язку через те, що вони не відповідають умовам теореми про існування, єдність та стабільність розв’язку. Це означає, що мала зміна вхідних даних може призвести до значної зміни в результатах, або розв’язок може не існувати або не бути єдиним. Якщо задача поставлена некоректно, то її майже неможливо розв’язати чисельними методами, оскільки якщо початкові умови або праві частини задані з похибкою (яка виникає навіть при округленні), то чисельний розв’язок може значно відрізнятись від точного [8].

Некоректно поставлені задачі можуть не мати точного розв’язку через свою властивість нестабільності. Це означає, що навіть незначні зміни вхідних даних можуть призвести до значних змін у результатах. Наприклад, якщо початкові умови або праві частини задані з похибкою (яка виникає навіть при округленні), то чисельний розв’язок може значно відрізнятись від точного. Також можливо, що розв’язок не існує або не єдиний. Тому, некоректно поставлені задачі вимагають особливих методів для їх розв’язання [9].

Існує досить широкий клас практичних задач, для яких точність одержаних розв’язків залежить від точності вхідних даних так, що підвищення точності вхідних даних тягне за собою підвищення точності розв'язку. Але така ситуація має місце не завжди. Наприклад, розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь [1-7, 10]:

$$Ax = y,$$

де x – невідомий вектор, y – відомий вектор, $A = \{a_{ij}\}$ – квадратна матриця з відомими елементами a_{ij}, $i, j = 1,2, \dots, n$.

Якщо система $Ax = y$ не вироджена [5], то існує $\det A \neq 0$, то вона має єдиний розв'язок, котрий можна знайти за відомими формулами Крамера або за допомогою схеми Гауса, чи будь-яким іншим методом. Якщо система вироджена, то вона має розв’язок лише за виконання умов розв’язності, які складаються з рівності нулю відповідних визначників [5]. Таким чином, перш ніж розв’язувати систему $Ax = y$, треба перевірити, вироджена вона чи ні. Для цього необхідно обчислити визначник системи $\det A$ [10].

З якою б точністю ми не здійснювали обчислення, при досить великому значенні n (порядок системи), в наслідок накопичення похибок обчислень, ми можемо одержати значення $\det A$, яке може суттєво відрізнятись від точного [5]. З цієї причини бажано будувати такі алгоритми знаходження розв’язку системи $Ax = y$, котрі не вимагають попереднього встановлення факту виродженості чи невиродженості її.

Крім того, в практичних задачах часто права частина y і елементи матриці A, коефіцієнти системи рівнянь $Ax = y$, відомі нам наближено. В цих випадках, замість системи $Ax = y$, ми маємо справу з деякою іншою системою [8]:

$$\tilde{A}x = \tilde{y}$$

такою, що $\|\tilde{A} - A\| \leq h$, $\|\tilde{y} - y\| \leq \delta$, h та δ – достатньо малі числа.

Оскільки замість точної системи $Ax = y$ ми маємо наближену систему $\tilde{A}x = \tilde{y}$, то мова може йти лише про знаходження наближеного розв'язку. Він повинен бути також стійким по відношенню до малих змін вхідних даних (A, y) [9].

Задачі, для яких малим змінам вхідних даних відповідають достатньо малі зміни вихідних даних називаються коректно поставленими. Поняття коректно поставленої задачі визначається умовами [8, 9]:

– для всякого y існує розв'язок x у множині дійсних чисел;
– розв'язок визначається однозначно;
– задача стійка.

Задачі, які не задовольняють хоч одній з цих умов, називають некоректно поставленими [8, 9]. В математичній літературі довгий час існувала думка, згідно з якою всяка математична задача повинна задовольняти цим умовам. Домінуюча думка серед математиків ставили під сумнів доцільність вивчення некоректно поставлених задач. Однак така думка, цілком природна для застосування до деяких явищ, що розвиваються в часі, не може бути перенесена на всі задачі. Наприклад, застосування методу найменших квадратів для побудови математичних моделей реальних процесів за результатами конкретних вимірів вихідних параметрів приводить до необхідності розв'язку некоректно поставлених задач [8, 9, 17].

Коли система лінійних рівнянь є погано обумовленою, методи регуляризації є досить корисним інструментом для спроби подолати чисельні труднощі: погано обумовлена система замінюється іншою, розв'язок якої залежить від члена регуляризації, утвореного скаляром і матриці, яку необхідно вибрати. У статті [13] розглядається випадок одночасного додавання кількох членів регуляризації, таким чином подолавши проблему найкращого вибору матриці регуляризації. Проаналізовано похибку цієї процедури та численні результати підтверджують її ефективність.

У даній кваліфікаційній роботі буде приділено увагу методам розв’язку некоректно поставлених задач, які відносяться до систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

1 ПСЕВДООБЕРНЕННЯ ПРЯМОКУТНИХ МАТРИЦЬ

Якщо A – квадратна і невироджена матриця, то для неї існує обернена матриця A^{-1} [2]. Якщо ж A – не квадратна, а прямокутна $m \times n$-матриця ($m \neq n$) або квадратна, але вироджена, то матриця A не має оберненої і символ A^{-1} не має сенсу. Однак, як буде показано далі, для довільної прямокутної матриці A існує «псевдообернена» матриця A^{+} [12], яка володіє деякими властивостями матриці і має важливі застосування при розв'язанні системи лінійних рівнянь. У випадку, коли A – квадратна невироджена матриця, псевдообернена матриця A^{+} збігається із оберненою A^{-1} [3].

1.1 Скелетний розклад матриці

Надалі, як відомо з [12], будемо користуватися представленням довільної прямокутної $m \times n$ – матриці $A = \|a_{ik}\|$, рангу r у вигляді добутку двох матриць B і C, які мають відповідно розміри $m \times r$ та $r \times n$:

$$A = BC = \begin{Vmatrix} b_{11} & \dots\dots\dots\dots & b_{1r} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots \\ b_{m1} & \dots\dots\dots\dots & b_{mr} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} c_{11} & \dots\dots\dots\dots & c_{1r} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots \\ c_{r1} & \dots\dots\dots\dots & c_{rn} \end{Vmatrix} \quad (r = r_A). \quad (1.1)$$

Тут ранги співмножників B і C обов'язково дорівнюють рангам множення $A : r_b = r_c = r$. Дійсно , $r \leq r_b, r_c$. Але ранги r_b і r_c не можуть бути більшими за r, так як r – один із розмірів матриць B та C. Тому $r_b = r_c = r$.

Для того, щоб отримати розкладання (1.1), достатньо в якості стовпців матриці взяти будь-які r лінійно незалежних стовпців матриці A або будь-які r лінійно незалежних стовпців, через які лінійно виражаються стовпці матриці A. Тоді довільний стовпець матриці A буде лінійною комбінацією стовпців матриці B з коефіцієнтами $c_{1j}, c_{2j,\ldots\ldots,} c_{rj}$; ці коефіцієнти і утворюють j-й стовпець матриці C $(j = 1, \ldots, n)$.

Оскільки матриці B та C мають максимально можливий ранг r, то квадратні матриці B^*B і CC^*є невиродженими:

$$|B^*B| \neq 0, \ \ |CC^*| \neq 0. \tag{1.2}$$

Дійсно, нехай стовпець x – довільне рішення рівняння

$$B^*Bx = 0. \tag{1.3}$$

Помножимо це рівняння зліва на рядок x^*. Тоді $x^*B^*x = (Bx)^*Bx = 0$. Звідси витікає $Bx = 0$ і (оскільки Bx – лінійна комбінація лінійно-незалежних стовпців матриці) $x = 0$. З того, що рівняння (1.3) має тільки нульовий розв'язок $x = 0$, випливає, що $|B^*B| \neq 0$. Аналогічно встановлюється друга нерівність (1.2). Розкладання (1.1) будемо називати скелетним розкладом матриці A.

1.2 Існування та єдиність псевдооберненої матриці

Розглянемо матричне рівняння [12]:

$$AXA = A. \tag{1.4}$$

Якщо A – невироджена квадратна матриця, то це рівняння має єдине рішення $X = A^{-1}$. Якщо A – довільна прямокутна $(m \times n)$-матриця, то шукане рішення X має розміри $(n \times m)$, але не визначається однозначно. В загальному випадку рівняння (1.4) має незліченну безліч рішень. Нижче буде показано, що серед цих рішень є тільки одне, що володіє тією властивістю, що його рядки і стовпці є лінійними комбінаціями відповідно рядків і стовпців спряженої матриці A^*. Саме це рішення ми будемо називати псевдооберненою матрицею для A і позначати через A^+.

