МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В. О. Лось, Н. К. Максишко, О. І. Макаренко

МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

Навчально-методичний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Економіка» освітньо-професійної програми «Економічна кібернетика»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № __від __.__.2024

Запоріжжя
2024

УДК: 330.4(075.8)
Л 799

Лось В. О., Максишко Н. К., Макаренко О. І. Моделювання економічної динаміки : навчально-методичний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Економіка» освітньо-професійної програми «Економічна кібернетика». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2024. 102 с.

Навчально-методичне видання розроблено з метою надання студентам необхідних знань і навичок із моделювання економічної динаміки. У навчально-методичному посібнику наведено теоретичний матеріал до кожної теми, що розглядається, надано докладні роз’яснення змісту завдань лабораторних робіт. Крім цього, містяться індивідуальні завдання до лабораторних робіт для кожного студента. Для діагностики рівня засвоєння знань запропоновано питання для самоконтролю до кожної розглянутої теми.

Навчально-методичне видання з дисципліни «Моделювання економічної динаміки» сприятиме оволодінню студентами базовими принципами дослідження динамічних систем із метою застосування даного інструментарію у практичній діяльності.

Зміст видання відповідає робочій програмі дисципліни «Моделювання економічної динаміки». Навчально-методичний посібник призначений для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Економіка» освітньо-професійної програми «Економічна кібернетика».

Рецензент

М.М. Іванов, доктор економічних наук, професор кафедри управління персоналом і маркетингу ЗНУ

Відповідальний за випуск

Н.К. Максишко, доктор економічних наук, професор кафедри економічної кібернетики ЗНУ

ЗМІСТ

ВСТУП

Сучасні умови економічного функціонування в Україні характеризуються високим рівнем невизначеності, що збільшує ризики і можливі втрати при ухваленні управлінських рішень. Це призводить до зростання складності економічних процесів і ставить перед управлінням економічними системами нові, більш високі вимоги. Дослідження проявів хаотичної динаміки в економіці, а також виявлення подій катастрофічного характеру, пов’язаних із різкими стрибкоподібними змінами у змінних стану економічних систем, свідчать про те, що застосування класичних методів і моделей у таких умовах є малоефективним. Це вимагає переорієнтації методології моделювання з дослідження процесів стабілізації на вивчення особливостей самоорганізації, з вивчення умов стабільності на функціонування в умовах невизначеності.

Дисципліна «Моделювання економічної динаміки» належить до циклу дисциплін професійної підготовки магістрів спеціальності «Економіка» освітньо-професійної програми «Економічна кібернетика». Цей курс спрямований на вивчення основних концепцій, методів та інструментів моделювання економічних процесів і явищ. Моделювання економічної динаміки є ключовим інструментом для розуміння цих змін та прогнозування їхніх можливих наслідків.

Метою викладання навчальної дисципліни «Моделювання економічної динаміки» є формування системи знань із методології, методики та інструментарію побудови математичних моделей динаміки розвитку економічних процесів, їх аналізу та використання.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Моделювання економічної динаміки» є: оволодіння теоретичними знаннями та практичним інструментарієм щодо методології моделювання динамічних економічних процесів; постановки і самостійного розв’язання задач аналізу, прогнозування, прийняття рішень та управління ризиком із використанням цих моделей; забезпечення необхідного рівню знань та вмінь магістрів для розв’язання оптимізаційних економічних задач на кафедрах університету, підприємствах, фінансових установах.

Згідно з вимогами освітньої програми студенти повинні досягти таких результатів навчання (компетентностей):

– здатність розв’язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми в економічній сфері, які характеризуються комплексністю та невизначеністю умов, що передбачає застосування теорій та методів економічної науки;

– здатність виявляти знання та розуміння проблем предметної області, основ функціонування сучасної економіки на мікро-, мезо-, макро-та міжнародному рівнях;

– здатність збирати, аналізувати та обробляти статистичні дані, науково-аналітичні матеріали, які необхідні для розв’язання комплексних економічних проблем, робити на їх основі обґрунтовані висновки;

– здатність пояснювати економічні та соціальні процеси і явища на основі теоретичних моделей, аналізувати і змістовно інтерпретувати отримані результати;

– здатність самостійно виявляти проблеми економічного характеру при аналізі конкретних ситуацій, пропонувати способи їх вирішення;

– здатність проводити економічний аналіз функціонування та розвитку суб'єктів господарювання, оцінку їх конкурентоспроможності.

Курс передбачає тісний зв'язок із такими навчальними дисциплінами, як: «Вища математика», «Теорія ймовірностей та математична статистика», «Інформаційні технології в управлінні економічними системами», «Прогнозування соціально-економічних процесів», «Економетрика», «Моделі економічної динаміки», «Моделювання економіки».

Після вивчення блоку курсів «Вища математика» та «Теорія ймовірностей та математична статистика» студент повинен володіти теоретичними знаннями та практичними навичками з основ математичного апарату, основних методів кількісного вимірювання, які використовуються під час планування, організації та управління виробництвом, системного аналізу економічних структур та технологічних процесів; мати базові знання з основ застосування ймовірнісно-статистичного апарату.

Після вивчення курсу «Інформаційні технології в управлінні економічними системами» студент повинен володіти теоретичними основами інформатики, мати навички використання прикладних систем оброблення економічних даних та систем програмування для персональних комп'ютерів і локальних комп'ютерних мереж для дослідження соціально-економічних систем. Після вивчення курсу «Економетрика» студент повинен володіти методологією та методикою побудови, аналізу та застосування економетричних моделей економічних процесів. Після вивчення курсу «Прогнозування соціально-економічних процесів» студент повинен володіти базовими знаннями з основ застосування методів прогнозування. Після вивчення курсу «Моделі економічної динаміки» студент повинен знати основні поняття економічної динаміки, мати практичні навички щодо побудови фазових портретів для лінійних динамічних систем. Після вивчення курсу «Моделювання економіки» студент повинен знати якісні властивості економічної системи, кількісні взаємозв'язки показників розвитку мікро- та макроекономіки; вміти будувати економіко-математичні моделі з метою проведення активного системного аналізу соціально-економічних систем, явищ і процесів на макро- та мікроекономічному рівнях.

У навчально-методичному виданні розглядаються основні принципи математичного моделювання динамічних процесів, детермінованого хаосу та дивних атракторів в економічних системах. Також розглянуто види фракталів, фрактальних розмірностей та способи їх обчислення. Наведено етапи фрактального *R/S*-аналізу. Розглянуто методику побудови ARIMA моделей для прогнозування динаміки часових рядів, лінійну динамічну модель довгих хвиль в економіці, факторні моделі, модель Самуельсона-Хікса та модель ринку з прогнозованими цінами.

Запропоноване автором видання сприятиме набуттю студентами практичних навичок щодо аналізу поведінки динамічних систем, а також засвоєнню базових принципів моделювання складних систем із метою застосування цього інструментарію в практичній діяльності.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ ХАОСУ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ЕКОНОМІКИ

Тема 1. Математичне моделювання динамічних процесів

Мета: ознайомитися з основними поняттями економічної динаміки, процесом моделювання та основними типами математичних моделей.

План

1.1 Поняття моделі. Математична модель

1.2 Процес математичного моделювання

1.3 Основні вимоги до математичної моделі

1.4 Типи математичних моделей і методологія конструювання

Основні поняття

Математична модель, типи математичних моделей, моделювання, вимоги до моделі.

1.1 Поняття моделі. Математична модель

Заміна одних об’єктів (оригіналів) іншими (моделями) і дослідження властивостей об’єктів за моделями називається моделюванням.

