МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ОПЕРАТОРІВ ПРОЄКТУВАННЯ В БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1112-з-дн

спеціальності 111 Математика

(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми Математика

(назва освітньої програми)

О.С. Харченко

(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, доцент, к.ф.-м.н. Красікова І.В.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент професор кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Стєганцева П.Г.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя

2024

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет Математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти Магістр

Спеціальність 111 математика
(шифр і назва)

Освітня програма Математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики, д.т.н., професор

____________ Гребенюк С.М.
(підпис)

« ____ » __________ 2023 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ (СТУДЕНТЦІ)

Харченко Олесі Сергіївни
(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Дослідження властивостей операторів проєктування в банахових просторах

керівник роботи (проекту) Красікова Ірина Володимирівна, к.ф.-м.н., доцент
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 01 » травня 2023 року № 643-с

2. Строк подання студентом роботи 16 лютого 2024 року

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Ознайомитися з теорією банахових просторів.
2. Дослідити клас операторів проєктування та їх основні властивості.
3. Розглянути проєктори норми 1 в просторах, що не є евклідовими.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 1 вересня 2023 року

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи магістра	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	10.09.2023	
2.	Збір вихідних даних.	17.09.2023	
3.	Обробка методичних та теоретичних	20.10.2023	
	джерел.		
4.	Розробка першого та другого розділу.	22.11.2023	
5.	Розробка третього розділу.	15.01.2024	
6.	Оформлення та нормоконтроль	05.02.2024	
	кваліфікаційної роботи магістра.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи магістра.	06.03.2024	

Студент ____________ О.С. Харченко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ____________ І.В. Красікова
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ____________ О.Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Дослідження властивостей операторів проєктування в банахових просторах»: 47 с., 9 джерел.

БАНАХОВ ПРОСТІР, ЕВКЛІДІВ ПРОСТІР, ЛІНІЙНИЙ НЕПЕРЕРВНИЙ ОПЕРАТОР, ЛІНІЙНИЙ НОРМОВАНИЙ ПРОСТІР, НОРМА ОПЕРАТОРА, ПРОЄКТОР, ПРЯМА СУМА ПРОСТОРІВ.

Об'єкт дослідження: оператори проєктування

Предмет дослідження: властивості операторів проєктування в банахових просторах

Метод дослідження: аналітичний

У роботі досліджувалися властивості операторів проєктування, заданих в банахових просторах. Зокрема, в евклідовому просторі якщо P – ортогональний проєктор норми 1, тоді норма проєктора $I - P$ також дорівнює 1. В роботі показано, що у просторі, який не евклідовим, цей факт місця не має. Відповідний приклад було побудовано в просторі ℓ_ρ^m при $1 \leq \rho < +\infty, \rho \neq 2$.

SUMMARY

Master’s Qualification Theses «Investigation of properties of design operators in Banach spaces»: 47 p., 9 sources.

BANACH SPACE, EUCLIDEAN SPACE, LINEAR CONTINUOUS OPERATOR, LINEAR NORMALIZED SPACE, OPERATOR NORM, PROJECTOR, DIRECT SUM OF SPACES.

Object of research: projection operators

Subject of research: properties of projection operators in Banach spaces

Research method: analytical

The paper investigates the properties of projection operators defined in Banach spaces. In particular, in a Euclidean space, if P – is an orthogonal projector of norm 1, then the norm of the projector $I - P$ is also 1. The paper shows that this fact does not hold in a non-Euclidean space. The corresponding example was constructed in the space ℓ_{ρ}^{m} with $1 \leq \rho < +\infty, \rho \neq 2$.

ЗМІСТ

ВСТУП

Одним з найважливіших та найбільш вивчених класів відображень, заданих у лінійних нормованих просторах, є проєктори, властивості яких досить добре вивчені. Цікавість до цих операторів пояснюється їх широким застосуванням в лінійній алгебрі, геометрії, функціональному аналізі.

Оператор проєктування має дуже простий та наочний геометричний зміст, особливо у скінченновимірному просторі. Так, проєктори дуже зручно застосовувати для дослідження геометричного поняття прямої суми. Але найбільш цікаві результати пов'язані з нескінченновимірними просторами.

Зауважимо, що властивості простору, у якому задано оператор проєктування, безпосередньо впливають на властивості оператора. Особливо це стосується проєкторів, що задані у евклідовому (або гільбертовому) просторах. Такі проєктори носять назву операторів ортогонального проєктування.

Основна властивість оператора проєктування – це його ідемпотентність, тобто умова $P^2 = P$. Але існування на просторі X проєктора безпосередньо пов'язане з поданням простору у вигляді прямої суми підпросторів $X = P(X) \oplus Ker\, P$, де $P(X)$ – це область значень оператора проєктування, а $Ker\ P$ –його ядро. У випадку, коли X – гільбертів простір, ці підпростори будуть ортогональними. Завдяки цьому, з поняттям проєкторів пов'язані також питання теорії доповнювальних підпросторів.

Властивості проєкторів досить добре вивчені. Зокрема, відомо, що у евклідовому просторі якщо P проєктор норми 1, то P – ортогональний проєктор і норма проєктора $I - P$ також дорівнює 1 (тут I – одиничний оператор). Ми доводимо, що у просторі, який не евклідовим, цей факт місця не має. В якості такого простору ми розглядаємо скінченновимірний простір ℓ_ρ^m при $1 \leq p < +\infty, p \neq 2$ та доводимо існування такого проєктора P норми одиниця, що $\|I - P\| > 1$.

1 ОСНОВНІ ФАКТИ ТЕОРІЇ БАНАХОВИХ ПРОСТОРІВ

1.1 Означення та приклади банахових просторів

Означення 1.1 Непорожня множина X елементів $x, y, z, \ldots$ називається лінійним, або векторним, простором, якщо вона задовольняє наступні умови:

I Для будь-яких двох елементів $x, y \in X$ однозначно визначений третій елемент $z \in X$, який називається їх сумою та позначається $x + y$, при цьому

а) $\forall\, x, y \in X \quad x + y = y + x$ (комутативність);

б) $\forall\, x, y, z \in X \quad x + (y + z) = (x + y) + z$ (асоціативність);

в) $\exists\, 0 \in X : x + 0 = x \;\; \forall\, x \in X$ (існування нуля);

г) $\forall\, x \in X \;\exists\, (-x) : x + (-x) = 0$ (існування протилежного елемента) ;

II Для будь-якого числа $\alpha \in \mathbb{P} = (\mathbb{R}, \mathbb{C})$ та довільного елемента $x \in X$ визначений елемент $\alpha x \in X$ (добуток елемента x на число α), при цьому

а) $\forall\, x \in X \;\; \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{P} \;\; \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x;$

б) $\forall\, x \in X \;\; 1 \cdot x = x;$

в) $\forall\, x \in X \;\; \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{P} \;\; (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$

г) $\forall\, x, y \in X \;\; \forall\, \alpha \in \mathbb{P} \;\; \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$

У залежності від того, який запас чисел $\mathbb{P}$ (всі комплексні або тільки дійсні) використовуються, розрізняють комплексні та дійсні лінійні простори. Надалі будемо розглядати тільки дійсні лінійні простори.

Означення 1.2 Нехай X – лінійний простір над полем $\mathbb{R}$. Числову функцію

$$x \in X: x \longmapsto \|x\| \in \mathbb{R}$$

називають нормою, якщо вона задовольняє наступні властивості:

а) $\forall\, x \in X \;\; \|x\| \geq 0$, при цьому $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

б) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in X \; \|x\lambda\| = |\lambda|\|x\|$ (однорідність);

в) $\forall x, y \in X \; \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (нерівність трикутника).

Означення 1.3 Лінійний простір X, у якому задана деяка норма, нормованим простором.

Розглянемо деякі приклади лінійних нормованих просторів [9].

Приклад 1.1 У просторі числових послідовностей

$$\ell_\rho = \left\{x = (x_1, x_2, \dots): \forall\, i \;\; x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^\rho \; < \; \infty\right\},$$

де $1 \leq \rho < +\infty$, норма задається за допомогою формули:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Приклад 1.2 У просторі

$$\ell_\rho^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n): \forall\, i \;\; x_i \in \mathbb{R}\},$$

де $1 \leq \rho < +\infty$, норма задається формулою:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Приклад 1.3 $m = \{x = (x_1, x_2, \dots) : \exists\, C_x > 0 : \forall\, i\ |x_i| \le C_x\}$ – простір обмежених числових послідовностей, на якому норма задається формулою:

$$\|x\| = \sup_{i} |x_i|.$$

Приклад 1.4 Простір неперервних функцій $C[a,b]$ також є нормованим простором, тому що на ньому норма задається формулою

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \ .$$

Приклад 1.5 У просторі класів еквівалентних сумовних з ρ-им степенем за Лебегом функцій $L_\rho\,[a,b]$, $1 \le \rho < +\infty$ норма має вигляд:

$$\|x\| = \left(\int_{[a,b]} |x(t)|^{\rho}\, d\mu\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Приклад 1.6 $L_\infty\,[a,b]$ – простір класів еквівалентних істотно обмежених функцій (тобто таких, які обмежені на множині $[a,b] \setminus A$, де $\mu A = 0$). Норма у цьому просторі виглядає наступним чином:

$$\|x\| = ess\,sup_{t\in[a,b]} |x(t)| = \inf_{A:\mu A = 0} sup_{[a,b]\setminus A} |x(t)|.$$

Означення 1.4 Послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ елементів нормованого простору X називається фундаментальною, якщо

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists \, N \colon \forall \, m, n > N \colon \|x_m - x_n\| \; < \varepsilon.$$

Означення 1.5 Кажуть, що послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ елементів нормованого простору X збігається до $x \; \in \; X$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Означення 1.6 Лінійний нормований простір X називається повним, якщо в ньому всяка фундаментальна послідовність збігається до деякого елементу $x \in X$. Повний ліній нормований простір називають банаховим простором.