Означення 1. Матриця A^+ розміру $(n \times m)$ називається псевдооберненою до $(m \times n)$ – матриці A, якщо виконуються рівності

$$AA^*A = A, \tag{1.5}$$

$$A^* = UA^* = VA^*, \tag{1.6}$$

де U та V – деякі матриці.

Доведемо спочатку, що для даної матриці A не може існувати двох різних псевдообернених матриць ${A_1}^+$ та ${A_2}^+$. Дійсно, з рівностей

$$A{A_1}^+A = A{A_2}^+A = A,$$
$${A_1}^+ = U_1A^* = A^*V_1,$$
$${A_2}^+ = U_2A^* = A^*V_2,$$

вважаючи

$$D = {A_2}^+ - {A_1}^+,$$
$$U = U_2 - U_1,$$
$$V = V_2 - V_1,$$

знайдемо

$$ADA = 0, \;\; D = UA^+ = A^*V.$$

Звідси

$$(DA)^*DA = A^*D^*DA = A^*V^*ADA = 0,$$

а отже

$$DA = 0.$$

Але тоді

$$DD^* = DAU^* = 0,$$
$$D = {A_2}^+ - {A_1}^+ = 0.$$

Для того, щоб встановити існування матриці A^+, ми скористаємося скелетним розкладанням (1.1) і будемо шукати спочатку псевдообернені матриці B^+ , C^+. Оскільки за визначенням повинні мати місце рівності

$$BB^+B = B,\ \ B^+ = \widehat{U}B^*, \tag{1.7}$$

де $\widehat{U}$ – деяка матриця, тому

$$B\widehat{U}B^*B = B.$$

Помноживши зліва на B^* та помітивши, що B^*B – невироджена квадратна матриця, знайдемо

$$\widehat{U} = (B^*B)^{-1}.$$

Але тоді друга з рівностей (1.7) дає шуканий вираз для B^+:

$$B^+ = (B^*B)^{-1}B^*. \tag{1.8}$$

Абсолютно аналогічно знайдемо

$$C^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}. \tag{1.9}$$

Покажемо тепер, що матриця

$$A^{+} = C^{+}B^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}, \tag{1.10}$$

задовольняє умовам (1.5), (1.6) і, отже, є псевдооберненою матрицею для A. Насправді,

$$AA^{+}A = BCC^{*}(CC^{*})^{-1}VB^{*}BC = BC = A.$$

З іншого боку, з рівностей (1.8), (1.10) з урахуванням рівності $A^{*} = C^{*}B^{*}$, вважаючи $K = (CC^{*})^{-1}(BB^{*})^{-1}$, знаходимо

$$A^{+} = C^{*}KB^{*} = K(CC^{*})^{-1}CC^{*}B^{*} = UC^{*}B^{*} = UA^{*},$$
$$A^{+} = C^{*}KB^{*} = C^{*}B^{*}B(B^{*}B)^{-1}KB^{*} = C^{*}B^{*}V = A^{*}V,$$

де

$$U = C^{*}K(CC^{*})^{-1}C, \;\; V = B(B^{*}V)^{-1}KB^{*}.$$

Таким чином, доведено, що для довільної квадратної матриці A існує одна і тільки одна псевдообернена матриця A^{+}, яка визначається формулою (1.10), де B і C – співмножники в скелетному розкладанні $A = BC$ матриці A. З самого визначення псевдооберненої матриці безпосередньо випливає, що у випадку квадратної невиродженої матриці A, псевдообернена матриця A^{+} збігається із зворотньою A^{-1}.

1.3 Властивості псевдооберненої матриці

Відзначимо наступні властивості псевдооберненої матриці [12]:

а) $(A^*)^+ = \left(A^+\right)^*$;

б) $\left(A^+\right)^+ = A$;

в) $(AA^+)^* = AA^+,\ \ (AA^+)^2 = AA^+$;

г) $(A^+A)^* = A^+A,\ \ (A^+A)^2 = A^+A$.

Перша властивість означає, що операції переходу до спряженої і до псевдооберненої матриці перестановочні між собою. Рівність б) виражає собою взаємність поняття псевдооберненої матриці, так як, відповідно до б), псевдооберненою матрицею для A^+ є вихідна матриця A. Відповідно до рівностей в) і г) матриці $AA^+,\ A^+A$ є ермітові та інволюторні (квадрат кожної з цих матриць дорівнює самій матриці).

Для виведення рівності а) скористаємося скелетним розкладанням (1.1): $A = BC$. Тоді рівність $A^* = C^*B^*$ дає скелетне розкладання матриці A^*. Тому, замінюючи у формулі (1.10) матриці B на C^*, а матрицю C на B^*, отримаємо

$$(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = [C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*]^* = (A^+)^*.$$

Рівності $A^+ = C^+B^+, B^+ = (B^*B)^{-1}B^*, C^+ = C^*(CC^*)^{-1}$ є скелетними розкладаннями. Отже,

$$(A^+)^+ = (B^+)^+(C^+)^+ = (B^*)^+B^*BCC^*(C^*)^+.$$

Використовуючи властивість а), а також вирази для B^+ та C^+, знайдемо

$$(A^+)^+ = B(B^*B)^{-1}B^*BCC^*(CC^*)^{-1}C = BC = A.$$

Справедливість рівностей в) і г) перевіряється безпосередньо шляхом підстановки в ці рівності замість A^+ відповідного виразу з формули (1.10).

Зауважимо, що в загальному випадку, коли розкладання $A = BC$ не є скелетним, не завжди має місце рівність $A^+ = C^+B^+$. Так, наприклад,

$$A = \|1\| = \|0 \quad 1\| \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| = BC.$$

Тут

$$A^+ = A^{-1} = \|1\|,$$
$$B^+ = \|0 \quad 1\|^+ = (\|1\| \cdot \|0 \quad 1\|)^+ = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| \|1\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|,$$
$$C^+ = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\|^+ = \left(\left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| \cdot \|1\| \right)^+ = \|1\| \cdot \|2\|^{-1} \|1 \quad 1\| = \left\| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\|.$$

Тому

$$C^+B^+ = \left\| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\| \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \frac{1}{2} \right\| \neq A^+.$$

1.4 Найкраще наближення розв’язку (метод найменших квадратів)

Розглянемо довільну систему лінійних рівнянь [5]:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n = y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n = y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{matrix} \qquad (1.11)$$

або в матричній формі

$$Ax = y. \tag{1.12}$$

Тут $y_1, y_2, \dots \dots \dots, y_m$ – задані числа, а $x_1, x_2, \dots \dots \dots, x_n$ – шукані. У загальному випадку система (1.11) може бути і несумісною. Стовпець

$$x^0 = (x_1{}^0, x_2{}^0, \dots \dots \dots, x_n{}^0) \tag{1.13}$$

називається найкращим наближеним розв’язком системи (1.11), якщо при значеннях $x_1 = x_1{}^0,\ x_2 = x_2{}^0, \dots \dots \dots,\ x_n = x_n{}^0$ «квадратичне відхилення»

$$|y - Ax|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left| y_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right|^2 \tag{1.14}$$

досягає свого найменшого значення і серед всіх стовпців x, для яких це відхилення має мінімальне значення, стовпець x^0 має найменшу "довжину", тобто для цього стовпця величина

$$|x|^2 = x^* x = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \tag{1.15}$$

має найменше значення.

Покажемо, що система (1.11) завжди має один і тільки один найкращий наближений розв'язок і цей наближений розв'язок визначається за формулою

$$x^0 = A^+ y, \tag{1.16}$$

де A^+– псевдообернена матриця для матриці А.