Поняття «модель» використовується широко й має різні застосування. Під моделлю об’єкта зазвичай розуміють інший об’єкт, що імітує деякий набір властивостей модельованого об’єкта. Модель не може й не повинна повторювати всі характеристики оригінала, інакше губиться сенс моделювання. Основною метою при побудові моделі є можливість отримати результати, що можна застосовувати до початкового об’єкту.

Основна мета при побудові моделі – забезпечити дослідження та аналіз функціонування реального об’єкта. Об’єкт реального світу має величезну кількість властивостей і характеристик, звісно при моделюванні врахувати всі не можливо, тож обирають невелику та скінченну їх аількість. Тому одним із найважливіших завдань є задача виділення основних властивостей й перенесення їх у модель.

Типи моделей. Усі моделі можна поділити на дві категорії: експериментальні й теоретичні. <u>Теоретичні моделі</u> формулюються мовою тієї чи іншої предметної галузі. Розрізняють фізичні, біологічні, економічні моделі тощо. Із цього ряду виділимо математичні моделі. Основною перевагою математичної моделі є можливість досліджувати властивості й поведінку моделі в усіх чи багатьох ситуаціях, спираючись на формальні методи. Використовуючи розроблений математичний апарат, можна спробувати вийти за межі побутової логіки та отримати якісно нові результати. Безкомпромісна точність математичних методів допомагає визначити ступінь прийнятності отриманих результатів (реально математичні результати занадто жорсткі, що заважає їх використанню на практиці).

З іншого боку, обчислювальні експерименти на основі математичних моделей дозволяють докладно та глибоко вивчати об'єкти в обсязі, недоступному теоретичним методам.

Математичне моделювання стає особливо значущим тоді, коли об'єкт дослідження є в одиничному екземплярі, натурний експеримент дуже тривалий або його вартість занадто висока.

Створення математичної моделі є творчим процесом, оскільки для того самого об'єкта можна побудувати кілька нееквівалентних моделей. Дослідник може взяти за основу той чи інший набір характеристик. Той самий об'єкт можна описати, використовуючи різний математичний апарат. Наприклад, вибрати неперервну або дискретну, детерміновану або стохастичну модель. Цей вибір визначає як метод дослідження, так і (опосередковано) можливість отримати ті чи інші результати.

Унаслідок різних підходів до створення математичних моделей розрізняють структурну і функціональну моделі. Структурна модель із деякою точністю імітує внутрішню будову об'єкта. При її побудові структуру об'єкта спрощують. У результаті модель повторює поведінку об'єкта на деякій множині вхідних впливів.

Для побудови функціональної моделі використовують результати спостережень за об'єктом, що моделюється в різних ситуаціях за різних впливів. Структуру об'єкта при цьому не аналізують. Така математична модель повторює поведінку об'єкта (зміну характеристик, що моделюються) у випадках, для яких є результати спостережень.

Обидва типи моделей мають переваги й недоліки. Функціональну модель зазвичай побудувати легше, але вона може втратити адекватність за межами області експериментального дослідження. З іншого боку, складніший структурний підхід дозволяє створити модель, що залишиться адекватною в багатьох випадках.

1.2 Процес математичного моделювання

Процес математичного моделювання має складну структуру, де кожен етап взаємодіє з іншими, а результати одного етапу визначають результати і можливість перебігу інших. Розглянемо основні етапи математичного моделювання.

Аналіз предметної області. На цьому етапі визначають об'єкт дослідження, виділяють усі компоненти середовища, в якому перебуває об'єкт, аналізують вплив середовища й можливі стани об'єкта

Побудова моделі предметної області. На наступному етапі формулюють модель предметної області. Уже в цей момент об'єкт дослідження замінюють його образом – моделлю. У моделі описують, які властивості об'єкта важливі з погляду дослідника. Якщо будують структурну математичну модель, то в моделі предметної області описують структурні компоненти об'єкта, їх взаємозв'язки, типи вхідних впливів і вихідні сигнали.

Математичне формулювання задачі. На основі предметної області будують математичну модель. Математична модель існує у формі записів із використанням прийнятих математичних символів і відображає властивості об'єкта – закони, яким він підпорядковується, зв'язки, що властиві його складовим частинам, тощо.

Вибір методу досліджень. Теоретичне дослідження. Для дослідження записаної математичної моделі дослідник підбирає відповідний математичний апарат. Використовуючи вибрані теоретичні методи, можна отримати нові знання про об'єкт.

Математична модель. Числовий експеримент. Математичну модель можна будувати як на основі створеного формального опису процесу, так і прямо використовуючи модель предметної області. Математичні моделі, призначені для безпосереднього використання, називають імітаційними.

Математичну модель треба адаптувати для застосування числових методів. Так, для неперервної моделі будують дискретний аналог.

Тестування моделі. Як для математичної, так і для кібернетичної моделі треба визначити ступінь адекватності, тобто відповідність моделі до модельованого об'єкта. Під адекватністю розуміють, з одного боку, правильний якісний опис реального об'єкта. Зокрема, стійкість динаміки моделі має підтверджуватися стійкістю оригінала, і навпаки. З іншого боку, у випадках, коли це можливо, модель повинна правильно описувати об'єкт із кількісного погляду за заданими характеристиками з достатньою точністю.

Не для всіх моделей розумно вимагати кількісної адекватності. Зокрема, для соціологічних чи деяких економічних моделей важливим є адекватний опис принципів поведінки соціальних груп або економічних агентів, відповідно, а не їх кількісні характеристики.

Аналіз та інтерпретація результатів. На підставі результатів теоретичного дослідження й числових експериментів у термінах предметної області треба сформулювати певні закономірності. Це можуть бути прогнози на майбутнє, умови ефективності тих чи інших управлінських рішень, визначення найкращих (оптимальних) параметрів функціонування об'єкта (системи) тощо.

1.3 Основні вимоги до математичної моделі

Для того, щоб бути корисною, математична модель повинна задовольняти деякі вимоги, що мають рекомендаційний суб'єктивний характер. Розглянемо вимоги, які зазвичай задовольняє якісна математична модель.

Вимога адекватності. Модель повинна задовольняти умову адекватності відносно вибраної системи характеристик. Під адекватністю моделі розуміють:

– якісний опис об'єкта за вибраними характеристиками (наприклад, стійкість руху моделі свідчить про стійкість реального об'єкта;

– якісний опис за вибраними характеристиками з деякою розумною мірою точності.

Отже, адекватність визначається не тільки об'єктом і моделлю, а також заданою множиною характеристик, що моделюються. Іноді кажуть про міру адекватності моделі, розуміючи під цим частку істинності моделі відносно вибраної множини характеристик.

Невраховані фактори. Формулюючи математичну модель, завжди нехтується низка факторів, які особа, що приймає рішення вважає неістотними. Інші характеристики об'єкта дослідження ідеалізуються. Існує поняття стійкості (грубості) моделі, що означає здатність моделі зберігати якісні властивості при застосуванні в реальному середовищі. Звісно, існує деякий інтервал параметрів, на якому не можна чітко визначити, яка модель адекватніша – стійка чи нестійка.

Простота та оптимальність моделі. Вимогу простоти та оптимальності складно формалізувати. Під простотою варто розуміти обсяг зусиль, що повинен докласти дослідник для вивчення моделі. У цілому простота й адекватність – суперечливі властивості. Для поліпшення адекватності може виникнути потреба у громіздкій системі з великою кількістю рівнянь, які складно досліджувати. Модель достатньо проста, якщо сучасні методи дослідження дають можливість із розумними витратами й задовільною точністю робити якісний і кількісний аналіз вибраних характеристик та осмислювати результат.

Ієрархія змінних. Значущість змінних і параметрів може бути різною. Змінні, що з'являються в головних залежностях, називають основними, а інші – другорядними.