Усі простори, які були розглянуті раніше у прикладах 1.1-1.6, є банаховими [2].

1.2 Гільбертові простори

У кваліфікаційній роботі істотну роль буде грати ще один важливий клас просторів – гільбертові простори.

Означення 1.9 Скалярним добутком в дійсному лінійному просторі X називається дійсна функція (x, y), визначена для кожної пари елементів $x, y \in X$, яка задовольняє умовам:

а) $\forall \, x, y \in X \quad (x, y) = (y, x)$;

б) $\forall \, x_1, x_2, y \in X \quad (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

в) $\forall\lambda \in \mathbb{R} \; \forall \, x, y \in X \;\; (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

г) $\forall \, x \in X \quad (x, x) \geq 0$, причому $(x, x) = 0$ тільки при $x = 0$.

Означення 1.10 Лінійний простір з фіксованим на ньому скалярним добутком називається евклідовим простором.

Відомо [1], що будь-який евклідів простір є нормованим, на якому норма задається таким чином:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Означення 1.11 Лінійний простір називається нескінченновимірним, якщо в ньому для будь-якого натурального числа n існує n лінійно незалежних елементів.

Усі розглянуті вище простори є нескінченновимірними, крім простору ℓ_ρ^n тому що $dim\, \ell_\rho^n = n$ [2].

Означення 1.12 Гільбертовим простором називається повний нескінченновимірний евклідів простір.

У подальшому гільбертів простір будемо позначати H.

Розглянемо декілька прикладів гільбертових та евклідових просторів [6]. Евклідовим простором є ℓ_2^n, у якому $x = (x_1, x_2 \dots), y = (y_1, y_2 \dots)$ та скалярний добуток задається формулою:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Гільбертовим цей простір не буде, оскільки він скінченновимірний.

Евклідовим простором є також простір неперервних на $[a, b]$ дійсних функцій $C_2[a, b]$ зі скалярним добутком

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\, y(t) dt.$$

Цей простір також не буде гільбертовим, оскільки він не є повним [9]. Гільбертовим є простір ℓ_2 зі скалярним добутком

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

та простір $L_2[a,b]$, на якому скалярний добуток задається формулою

$$(x,y) = \int_{[a,b]} x(t) \cdot y(t)\, d\mu.$$

Означення 1.13 Два евклідових простори, X та X^*, називаються ізоморфними, якщо між їх елементами можливо встановити взаємну однозначну відповідність так, що

$$x \leftrightarrow x^*, y \leftrightarrow y^*, (x, y \in X, x^*, y^* \in X^*),$$

і виконуються наступні рівності:

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*,$$
$$\alpha x \leftrightarrow \alpha x^*,$$
$$(x,y) = (x^*, y^*).$$

Означення 1.14 Простір, у якому є зліченна всюди щільна множина називається сепарабельним.

Теорема 1.1 Будь-які два сепарабельні гільбертові простори ізоморфні між собою.

Ця теорема фактично означає, що з точністю до ізоморфізму, існує лише один (сепаребельний) гільбертовий простір, тому в подальшому будемо розглядати в якості такого простору ℓ_2 або $L_2[a,b]$.

1.3 Прямі суми

Уведемо поняття про розклад лінійного простору в пряму суму двох або декількох лінійних підпросторів.

Означення 1.15 Нехай X – лінійний простір та $L_1, L_2, \dots, L_n$ – його підпростори. Якщо кожний елемент $x \in X$ однозначно може бути поданий у вигляді:

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, x_i \in L_i, i = 1, 2, \dots, n, \tag{1.1}$$

тоді кажуть, що простір X подається у вигляді прямої суми лінійних підпросторів $L_1, L_2, \dots, L_n$, а вираз (1.1) називають розкладом елемента x за елементами з $L_1, L_2, \dots, L_n$.

Надалі пряму суму будемо позначати, наступним чином:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \oplus L_i.$$

Твердження 1.1 Якщо $X = L_1 \oplus L_2$, тоді L_1 та L_2 мають спільний лише нульовий елемент простору.

Доведення. Насправді, якщо би L_1 та L_2 мали другий спільний елемент u, тоді для елемента $x \in X$, який записаний у вигляді $x = y + z, y \in L_1, z \in L_2$, отримаємо подання

$$x = (y - u) + (z + u), y - u \in L_1, z + u \in L_2,$$

яке, як видно, відрізняється від першого подання, що за умовою не можливо, тому наше припущення невірне. ■

Твердження 1.2 Якщо будь-який елемент $x \in X$ може бути подано у вигляді

$$x = y + z, y \in L_1, z \in L_2, \tag{1.2}$$
$$L_1 \cap L_2 = 0,$$

Тоді

$$X = L_1 \oplus L_2.$$

Доведення. Достатньо установити однозначність розкладу (1.2). Припустимо, що розклад неоднозначний :

$$x = y + z = y^* + z^*, \quad y, y^* \in L_1 \ , z, z^* \in L_2,$$

тоді

$$y - y^* = z^* - z, \ \ y - y^* \in L_1, \ \ z^* - z \in L_2.$$

Як видно, з останніх виразів випливає, що $y - y^* = z^* - z = 0$, тобто $y == y^*, \ z^* = z$ однозначність розкладу (1.2) доведено. ■

Означення 1.16 Два вектори $x, y \in H$ називаються ортогональними $(x \perp y)$, якщо $(x, y) = 0$.

Означення 1.17 Вектор $x \in H$ називається ортогональним до множини $G \subset H(x \perp G)$, якщо $(x, y) = 0, \forall y \in G$. Множина векторів, яка ортогональна множині G, називається її ортогональним доповненням, та позначається через $G^{\perp}$.

Означення 1.18 Два підпростори G_1, G_2 гільбертового простору H називаються ортогональними, якщо $(x, \perp y) = 0$ для будь-яких векторів $x \in G_1, y \in G_2$. Ортогональність підпросторів будемо позначати $G_1 \perp \perp G_2$.

Означення 1.19 Нехай $G_1, G_2, \dots, G_n$ – попарно ортогональні підпростори гільбертового простору H, такі що, $G_i \perp \perp G_k$ при $i \neq k$. Ортогональною сумою цих підпросторів називається множина

$$G = \{x \in H : x = g_1 + \dots + g_n, g_k \in G_k\},$$

яка позначається так

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus \dots \oplus G_n.$$

Означення 1.20 Нехай G – підпростір H. Проекцією вектора x на G називається такий вектор $y \in G$, що $x - y \perp G$. Позначати проєкцію далі будемо наступним чином:

$$y = \text{пр}_G x.$$

Наведемо одну з основних теорем теорії гільбертових просторів.

Теорема 1.2 Якщо G – підпростір гільбертового простору H, то для будь-якого вектора $x \in H$ існує єдина проєкція $y = \text{пр}_G x$.

Наслідок з теореми 1.2 Нехай G – підпростір гільбертового простору H, $G^{\perp}$ – його ортогональне доповнення. Тоді кожний вектор $x \in H$ єдиним чином може бути представленим у вигляді $x = y + z$, де $y \in G$, а $z \in G^{\perp}$. При цьому $y = \text{пр}_G x$ та $z = \text{пр}_{G^{\perp}} x$.

2 ПРОЄКТОРИ У НОРМОВАНИХ ПРОСТОРАХ

2.1 Лінійні неперервні оператори та їх властивості

Означення 2.1 Нехай X та Y – два лінійні нормовані простори. Лінійним оператором з X в Y називається відображення

$$y = Ax \ (x \in X, y \in Y),$$

для якого виконується умова

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2.$$

Означення 2.2 Сукупність D_A всіх $x \in X$, для яких відображення A визначене, називається областю визначення оператора A, тобто

$$D_A = \{x \in X : \exists y \in Y : y = Ax\}.$$

Якщо $D_A = X$, оператор називається всюди визначеним. Домовимося надалі вважати оператори всюди визначеними, якщо не сказано протилежне.

Означення 2.3 Множина тих $y \in Y$ для яких $y = Ax$ при деякому $x \in D_A$ називається образом лінійного оператора A та позначається $\mathrm{I}m\, A$, тобто

$$\mathrm{I}m\, A = \{y \in Y : \exists x \in X : y = Ax\}.$$

Означення 2.4 Ядром лінійного оператора називається множина $Ker\ A$ тих $x \in X$, для яких $Ax = 0$, тобто

$$Ker\ A = \{x \in X : Ax = 0\}.$$

Означення 2.5 Оператор A називається неперервним в точці $x_0 \in X$, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ з простору X, яка збігається за нормою до елемента x_0, відповідна послідовність $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до Ax_0 .

Відомо [3], що лінійний оператор, неперервний в одній точці $x_0 \in X$, буде неперервним на всьому просторі X.