Для цього розглянемо довільний стовпець x і покладемо

$$y - Ax = u + v,$$

де

$$u = y - Ax^0 = y - AA^+y,$$
$$v = A(x^0 - x). \tag{1.17}$$

Тоді

$$|y - Ax|^2 = (y - Ax)^*(y - Ax) = (u + v)^*(u + v) =$$
$$= u^*u + v^*u + u^*v + v^*v. \tag{1.18}$$

Але

$$v^*u = (x^0 - x)^*A^*(y - AA^+y) = (x^0 - x)^*(A^* - A^*AA^+)y. \tag{1.19}$$

Виходячи з розкладання (1.1) і формули (1.10) знайдемо

$$A^*AA^+ = C^*B^*BCC^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = C^*B^* = A^*.$$

Тому, із рівності (1.19) випливає

$$v^*u = 0, \tag{1.20}$$

але тоді і

$$u^*v = (v^*u)^* = 0. \tag{1.21}$$

Тому з рівності (1.18) знаходимо

$$|y - Ax|^2 = |u|^2 + |v|^2 = |y - Ax^0|^2 + |A(x^0 - x)|^2, \tag{1.22}$$

і, отже, для будь-якого стовпця x

$$|y - Ax| \geq |y - Ax^0|. \qquad (1.23)$$

Нехай тепер

$$|y - Ax| = |y - Ax^0|,$$

тоді, згідно рівності (1.22),

$$Az = 0, \qquad (1.24)$$

де

$$z = x - x_0.$$

З іншого боку,

$$|x|^2 = (x^0 + z)^*(x^0 + z) = |x^0|^2 + |z|^2 + (x^0)^*z + z^*x^0. \qquad (1.25)$$

Згадуючи, що $A^+ = A^*V$, отримаємо

$$(x^0)^*z = (A^+y)^*z = (A^*Vy)^*z = y^*V^*Az = 0. \qquad (1.26)$$

Але тоді

$$z^*x^0 = (x^0)^*z)^* = 0.$$

Тому з рівності (1.25) знаходимо

$$|x|^2 = |x^0|^2 + |z|^2,$$

а, отже,

$$|x|^2 \geq |x^0|^2,$$

причому знак $=$ має місце тільки при $z = 0$, тобто коли $x = x^0$, де $x^0 = A^+y$.

1.5 Метод Гревиля послідовного знаходження псевдооберненої матриці

Метод Гревиля послідовного знаходження псевдооберненої матриці не вимагає обчислення визначників [5]. Також він може бути застосований для обчислення оберненої матриці A^{-1} $(\det A \neq 0)$.

Метод Гревиля послідовного знаходження псевдооберненої матриці полягає в наступному [5]. Нехай a_k – k-й стовпець $m \times n$-матриці A, $A_k(a_1, \dots \dots \dots, a_k)$ – матриця, утворена першими k стовпями матриці А, b_k – останній рядок в матриці ${A_k}^+(k = 1, \dots \dots \dots, n,\ A_1 = a_1, A_n = A)$. Тоді

$$ {A_1}^+ = {a_1}^+ = \frac{{a_1}^*}{{a_1}^* a_1}, \tag{1.27}$$

і для $k > 1$ мають місце рекурентні формули

$$A_k^+ = \begin{pmatrix} B_k \\ b_k \end{pmatrix},$$

$$B_k = {A_{k-1}}^+ - d_k b_k,$$

$$d_k = {A_{k-1}}^+ a_k. \tag{1.28}$$

При цьому, якщо $c_k = a_k - A_{k-1} d_k \neq 0,$ то

$$b_k = {c_k}^{+} = (a_k - A_{k-1}d_k)^{+}; \tag{1.29}$$

якщо ж $c_k = 0$, тобто $a_k = A_{k-1}d_k$, то

$$b_k = (1 + {d_k}^{*}d_k)^{-1}{d_k}^{*}{A_{k-1}}^{+}. \tag{1.30}$$

Матриця A_k^{+}, побудована за цими формулами, є псевдооберненою до матриці A_k.

2 МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ А.М. ТИХОНОВА

2.1 Метод регуляризації

У основі побудови стійких методів розв’язку некоректних задач лежить поняття регуляризуючого алгоритму [8] і зв’язаного з ним поняття регуляризованого сімейства розв’язків [9], введеного А. М. Тихоновим [17]. Погано обумовлені системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) слід розглядати як некоректно поставлені задачі і при їх наближеному розв’язку необхідно застосовувати ідеї регуляризації.

Наведемо відомі факти з [8, 9]. Умовимося розрізняти точні дані – пару $\{A, b\}$, котрі формують задачу

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}a_2 + \dots + a_{1n}a_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\ (m < n, m > n, m = n), \end{gathered} \tag{2.1}$$

і нам невідомі, і наближені дані $\{A_h, b_\delta\}$, $\|A_h - A\| \le h$, $\|b_\delta - b\| \le \delta$ з рівнем похибок h, δ, якими ми володіємо. Суть регуляризованого методу наближеного розв’язку стосується побудови послідовності векторів $x_{h,\delta}$, яка збігається до розв’язку або псевдорозв’язку рівняння (2.1) при $\delta \vee h \to 0$. За наближений розв’язок $x_{h,\delta}$ не можна, взагалі кажучи, брати точний розв’язок або квазірозв’язок рівняння з індивідуальними даними

$$A_h \cdot x = b_\delta. \tag{2.2}$$

Нехай в нашому розпорядженні є спосіб, який по парі $\{A_h, b_\delta\}$ і додатному параметру α однозначно будує вектор $x^\alpha(A_h; b_\delta)$. Якщо існує залежність параметра $\alpha(\delta, h)$ від похибок h, δ вихідних даних така, що

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ h\to 0}} \left\| x^{\alpha(\delta,h)}(A_h, b_\delta) - \tilde{x} \right\| = 0\,, \tag{2.3}$$

тоді множина $\left\{x^{\alpha(\delta,h)}(A_h; b_\delta)\right\}$ називається регуляризованим сімейством наближених розв'язків, а сам спосіб побудови $x^\alpha(A_h; b_\delta)$ – регуляризуючим алгоритмом для задачі (2.1). Тут вектор $\tilde{x}$ – розв'язок, нормальний розв'язок або псевдорозв'язок системи (2.1) залежно від того, чи розв'язується ця система однозначно, чи має множину розв'язків чи не має.

Співвідношення (2.3) засвідчує, що наближений розв'язок $x^\alpha(A_h; b_\delta)$ тим краще апроксимує точний розв'язок $\tilde{x}$, чим менша похибка вихідних даних δ, h. Таким чином, регуляризуючий алгоритм дає теоретичну базу для конструювання стійкого до збурень вихідних даних наближеного розв'язку системи (2.1) загального виду, включаючи погано обумовлені системи.

Важливо розуміти наступну обставину. Якщо A^{-1} існує, тобто A – не вироджена матриця, то для достатньо малих h A_h^{-1} теж існує і розв'язок $x_{h,\delta}$ рівняння (2.2) теоретично буде збігатися до розв'язку рівняння (2.1) при $\delta, h \to 0$. Однак якщо A – погано обумовлена матриця, то величина похибки $\left\|\tilde{x} - x_{\delta,h}\right\|$, навіть при малих δ, h, може бути недопустимо великою і задачу слід вважати практично нестійкою (некоректною). Метод регуляризації саме і направлений на те, щоб зменшити вплив похибок і одержати практично стійкий наближений розв'язок в цих несприятливих обставинах.

Тепер перейдемо до опису конкретних процедур побудови регуляризованих наближених розв'язків $x^\alpha(A_h; b_\delta)$. Далі для скорочення запису будемо опускати залежність $x^{\alpha(\delta,h)}(A_h; b_\delta)$ від $(A_h; b_\delta)$ і записувати просто $x^{\alpha(\delta,h)}$.

Розглянемо спочатку частинний випадок – схему М. М. Лаврент’єва [5], коли A – симетрична додатня напіввизначена матриця, для якої система (2.1) при заданому векторі b може бути розв’язана.

Перейдемо від (2.1) до регуляризованої системи

$$(A + \alpha E)x^{\alpha} = b + \alpha x^{0}, \tag{2.4}$$

де α – додатній параметр, E – одинична матриця, x^0 – пробний розв’язок, тобто деяке наближення до шуканого розв’язку.

При зроблених застереженнях СЛАР (2.4) має єдиний розв’язок x^{α}, який збігається при $\alpha \to 0$ до нормального розв’язку $\tilde{x}$.

Твердження 2.1 [9] Нехай $\{A_h, b_\delta\}$, $\|A_h - A\| \le h$, $\|b_\delta - b\| \le \delta$ – наближені дані задачі і A_h – симетрична додатньо напіввизначена матриця. Тоді СЛАР

$$(A_h + \alpha E)x^{\alpha} = b_\delta + \alpha x^{0} \tag{2.5}$$

однозначно розв’язана і при зв’язку параметра α з похибками δ, h такими, що $\alpha(\delta, h) \to 0$, $\frac{h+\delta}{\alpha(\delta,h)} \to 0$, коли $\delta \to 0$, $h \to 0$, тобто $x^{\alpha(\delta,h)}$ збігається до нормального розв’язку $\tilde{x}$ рівняння (2.1). Це і є розв’язок, який найменше ухиляється від вектора x^0.