Особливо важливою є класифікація змінних за темпом зміни у часі. При постановці задачі визначають деякі характерні значення – основні масштаби шкали часу та шкали простору. Виходячи із заданої часової шкали розрізняють нормальні, повільні та швидкі змінні. Повільні змінні можна брати в моделі за параметри.

Швидкі змінні поділяють на короткочасні й тривалі. Перші легко замінити середніми значеннями. Другі відіграють важливу роль при аналізі перехідних процесів, що пов'язують один сталий режим з іншим.

За аналогією змінні класифікують також за просторовим впливом: близькі, далекі, дуже далекі. Таким чином установлюють деяку ієрархію змінних. Часто ефективним методом розв'язання задач може бути перехід від складної моделі з великою кількістю мікрозмінних до простішої з невеликою кількістю макрозмінних.

Інші вимоги. Дослідники зазначають інші фактори, що впливають на властивості й розвиток моделі – феноменологічні й напівемпіричні закони. Ці закони існують у предметній області і від того, чи виконуються вони, залежить адекватність моделі.

1.4 Типи математичних моделей і методологія конструювання

Основою моделювання є теорія подібності, яка стверджує, що абсолютна подібність має місце лише за умови заміни одного об'єкта іншим, точно таким самим. При моделюванні абсолютна подібність не має місця, вимагається лише, щоб модель достатньо адекватно відображала властивості функціонування об’єкта, що досліджується. Залежно від характеру процесів типи математичного моделювання можна поділити на детерміновані та стохастичні, статичні й динамічні, дискретні, дискретно-неперервні й неперервні (рис. 1.1).

Вигляд математичної моделі залежить не тільки від природи реального об’єкта, але також від задач і можливостей дослідника, необхідної достовірності й точності розв’язання задачі.

Детерміноване моделювання	відображає детерміновані процеси, тобто процеси, в яких припускають повну відсутність випадкових впливів
Стохастичне моделювання	відображає ймовірнісні події та процеси. При моделюванні аналізують низку реалізацій випадкового процесу та оцінюють його характеристики, тобто набір однорідних реалізацій
Статичне моделювання	передбачає незмінність досліджуваного явища в часі. Будують математичну модель, що відображає поведінку об’єкта в цілому
Динамічне моделювання	служить для опису поведінки об’єкта в будь-який довільний змінний момент часу
Дискретні, дискретно-неперервні й неперервні математичні моделі	є конкретизацією динамічних моделей. Частіше за все використовують системи звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь із частинними похідними, різницеві рівняння

Рисунок 1.1 – Типи математичного моделювання

Математичне моделювання можна поділити на аналітичне та імітаційне. Під аналітичним моделюванням зазвичай розуміють власне розробку математичного апарату, тобто запис функціональних співвідношень. Отримані співвідношення вивчають формальними методами математичних досліджень. При імітаційному моделюванні на підставі вибраної математичної моделі та алгоритму її реалізації проводять обчислювальні експерименти, що дає змогу кількісно оцінювати адекватність вибраної моделі та прогнозувати поведінку реального об’єкта.

При розробці математичних моделей використовуються різні підходи залежно від завдання, яке необхідно вирішити та конкретної галузі науки чи інженерії. Розглянемо деякі загальні підходи.

Емпіричний підхід – базується на зборі та аналізі експериментальних даних, модель розробляється на основі спостережень і якнайточніше відображає відомості, отримані з експерименту.

Аналітичний підхід – використовує аналітичні методи для розв’язання математичних рівнянь, які описують систему.

Системний підхід – розглядає систему як цілісну структуру та аналізує взаємодію її складових частин. Моделі розробляються для вивчення взаємозв’язків та впливу одних частин системи на інші.

Статистичний підхід – заснований на використанні статистичних методів для аналізу даних та виявлення патернів. Цей підхід допомагає моделювати стохастичні процеси та прогнозувати результати на основі ймовірності.

Комп’ютерне моделювання – використовує комп’ютерні технологій для створення чисельних моделей систем, які можуть бути аналізовані та симульовані. Цей підхід дозволяє моделювати складні системи та проводити чисельні експерименти.

Геометричний та графічний підхід – використовує геометричні та графічні методи для створення моделей, особливо в сферах, де важливо візуально відобразити систему.

Агентне моделювання – моделювання системи шляхом визначення індивідуальних агентів і вивчення їх взаємодії.

Оптимізація – моделювання задач оптимізації, де необхідно знайти найкращий розв’язок за певними критеріями.

Дискретний або неперервний підхід – залежно від природи системи і завдань використовуються різні типи моделей (дискретні або неперервні).

Ці підходи можуть комбінуватися для досягнення більш точних та комплексних результатів у розробці математичних моделей.

Питання для самоконтролю

1. Що розуміється під моделлю об’єкта?
2. Назвіть типи економічних моделей.
3. Назвіть основні етапи математичного моделювання.
4. Назвіть основні вимоги до побудови математичних моделей.
5. Що розуміється під вимогою адекватності?
6. Назвіть основні типи математичного моделювання.
7. Що розуміється під аналітичним моделюванням?
8. Що розуміється під імітаційним моделюванням?
9. Які підходи використовуються при розробці математичних моделей?

Тема 2. Детермінований хаос. Дивні атрактори

Мета: ознайомитися з основними поняттям детермінованого хаосу в економічних системах.

План

2.1 Дивний атрактор: дивний світ біфуркації та дивні атрактори

2.2 Поняття детермінованого хаосу в економічних системах

2.3 Дивні атрактори

Основні поняття

Біфуркація, атрактор, дивний атрактор, детермінізм, хаос, детермінований хаос, економічна система.

2.1 Дивний світ біфуркації та дивні атрактори

Біфуркації та дивні атрактори – це поняття, які десятиліттями привертали увагу математиків, фізиків та інших вчених. Ці математичні структури можна використовувати для пояснення широкого спектру фізичних явищ, від форми сніжинок до поведінки фондового ринку (рис. 2.1). Вивчення біфуркацій і дивних атракторів є складною галуззю, яка вимагає глибокого розуміння математики та фізики, але це також галузь, яка пропонує велику кількість уявлень про поведінку складних систем.

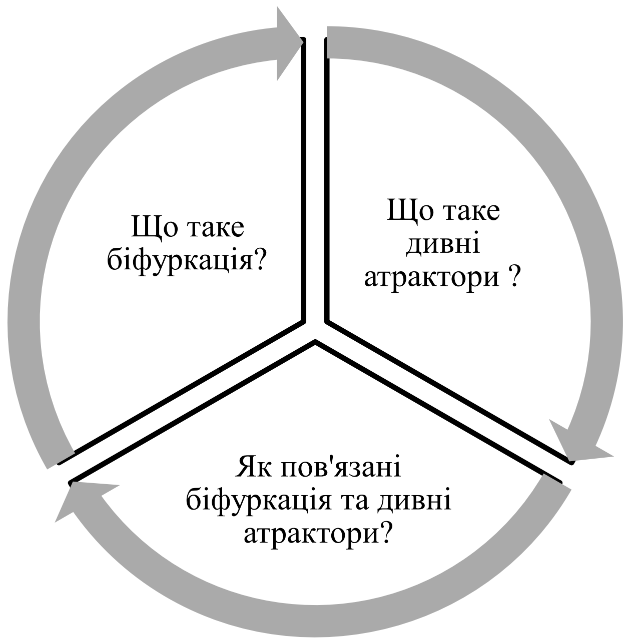


Рисунок 2.1 – Біфуркація та дивні атрактори

Тож, що таке біфуркація? Біфуркація – це точка динамічної системи, де змінюється стійкість системи. Біфуркації виникають, коли невелика зміна параметра системи викликає **якісну** зміну поведінки системи.