Означення 2.5 Нехай X та Y – дійсні лінійні нормовані простори та $A: X \to Y$ – лінійний оператор. Оператор A називається обмеженим, якщо $\exists\ c > 0$, для якої виконується наступна умова:

$$\|A(x)\|_Y \le c\|x\|_X \ \forall x \in X.$$

Інакше кажучи, лінійний оператор $y = Ax$, діючий з X в Y, називається обмеженим, якщо він визначений на всьому X та кожну обмежену множену переводить в обмежену.

Твердження 2.1 [2] Для того, щоб лінійний оператор $y = Ax$ був неперервним, необхідно і достатньо, щоб він був обмеженим.

Це твердження дає можливість ототожнити дві властивості лінійних операторів – неперервність та обмеженість.

Означення 2.6 Нехай X та Y – дійсні лінійні простори та $A: X \to Y$ лінійний оператор, нормою лінійного неперервного оператора $A: X \to Y$ називається невід'ємне число

$$\|A\| = sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \tag{2.1}$$

Нехай X та Y – лінійні нормовані простори. Позначимо символом $\mathcal{L}(X, Y)$ сукупність усіх лінійних неперервних операторів, діючих із X в Y.

Введемо у $\mathcal{L}(X,Y)$ структуру лінійного простору наступним чином: для довільних операторів $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\lambda \in \mathbb{R}, x \in X$ покладемо

$$(A+B)x = Ax + Bx, \qquad (\lambda A)x = \lambda(Ax) \tag{2.2}$$

Задані таким чином операції перетворюють множину лінійних неперервних операторів $\mathcal{L}(X,Y)$ на лінійний простір. Якщо у цьому просторі задати норму за допомогою формули (2.1), тоді цей простір перетворюється на лінійний нормований простір. Більш того, має місце наступна важлива теорема [2].

Теорема 2.3 Множина $\mathcal{L}(X,Y)$ з заданими операціями додавання та множення на скаляр і нормою $\mathcal{L}(X,Y) \ni A \to \|A\| \in \mathbb{R}$ являється лінійним нормованим простором. Якщо Y – банаховий простір, то і $\mathcal{L}(X,Y)$ – банаховий простір.

Означення 2.7 Оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ називається невід’ємним [4], якщо $(Ax, x) \geq 0, \forall x \in H$. Невід’ємний оператор A позначають наступним чином: $A \geq 0$.

2.2 Означення та основні властивості операторів проєктування

У цьому підрозділі ми означимо важливий клас лінійних неперервних операторів – проєкторів. Зауважимо, що ми будемо розглядати декілька означень операторів проєктування.

Означення 2.8 Підпростір Y банахового простору X називається доповнювальним, якщо існує підпростір $Z \subseteq X$, для якого $X = Y \oplus Z$.

Означення 2.9 Нехай X – лінійний простір. Лінійний оператор $P: X \to X$ називається проєктором, якщо $P^2 = P$, тобто $P(Px) = Px, \forall x \in X$. Така властивість оператора називається ідемпотентністю.

Між існуванням доповнювальних просторів та проєкторами існує безпосередній зв'язок, який встановлюється наступним твердженням [11].

Твердження 2.2 Підпростір Y банахового простору X є доповнювальним тоді і тільки тоді, коли існує обмежений проєктор $P \in \mathcal{L}(X)$, для якого $P(X) = Y$.

Для доведення цього твердження наведемо означення графіка функції, теорему Банаха про замкнений графік та теорему про неперервність оператора.

Означення 2.10 Нехай X, Y – довільні множини, графіком відображення $A: X \to Y$ називається наступна множина:

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) \in X \times Y: x \in X\}.$$

Теорема 2.4 (Теорема Банаха про замкнений графік) [12] Нехай X, Y – банахові простори, $A: X \to Y$ – лінійний оператор. Якщо графік $\Gamma(A)$ є замкненою множиною в $X \times Y$, то A – обмежений оператор.

Крім того має місце теорема про неперервність оператора.

Теорема 2.5 Нехай X, Y – банахові простори. Лінійний оператор $A: X \to Y$ буде неперервним тоді і тільки тоді, коли графік цього оператора буде замкненим у $X \times Y$.

Спираючись на означення 2.9 та теореми 2.4, 2.5 доведемо твердження 2.2.

Доведення твердження 2.2. Необхідність. Нехай Y – доповнювальний підпростір простору X, тобто існує підпростір $Z \subseteq X$, для якого $X = Y \oplus Z$. Означимо оператор $P: X \to Y$ за правилом: для кожного $x \in X$ покладемо $Px = y$, де $x = y + z, (y \in Y, z \in Z)$. Лінійність оператора P випливає з того, що

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \in X: x_1 = y_1 + z_1, x_2 = y_2 + z_2, y_1, y_2 \in Y, z_1, z_2 \in Z,$$
$$P(\alpha x_1 + \beta x_2) = P\big(\alpha(y_1 + z_1) + \beta(y_2 + z_2)\big) = P(\alpha y_1 + \beta y_2 + \alpha z_1 + \beta z_2) =$$

$$= \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha P x_1 + \beta P x_2.$$

Доведемо замкненість графіка оператора P. Нехай $x_n \to x, x_n, x \in X, Px_n \to u, u \in X$. Оскільки $Px_n = y_n \in Y$ та підпростір Y замкнений, маємо, що $u \in Y$, тобто $Pu = u$. Оскільки $(Px_n - x_n) \in Z$, то і $(u - x) \in Z$, адже, Z є також замкненою множиною. Останнє означає, що $P(u - x) = 0$, тобто $Px = u$. Таким чином, маємо, що $x_n \to x, Px_n \to Px$, тобто точка (x, Px) належить графікові оператора, що й доводить його замкненість.

Отже, згідно з теоремою 2.4, оператор P є неперервним. Покажемо, що цей оператор є проєктором:

$$\forall x \in X \; Px = y \in Y, Py = y, \text{тобто } P(Px) = Px \text{ або } P^2 = P.$$

За означенням проєктора P зрозуміло, що $P(X) \subseteq Y$. Нехай $y \in Y$ та z – довільний елемент з множини $X \backslash Y$, тоді $x = y + z \in X$ та $Px = y$, тобто $P(X) \supseteq Y$. Отже, $P(X) = Y$.

Достатність. Нехай P – проєктор з X на Y та $x \in X$. Покладемо $Z = Ker\, P = P^{-1}(\{0\}) = \{x \in X : Px = 0\}$. Ядро оператора є замкненою множиною, оскільки оператор P є неперервним, а ядро – це прообраз замкненої множини при неперервному відображені. Тотожність $x = Px + (x - Px)$ подає x у вигляді шуканої суми.

Залишається довести єдиність розкладу. Припустимо, що існує інший розклад $x = y + z, (y \in Y, z \in Z)$. Тоді $Px = P(y + z) = y$ та $x - Px = x - -y = z$, що заперечує нашому припущенню. ■

Наведемо ще одне означення проєктора.

Означення 2.11 Нехай банахів простір X подано у вигляді прямої суми підпросторів $X = Y \oplus Z$. Проєктор $P \in \mathcal{L}(X)$, для якого $P(X) = Y$ і $Ker\, P = Z$, називається проєктором з X на Y паралельно Z.

Теорема 2.6 [9] Нехай оператор $P: X \to X$ підпорядковується рівності $P^2 = P$. Тоді оператор P – це проєктор на підпростір $P(X)$; оператор $Q = I - P$ – це проєктор на підпростір $Ker\ P$ та $X = P(X) \oplus Ker\ P$.

Доведення. Нехай $y \in P(X)$ – довільний елемент образу. Тоді $y = Px$, $x \in X$, $Py = P(Px) = P^2x = Px = y$. Це показує, що P – проєктор на підпростір $P(X)$.

Оскільки для оператора Q співвідношення $Q^2 = Q$ теж має місце: $(I - -P)^2 = I^2 - 2P + P^2 = I - P$, Q – це проєктор на $Q(X)$. Покажемо, що $Q(X) = Ker\ P$. Дійсно, $x \in Ker\ P \Leftrightarrow Px = 0 \Leftrightarrow Qx = x \Leftrightarrow x \in Q(X)$.

Залишилося перевірити умову $X = P(X) \oplus Ker\ P$. По – перше, для любого $x \in X$ маємо представлення $x = Px + Qx$. Так як $Px = P(X)$, $Qx = Ker\ P$ цим доведено співвідношення $X = P(X) \oplus Ker\ P$.

Для завершення доведення залишилося показати, що $P(X) \cap Ker\ P = \{0\}$. Припустимо, що $x \in P(X) \cap Ker\ P$. Тоді з одного боку $x \in P(X)$, тому $x = Px$, а з другого боку, $x \in Ker\ P$, тому $Px = 0$. Отже, $x = 0$.■

У гільбертовому просторі означення проєктору набуває особливого змісту.

Будемо вважати, що G – деякий підпростір H, $G^{\perp}$ – його ортогональне доповнення. Як було показано у підрозділі 1.3 (наслідок з теореми 1.2), кожний вектор $x \in H$ єдиним чином може бути представлено у вигляді $x = y + z$, де $y = \text{пр}_G x$ та $z = \text{пр}_{G^{\perp}} x$.