Таким чином, згідно з визначенням, даним вище, розв'язки СЛАР (2.5) $\left\{x^{\alpha(\delta,h)}\right\}$ утворюють регуляризоване сімейство наближених розв’язків для системи (2.1); причому, вибір параметра за формулою $\alpha = \sqrt[p]{\delta + h}$ $(p > 1)$ задовольняють необхідним вимогам, оскільки $\alpha = \sqrt[p]{\delta + h} \to 0$,

$$\frac{\delta+h}{\sqrt[p]{\delta+h}} = (\delta + h)^{1-\frac{1}{p}}, \text{ коли } \delta, h \to 0.$$

Зауваження 2.1 [9] Нехай A – додатньо напіввизначена вироджена матриця і $\|A\| = 1$. Коли $\mu(A) = \infty$, в той час $\mu(A + \alpha E) \leq \frac{1+\alpha}{\alpha}$. З цієї причини при розумному виборі параметра α можна досягти гарної обумовленості систем (2.4), (2.5) і задовільної апроксимації $x^\alpha \approx \tilde{x}$, не зважаючи на те, що ці вимоги мають протиріччя.

Роль параметра регуляризації α добре видно, якщо записати розв'язок системи (2.4) (при $x^0 = 0$) у вигляді

$$x^\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{\lambda_i + \alpha} \cdot u_i,$$

де λ_i – власні значення $(\lambda_i \geq 0)$, а u_i ортонормовані власні вектори матриці A.

Це зображення показує, що при малих λ_i додавання додатного параметра суттєво збільшує знаменник і тим самим послаблює вплив можливих похибок у відповідних компонентах b_i $\left(\widetilde{b_i} = b_i + \Delta b_i\right)$. Одночасно для $\lambda_i \geq 0$ вплив малого параметра α незначне.

Тепер відмовимося від вимоги симетричності і додатності матриці A. Нехай матриця B така, що для деякого α_0 $A + \alpha_0 B$ є не виродженою матрицею і, значить, існує її обернена матриця. Тоді можлива регуляризації в наступній формі:

$$(A + \alpha B)x^\alpha = b, \tag{2.6}$$

де параметр α довільного знака і $|\alpha| \leq |\alpha_0|$.

Справедливо наступне.

Зауваження 2.2 [9]. Нехай $\|(A + \alpha B)^{-1} A\| \leq c < \infty$ (при $\alpha \to 0$), $\|A_h - -A\| \leq h$, $\left\|B_\mu - B\right\| \leq \mu$, $\|b_\delta - b\| \leq \delta \|b\|$.

Тоді при достатньо малих h, μ, δ СЛАР

$$\left(A_h + \alpha B_\mu\right) x^\alpha = b_\delta \tag{2.7}$$

має єдиний розв'язок x^α і справедлива оцінка похибки

$$\|x^\alpha - \tilde{x}_B\| \le c \cdot \frac{|\alpha| + \mu + \delta + h}{|\alpha|}, \tag{2.8}$$

де $\tilde{x}_B$ – розв'язок системи (2.1), що задовольняє умові

$$\|B\tilde{x}\| = \min\{\|Bx\| : x \in \bar{X}\}.$$

Із оцінки (2.8) одразу випливає, що якщо $\alpha(\delta, h, \mu) \to 0, \frac{\delta+h}{|\,\alpha(\delta,h,\mu)|} \to 0$ при $\delta, h, \mu \to 0$, має збіжність $\lim\limits_{\delta,h,\mu\to 0} \|x^\alpha - \tilde{x}_B\| = 0.$

Найбільш важливим моментом в описаній регуляризації є підбір матриці B, для якої $A + \alpha_0 B$ не вироджена і $\|(A + \alpha B)^{-1} A\| < \infty$. В роботі [6] можна знайти деякі способи побудови матриць з такою властивістю.

Дослідимо, врешті, загальну ситуацію, коли система (2.1), взагалі кажучи, нерозв’язана. В цьому випадку шуканим є псевдорозв’язок. Розв’язується задача стійкої апроксимації цього псевдорозв’язку в умовах задання вхідних даних з похибкою. Псевдорозв’язок $\tilde{x}$ нестійкий до збурень елементів матриці, тому необхідно використати принцип регуляризації. В якості регуляризованого наближення розв'язку приймемо вектор x^α, що задовольняє СЛАР

$$(A_h^* A_h + \alpha E) x^\alpha = A_h^* b_\delta + \alpha x^0. \tag{2.9}$$

Твердження 2.2 [9]. Хай $\|A_h - A\| \le h$, $\|b_\delta - b\| \le \delta$, $\alpha > 0$. Тоді СЛАР (2.9) однозначно розв’язана і справедлива оцінка

$$\|\tilde{x} - x^{\alpha}\| \le c_1\alpha + \frac{h}{\alpha}(\|A\tilde{x} - b\| + 2c_2^2\alpha^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(c_3 h + \delta), \tag{2.10}$$

де c_i $(i = 1,2,3)$ константи, які залежать від норми $\|\tilde{x}\|$ псевдорозв'язку.

Наслідок 2.1 Нехай δ, h величини порядку ε, причому, ε достатньо мале число. Якщо точне рівняння (2.1) має розв'язок, (тобто $\|A\tilde{x} - b\| = 0$), тоді права частина оцінки (2.10) за характером залежності від α та ε, є функція вигляду

$$\varphi(\alpha) = \alpha + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha}}. \tag{2.11}$$

При $\alpha = \varepsilon^{\frac{2}{3}}$ вона набуває значення порядку $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$. Якщо СЛАР (2.1) нерозв'язна ($\|A\tilde{x} - b\| \ne 0$), то права частина нерівності (2.10) є функція вигляду

$$\psi(\alpha) = \alpha + \frac{\varepsilon}{\alpha} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha}}. \tag{2.12}$$

При $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$ вона набуває значення порядку $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Ці порядки одержуються за допомогою мінімізації функцій $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ (тобто є розв'язками рівнянь $\varphi'(\alpha) = 0, \psi'(\alpha) = 0$).

Таким чином, якщо вхідні дані рівняння (2.1) задані з точністю порядку ε, то псевдорозв'язок може бути визначений з точністю порядку $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$, у випадку розв'язності точного рівняння, і з точністю порядку $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ – в оберненому випадку. Помітимо, однак, що більш складний спосіб вибору параметра α дозволяє апроксимувати псевдорозв'язок з точністю порядку апроксимації $h + \delta$.

Задача (2.9) еквівалентна задачі на мінімум [8, 9]

$$\min\{\|A_h x - b_\delta\|^2 + \alpha\|x - x^0\|^2 : x \in R^n\}, \tag{2.13}$$

де L – не вироджена матриця розмірності $n \times n$, вибором якої можна розумно розпорядитися, щоб підвищити точність регуляризованого розв'язку.

При $\alpha = 0$ (2.13) переходить в метод найменших квадратів (МНК), який не стійкий відносно збурень матриці. Перехід від МНК до його регуляризованого аналога (2.13) демонструє стійкість наближеного розв'язку.

2.2 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Дослідимо задачу про знаходження існування і побудови розв'язків системи, розглянуту у роботах [8, 9]:

$$Ax = b$$

з постійною $m \times n$ матрицею A, невідомим вектором $x \in R^n$ та даним вектором $b \in R^n$. Умови існування цієї системи визначає наступна теорема.

Теорема 2.1 (Кронеккера-Капеллі) [9]. Система лінійних рівнянь

$$Ax = b \tag{2.14}$$

сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг $m \times n$ – матриці A співпаде з рангом розширеної $n \times (n+1)$ – матриці $[A, b]$.

Якщо лінійна алгебраїчна система задовольняє умовам теореми Кронеккера-Капеллі [4], то для побудови її розв'язку можна скористатись різними модифікаціями методу Гауса [5] та звичайне перетворення. Лінійні алгебраїчні системи з квадратною матрицею A будемо називати фредгольмовими, так як для таких систем справедлива теорема.

Теорема 2.2 (Альтернатива Фредгольма) [9]. Або неоднорідна система (2.14) однозначно розв'язна при довільних значеннях правої частини ($b \neq 0$), або однорідна ($b = 0$) частина системи (2.14) має нетривіальні (ненульові розв’язки).

Узагальненням останніх двох теорем є наступне твердження [9].