Точка біфуркації є ключовим поняттям у теорії хаосу, оскільки вона позначає точку, в якій поведінка системи зазнає якісного зрушення. У цей момент система переходить з одного стану в інший, і її поведінка стає більш складною і менш передбачуваною. Точку біфуркації можна розглядати як свого роду переломну точку, з якої система може увійти в стан хаосу або детермінованості, залежно від початкових умов. Для кращого розуміння точки біфуркації, розглянемо рис. 2.2.

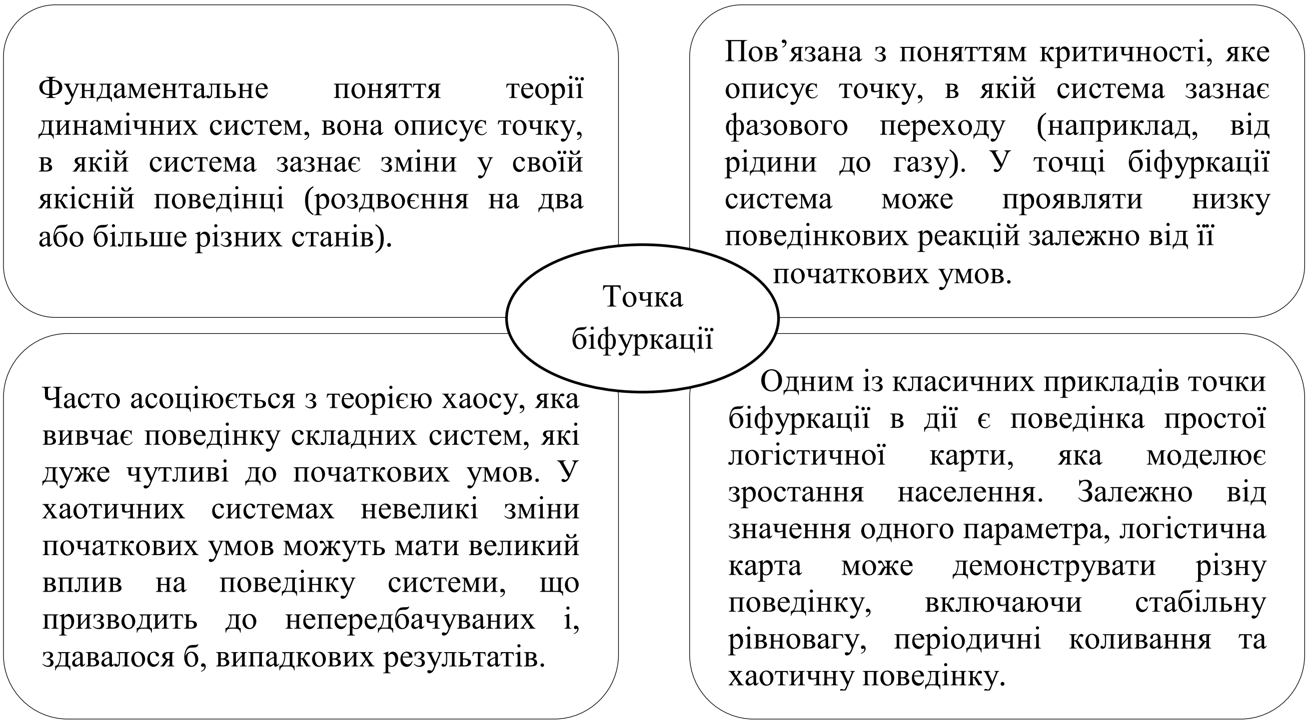


Рисунок 2.2 – Точка біфуркації

Отже, точка біфуркації є ключовим поняттям в теорії хаосу, що представляє точку, в якій система переходить з одного стану в інший. Розуміючи динаміку точки біфуркації, ми можемо отримати уявлення про поведінку складних систем і умови, за яких вони стають хаотичними або впорядкованими.

Теорія біфуркацій – це розділ математики, який вивчає раптові зміни в якісній поведінці системи при зміні параметра. Біфуркації можуть привести до широкого діапазону явищ, від простих періодичних коливань до складної хаотичної поведінки. Розуміння біфуркацій є важливим для розуміння поведінки багатьох складних систем, від погоди до фондового ринку.

Існує багато різних типів біфуркацій, але одним із найважливіших є біфуркація подвоєння періоду. У цій біфуркації система, яка раніше коливалася з одним періодом, раптом починає коливатися з двома періодами. Це може привести до широкого діапазону складної поведінки, включаючи хаос. Розглянемо ключові ідеї для розуміння біфуркацій (рис. 2.3).

Прикладом системи, що демонструє біфуркацію подвоєння періоду, є логістична карта, яка є простою математичною моделлю зростання населення. Зі збільшенням параметра в логістичній карті система зазнає серії біфуркацій подвоєння періоду, що зрештою призводить до хаотичної поведінки.

Загалом, розуміння біфуркацій має важливе значення для розуміння поведінки багатьох складних систем і має важливе застосування в різних галузях від фізики до біології та економіки.