Означення 2.12 Проєкційним оператором (або ортопроєктором) в H на G називається оператор P_G, який діє за законом $H \ni x: \to P_G(x) = \text{пр}_G x$. Якщо $(e_k)_{k \geq 1}$ – ортонормований базис в G, тоді

$$P_G(x) = \sum_{k \geq 1} (x, e_k) e_k.$$

Лема 2.1 Має місце наступне твердження

$$(\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})(\forall\, x_1, x_2 \in H)\colon \text{пр}_G(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \text{пр}_G x_1 + \lambda_2 \text{пр}_G x_2.$$

Доведення. Нехай $\text{пр}_G x_1 = y_1$, $\text{пр}_G x_2 = y_2$, тоді $x_1 - y_1 \perp G, x_2 - y_2 \perp G$, тобто $\forall z \in G\ \ (x_1 - y_1, z) = (x_2 - y_2, z) = 0$. Розглянемо $\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ елемент $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ та покажемо, що він є проєкцією елемента $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ на підпростір G:

$$\forall z \in G\ (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - \lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2, z) = \lambda_1 (x_1 - y_1, z) - \lambda_2 (x_2 - y_2, z) = 0.$$

Отже, рівність $\text{пр}_G(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \text{пр}_G x_1 + \lambda_2 \text{пр}_G x_2$ виконується, що й треба було довести. ■

Теорема 2.7 Нехай G – деякий підпростір в H. Ортопроєктор P_G на G має такі властивості :

а) $P_G \in \mathcal{L}(H)$ та, якщо $G \neq \{0\}$, $\|P_G\| = 1$;
б) P_G – ідемпотентний оператор, тобто ${P_G}^2 = P_G$;
в) P_G – невід'ємний оператор.

Доведення. Лінійність оператора P_G випливає з леми 2.1:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \in H, x_1 = \text{пр}_G x_1 + \text{пр}_{G^\perp} x_1,\ x_2 = \text{пр}_G x_2 + \text{пр}_{G^\perp} x_2,$$
$$P_G(\alpha x_1 + \beta\, x_2) = P_G\big(\alpha(\text{пр}_G x_1 + \text{пр}_{G^\perp} x_1) + \beta(\text{пр}_G x_2 + \text{пр}_{G^\perp} x_2)\big) =$$
$$= P_G(\alpha \text{пр}_G x_1 + \beta \text{пр}_G x_2 + \alpha \text{пр}_{G^\perp} x_1 + \beta \text{пр}_{G^\perp} x_2) = \alpha \text{пр}_G x_1 + +\beta \text{пр}_G x_2 =$$
$$= \alpha P_G x_1 + \beta P_G x_2.$$

Справедлива також нерівність:

$$\|\text{пр}_G x\| \leq \|x\|.$$

Доведення цієї рівності полягає у наступному:

$$\|x\| = \left\|\sqrt{\text{пр}_G x + \text{пр}_{G^\perp} x}\right\| = \sqrt{(\text{пр}_G x + \text{пр}_{G^\perp} x, \text{пр}_G x + \text{пр}_{G^\perp} x)} =$$
$$= \sqrt{(\text{пр}_G x, \text{пр}_G x) + (\text{пр}_G x, \text{пр}_{G^\perp} x) + (\text{пр}_{G^\perp} x, \text{пр}_{G^\perp} x) + (\text{пр}_{G^\perp} x, \text{пр}_G x)} =$$
$$= \sqrt{\|\text{пр}_G x\|^2 + \|\text{пр}_{G^\perp} x\|^2}\,.$$
$$\|x\|^2 = \|\text{пр}_G x\|^2 + \|\text{пр}_{G^\perp} x\|^2 \;\Rightarrow \|\text{пр}_G x\|^2 \le \|x\|^2 \Rightarrow \|\text{пр}_G x\| \le \|x\|.$$

З нерівності $\|\text{пр}_G x\| \le \|x\|$, справедливої для всіх $x \in H$, випливає, що $\|P_G\| \le 1$. Якщо $G = \{0\}$, то $P_G = 0$. У протилежному випадку $(\forall g \in G)\colon P_G(g) = g$, звідки отримаємо, що $\|P_G\| = 1$. З цієї властивості проєкції випливає, що $(\forall x \in H)\colon (P_G)^2(x) = P_G(P_G x) = P_G x$, таким чином отримуємо ${P_G}^2 = P_G$.

Нарешті, для будь-якого $x \in H$ маємо $(P_G(x), x) = (\text{пр}_G x\,, \text{пр}_G x + \text{пр}_{G^\perp} x) = \|P_G(x)\|^2 \ge 0$, що й означає невід’ємність оператора P_G. ■

3 ПРОЄКТОРИ НОРМИ 1 У ПРОСТОРАХ $\boldsymbol{\ell_\rho^m}$ ПРИ $\mathbf{1 \le \rho < +\infty,\ \rho \neq 2}$

Відомо [8], що в евклідовому просторі E якщо P – проєктор нормі 1, тоді P – ортогональний проєктор і норма проєктора $I - P$ також дорівнює 1 (тут I – одиничний оператор). Розглянемо -вимірний векторний простір над полем дійсних чисел ℓ_ρ^m. Цей простір утворюється m – вимірними векторами з дійсними координатами $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), \forall\ i\ \ x_i\ \in \mathbb{R}$. Норма елемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ задається формулою:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Тоді має місце наступна важлива теорема.

Теорема 3.1 Нехай $1 < \rho < +\infty, \rho \neq 2, m \ge 2$ – натуральне число. Тоді в ℓ_ρ^m існує такий проєктор P, що $\|P\| = 1$, а $\|I - P\| > 1$.

Доведення. Спочатку доведемо теорему для двовимірного випадку (m = 2), тобто розглянемо простір ℓ_ρ^2. Елементами цього простору є двовимірні вектори $x = (x_1, x_2)$. Нехай $0 < k < 1$ – довільне дійсне число. Фіксуємо числа a та $b = k \cdot a$.

Оператор P будемо шукати у вигляді

$$Px = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ \lambda a x_1 + \lambda b x_2 \end{pmatrix}.$$

Матриця проєктора P у базисі $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ має вигляд $\begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix}$.

Оскільки потрібний нам проєктор не нульовий та не одиничний, ранг матриці дорівнює одиниці, тобто її рядки лінійно залежні.

Підберемо параметр $\lambda \neq 0$, так щоб P був проєктором, тобто щоб виконувалася умова $P^2 = P$:

$$P^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + \lambda ab & ab + \lambda b^2 \\ \lambda a^2 + \lambda^2 ab & \lambda ab + \lambda^2 b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix} = P.$$

Для знаходження $\lambda \neq 0$, отримаємо систему рівнянь (3.1) та знайдемо λ:

$$\begin{cases} a^2 + \lambda ab = a, \\ ab + \lambda b^2 = b, \\ \lambda a^2 + \lambda^2 ab = \lambda a, \\ \lambda ab + \lambda^2 b^2 = \lambda b. \end{cases} \tag{3.1}$$

Розглянемо випадок, коли $a \neq 0, b \neq 0, \lambda \neq 0$, тоді система (3.1) рівносильна умові $a + b\lambda = 1$, звідки отримуємо параметр λ:

$$\lambda = \frac{1-a}{b}.$$

Таким чином, побудований оператор P дійсно є проєктором та

$$Px = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a}{b} a & \frac{1-a}{b} b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ \frac{1-a}{b}(ax_1 + bx_2) \end{pmatrix}.$$

Оскільки P – неперервний (обмежений) оператор, то $\forall x = (x_1, x_2) \in \ell_\rho^2$, маємо

$$\|Px\| \leq \|P\| \cdot \|x\|.$$

За умовою теореми, $\|P\| = 1$, тобт

$$\|Px\| \leq \|x\|, \tag{3.2}$$

де $\|P\| = sup\rho\{\|Px\|: \|x\| \leq 1\}$.

Застосовуючи формулу для норми $\|x\|^\rho = |x_1|^\rho + |x_2|^\rho$, нерівність (3.2) для всіх x_1, x_2 можна записати у вигляді

$$\|Px\|^\rho = |ax_1 + bx_2|^\rho + \left|\frac{1-a}{b} \cdot ax_1 + \frac{1-a}{b} \cdot bx_2\right|^\rho \leq |x_1|^\rho + |x_2|^\rho = \|x\|^\rho.$$

Ліву частину нерівності перетворимо таким чином:

$$|ax_1 + bx_2|^\rho + \left|\frac{1-a}{b} \cdot ax_1 + \frac{1-a}{b} \cdot bx_2\right|^\rho = |ax_1 + bx_2|^\rho +$$
$$+ \left|\left(\frac{1-a}{b}\right) \cdot (ax_1 + bx_2)\right| = |ax_1 + bx_2|^\rho + \left|\frac{1-a}{b}\right|^\rho \cdot |ax_1 + bx_2|^\rho =$$
$$= \left(1 + \left|\frac{1-a}{b}\right|^\rho\right) \cdot |ax_1 + bx_2|^\rho.$$

Тоді нерівність (3.2) запишеться у вигляді

$$\frac{|ax_1 + bx_2|^\rho}{|x_1|^\rho + |x_2|^\rho} \leq \left(1 + \left|\frac{1-a}{b}\right|^\rho\right). \tag{3.3}$$

Спираючись на те, що оператор P лінійний, його норму можна знайти за формулою:

$$\|P\| = \sup_{\substack{x_1 \neq 0 \\ x_2 \neq 0}} \rho \frac{\|Px\|}{\|x\|}. \tag{3.4}$$