Теорема 2.3 Алгебраїчна система (2.14) з $m \times n$-матрицею A має розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$B_A \cdot b = 0. \tag{2.15}$$

Якщо умова (2.15) виконується, то розв'язок системи (2.14) має вигляд

$$x = A^+ b + B_A \tilde{x}, \;\; \tilde{x} \in R^n. \tag{2.16}$$

Нехай умова (2.15) не виконується: $B_A \cdot b \neq 0$. При цьому система (2.14) не має розв'язку, але вона завжди має псевдорозв’язок $x^+ \in R^n$, що мінімізує нев’язку

$$|Ax - b| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{n} q_{ik} x_k - b_i \right|^2}$$

в розв'язку системи (2.14) і серед усіх векторів $x \in R^n$, на яких нев’язка $|Ax - b|$ приймає найменше значення, вектор $x^+ \in R^n$ має найменшу довжину

$$|x| = x^* x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Система (2.14) завжди має один і тільки один псевдорозв’язок $x^+ \in R^n$, найкращий (в сенсі найменших квадратів), який визначається за формулою

$x^+ = A^+ b$. При цьому норма нев'язки дорівнює нормі виразу, який входить в ліву частину виразу (2.15)

$$|A^+ x - b| = B_A \cdot b.$$

Не дивлячись на те, що псевдорозв'язок єдиний, розв'язок несумісної системи, найкращий (у сенсі найменших квадратів)

$$x = A^+ b + B_A \tilde{x}, \quad \tilde{x} \in R^n$$

не єдиний. Це пояснюється тим, що нев'язка будь якого з цих розв'язків

$$|A(A^+ b + B_A \tilde{x}) - b| = |B_A \cdot b|$$

така сама, як і для псевдорозв'язку.

3 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ ДО ВИРОДЖЕНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

3.1 Метод регуляризації з параметром σ=0,01

Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases} \tag{3.1}$$

Випишемо матриці A і B, які відповідають алгебраїчній системі (3.1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо визначник матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \left\| \begin{matrix} II - I \times 0{,}5 \\ III - I \\ IV + I \times 0{,}5 \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 2{,}5 & -1{,}5 & -9 \\ 0 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 0{,}5 & -1{,}5 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} III + II \times 0{,}8 \\ IV - II \times 0{,}2 \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 2{,}5 & -1{,}5 & -9 \\ 0 & 0 & 1{,}8 & -13{,}2 \\ 0 & 0 & -1{,}2 & 8{,}8 \end{vmatrix} = \left\| IV + III \times \frac{2}{3} \right\| =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 2{,}5 & -1{,}5 & -9 \\ 0 & 0 & 1{,}8 & -13{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 2{,}5 \times 1{,}8 \times 0 = 0.$$

Щоб визначити сумісна чи несумісна система (3.1), знайдемо ранг матриці A, а потім ранг розширеної матриці системи. Для цього виконаємо такі перетворення:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \|I/2\| = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \left\| \begin{matrix} II - I \\ III - I \times 2 \\ IV + I \end{matrix} \right\| =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 \\ 0 & 2{,}5 & -1{,}5 & -9 \\ 0 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 0{,}5 & -1{,}5 & 7 \end{pmatrix} = \|II/2{,}5\| = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 \\ 0 & 1 & -0{,}6 & -3{,}6 \\ 0 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 0{,}5 & -1{,}5 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} III + II \times 2 \\ IV - II \times 0{,}2 \end{matrix} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 \\ 0 & 1 & -0{,}6 & -3{,}6 \\ 0 & 0 & 1{,}8 & -13{,}2 \\ 0 & 0 & -1{,}2 & 8{,}8 \end{pmatrix} = \|III/1{,}8\| =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 \\ 0 & 1 & -0{,}6 & -3{,}6 \\ 0 & 0 & 1 & -22/3 \\ 0 & 0 & -1{,}2 & 8{,}8 \end{pmatrix} = \|IV + III \times 1{,}2\| =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 \\ 0 & 1 & -0{,}6 & -3{,}6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{22}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що ранг матриці A дорівнює 3:

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 \\ 0 & 1 & -0{,}6 & -3{,}6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{22}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Отже система несумісна.

Знайдемо ранг розширеної матриці системи (3.1):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \|I/2\| = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 1 & 2 & -1 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} II - I \\ III - I \times 2 \\ IV + I \end{matrix} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 0 & 2{,}5 & -1{,}5 & -9 & 3{,}5 \\ 0 & -2 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 0{,}5 & -1{,}5 & 7 & 3{,}5 \end{pmatrix} = \|II/2{,}5\| =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 0 & 1 & -0{,}6 & -3{,}6 & 1{,}4 \\ 0 & -2 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 0{,}5 & -1{,}5 & 7 & 3{,}5 \end{pmatrix} = \left\| \begin{matrix} III + II \times 2 \\ IV - II \times 0{,}5 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 0 & 1 & -0{,}6 & -3{,}6 & 1{,}4 \\ 0 & 0 & 1{,}8 & -13{,}2 & 6{,}8 \\ 0 & 0 & -1{,}2 & 8{,}8 & 2{,}8 \end{pmatrix} = \|III/1{,}8\| =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 0 & 1 & -0{,}6 & -3{,}6 & 1{,}4 \\ 0 & 0 & 1 & -22/3 & 34/9 \\ 0 & 0 & -1{,}2 & 8{,}8 & 2{,}8 \end{pmatrix} = \|IV + III \times 1{,}2\| =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 0 & 1 & -0{,}6 & -3{,}6 & 1{,}4 \\ 0 & 0 & 1 & -22/3 & 34/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 22/3 \end{pmatrix} = \left\| IV / \frac{22}{3} \right\| =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 0 & 1 & -0{,}6 & -3{,}6 & 1{,}4 \\ 0 & 0 & 1 & -22/3 & 34/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що ранг розширеної матриці системи дорівнює 4:

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 0 & 1 & -0{,}6 & -3{,}6 & 1{,}4 \\ 0 & 0 & 1 & -22/3 & 34/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Таким чином, система (3.1) несумісна: $\operatorname{rang}(A) \neq \operatorname{rang}(AB)$. Розв'язку в звичайному сенсі не існує, тому знайдемо псевдорозв'язок.

Далі будемо вважати систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 8{,}01x_4 = -2{,}99; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 = 2; \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1; \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

наближеною так, що $\|b_\delta - b\| = 0{,}01 \Rightarrow \delta = 0{,}01$;

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8{,}01 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, b_\delta = \begin{pmatrix} -2{,}99 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Застосуємо метод регуляризації. Виберемо в ролі

$$\alpha = \sqrt{\delta} = \sqrt{h} = \sqrt{0{,}01} = 0{,}1;$$

$$(A_h^* \cdot A_h + \alpha E) \cdot x^\alpha = A_h^* \cdot b_\delta;$$

$$(A_h^* \cdot A_h + \alpha E) = \begin{pmatrix} 10{,}1 & -7 & 11 & 12{,}02 \\ -7 & 15{,}1 & -17 & -21{,}01 \\ 11 & -17 & 22{,}1 & 15{,}01 \\ 12{,}02 & -21{,}01 & 15{,}01 & 102{,}2601 \end{pmatrix};$$

$$A_h^* \cdot b_\delta = \begin{pmatrix} -6{,}98 \\ 8{,}99 \\ -10{,}99 \\ -16{,}9499 \end{pmatrix}.$$

Одержимо систему:

$$\begin{cases} 10{,}1x_1 - 7x_2 + 11x_3 + 12{,}02x_4 = -6{,}98; \\ -7x_1 + 15{,}1x_2 - 17x_3 - 21{,}01x_4 = 8{,}99; \\ 11x_1 - 17x_2 + 22{,}1x_3 + 15{,}01x_4 = -10{,}99; \\ 12{,}02x_1 - 21{,}01x_2 + 15{,}01x_3 + 102{,}2601x_4 = -16{,}9499. \end{cases}$$