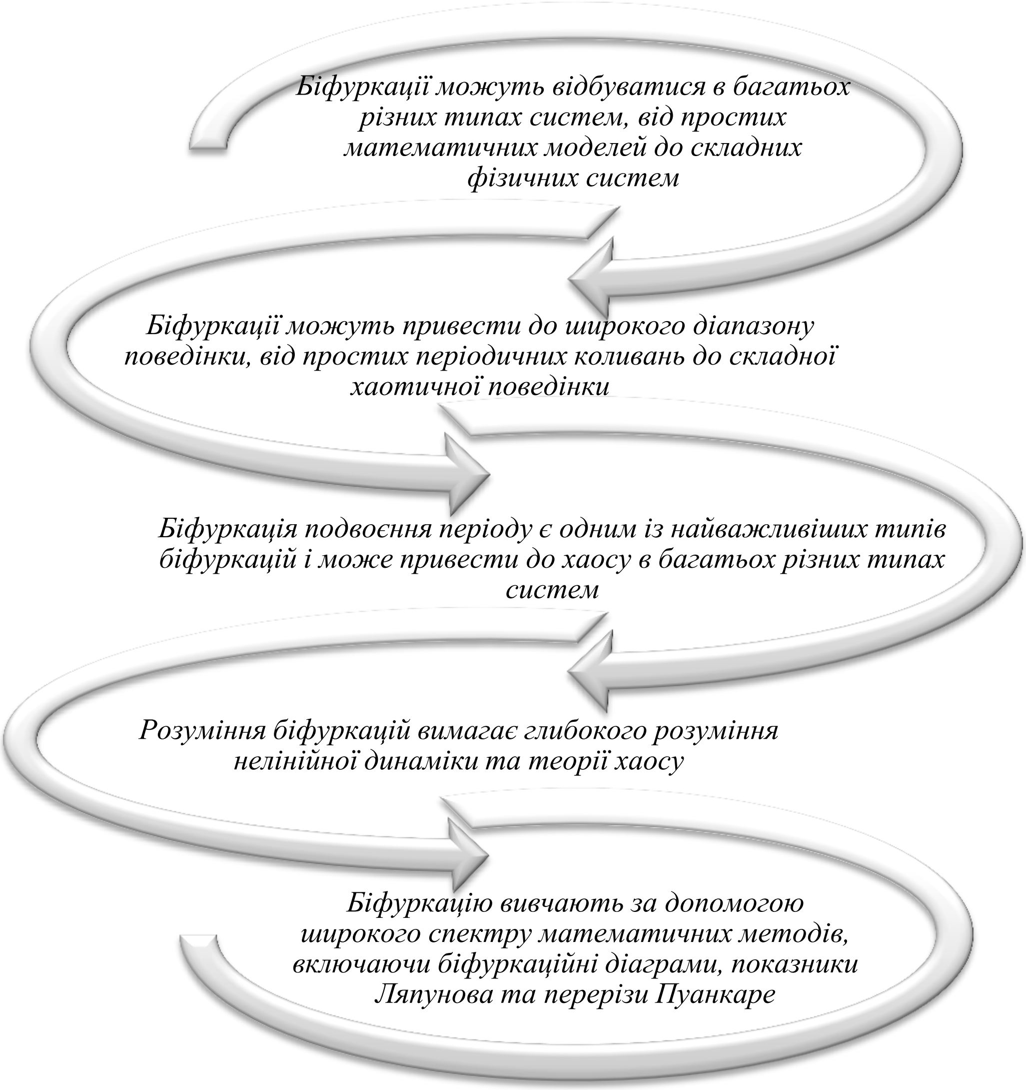


Рисунок 2.3 – Ключові ідеї для розуміння біфуркацій

Дивні атрактори – це складні моделі , які можуть виникати в динамічних системах. Їх називають «дивними», тому що вони демонструють неперіодичну поведінку, чутливу до початкових умов. Іншими словами, дві системи, які починаються дуже близько одна до одної, можуть закінчитися в дуже різних місцях. Дивні атрактори часто можна побачити в хаотичних системах, де невеликі зміни початкових умов можуть привести до абсолютно різних результатів. Одним із відомих прикладів дивного атрактора є атрактор Лоренца, який використовується для моделювання погодних умов.

Виникає питання: як пов’язані біфуркації та дивні атрактори? Біфуркації та дивні атрактори пов’язані між собою, оскільки обидва є способами, за допомогою яких динамічні системи можуть демонструвати складну поведінку. Роздвоєння може привести до створення дивних атракторів, а дивні атрактори можуть з'являтися в точках біфуркації. Вивчення біфуркацій і дивних атракторів є важливим, оскільки воно може допомогти нам зрозуміти поведінку складних систем, від погоди до фондового ринку. Вивчаючи ці математичні структури, ми можемо отримати уявлення про основну динаміку системи та робити прогнози щодо її майбутньої поведінки.

Вивчення теорії хаосу та нелінійної динаміки забезпечило нас потужною основою для розуміння поведінки складних систем. Від витоків теорії хаосу в роботі Пуанкаре до сучасних застосувань у таких галузях, як економіка та розробка програмного забезпечення, ці концепції мали глибокий вплив на наше розуміння світу навколо нас.

Дослідження біфуркацій має довгу та багату історію, починаючи з роботи Анрі Пуанкаре в кінці 19 століття (рис. 2.4). Відтоді багато математиків і вчених зробили внесок у наше розуміння біфуркацій, у тому числі Андрій Колмогоров, Стівен Смейл і Мітчелл Фейгенбаум.

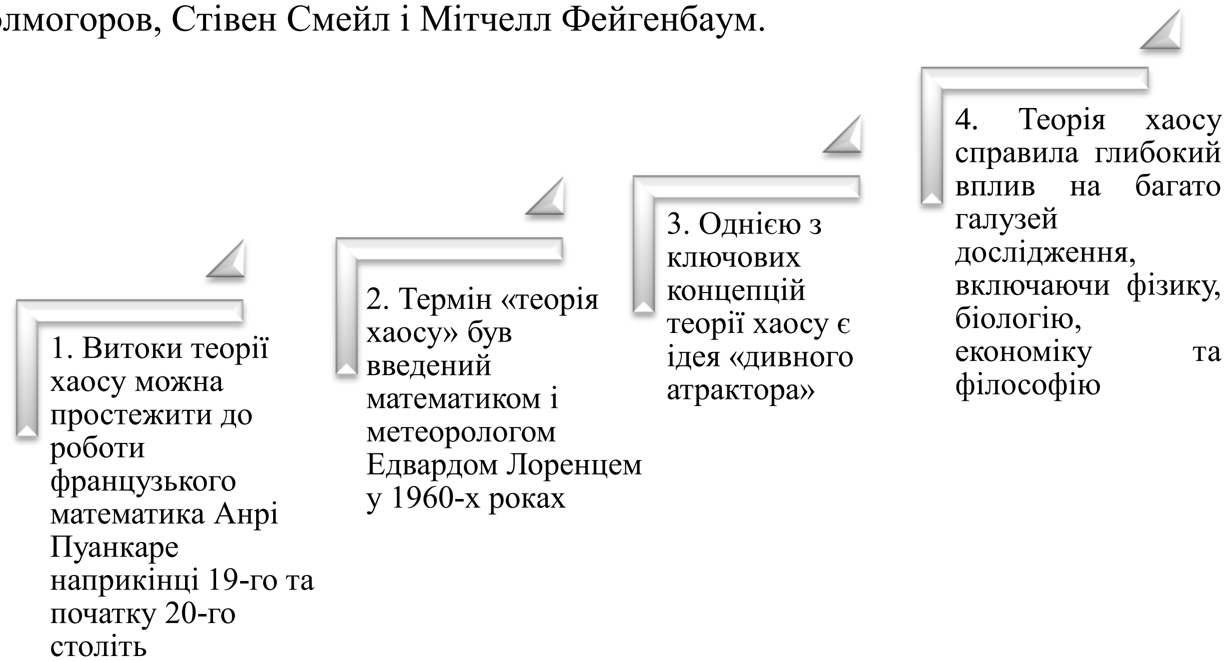


Рисунок 2.4 – Коротка історія вивчення теорії хаосу та нелінійної динаміки

Пуанкаре зацікавила проблема трьох тіл, яка передбачає моделювання руху трьох небесних тіл у просторі. Він виявив, що навіть невеликі зміни в початкових умовах системи можуть привести до кардинально різних результатів із часом. Пізніше ця ідея стане відомою як ефект метелика. Сам термін «теорія хаосу» був введений математиком і метеорологом Едвардом Лоренцем у 1960-х роках. Лоренц вивчав погодні умови і виявив, що навіть невеликі зміни початкових умов можуть привести до значної зміни погодних умов із часом. Він використав знамениту фразу «метелик змахує крилами в Бразилії і викликає торнадо в Техасі», щоб проілюструвати ідею про те, що невеликі зміни в одній частині системи можуть мати великі наслідки в іншому місці. А однією з ключових концепцій теорії хаосу є ідея «дивного атрактора». Це математичний об'єкт, який описує довготривалу поведінку нелінійної системи. Дивні атрактори часто мають фрактальну природу, тобто вони демонструють самоподібність у різних масштабах. Їх можна використовувати для моделювання широкого спектру складних систем, від фондового ринку до людського серця.

Теорія хаосу справила глибокий вплив на багато галузей дослідження, включаючи фізику, біологію, економіку та філософію. Це привело до нового розуміння поведінки складних систем і кинуло виклик традиційним уявленням про передбачуваність і детермінізм. Це також надихнуло на нові підходи до вирішення проблем і прийняття рішень (зокрема, використання «інженерії хаосу» у розробці програмного забезпечення).

2.2 Поняття детермінованого хаосу в економічних системах (Детермінований хаос: наука і фантастика)

Хаотичні процеси в детермінованих нелінійних системах – одна з фундаментальних проблем досліджень економічних явищ. Можливість хаотичних процесів передбачав А. Пуанкаре: «У нестійких системах, незначна причина, що непомітна для спостереження за своєю малістю, викликає значну дію, яку неможливо передбачити». Розвиток ідей Пуанкаре призвів до створення фундаменту хаотичної динаміки детермінованих систем. Було встановлено, що необхідною умовою виникнення хаосу в динамічних системах є розмірність фазового простору $n > 2$, тобто коли стан системи характеризується мінімум трьома змінними.