Перейдемо до супремума в нерівності (3.3):

$$\sup_{\substack{x_1 \neq 0 \\ x_2 \neq 0}} \rho \frac{|ax_1 + bx_2|^\rho}{|x_1|^\rho + |x_2|^\rho} \leq \left(1 + \left|\frac{1-a}{b}\right|^\rho\right). \quad (3.5)$$

Отже, умова (3.5) є умовою того, що $\|P\| = 1$. Оцінимо чисельник $|ax_1 + bx_2|^\rho$:

$$|ax_1 + bx_2|^\rho \leq (|a| \cdot |x_1| + |b| \cdot |x_2|)^\rho.$$

Отримаємо:

$$\sup_{\substack{x_1 \neq 0 \\ x_2 \neq 0}} \rho \frac{|ax_1 + bx_2|^\rho}{|x_1|^\rho + |x_2|^\rho} = \sup_{\substack{x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0}} \rho \frac{(|a| \cdot x_1 + |b| \cdot x_2)^\rho}{{x_1}^\rho + {x_2}^\rho}.$$

Розглянемо тепер допоміжну функцію двох змінних $f(x_1, x_2)$, яка має вигляд

$$f(x_1, x_2) = \frac{(|a| \cdot x_1 + |b| \cdot x_2)^\rho}{{x_1}^\rho + {x_2}^\rho},$$

та дослідимо її на екстремум за умови $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Необхідною умовою екстремуму є рівність нулю частинних похідних [5]:

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dx_1} = 0, \Rightarrow \\ \dfrac{df}{dx_2} = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\rho \cdot |a| \cdot (|a| \cdot x_1 + |b| \cdot x_2)^{\rho-1} \cdot ({x_1}^\rho + {x_2}^\rho) - (|a| \cdot x_1 + |b| \cdot x_2)^\rho \cdot \rho \cdot {x_1}^{\rho-1}}{({x_1}^\rho + {x_2}^\rho)^2} = 0, \\ \dfrac{\rho \cdot |b| \cdot (|a| \cdot x_1 + |b| \cdot x_2)^{\rho-1} \cdot ({x_1}^\rho + {x_2}^\rho) - (|a| \cdot x_1 + |b| \cdot x_2)^\rho \cdot \rho \cdot {x_2}^{\rho-1}}{({x_1}^\rho + {x_2}^\rho)^2} = 0. \end{cases}$$

Розглянемо перше рівняння:

$$\rho \cdot |a| \cdot (|a| \cdot x_1 + |b| \cdot x_2)^{\rho-1} \cdot ({x_1}^{\rho} + {x_2}^{\rho}) - (|a| \cdot x_1 + |b| \cdot x_2)^{\rho} \cdot \rho \cdot {x_1}^{\rho-1} = 0;$$

$$\rho \cdot (|a| \cdot x_1 + |b| \cdot x_2)^{\rho-1} \cdot [|a| \cdot {x_1}^{\rho} + |a| \cdot {x_2}^{\rho} - |a| \cdot {x_1}^{\rho} - |b| \cdot x_2 \cdot {x_1}^{\rho-1}] = 0.$$

Після перетворення отримаємо, що це рівняння рівносильне рівнянню:

$$|a| \cdot {x_2}^{\rho} - |b| \cdot x_2 \cdot {x_1}^{\rho-1} = 0;$$

$$x_2 \cdot [|a| \cdot {x_2}^{\rho-1} - |b| \cdot {x_1}^{\rho-1}] = 0 \,\Big|: x_2 \neq 0;$$

$$|a| \cdot {x_2}^{\rho-1} - |b| \cdot {x_1}^{\rho-1} = 0;$$

$$x_1 = x_2 \cdot \left(\frac{|a|}{|b|}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}. \tag{3.6}$$

Аналогічно розв’яжемо друге рівняння системи:

$$\rho \cdot |b| \cdot (|a| \cdot x_1 + |b| \cdot x_2)^{\rho-1} \cdot ({x_1}^{\rho} + {x_2}^{\rho}) - (|a| \cdot x_1 + |b| \cdot x_2)^{\rho} \cdot \rho \cdot {x_1}^{\rho-1} = 0;$$

$$\rho \cdot (|a| \cdot x_1 + |b| \cdot x_2)^{\rho-1} \cdot [|b| \cdot {x_1}^{\rho} + |b| \cdot {x_2}^{\rho} - |b| \cdot {x_2}^{\rho} - |a| \cdot x_1 \cdot {x_2}^{\rho-1}] = 0.$$

Після перетворення отримаємо:

$$|b| \cdot {x_1}^{\rho} - |a| \cdot x_1 \cdot {x_2}^{\rho-1} = 0;$$

$$x_1 \cdot [|b| \cdot {x_1}^{\rho-1} - |a| \cdot {x_2}^{\rho-1}] = 0 \,\Big|: x_1 \neq 0;$$

$$|b| \cdot {x_1}^{\rho-1} - |a| \cdot {x_2}^{\rho-1} = 0;$$

$${x_2}^{\rho-1} = \frac{|b| \cdot {x_1}^{\rho-1}}{|a|};$$

$$x_2 = x_1 \cdot \left(\frac{|b|}{|a|}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}. \tag{3.7}$$

Зауважимо, що вирази (3.6) та (3.7) є різними записами однієї умови. Отже, якщо розглядати функцію f як функцію однієї змінної (x_1 або x_2), видно, що при $x_2 = x_1 \cdot \left(\frac{|b|}{|a|}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$ функція приймає найбільше значення:

$$f(x_1) = \frac{\left(|a| \cdot x_1 + |b| \cdot x_1 \cdot \left(\frac{|b|}{|a|}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\right)^{\rho}}{x_1{}^{\rho} + \left(x_1 \cdot \left(\frac{|b|}{|a|}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\right)^{\rho}} = \frac{\left(|a| \cdot x_1 + |b| \cdot x_1 \cdot \frac{|b|^{\frac{1}{\rho-1}}}{|a|^{\frac{1}{\rho-1}}}\right)^{\rho}}{x_1{}^{\rho} + \left(x_1 \cdot \frac{|b|^{\frac{1}{\rho-1}}}{|a|^{\frac{1}{\rho-1}}}\right)^{\rho}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{|a|^{\frac{\rho}{\rho-1}} \cdot x_1 + x_1 \cdot |b|^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{|a|^{\frac{1}{\rho-1}}}\right)^{\rho}}{\frac{x_1{}^{\rho} \cdot |a|^{\frac{\rho}{\rho-1}} + x_1{}^{\rho} \cdot |b|^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{|a|^{\frac{\rho}{\rho-1}}}} = \frac{\left(\frac{x_1 \cdot \left(|a|^{\frac{\rho}{\rho-1}} + |b|^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)}{|a|^{\frac{1}{\rho-1}}}\right)^{\rho}}{\frac{x_1{}^{\rho} \cdot \left(|a|^{\frac{\rho}{\rho-1}} + |b|^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)}{|a|^{\frac{\rho}{\rho-1}}}} =$$

$$= \frac{\frac{x_1{}^{\rho} \cdot \left(|a|^{\frac{\rho}{\rho-1}} + |b|^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\rho}}{\left(|a|^{\frac{1}{\rho-1}}\right)^{\rho}}}{\frac{x_1{}^{\rho} \cdot \left(|a|^{\frac{\rho}{\rho-1}} + |b|^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)}{|a|^{\frac{\rho}{\rho-1}}}} = \frac{\left(|a|^{\frac{\rho}{\rho-1}} + |b|^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\rho}}{\left(|a|^{\frac{\rho}{\rho-1}} + |b|^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)} = \left(|a|^{\frac{\rho}{\rho-1}} + |b|^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\rho-1} =$$

$$= \sup_{\substack{x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0}} f(x_1, x_2).$$

Таким чином, умова (3.5) набуває вигляду:

$$\left(|a|^{\frac{\rho}{\rho-1}}+|b|^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\rho-1} \le \frac{1}{1+\left|\frac{1-a}{b}\right|^{\rho}} \Rightarrow (|a|^q+|b|^q)^{\frac{1}{q}} \cdot ((1-a)^\rho+|b|^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$$
$$\le |b|.$$

Символом q позначено показник, спряжений до ρ, тобто $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ або $\frac{\rho}{\rho-1}=q$. Отже, ми отримали необхідну та достатню умову того, що $\|P\|=1$. Якщо вибрати $1>a>0, b>0$, отримуємо нерівність:

$$(a^q+b^q)^{\frac{1}{q}} \cdot ((1-a)^\rho+b^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \le b. \qquad (3.8)$$

Застосуємо до лівої частини нерівності (3.8) нерівність Гельдера:

$$b \ge (a^q+b^q)^{\frac{1}{q}} \cdot ((1-a)^\rho+b^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \ge a\cdot b+b\cdot(1-a)=b.$$

Це означає, що в нерівності (3.8) насправді має місце рівність, тобто необхідна і достатня умова того, що $\|P\|=1$, записується у вигляді:

$$(a^q+b^q)^{\frac{1}{q}} \cdot ((1-a)^\rho+b^\rho)^{\frac{1}{\rho}} = b. \qquad (3.9)$$