Розв'яжемо її за формулами Крамера:

$$\det(A_h^* \cdot A_h + \alpha E) = \begin{vmatrix} 10{,}1 & -7 & 11 & 12{,}02 \\ -7 & 15{,}1 & -17 & -21{,}01 \\ 11 & -17 & 22{,}1 & 15{,}01 \\ 12{,}02 & -21{,}01 & 15{,}01 & 102{,}2601 \end{vmatrix} =$$

$$= 1830{,}354816 = L,$$

$$l_1 = \begin{vmatrix} -6{,}98 & -7 & 11 & 12{,}02 \\ 8{,}99 & 15{,}1 & -17 & -21{,}01 \\ -10{,}99 & -17 & 22{,}1 & 15{,}01 \\ -16{,}9499 & -21{,}01 & 15{,}01 & 102{,}2601 \end{vmatrix} = -502{,}046127,$$

$$l_2 = \begin{vmatrix} 10{,}1 & -6{,}98 & 11 & 12{,}02 \\ -7 & 8{,}99 & -17 & -21{,}01 \\ 11 & -10{,}99 & 22{,}1 & 15{,}01 \\ 12{,}02 & -16{,}9499 & 15{,}01 & 102{,}2601 \end{vmatrix} = 157{,}240120,$$

$$l_3 = \begin{vmatrix} 10{,}1 & -7 & -6{,}98 & 12{,}02 \\ -7 & 15{,}1 & 8{,}99 & -21{,}01 \\ 11 & -17 & -10{,}99 & 15{,}01 \\ 12{,}02 & -21{,}01 & -16{,}9499 & 102{,}2601 \end{vmatrix} = -439{,}109230,$$

$$l_4 = \begin{vmatrix} 10{,}1 & -7 & 11 & -6{,}98 \\ -7 & 15{,}1 & -17 & 8{,}99 \\ 11 & -17 & 22{,}1 & -10{,}99 \\ 12{,}02 & -21{,}01 & 15{,}01 & -16{,}9499 \end{vmatrix} = -147{,}614689.$$

Тоді

$$x_1^{0,1} = \frac{l_1}{L} = \frac{-502{,}046127}{1830{,}354816} = -0{,}2742889644,$$

$$x_2^{0,1} = \frac{l_2}{L} = \frac{157{,}240120}{1830{,}354816} = 0{,}08590690648,$$

$$x_3^{0,1} = \frac{l_3}{L} = \frac{-439{,}109230}{1830{,}354816} = -0{,}2399038843,$$

$$x_4^{0,1} = \frac{l_4}{L} = \frac{-147{,}614689}{1830{,}354816} = -0{,}08064812773.$$

Отримані значення $x_1^{0,1}, x_2^{0,1}, x_3^{0,1}, x_4^{0,1}$ і є псевдорозв’язком системи.

3.2 Метод регуляризації з параметром σ=0,0001

Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases} \tag{3.2}$$

Випишемо матриці A і B, які відповідають алгебраїчній системі (3.2):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо визначник матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \left\| \begin{matrix} II - I \times 0{,}5 \\ III - I \\ IV + I \times 0{,}5 \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 2{,}5 & -1{,}5 & -9 \\ 0 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 0{,}5 & -1{,}5 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} III + II \times 0{,}8 \\ IV - II \times 0{,}2 \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 2{,}5 & -1{,}5 & -9 \\ 0 & 0 & 1{,}8 & -13{,}2 \\ 0 & 0 & -1{,}2 & 8{,}8 \end{vmatrix} = \left\| IV + III \times \frac{2}{3} \right\| =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 2{,}5 & -1{,}5 & -9 \\ 0 & 0 & 1{,}8 & -13{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 2{,}5 \times 1{,}8 \times 0 = 0.$$

Щоб визначити сумісна чи несумісна система (3.2), знайдемо ранг матриці A, а потім ранг розширеної матриці системи. Для цього виконаємо такі перетворення:

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 \\ 0 & 1 & -0{,}6 & -3{,}6 \\ 0 & 0 & 1 & -22/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Отже система несумісна.

Знайдемо ранг розширеної матриці системи (3.2):

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 0 & 1 & -0{,}6 & -3{,}6 & 1{,}4 \\ 0 & 0 & 1 & -22/3 & 34/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Таким чином, система (3.2) несумісна: $\operatorname{rang}(A) \neq \operatorname{rang}(AB)$. Розв'язку в звичайному сенсі не існує, тому знайдемо псевдорозв'язок.

Далі будемо вважати систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 8{,}0001x_4 = -2{,}9999; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 = 2; \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1; \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

наближеною так, що $\|b_\delta - b\| = 0{,}0001 \Rightarrow \delta = 0{,}0001$;

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8{,}0001 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, b_\delta = \begin{pmatrix} -2{,}9999 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Застосуємо метод регуляризації. Виберемо в ролі

$$\alpha = \sqrt{\delta} = \sqrt{h} = \sqrt{0{,}0001} = 0{,}01;$$

$$(A_h^* \cdot A_h + \alpha E) \cdot x^\alpha = A_h^* \cdot b_\delta;$$

$$(A_h^* \cdot A_h + \alpha E) = \begin{pmatrix} 10{,}01 & -7 & 11 & 12{,}0002 \\ -7 & 15{,}01 & -17 & -21{,}0001 \\ 11 & -17 & 22{,}01 & 15{,}0001 \\ 12{,}0002 & -21{,}0001 & 15{,}0001 & 102{,}0116 \end{pmatrix};$$

$$A_h^* \cdot b_\delta = \begin{pmatrix} -6{,}9998 \\ 8{,}9999 \\ -10{,}9999 \\ -16{,}99949999 \end{pmatrix}.$$

Одержимо систему:

$$\begin{cases} 10{,}01x_1 - 7x_2 + 11x_3 + 12{,}0002x_4 = -6{,}9998; \\ -7x_1 + 15{,}01x_2 - 17x_3 - 21{,}0001x_4 = 8{,}9999; \\ 11x_1 - 17x_2 + 22{,}01x_3 + 15{,}0001x_4 = -10{,}9999; \\ 12{,}0002x_1 - 21{,}0001x_2 + 15{,}0001x_3 + 102{,}0116x_4 = -16{,}99949999. \end{cases}$$

Розв’яжемо її за формулами Крамера:

$$\det(A_h^* \cdot A_h + \alpha E) = \begin{vmatrix} 10,01 & -7 & 11 & 12,0002 \\ -7 & 15,01 & -17 & -21,0001 \\ 11 & -17 & 22,01 & 15,0001 \\ 12,0002 & -21,0001 & 15,0001 & 102,0116 \end{vmatrix} =$$

$$= 178,925572 = L,$$

$$l_1 = \begin{vmatrix} -6,9998 & -7 & 11 & 12,0002 \\ 8,9999 & 15,01 & -17 & -21,0001 \\ -10,9999 & -17 & 22,01 & 15,0001 \\ -16,99949999 & -21,0001 & 15,0001 & 102,0116 \end{vmatrix} = -50,682417,$$

$$l_2 = \begin{vmatrix} 10,01 & -6,9998 & 11 & 12.0002 \\ -7 & 8,9999 & -17 & -21,0001 \\ 11 & -10,9999 & 22,01 & 15,0001 \\ 12,0002 & -16,99949999 & 15,0001 & 102,0116 \end{vmatrix} = 16,404861,$$

$$l_3 = \begin{vmatrix} 10,01 & -7 & -6,9998 & 12,0002 \\ -7 & 15,01 & 8,9999 & -21,0001 \\ 11 & -17 & -10,9999 & 15,0001 \\ 12,0002 & -21,0001 & -16,99949999 & 102,0116 \end{vmatrix} =$$

$$= -41,637873,$$

$$l_4 = \begin{vmatrix} 10,01 & -7 & 11 & -6,9998 \\ -7 & 15,01 & -17 & 8,9999 \\ 11 & -17 & 22,01 & -10,9999 \\ 12,0002 & -21,0001 & 15,0001 & -16,99949999 \end{vmatrix} =$$

$$= -14,3549523.$$

Тоді

$$x_1^{0,01} = \frac{l_1}{L} = \frac{-50,682417}{178,925572} = -0,2832597735,$$

$$x_2^{0,01} = \frac{l_2}{L} = \frac{16,404861}{178,925572} = 0,09168539084,$$

$$x_3^{0,01} = \frac{l_3}{L} = \frac{-41,637873}{178,925572} = -0,2327105764,$$

$$x_4^{0,01} = \frac{l_4}{L} = \frac{-14,3549523}{178,925572} = -0,08022862322.$$

Отримані значення $x_1^{0,01}, x_2^{0,01}, x_3^{0,01}, x_4^{0,01}$ і є псевдорозв’язком системи.

3.3 Метод регуляризації з параметром σ=0,000001

Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases} \tag{3.3}$$

Випишемо матриці A і B, які відповідають алгебраїчній системі (3.3):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо визначник матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \left\| \begin{matrix} II - I \times 0{,}5 \\ III - I \\ IV + I \times 0{,}5 \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 2{,}5 & -1{,}5 & -9 \\ 0 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 0{,}5 & -1{,}5 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} III + II \times 0{,}8 \\ IV - II \times 0{,}2 \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 2{,}5 & -1{,}5 & -9 \\ 0 & 0 & 1{,}8 & -13{,}2 \\ 0 & 0 & -1{,}2 & 8{,}8 \end{vmatrix} = \left\| IV + III \times \frac{2}{3} \right\| =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 2{,}5 & -1{,}5 & -9 \\ 0 & 0 & 1{,}8 & -13{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 2{,}5 \times 1{,}8 \times 0 = 0.$$

Щоб визначити сумісна чи несумісна система (3.3), знайдемо ранг матриці A, а потім ранг розширеної матриці системи. Для цього виконаємо такі перетворення:

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 \\ 0 & 1 & -0{,}6 & -3{,}6 \\ 0 & 0 & 1 & -22/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Отже система несумісна.