Одним із самих значних наукових відкриттів останніх десятиліть є відкриття детермінованого хаосу в динамічних системах. Суть цього відкриття полягає в тому, що повністю визначена (детермінована) динамічна система, при відсутності будь-яких випадкових впливів на неї, починає вести себе непередбаченим (хаотичним) чином. Проте у цієї непередбачуваності (хаотичності) при більш ретельному розгляді вдається виявити низку закономірностей у поведінці системи, що відрізняє дане явище від класичних випадкових процесів. На відміну від класичних випадкових процесів, явище детермінованого хаосу може бути багаторазово відтворене в натурних і лабораторних експериментах.

Найбільш істотно те, що детермінований хаос не є якимось винятковим режимом поведінки динамічних систем, навпаки, такі режими спостерігаються в дуже багатьох динамічних системах, які розглядаються в математиці, фізиці, хімії, біології, медицині та економіці. Такі детерміновані хаотичні режими інколи є більш типовими режимами, ніж повністю передбачувані (регулярні) режими. Можна сказати, що оточуючий нас матеріальний світ «повністю занурений у хаос».

Явища детермінованого хаосу можливі тільки в нелінійних системах. Тому, з відкриттям детермінованого хаосу, повністю розвіялися раніше існуючі ілюзії про можливість будь-якого адекватного опису реальних процесів за допомогою лінійних математичних моделей. Погляд на нелінійні системи як на деяке «косметичне» удосконалення лінійних моделей беззастережно іде в минуле.

Що являє собою явище детермінованого хаосу? Дамо визначення поняттям «детермінованість» та «хаос», а потім визначимо зміст терміна «детермінований хаос».

Детермінованість – це однозначний взаємозв’язок причини та наслідків: якщо задано деякий початковий стан системи в момент часу t_0, то він однозначно визначає стан системи в будь-який наступний момент часу $t>t_0$.

У загальному випадку залежність майбутнього стану економічної системи $x(t)$ від початкового $x(t_0)$ можна записати у вигляді:

$$x(t) = F\left[x(t_0)\right] \tag{2.1}$$

де F – детермінований закон, що здійснює строго однозначне перетворення початкового стану економічної системи $x(t_0)$ у майбутній стан $x(t)$ для будь-якого $t>t_0$.

Розглянемо поняття хаосу на прикладі експерименту з броунівською часткою. Помістимо частку в момент часу $t = t_0$ у розчин рідини і за допомогою мікроскопу почнемо фіксувати зміну її положення в часі, визначаючи координати частки через рівні інтервали Δt. Під дією випадкових поштовхів з боку навколишніх молекул, частка буде робити нерегулярні блукання, що характеризуються заплутаною траєкторією. Повторивши експеримент кілька разів, можна зробити такі висновки:

– щоразу траєкторія поводження системи складна та неперіодична;
– будь-яка спроба однозначного повторення експерименту приводить до негативного результату.

Класичне явище руху броунівської частки, дає чіткі фізичні уявлення про хаос як непередбачуваний, випадковий процес. Поняття хаосу означає, що зміна стану системи протягом часу є випадковою (її не можна однозначно визначити) та не відтворюваною (процес не можна повторити).

Отже, детермінізм асоціюється з повною передбачуваністю та відтворюваністю поводження системи, хаос – з повною непередбачуваністю та не відтворюваністю.

Для того, щоб визначити зміст поняття «детермінований хаос», дамо визначення стійкого та нестійкого стану рівноваги.

Якщо під незначним зовнішнім впливом динамічна система відхиляється від свого стану рівноваги і ці відхилення з часом згасають, а система прагне до свого стану рівноваги, то така ***рівновага є стійкою***. Якщо ж початкові незначні зрушення протягом часу збільшуються, то такий стан рівноваги називається ***нестійким***.

Важливою властивістю систем із нестійким режимом поведінки є нелінійність. Порушивши стан рівноваги такої системи малим зовнішнім впливом, будемо спочатку фіксувати збільшення відхилень доти, поки в дію не вступить механізм нелінійного обмеження. Після цього процес нарощування відхилень припиняється. Внаслідок обмеженості ресурсів системи, це нарощування повинно припинитися та змінитися на зменшення амплітуди відхилення.

Припустимо, що аналізується двовимірна диференційна динамічна система. Простір її станів – фазова площина з координатами x_1 і x_2. Якщо первісне незначне відхилення системи від стану рівноваги спочатку буде збільшуватися, а в результаті нелінійного обмеження далі зменшуватися, то можливі два варіанти сценаріїв розвитку:

– поява нових стійких станів рівноваги поблизу нестійкого;

– перехід у новий режим, що відповідає періодичним коливанням.

Другий варіант показаний на рис. 2.5.

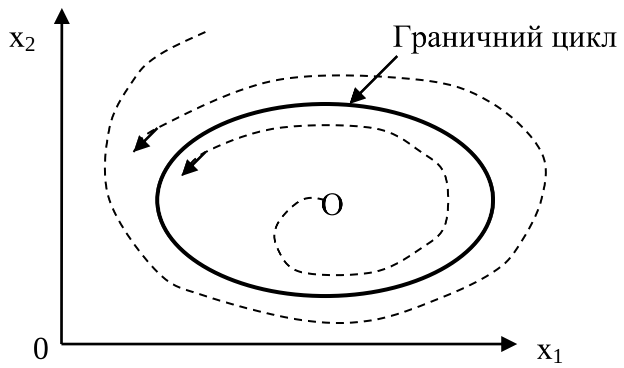


Рисунок 2.5 – Нелінійні обмеження для двовимірної динамічної системи

При незначному початковому відхиленні положення системи від точки рівноваги **О**, подальший її розвиток відбувається по спіралі, поступово віддаляючись від стану рівноваги. Якщо початкові відхилення системи від стану рівноваги значні, то траєкторія її розвитку протягом часу наближається до точки рівноваги.

Замість нестійкого стану рівноваги з'являється новий режим – *періодичні автоколивання*, яким відповідає граничний цикл на фазовій площині.

Розглянемо динамічну систему, стан якої характеризується трьома незалежними змінними (фазовими координатами) у тривимірному фазовому просторі. Траєкторія розкручується, віддаляючись від особової точки системи по спіралі. Досягши деяких значень, згідно дії механізму нелінійного обмеження, траєкторія знову наблизиться до свого вихідного положення. Через нестійкість, описаний процес буде повторюватися (рис. 2.6).

Можливі два варіанти поводження такої системи:

– протягом деякого часу траєкторія системи буде замикатися, демонструючи наявність складного, але періодичного процесу;

– траєкторія буде відтворювати деякий аперіодичний процес, якщо при будь-якому *t* замикання не відбудеться.

Другий варіант відповідає режиму детермінованого хаосу:

– майбутній стан системи однозначно визначається її початковим станом;

– процес розвитку системи складний, неперіодичний, зовні нічим не відрізняється від випадкового.

Важливо відзначити, що на відміну від випадкового, описаний процес цілком відтворюваний. Якщо систему повернути до її початкового стану, то, зважаючи на наявність детермінованості, ми знову відтворимо ту ж саму траєкторію незалежно від ступеня її складності.