Розглянемо тепер проєктор $I-P$, який задається правилом:

$$(I-P)x=\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a & b\\ \frac{a(1-a)}{b} & (1-a)\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}(1-a)\cdot x_1-b\cdot x_2\\ \frac{-a(1-a)\cdot x_1}{b}+a\cdot x_2\end{pmatrix}.$$

З'ясуємо, за якої умови буде $\|I-P\|>1$ у просторі ℓ_ρ^2. Ця нерівність означає існування такого елемента $x\in\ell_\rho^2$, для якого $\|(I-P)x\|>\|x\|$, або, інакше кажучи

$$\frac{\|(I-P)x\|}{\|x\|}>1. \tag{3.10}$$

Оскільки $\|x\|^\rho=|x_1|^\rho+|x_2|^\rho$ та

$$\|(I-P)x\|^\rho=|(1-a)\cdot x_1-b\cdot x_2|^\rho+\left|\frac{-a(1-a)\cdot x_1}{b}+a\cdot x_2\right|^\rho.$$

Нерівність (3.10) перетвориться на

$$\frac{\|(I-P)x\|^\rho}{\|x\|^\rho}=\frac{|(1-a)\cdot x_1-b\cdot x_2|^\rho+\left|\frac{-a(1-a)\cdot x_1}{b}+a\cdot x_2\right|^\rho}{|x_1|^\rho+|x_2|^\rho}=$$
$$=\frac{|(1-a)\cdot x_1-b\cdot x_2|^\rho+\left|a\cdot\left(\frac{-(1-a)\cdot x_1+b\cdot x_2}{b}\right)\right|^\rho}{|x_1|^\rho+|x_2|^\rho}=$$
$$=\frac{|(1-a)\cdot x_1-b\cdot x_2|^\rho\cdot\left(1+\frac{|a|^\rho}{|b|^\rho}\right)}{|x_1|^\rho+|x_2|^\rho}>1$$

або

$$\frac{|(1-a)\cdot x_1-b\cdot x_2|^\rho}{|x_1|^\rho+|x_2|^\rho}>\frac{1}{\left(1+\frac{|a|^\rho}{|b|^\rho}\right)}.$$

Потрібно показати, що

$$\sup_{\substack{x_1>0\\x_2>0}}\rho\frac{|(1-a)\cdot x_1-b\cdot x_2|^{\rho}}{|x_1|^{\rho}+|x_2|^{\rho}}>\frac{1}{\left(1+\frac{|a|^{\rho}}{|b|^{\rho}}\right)},$$

або, враховуючи нерівність трикутника у чисельнику:

$$\sup_{\substack{x_1>0\\x_2>0}}\rho\frac{(|1-a|\cdot x_1+|b|\cdot x_2)^{\rho}}{x_1{}^{\rho}+x_2{}^{\rho}}>\frac{1}{\left(1+\frac{|a|^{\rho}}{|b|^{\rho}}\right)}. \tag{3.11}$$

Розглянемо допоміжну функцію $g(x_1, x_2)$

$$g(x_1,x_2)=\frac{(|1-a|\cdot x_1+|b|\cdot x_2)^{\rho}}{x_1{}^{\rho}+x_2{}^{\rho}},$$

та дослідимо її на екстремум:

$$\begin{cases}\dfrac{dg}{dx_1}=0,\Rightarrow\\ \dfrac{dg}{dx_2}=0\Rightarrow\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\rho\cdot|1-a|\cdot(|1-a|\cdot x_1+|b|\cdot x_2)^{\rho-1}\cdot(x_1{}^{\rho}+x_2{}^{\rho})}{(x_1{}^{\rho}+x_2{}^{\rho})^2}-\\ \qquad-\dfrac{(|1-a|\cdot x_1+|b|\cdot x_2)^{\rho}\cdot\rho\cdot x_1{}^{\rho-1}}{(x_1{}^{\rho}+x_2{}^{\rho})^2}=0,\\ \dfrac{\rho\cdot|b|\cdot(|1-a|\cdot x_1+|b|\cdot x_2)^{\rho-1}\cdot(x_1{}^{\rho}+x_2{}^{\rho})}{(x_1{}^{\rho}+x_2{}^{\rho})^2}-\\ \qquad-\dfrac{(|1-a|\cdot x_1+|b|\cdot x_2)^{\rho}\cdot\rho\cdot x_2{}^{\rho-1}}{(x_1{}^{\rho}+x_2{}^{\rho})^2}=0.\end{cases}$$

Розглянемо перше рівняння:

$$\rho\cdot|1-a|\cdot(|1-a|\cdot x_1+|b|\cdot x_2)^{\rho-1}\cdot(x_1{}^{\rho}+x_2{}^{\rho})-(|1-a|\cdot x_1+|b|\cdot x_2)^{\rho}$$
$$\times$$

$$\times \rho \cdot {x_1}^{\rho-1} = 0;$$

$$\rho \cdot (|1-a| \cdot x_1 + |b| \cdot x_2)^{\rho-1} \cdot [|1-a| \cdot ({x_1}^{\rho} + {x_2}^{\rho}) - {x_1}^{\rho-1} \cdot (|1-a|$$

$$\times$$

$$\times\, x_1 + |b| \cdot x_2)^{\rho}] = 0.$$

Після перетворень отримаємо:

$$|1-a| \cdot {x_2}^{\rho} - {x_1}^{\rho-1} \cdot |b| \cdot x_2 = 0;$$

$$x_2 \cdot [|1-a| \cdot {x_2}^{\rho-1} - {x_1}^{\rho-1} \cdot |b|] = 0 \,\Big|\, : x_2 \neq 0;$$

$$|1-a| \cdot {x_2}^{\rho-1} - {x_1}^{\rho-1} \cdot |b| = 0;$$

$${x_1}^{\rho-1} = \frac{|1-a| \cdot {x_2}^{\rho-1}}{|b|};$$

$$x_1 = x_2 \cdot \left(\frac{|1-a|}{|b|}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}.$$

Аналогічно розглянемо друге рівняння:

$$\rho \cdot |b| \cdot (|1-a| \cdot x_1 + |b| \cdot x_2)^{\rho-1} \cdot ({x_1}^{\rho} + {x_2}^{\rho}) - \ (|1-a| \cdot x_1 + |b| \cdot x_2)^{\rho} \times$$

$$\times\, \rho \cdot {x_2}^{\rho-1} = 0;$$

$$\rho \cdot (|1-a| \cdot x_1 + |b| \cdot x_2)^{\rho-1} \cdot [|b| \cdot ({x_1}^{\rho} + {x_2}^{\rho}) - {x_2}^{\rho-1} \cdot (|1-a| \cdot x_1 +$$

$$+ |b| \cdot x_2)^{\rho}] = 0.$$

Після спрощення отримаємо:

$$|b| \cdot {x_1}^{\rho} - {x_2}^{\rho-1} \cdot |1-a| \cdot x_1 = 0;$$

$$x_1 \cdot [|b| \cdot {x_1}^{\rho-1} - {x_2}^{\rho-1} \cdot |1-a|] = 0 \,\Big|\, : x_1 \neq 0;$$

$$|b| \cdot {x_1}^{\rho-1} - {x_2}^{\rho-1} \cdot |1-a| = 0;$$

$${x_2}^{\rho-1} = \frac{|b| \cdot {x_1}^{\rho-1}}{|1-a|};$$

$$x_2 = x_1 \cdot \left(\frac{|b|}{|1-a|}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}.$$

Розглянемо функцію g як функцію однієї змінної (x_1 або x_2) та отримаємо, що при $x_1 = x_2 \cdot \left(\frac{|1-a|}{|b|}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$ функція приймає своє максимальне значення:

$$g(x_1) = \frac{\left(|1-a| \cdot x_1 + x_1 \cdot |b| \cdot \left(\frac{|b|}{|1-a|}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\right)^{\rho}}{{x_1}^{\rho} + \left(x_1 \cdot \left(\frac{|b|}{|1-a|}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\right)^{\rho}} =$$

$$= \frac{\left(|1-a| \cdot x_1 + x_1 \cdot |b| \cdot \frac{|b|^{\frac{1}{\rho-1}}}{|1-a|^{\frac{1}{\rho-1}}}\right)^{\rho}}{{x_1}^{\rho} + \left({x_1}^{\rho} \cdot \frac{|b|^{\frac{1}{\rho-1}}}{|1-a|^{\frac{1}{\rho-1}}}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{|1-a|^{\frac{\rho}{\rho-1}} \cdot x_1 + x_1 \cdot |b|^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{|1-a|^{\frac{1}{\rho-1}}}\right)^{\rho}}{\frac{{x_1}^{\rho} \cdot |1-a|^{\frac{\rho}{\rho-1}} + {x_1}^{\rho} \cdot |b|^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{|1-a|^{\frac{1}{\rho-1}}}} =$$

$$= \frac{\left(x_1 \cdot \left(|1-a|^{\frac{\rho}{\rho-1}} + |b|^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)\right)^{\rho}}{{x_1}^{\rho} \cdot \left(|1-a|^{\frac{\rho}{\rho-1}} + |b|^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)} = \left(|1-a|^{\frac{\rho}{\rho-1}} + |b|^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\rho-1} =$$

$$= \sup_{\substack{x_1>0 \\ x_2>0}} g(x_1, x_2).$$

Отже, умова (3.11) набуває вигляду:

$$\left(|1-a|^{\frac{\rho}{\rho-1}}+|b|^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\rho-1}>\frac{1}{\left(1+\frac{|a|^{\rho}}{|b|^{\rho}}\right)}.$$

Оскільки $b>0{,}1>a>0$, маємо:

$$((1-a)^{q}+b^{q})^{\frac{1}{q}}>\frac{b^{\rho}}{b^{\rho}+a^{\rho}};$$

Таким чином, отримали необхідну та достатню умову того, що $\|I-P\|>>1$:

$$(b^{\rho}+a^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}\cdot((1-a)^{q}+b^{q})^{\frac{1}{q}}>b. \tag{3.12}$$

Отже, ми отримали дві необхідні та достатні умови виконання твердження теореми – (3.9) та (3.12). Зауважимо, що коли $a=1-a$, або $a=\frac{1}{2}$ умова (3.9) перетворюється на $(a^{q}+b^{q})^{\frac{1}{q}}\cdot(a^{\rho}+b^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}=b,$ а умова (3.12) – на $(a^{q}++b^{q})^{\frac{1}{q}}\cdot(a^{\rho}+b^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}>b,$ тобто одночасно вони виконуватися не можуть.