Знайдемо ранг розширеної матриці системи (3.3):

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 0 & 1 & -0{,}6 & -3{,}6 & 1{,}4 \\ 0 & 0 & 1 & -22/3 & 34/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Таким чином, система (3.3) несумісна: $\operatorname{rang}(A) \neq \operatorname{rang}(AB)$. Розв'язку в звичайному сенсі не існує, тому знайдемо псевдорозв'язок.

Далі будемо вважати систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 8{,}000001x_4 = -2{,}999999; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 = 2; \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1; \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

наближеною так, що $\|b_\delta - b\| = 0{,}000001 \Rightarrow \delta = 0{,}000001;$

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8{,}000001 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \; b_\delta = \begin{pmatrix} -2{,}999999 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Застосуємо метод регуляризації. Виберемо в ролі

$$\alpha = \sqrt{\delta} = \sqrt{h} = \sqrt{0,000001} = 0,001;$$

$$(A_h^* \cdot A_h + \alpha E) \cdot x^{\alpha} = A_h^* \cdot b_{\delta};$$

$$(A_h^* \cdot A_h + \alpha E) =$$

$$= \begin{pmatrix} 10,001 & -7 & 11 & 12,000002 \\ -7 & 15,001 & -17 & -21,000001 \\ 11 & -17 & 22,001 & 15,000001 \\ 12,000002 & -21,000001 & 15,000001 & 102,001016 \end{pmatrix};$$

$$A_h^* \cdot b_{\delta} = \begin{pmatrix} -6,999998 \\ 8,999999 \\ -10,999999 \\ -16,999995 \end{pmatrix}.$$

Одержимо систему:

$$\begin{cases} 10,001x_1 - 7x_2 + 11x_3 + 12,000002x_4 = -6,999998; \\ -7x_1 + 15,001x_2 - 17x_3 - 21,000001x_4 = 8,999999; \\ 11x_1 - 17x_2 + 22,001x_3 + 15,000001x_4 = -10,999999; \\ 12,000002x_1 - 21,000001x_2 + 15,000001x_3 + 102,001016x_4 = -16,999995. \end{cases}$$

Розв'яжемо її за формулами Крамера:

$$\det(A_h^* \cdot A_h + \alpha E) = \begin{vmatrix} 10,001 & -7 & 11 & 12,000002 \\ -7 & 15,001 & -17 & -21,000001 \\ 11 & -17 & 22,001 & 15,000001 \\ 12,000002 & -21,000001 & 15,000001 & 102,001016 \end{vmatrix} =$$

$$= 17,854288 = L,$$

$$l_1 = \begin{vmatrix} -6,999998 & -7 & 11 & 12,000002 \\ 8,999999 & 15,001 & -17 & -21,000001 \\ -10,999999 & -17 & 22,001 & 15,000001 \\ -16,999995 & -21,000001 & 15,000001 & 102,001016 \end{vmatrix} =$$

$$= -5,069919,$$

$$l_2 = \begin{vmatrix} 10{,}001 & -6{,}999998 & 11 & 12{,}000002 \\ -7 & 8{,}999999 & -17 & -21{,}000001 \\ 11 & -10{,}999999 & 22{,}001 & 15{,}000001 \\ 12{,}000002 & -16{,}999995 & 15{,}000001 & 102{,}001016 \end{vmatrix} =$$

$$= 1{,}649018,$$

$$l_3 = \begin{vmatrix} 10{,}001 & -7 & -6{,}999998 & 12{,}000002 \\ -7 & 15{,}001 & 8{,}999999 & -21{,}000001 \\ 11 & -17 & -10{,}999999 & 15{,}000001 \\ 12{,}000002 & -21{,}000001 & -16{,}999995 & 102{,}001016 \end{vmatrix} =$$

$$= -4{,}142356,$$

$$l_4 = \begin{vmatrix} 10{,}001 & -7 & 11 & -6{,}999998 \\ -7 & 15{,}001 & -17 & 8{,}999999 \\ 11 & -17 & 22{,}001 & -10{,}999999 \\ 12{,}000002 & -21{,}000001 & 15{,}000001 & -16{,}999995 \end{vmatrix} =$$

$$= -1{,}4305589.$$

Тоді

$$x_1^{0,001} = \frac{l_1}{L} = \frac{-5{,}069919}{17{,}854288} = -0{,}2839608614,$$

$$x_2^{0,001} = \frac{l_2}{L} = \frac{1{,}649018}{17{,}854288} = 0{,}09235977374,$$

$$x_3^{0,001} = \frac{l_3}{L} = \frac{-4{,}142356}{17{,}854288} = -0{,}2320090277,$$

$$x_4^{0,001} = \frac{l_4}{L} = \frac{-1{,}4305589}{17{,}854288} = -0{,}08012410800.$$

Отримані значення $x_1^{0,001}$, $x_2^{0,001}$, $x_3^{0,001}$, $x_4^{0,001}$ і є псевдорозв’язком системи.

3.4 Псевдорозв’язок системи

Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases} \tag{3.4}$$

Випишемо матриці A і B, які відповідають алгебраїчній системі (3.4):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо визначник матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \left\| \begin{matrix} II - I \times 0{,}5 \\ III - I \\ IV + I \times 0{,}5 \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 2{,}5 & -1{,}5 & -9 \\ 0 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 0{,}5 & -1{,}5 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} III + II \times 0{,}8 \\ IV - II \times 0{,}2 \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 2{,}5 & -1{,}5 & -9 \\ 0 & 0 & 1{,}8 & -13{,}2 \\ 0 & 0 & -1{,}2 & 8{,}8 \end{vmatrix} = \left\| IV + III \times \frac{2}{3} \right\| =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 2{,}5 & -1{,}5 & -9 \\ 0 & 0 & 1{,}8 & -13{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 2{,}5 \times 1{,}8 \times 0 = 0.$$

Щоб визначити сумісна чи несумісна система (3.4), знайдемо ранг матриці A, а потім ранг розширеної матриці системи. Для цього виконаємо такі перетворення:

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 \\ 0 & 1 & -0{,}6 & -3{,}6 \\ 0 & 0 & 1 & -22/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Отже система несумісна.

Знайдемо ранг розширеної матриці системи (3.1):

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 0 & 1 & -0{,}6 & -3{,}6 & 1{,}4 \\ 0 & 0 & 1 & -22/3 & 34/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Таким чином, система (3.4) несумісна: $\operatorname{rang}(A) \neq \operatorname{rang}(AB)$. Розв'язку в звичайному сенсі не існує, тому знайдемо псевдорозв'язок. Система (3.4) завжди має єдиний псевдорозв'язок (в сенсі найменших квадратів), який визначається формулою $x^+ = A^+B$, де A^+ можна знайти за наступною формулою:

$$A^+ = \lim_{\varepsilon \to 0} A^*(AA^* + \varepsilon I_n)^{-1}, \tag{3.5}$$

де I_n – одинична матриця.