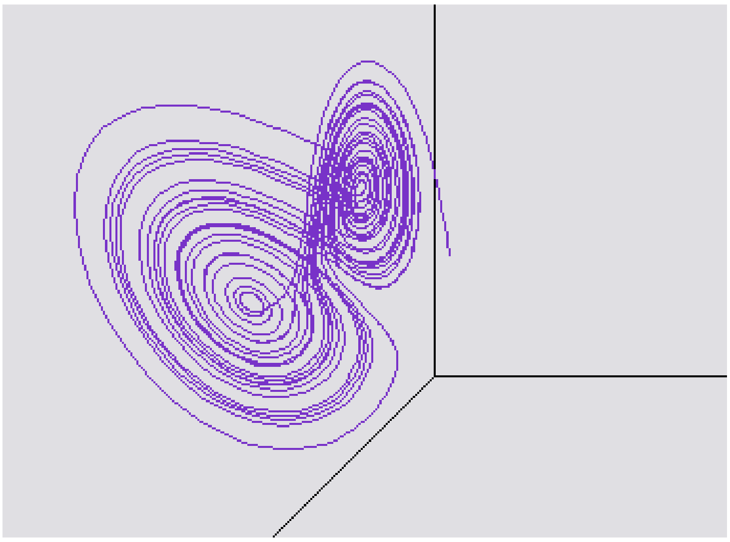


Рисунок 2.6 – Дія нелінійних обмежень для тривимірної динамічної системи

У випадках нестійкого стану рівноваги детермінованих нелінійних систем, однозначно прогнозувати її майбутній стан можна тільки у випадку абсолютно точного завдання початкових умов. Однак, якщо враховувати можливість якої завгодно малої помилки, то детерміноване прогнозування стає неможливим – головною властивістю динамічних систем, що демонструють режим детермінованого хаосу, є чуттєва залежність режиму функціонування до яких завгодно малих змін початкових умов. Саме ця обставина веде до втрати детермінованої передбачуваності та необхідності вводити імовірнісні характеристики для опису динаміки таких систем.

Математичним образом детермінованого хаосу найчастіше виступають так звані ***дивні атрактори*** – складним чином утворені граничні множини у фазових просторах динамічних систем. Перший дивний атрактор було побудовано американським дослідником Е.Н. Лоренцем у 1963 році при вивченні процесів теплообміну в рідині.

2.3 Дивні атрактори

Незадовільні результати аналітичних прогнозувань кризових економічних явищ змушують фахівців звертатися до нетрадиційних методів опису динаміки розвитку і передбачення, зокрема до методів теорії детермінованого (невипадкового і закономірного) хаосу. Теорія хаосу, яка ґрунтується на нелінійній динаміці, описує поведінку динамічних систем, які надзвичайно чутливі до початкових умов і минулого шляху розвитку для кожної системи окремо.

Математичним образом детермінованого хаотичного режиму функціонування динамічної системи є ***атрактор*** – гранична траєкторія, яка являє собою точки у фазовому просторі, до яких прагнуть усі вихідні режими. Якщо такий режим є стійким станом рівноваги, то атрактор системи буде представлений особовою точкою; якщо це стійкий періодичний рух – атрактором буде замкнута крива, яка зветься ***граничним циклом***.

Раніше вважалося, що атрактор – це образ винятково стійкого режиму функціонування системи. Сучасні погляди говорять про те, що режим детермінованого хаосу також є атрактором, в контексті визначення граничної траєкторії в обмеженій області фазового простору. Однак такий атрактор має дві суттєві відмінності: траєкторія такого атрактору неперіодична (вона не замикається) і режим функціонування нестійкий (малі відхилення від початкового стану рівноваги нарощуються в часі). Ці ***атрактори*** отримали назву ***дивних***.

Дивний атрактор – це поняття в теорії хаосу, яке стосується набору хаотичної, неповторюваної та все ж обмеженої поведінки в динамічній системі. Дивний атрактор – математична модель детермінованих неперіодичних процесів, для яких неможливий довгостроковий прогноз. Дивні атрактори своєю чергою поділяються на три групи: гіперболічні, атрактори типу Лоренца і квазіатрактори.

Дивний аттрактор – це аттрактор, який не є регулярним. Серед дивних атракторів часто зустрічаються хаотичні атрактори, в яких прогнозування траєкторії, що потрапила в атрактор, ускладнене, оскільки мала неточність у початкових даних через деякий час може призвести до сильної розбіжності прогнозу з реальною траєкторією. Інтуїтивне пояснення дивного атрактора полягає в тому, що він представляє довготривалу поведінку системи, яка демонструє хаотичну динаміку. Незважаючи на те, що поведінка системи є непередбачуваною та неповторюваною, вона все ще обмежена певною областю фазового простору, створюючи впізнаваний шаблон. Цей візерунок є «дивним», тому що він не розміщується у фіксованій точці чи періодичній орбіті, а скоріше утворює складну, часто фрактальну структуру. Дивні атрактори захоплюють, оскільки вони можуть виникати в, здавалося б, простих системах і мають важливе значення для розуміння поведінки складних систем у природі та системах, створених людиною.

Непередбачуваність траєкторії в детермінованих динамічних системах називають динамічним хаосом, відрізняючи його від стохастичного хаосу, що виникає в стохастичних динамічних системах. Це явище також називають ефектом метелика, маючи на увазі можливість перетворення слабких турбулентних потоків повітря, викликаних помахом крил метелика в одній точці планети в потужне торнадо на іншій її стороні внаслідок багаторазового їх посилення в атмосфері за деякий час. Швидка розбіжність двох близьких у початковий момент часу траєкторій означає дуже велику чутливість рішень до малої зміни початкових умов. Цим зумовлені великі труднощі, чи, навіть, неможливість середньострокових та довгострокових прогнозів поводження нелінійних динамічних систем.

Коли ми заглиблюємося у світ біфуркацій і дивних атракторів, ми натрапляємо на атрактор Лоренца, захоплююче прикладне дослідження хаотичних систем. Атрактор Лоренца відкрив Едвард Лоренц, американський математик, який вивчав рівняння Нав'є-Стокса, що описує рух рідин. Лоренц намагався створити модель, яка могла б точно передбачити погодні умови, але замість цього він натрапив на щось зовсім несподіване. Він виявив, що навіть проста система, як та, над якою він працював, може демонструвати нерегулярну, непередбачувану поведінку (рис. 2.7).