Тепер, ми можемо розглядати два випадки: $a>1-a,$ або $a>\frac{1}{2}$ та $a<1-a,$ або $a<\frac{1}{2}$. Спочатку розглянемо випадок $a>1-a,$ або $a>\frac{1}{2}$, тоді покладемо

$$a=\frac{1}{1+k^{q}},b=k\cdot a=\frac{k}{1+k^{q}},$$

де $0<k<1$ – довільне дійсне число.

Підставимо значення a,b у ліву та праву частину умови (3.9):

$$\left[\left(\frac{1}{1+k^q}\right)^q + \left(\frac{k}{1+k^q}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\left(\frac{k^q}{1+k^q}\right)^\rho + \left(\frac{k}{1+k^q}\right)^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}} = \frac{k}{1+k^q},$$

розглянемо ліву частину рівності:

$$\left[\left(\frac{1}{1+k^q}\right)^q + \left(\frac{k}{1+k^q}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\left(\frac{k^q}{1+k^q}\right)^\rho + \left(\frac{k}{1+k^q}\right)^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}} = \left[\frac{1}{(1+k^q)^{q-1}}\right]^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left[\frac{k^\rho \cdot (1+k^q)}{(1+k^q)^\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} = k \cdot \frac{1}{(1+k^q)^{\frac{q-1}{q}}} \cdot \frac{1}{(1+k^q)^{\frac{\rho-1}{\rho}}} = \frac{k}{1+k^\rho}.$$

Отримана тотожність означає, що умова (3.9) виконується при всіх $a > \frac{1}{2}$. Підставимо значення a, b у ліву та праву частину умови (3.12):

$$\left[\left(\frac{1}{1+k^q}\right)^\rho + \left(\frac{k}{1+k^q}\right)^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}} \cdot \left[\left(\frac{k^q}{1+k^q}\right)^q + \left(\frac{k}{1+k^q}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}} > \frac{k}{1+k^q},$$

перетворимо ліву частину нерівності:

$$\left[\left(\frac{1}{1+k^q}\right)^\rho + \left(\frac{k}{1+k^q}\right)^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}} \cdot \left[\left(\frac{k^q}{1+k^q}\right)^q + \left(\frac{k}{1+k^q}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\frac{(1+k^\rho)}{(1+k^q)^\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} \times$$

$$\times \left[\frac{k^q \cdot (1+k^q)}{(1+k^q)^q}\right]^{\frac{1}{q}} = \frac{(1+k^\rho)^{\frac{1}{\rho}}}{(1+k^q)} \cdot \frac{k \cdot (1+k^q)^{\frac{1}{q}}}{(1+k^q)} = \frac{k \cdot (1+k^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \cdot (1+k^q)^{\frac{1}{q}}}{(1+k^q)^2} =$$

$$= \frac{k \cdot (1+k^\rho)^{\frac{1}{p}}}{(1+k^q)^{1+\frac{1}{\rho}}}.$$

Отже, умова (3.12) набуває вигляду:

$$\frac{k\cdot(1+k^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}}{(1+k^{q})^{1+\frac{1}{\rho}}} > \frac{k}{1+k^{q}}$$

або

$$\frac{(1+k^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}}{(1+k^{q})^{\frac{1}{\rho}}} > 1 \Leftrightarrow k^{\rho} > k^{q}.$$

Враховуючи, що $0 < k < 1$, умова $k^{\rho} > k^{q}$ буде виконуватися при $\rho < q$, тобто при $\rho < 2$, оскільки при цьому $q > 2$. Отже, при $1 < \rho < 2$ у просторі l_{ρ}^{2} побудований проєктор P норми 1 такий, що $\|I-P\| > 1$.

Розглянемо тепер випадок, коли $a < 1-a$, або $a < \frac{1}{2}$, тоді покладемо

$$a = \frac{k^{\rho}}{1+k^{\rho}}, b = k(1-a) = \frac{k}{1+k^{\rho}},$$

де $0 < k < 1$ – довільне дійсне число.

Підставимо значення a, b у ліву та праву частину умови (3.9):

$$\left[\left(\frac{k^{\rho}}{1+k^{\rho}}\right)^{q} + \left(\frac{k}{1+k^{\rho}}\right)^{q}\right]^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\left(\frac{1}{1+k^{\rho}}\right)^{\rho} + \left(\frac{k}{1+k^{\rho}}\right)^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} = \frac{k}{1+k^{\rho}}.$$

Розглянемо ліву частину рівності:

$$\left[\left(\frac{k^{\rho}}{1+k^{\rho}}\right)^{q} + \left(\frac{k}{1+k^{\rho}}\right)^{q}\right]^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\left(\frac{1}{1+k^{\rho}}\right)^{\rho} + \left(\frac{k}{1+k^{\rho}}\right)^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} =$$

$$= \left[\frac{k^{q}(k^{\rho}+1)}{(1+k^{\rho})^{q}}\right]^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\frac{1+k^{\rho}}{(1+k^{\rho})^{\rho}}\right]^{\frac{1}{\rho}} = \frac{k(k^{\rho}+1)^{\frac{1}{q}}}{1+k^{\rho}} \cdot \frac{(1+k^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}}{1+k^{\rho}} =$$

$$= \frac{(k^{\rho}+1)^{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}}\cdot k}{(1+k^{\rho})^{2}} = \frac{k}{1+k^{\rho}},$$

таким чином, отримали тотожність:

$$\frac{k}{1+k^{\rho}} = \frac{k}{1+k^{\rho}},$$

яка говорить про те що умова (3.9) виконується при $a < \frac{1}{2}$.

Підставимо тепер значення a, b у ліву та праву частину умови (3.12):

$$\left[\left(\frac{k^{\rho}}{1+k^{\rho}}\right)^{\rho} + \left(\frac{k}{1+k^{\rho}}\right)^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} \cdot \left[\left(\frac{1}{1+k^{\rho}}\right)^{q} + \left(\frac{k}{1+k^{\rho}}\right)^{q}\right]^{\frac{1}{q}} > \frac{k}{1+k^{\rho}};$$

розглянемо ліву частину нерівності:

$$\left[\left(\frac{k^{\rho}}{1+k^{\rho}}\right)^{\rho} + \left(\frac{k}{1+k^{\rho}}\right)^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} \cdot \left[\left(\frac{1}{1+k^{\rho}}\right)^{q} + \left(\frac{k}{1+k^{\rho}}\right)^{q}\right]^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left[\frac{k^{\rho}(k^{\rho}+1)}{(1+k^{\rho})^{\rho}}\right]^{\frac{1}{\rho}} \cdot \left[\frac{k^{q}+1}{(1+k^{\rho})^{q}}\right]^{\frac{1}{q}} = \frac{k \cdot (k^{\rho}+1)^{\frac{1}{\rho}}}{1+k^{\rho}} \cdot \frac{(k^{q}+1)^{\frac{1}{q}}}{1+k^{\rho}} =$$

$$= \frac{(k^{\rho}+1)^{\frac{1}{\rho}} \cdot k \cdot (k^{q}+1)^{\frac{1}{q}}}{(1+k^{p})^{2}} = \frac{(k^{q}+1)^{\frac{1}{q}} \cdot k}{(1+k^{p})^{1+\frac{1}{q}}}.$$

Отримали:

$$\frac{(k^{q}+1)^{\frac{1}{q}} \cdot k}{(1+k^{p})^{1+\frac{1}{q}}} > \frac{k}{1+k^{\rho}};$$

$$\frac{(k^{q}+1)^{\frac{1}{q}}}{(k^{\rho}+1)^{\frac{1}{q}}} > 1 \Leftrightarrow k^{q} > k^{\rho}.$$

Таким чином, умова (3.12) виконується при $\rho > 2, q < 2$, тобто у просторі l_ρ^2 також побудовано проєктор P норми 1 такий, що $\|I - P\| > 1$. Отже, теорему доведено для двомірного випадку.