$$AA^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 \\ 8 & -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 70 & -41 & 27 & 19 \\ -41 & 31 & -18 & -12 \\ 27 & -18 & 33 & -7 \\ 19 & -12 & -7 & 15 \end{pmatrix};$$

$$AA^{*}+\varepsilon I_n=\begin{pmatrix} 70 & -41 & 27 & 19 \\ -41 & 31 & -18 & -12 \\ 27 & -18 & 33 & -7 \\ 19 & -12 & -7 & 15 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 70+\varepsilon & -41 & 27 & 19 \\ -41 & 31+\varepsilon & -18 & -12 \\ 27 & -18 & 33+\varepsilon & -7 \\ 19 & -12 & -7 & 15+\varepsilon \end{pmatrix};$$

$$(AA^{*}+\varepsilon I_n)^{-1}=\begin{pmatrix} 70+\varepsilon & -41 & 27 & 19 \\ -41 & 31+\varepsilon & -18 & -12 \\ 27 & -18 & 33+\varepsilon & -7 \\ 19 & -12 & -7 & 15+\varepsilon \end{pmatrix}^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\varepsilon^3+79\varepsilon^2+1466\varepsilon+1190}{\varepsilon(\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850)} & \frac{41\varepsilon^2+1254\varepsilon-1190}{\varepsilon(\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850)} & -\frac{27\varepsilon^2+637\varepsilon+2380}{\varepsilon(\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850)} & -\frac{19\varepsilon^2+193\varepsilon+3570}{\varepsilon(\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850)} \\ \frac{41\varepsilon^2+1254\varepsilon-1190}{\varepsilon(\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850)} & \frac{\varepsilon^3+118\varepsilon^2+2716\varepsilon+1190}{\varepsilon(\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850)} & \frac{18\varepsilon^2+507\varepsilon+2380}{\varepsilon(\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850)} & \frac{12\varepsilon^2+583\varepsilon+3570}{\varepsilon(\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850)} \\ -\frac{27\varepsilon^2+637\varepsilon+2380}{\varepsilon(\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850)} & \frac{18\varepsilon^2+507\varepsilon+2380}{\varepsilon(\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850)} & \frac{\varepsilon^3+116\varepsilon^2+1499\varepsilon+4760}{\varepsilon(\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850)} & \frac{7\varepsilon^2+1436\varepsilon+7140}{\varepsilon(\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850)} \\ -\frac{19\varepsilon^2+913\varepsilon+3570}{\varepsilon(\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850)} & \frac{12\varepsilon^2+538\varepsilon+3570}{\varepsilon(\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850)} & \frac{7\varepsilon^2+1436\varepsilon+7140}{\varepsilon(\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850)} & \frac{\varepsilon^3+134\varepsilon^2+2769\varepsilon+10710}{\varepsilon(\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850)} \end{pmatrix}$$

$$A^{*}(AA^{*}+\varepsilon I_n)^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{2\varepsilon^2+164\varepsilon+3825}{\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850} & \frac{\varepsilon^2+224\varepsilon+5655}{\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850} & \frac{2\varepsilon^2+189\varepsilon+795}{\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850} & -\frac{\varepsilon^2+146\varepsilon+1140}{\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850} \\ -\frac{\varepsilon^2-65\varepsilon-2040}{\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850} & \frac{2\varepsilon^2+153\varepsilon+3240}{\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850} & -\frac{3\varepsilon^2+278\varepsilon+1410}{\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850} & \frac{\varepsilon^2+156\varepsilon+540}{\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850} \\ \frac{\varepsilon^2-32\varepsilon-510}{\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850} & -\frac{\varepsilon^2+29\varepsilon+600}{\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850} & \frac{4\varepsilon^2+405\varepsilon+1980}{\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850} & -\frac{2\varepsilon^2+271\varepsilon+1290}{\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850} \\ \frac{8\varepsilon^2+316\varepsilon+1445}{\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850} & -\frac{5(\varepsilon^2+38\varepsilon+157)}{\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850} & \frac{2\varepsilon^2 53\varepsilon-325}{\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850} & \frac{3(\varepsilon^2+68\varepsilon+320)}{\varepsilon^3+149\varepsilon^2+4225\varepsilon+17850} \end{pmatrix}$$

$$A^{+}=\lim_{\varepsilon\to 0}A^{*}(AA^{*}+\varepsilon I_n)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{14} & \frac{377}{1190} & \frac{53}{1190} & -\frac{38}{595} \\ \frac{4}{35} & \frac{108}{595} & -\frac{47}{595} & \frac{18}{595} \\ -\frac{1}{35} & -\frac{4}{119} & \frac{66}{595} & -\frac{43}{595} \\ \frac{17}{210} & -\frac{157}{3570} & -\frac{13}{714} & \frac{32}{595} \end{pmatrix}.$$

Псевдорозв’язок системи (3.4) має вигляд:

$$x^+ = A^+B = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & \frac{377}{1190} & \frac{53}{1190} & -\frac{38}{595} \\ \frac{4}{35} & \frac{108}{595} & -\frac{47}{595} & \frac{18}{595} \\ -\frac{1}{35} & -\frac{4}{119} & \frac{66}{595} & -\frac{43}{595} \\ \frac{17}{210} & -\frac{157}{3570} & -\frac{13}{714} & \frac{32}{595} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{169}{595} \\ \frac{11}{119} \\ -\frac{138}{595} \\ -\frac{143}{1785} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}2840336134 \\ 0{,}09243697479 \\ -0{,}2319327731 \\ -0{,}08011204482 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx -0{,}2840336134, \\ x_2 \approx 0{,}09243697479, \\ x_3 \approx -0{,}2319327731, \\ x_4 \approx -0{,}08011204482. \end{cases}$$

Таблиця 3.1 – Результати розв’язку при різних параметрах регуляризації

δ \ x_i	$\delta = 0{,}01$	$\delta = 0{,}0001$	$\delta = 0{,}000001$	Псевдорозв’язок системи
x_1	$-0{,}2742889644$	$-0{,}2832597735$	$-0{,}2839608614$	$-0{,}2840336134$
x_2	$0{,}08590690648$	$0{,}09168539084$	$0{,}09235977374$	$0{,}09243697479$
x_3	$-0{,}2399038843$	$-0{,}2327105764$	$-0{,}2320090277$	$-0{,}2319327731$
x_4	$-0{,}08064812773$	$-0{,}08022862322$	$-0{,}08012410800$	$-0{,}08011204482$

ВИСНОВКИ

Робота присвячена застосуванню методу регуляризації Тихонова до вироджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Результат отримується за допомогою різних модифікацій методу Гауса та звичайного перетворення.

У вступі аналізується актуальність обраної тематики.

Перший розділ присвячено псевдооберненю прямокутних матриць. У другому розділі розглядається метод регуляризації А. М. Тихонова; умови, при яких системи мають розв'язки.

Третій розділ присвячено практичному застосуванню теорії поданої в першому та другому розділах. Тут розглянуто некоректно поставлену задачу. Для запропонованої задачі проведено дослідження для різних значень параметра регуляризації δ.

Таким чином, можна зробити висновок, що найточніший результат метод регуляризації А. М. Тихонова для даного типу задач дає при значенні $\delta = 0{,}000001$.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Барабаш О. В., Дзядик С. Ю., Жданова Ю. Д., Омецинська О. Б, Онищенко В. В., Шевченко С. М. Вища математика. Частина 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних. Київ : ДУТ, 2015. 187 с.

2. Безущак О. О., Ганюшкін О. Г., Кочубінська Є. А. Навчальний посібник з лінійної алгебри. Київ : Київський університет, 2019. 224 с.

3. Боднарчук Ю. В., Олійник Б. В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Київ, 2009. 150 с.

4. Булдигін В. В., Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навчальний посібник. Київ : ТВіМС, 2011. 224 с.

5. Гетманцев В. Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування. Київ : Либідь, 2001. 256 с.

6. Михайленко В. В., Добряков Л. Д. Вища математика. Книга 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Підручник. Житомир : ЖДТУ, 2004. 554 с.

7. Осадча Л. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навчальний посібник. Рівне : НУВГП, 2020. 205 с.

8. Охріменко М. Г., Жуковська О. А., Купка О. О. Методи розв'язування некоректно поставлених задач: навчальний посібник. Київ : Центр учбової літератури, 2022. 166 с.

9. Охріменко М. Г., Фартушний І. Д., Кулик А. Б. Некоректно поставлені задачі та методи їх розв'язування: Підручник. Київ : Політехніка, 2016. 225 с.

10. Панасенко О. Б. Лекції з лінійної алгебри: електронний навчальний посібник. Вінниця, 2015. 273 с.

11. Чарін В. С. Лінійна алгебра. Київ : Техніка, 2005. 416 с.

12. Ben-Israel A., Greville T. N. E. Generalized Inverses. Theory and Applications. Second Edition. USA : New York, 2003. 420 p.

13. Brezinski C., Redivo-Zaglia M., Rodriguez G., Seatzu S. Multi-parameter regularization techniques for ill-conditioned linear systems. *Numerische Mathematik*. 2003. Vol. 94, P. 203–228.

14. Doicu A., Trautmann T., Schreier F. Tikhonov regularization for linear problems. *Numerical Regularization for Atmospheric Inverse Problems*. 2010. P. 39–106.

15. Lay D., Lay S., McDonald J. Linear Algebra and Its Applications: 5th Edition, Pearson, 2014. 576 p.

16. Strang G. Introduction to Linear Algebra: 5th Edition. Wellesley : Cambridge Press, 2016. 600 p.

17. Tikhonov A. N., Arsenin V. Y. Solutions of ill-Posed Problems. New York : Winston, 1977. 258 p.