Розглянемо тепер випадок, коли $m > 2$. Простір ℓ_ρ^m тоді можна подати у вигляді:

$$\ell_\rho^m = \ell_\rho^2 \oplus \ell_\rho^{m-2},$$

де

$$x \in \ell_\rho^m = (x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_1, x_2, 0,0, \dots ,0) + (0,0, x_3, x_4, \dots, x_m).$$

У просторі ℓ_ρ^2 діє проєктор P, який ми означили вище, а у просторі ℓ_ρ^{m-2} означимо нульовий проєктор. Отже, проєктор на всьому ℓ_ρ^m буде мати вигляд:

$$\tilde{P} = P \oplus 0.$$

Цей проєктор діє за правилом:

$$\tilde{P}x = P(x_1, x_2, 0,0, \dots ,0) + 0(0,0, x_3, x_4, \dots, x_m) =$$
$$= \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ \dfrac{(1-a) \cdot ax_1}{b} + (1-a) \cdot bx_2 \end{pmatrix} = Px.$$

Знайдемо $\|\tilde{P}\|$:

$$\|\tilde{P}\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\tilde{P}x\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Px\|}{\|x\|} = 1.$$

Запишем проєктор $I - \tilde{P}$ та знайдемо його норму $\|I - \tilde{P}\|$:

$$(I - \tilde{P})x = x - \tilde{P}x = x - Px = (I - P)x;$$

тому

$$\|I - \tilde{P}\| = \|I - P\| > 1.$$

Таким чином, у просторі ℓ_ρ^m при $1 < \rho$ побудовано проєктор, існування якого стверджується у теоремі. ■

У просторі ℓ_1^m має місце аналогічний результат.

Теорема 3.2 При $n \geq 2$ в ℓ_ρ^n існує такий проєктор P, що $\|P\| = 1$, а $\|I - P\| > 1$.

Доведення. У просторі ℓ_1^n задамо проєктор P:

$$Px = \frac{\tilde{x}}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$;

$\tilde{x} = (1,1, \dots ,1)$.

Елементу $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ цей оператор співвідносить елемент Px:

$$x \to Px = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k, \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k, \dots, \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

Покажемо, що P дійсно є проєктором, тобто що виконується умова $P(Px) = Px$:

$$P(Px) = P \cdot \left(\frac{\tilde{x}}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot P\tilde{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \frac{1}{n} \cdot n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k = Px.$$

Знайдемо тепер норму цього проєктора. Оскільки

$$\|Px\| = \left\|\frac{\tilde{x}}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k\right\| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} |x_k| = \|x\| \cdot n \cdot \frac{1}{n} = \|x\|,$$

маємо, що

$$\|Px\| \leq \|x\| \Rightarrow \frac{\|Px\|}{\|x\|} \leq 1.$$

Отже,

$$\|P\| = \sup_{\substack{x_1 \neq 0 \\ x_2 \neq 0}} \frac{\|Px\|}{\|x\|} \leq 1. \tag{3.13}$$

З умови обмеженості оператора P випливає, що для будь-якого $x \in \ell_1^n$ виконується умова $\|Px\| \leq \|P\| \cdot \|x\|$. Ця умова виконується також для $x = \tilde{x}$, тобто $\|P\tilde{x}\| \leq \|P\| \cdot \|\tilde{x}\|$. Оскільки $\|\tilde{x}\| = n$, $P\tilde{x} = \tilde{x}$, $\|P\tilde{x}\| = n = = \|\tilde{x}\|$, отримуємо наступну нерівність:

$$n \leq \|P\| \cdot n;$$
$$1 \leq \|P\|. \tag{3.14}$$

Об'єднуючи умови (3.14) та (3.14), отримуємо, що $\|P\| = 1$.

Запишемо тепер оператор $(I - P)x$:

$$(I - P)x = x - Px = \left(x_1 - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k, \dots, x_n - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

У просторі ℓ_1^n норма елемента $\|(I - P)x\|$ буде мати вигляд:

$$\|(I-P)x\| = \left|x_1 - \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k\right| + \cdots + \left|x_n - \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k\right|.$$

Тоді норма $\|I-P\|$ обчислюється як

$$\|I-P\| = \underset{\|x\|=1}{sup\rho}\,\|(I-P)x\| = \max_{|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=1}\left(\left|x_1 - \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k\right| + \cdots + \right.$$
$$\left. + \left|x_n - \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k\right|\right),$$

де $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = 1 - n$-вимірний куб.

Розглянемо функцію n змінних g, яка має вигляд:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left|x_1 - \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k\right| + \cdots + \left|x_n - \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k\right|.$$

Функція g є лінійною, тому в силу своїй лінійності її часткові похідні не дорівнюють нулю, а значить максимум досягається у вершинах куба, тобто у точках $(1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0,), \ldots, (0,0,\ldots,0,1)$.

Таким чином, маємо:

$$\|I-P\| = \max_{|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=1}\left(\left|x_1 - \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k\right| + \cdots + \left|x_n - \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k\right|\right) =$$
$$= \left|1 - \frac{1}{n}\cdot 1\right| + + \left|0 - \frac{1}{n}\right| + \cdots + \left|0 - \frac{1}{n}\right| = \frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n} = \frac{2\cdot(n-1)}{n} = 2 -$$
$$-\frac{2}{n} > 1.$$

Отже, проєктор, існування якого стверджується в теоремі, побудовано.■

Зауважимо, що у довільному нормованому просторі E, якщо $\|P\| = 1$, тоді

$$\|I - P\| \leq \|I\| + \|P\| = 1 + 1 = 2.$$

Покажемо, що ця оцінка є точною. А саме, має місце наступна теорема.

Теорема 3.3 *Якщо* $\delta_n = sup\{\|I - P\|: P -$ проєктор у просторі ℓ_1^n, $\|P\| == 1\}$, тоді:

$$\lim_n \delta_n = 2.$$

Доведення. Очевидно, що $\forall n \;\; \delta_n \leq 2$. З теореми 3.2 випливає, що

$$\delta_n \geq \frac{2 \cdot (n-1)}{n}.$$

Отримаємо систему:

$$\begin{cases} \lim\limits_n \delta_n \leq 2, \\ \lim\limits_n \delta_n \geq 2, \end{cases} \Rightarrow \lim_n \delta_n = 2 \,.\, ■$$

ВИСНОВКИ

Кваліфікаційна робота була присвячена основним властивостям операторів проєктування у банаховому просторі. Цікавість до таких операторів пояснюється їх широким застосуванням в лінійній алгебрі, геометрії, функціональному аналізі. Зокрема, проєктори дуже зручно застосовувати для дослідження геометричного поняття прямої суми.

У першому розділі розглядалися основні факти теорії банахових просторів, а саме, поняття та приклади задання різних лінійно нормованих просторів, поняття банахового, евклідового, гільбертового, сепарабельного просторів і зв'язок між ними. Оскільки проєктори пов'язані з поданням простору у вигляді прямої суми підпросторів, були наведені факти про розклад лінійного простору в пряму суму двох або декількох лінійних підпросторів, що дало можливість розкладати елемент лінійного простору в суму елементів з підпросторів. Крім того було введено поняття ортогональної суми.

У другому розділі було наведено означення лінійного неперервного оператора та основні його властивості, поняття ядра, множини визначення та образа оператора, норми оператора. Крім того було означено важливий клас лінійних неперервних операторів – проєкторів та розглянуто декілька різних означень проєкторів. Було наведено означення проєктора у лінійному просторі за допомогою властивості ідемпотентності, означення проєктора за допомогою доповнювального підпростору через пряму суму та за допомогою ортогональне доповнення. Крім того, були наведені теореми, які характеризують основні властивості класу операторів проєктування.

Третій розділ було присвячено доведенню основного результату роботи. Добре відомо, що у евклідовому просторі якщо P проєктор норми 1, то P – ортогональний проєктор і норма проєктора $I - P$ також дорівнює 1 (тут I – одиничний оператор). Ми довели в роботі, що у просторі, який не евклідовим, цей факт місця не має. В якості такого простору розглядався скінченновимірний простір ℓ_ρ^m при $1 \leq \rho < +\infty, \rho \neq 2$. Було побудовано приклад такого проєктора P, який задовольняє вимоги твердження.

Крім того, очевидно, що якщо $\|P\| = 1$, тоді $\|I - P\| \leq \|I\| + \|P\| \leq 2$. В останньому розділи роботи ми довели, що ця оцінка є точною.

Результати кваліфікаційної роботи можуть бути застосовані при викладання курсів функціонального аналізу та спецкурсів з математичного аналізу.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Березанський Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функціональний аналіз. Львів : Чижиков І.Е., 2014. 589 с.

2. Кадець В. М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Львів : Чижиков І.Е., 2014. 558 с.

3. Красікова І. В. Функціональний аналіз: навчальний посібник для студентів освітнього рівня «бакалавр» напрямів підготовки «Прикладна математика», «Математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2015. 104 с.

4. Попов М. М. Геометрія банахових просторів: спецкурс для студентів 4 курсу спеціальності «Математика». Чернігів : Рута, 2008. 71 с.

5. Сторож О. Г. Збірник задач з теорії міри і функціонального аналізу. Львів : Чижиков І.Е., 2011. 151 с.

6. Федак І. В. Функціональний аналіз. Івано-Франківськ: Сімик, 2011. 120 с.

7. Peter D. Lax. Functional Analysis. Wiley-Interscience, 2002. 608 с.

8. Erwin Kreyszig. Introductory Functional Analysis with Applications. Wiley, 1989. 704 с.

9. Kôsaku Yosida. Classics in Mathematics. Functional analysis. 6th Edition. Springer, 1995. 501 с.