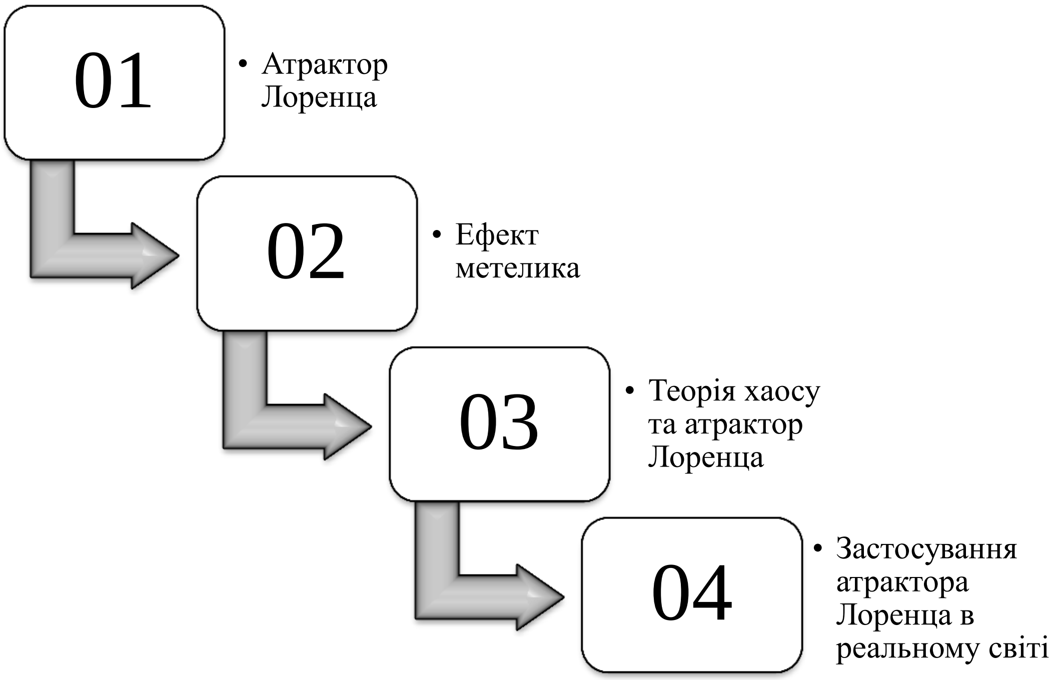


Рисунок 2.7 – Дослідження в хаотичних системах

Атрактор Лоренца, дивний і красивий об'єкт, це набір із трьох диференціальних рівнянь, які описують спрощену модель конвекції в атмосфері. Результуюча геометрична форма атрактора Лоренца являє собою тривимірну фігуру, схожу на метелика, що складається з двох крил, які обертаються по спіралі в протилежних напрямках. Атрактор Лоренца захоплює, тому що це дивний атрактор, він має фрактальну структуру та демонструє самоподібність у різних масштабах. Атрактор Лоренца є прекрасним прикладом того, як прості рівняння можуть породжувати складну та непередбачувану поведінку.

Атрактор Лоренца також відомий тим, що породив концепцію ефекту метелика. Ефект метелика – це ідея про те, що невелика зміна в одній частині системи може мати великий вплив на іншу частину системи. Лоренц виявив, що навіть незначні зміни в початкових умовах його моделі можуть привести до дуже різних результатів. Це означає, що навіть якби ми мали досконале знання початкових умов системи, ми все одно не могли б передбачити її поведінку в довгостроковій перспективі.

Атрактор Лоренца є ключовим прикладом теорії хаосу, яка вивчає, як невеликі зміни початкових умов можуть привести до великих відмінностей у довгостроковій поведінці системи. Теорія хаосу має застосування в багатьох галузях, включаючи фізику, техніку, біологію та економіку. Атрактор Лоренца є корисним інструментом для вивчення цих хаотичних систем, оскільки він надає простий і елегантний приклад того, як хаос може виникнути з простих рівнянь.

Атрактор Лоренца має багато реальних застосувань, включаючи прогноз погоди, моделювання клімату та динаміку рідини. Атрактор Лоренца може допомогти нам зрозуміти поведінку складних систем, таких як атмосфера та океан, які важко моделювати традиційними методами. Атрактор Лоренца також використовується в криптографії, де його можна застосовувати для генерації випадкових чисел для безпечного зв'язку. Атрактор Лоренца є прекрасним і захоплюючим прикладом теорії хаосу та дивного світу біфуркацій і дивних атракторів. Він має багато застосувань у різноманітних сферах і допоміг нам зрозуміти непередбачуваність складних систем.

Із позиції синергетичної економіки механізм еволюції складних систем із плином часу реалізується за рахунок біфуркації, які породжують нові види поведінки системи. Послідовність біфуркацій може призвести систему від рівноважного стану до хаотичного. Лоренц запропонував математичну модель, що описує поведінку просторово неперервної динамічної системи, яка складається з трьох рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\sigma(x+y) \\ \dfrac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \tag{2.2}$$

Змінні, що входять до системи рівнянь, є безрозмірними і мають такий фізичний зміст:

1) *x* характеризує швидкість обертання конвекційних валів;

2) *y* визначає різницю температур ΔT між вхідними та низхідними потоками;

3) *z* характеризує відхилення вертикального температурного профілю від лінійної залежності.

Три параметри *σ, r* і *b* – дійсні позитивні параметри, пропорційні відповідно до числа Прандтля (*σ)*, числа Релея (*r*) та деякого коефіцієнта (*b)*, що відображає геометрію області.

Параметр *r* пропорційний різниці температур між дном рідини, що підігрівається знизу, і її вільною поверхнею. Його називають *керуючим*, оскільки він «керує» переведенням системи з одного стану в інший (зміна параметра відповідає більшому або меншому нагріванню рідини).

Фізичний сенс моделі Лоренца полягає в моделюванні динамічних систем, де навіть невеликі зміни в початкових умовах можуть привести до великих та непередбачуваних змін у майбутньому стані системи. Ця модель була спочатку розроблена для опису атмосферної конвекції, але вона також має багато загальних застосувань у різних галузях науки та інженерії. Модель демонструє можливість виникнення детерміністичної хаотичної поведінки в системах зі складною взаємодією між компонентами. Це означає, що хоча система підпорядкована детерміністичним фізичним законам, її динаміка може бути дуже чутливою до початкових умов.

Комп'ютерний аналіз системи Лоренца привів до принципового результату: детермінований хаос, тобто, неперіодичний рух у детермінованих системах, де майбутній стан однозначно визначається минулим, має кінцевий горизонт прогнозування.

У загальному випадку наявність дивного атрактору означає, що:

– система чутлива щодо малих змін у початкових умовах;

– загальні характеристики системи стійкі і не залежать від початкових умов.

Однією з центральних характеристик системи є атрактор Лоренца - це множина значень (x, y, z), до яких система наближається після тривалого часу. Він має складну фрактальну структуру та є символом хаосу. Системи, які виявляють хаотичну динаміку, мають величезний імпакт на різні галузі науки і технологій. Наприклад, вони можуть бути застосовані в прогнозуванні погоди, фінансовому аналізі, криптографії та багатьох інших областях. Хаос допомагає розуміти, як навіть невеликі зміни в початкових умовах можуть приводити до значних відхилень у подальшому розвитку системи.

Атрактор Лоренца та поняття динамічного хаосу широко застосовують в економіці для розуміння складних та непередбачуваних процесів, які відбуваються в економічних системах. Один з прикладів застосування атрактора Лоренца в економіці - це моделювання фінансових ринків та поведінки цін на акції.

На фінансових ринках, особливо на біржах, ціни на акції та інші фінансові інструменти можуть виявляти хаотичну динаміку через вплив багатьох непередбачуваних факторів, таких як новини, рішення центральних банків, геополітичні події тощо. Модель Лоренца використовують для побудови простого стохастичного процесу цін, який відображає хаотичну поведінку.

Процес моделювання за допомогою атрактора Лоренца може виглядати так (рис. 2.8).

Важливо зазначити, що хоча атрактор Лоренца може надати інсайти щодо складних динамічних систем, його застосування в економіці є лише спрощеною моделлю. Реальні фінансові ринки та економічні процеси мають більш складні фактори та взаємодії, які не враховуються в цій моделі. Хаотична динаміка в економіці може створити значні ризики для інвесторів та компаній.

I. Визначення змінних	Замість *x*, *y* та *z* у рівняннях Лоренца використовують змінні, які відображають економічні параметри, наприклад, ціни на акції або валютний обмінний курс
II. Вибір параметрів	Параметри *σ*, *r* і *b* визначають форму динаміки. У контексті економіки ці параметри можуть відображати вплив різних економічних факторів, таких як інфляція, волатильність ринку тощо.
III. Моделювання та аналіз	Розв'язуючи рівняння Лоренца для вибраних параметрів, отримують часовий ряд, що відображає динаміку цін на акції чи інші фінансові показники. Аналізуючи цей ряд, можна виявити хаотичні властивості, такі як чутливість до початкових умов та непередбачувані зміни
VI. Прогнозування та ризики	Хаотична динаміка може ускладнити точний прогноз цін та інших економічних показників. Але аналізуючи атрактор, можна розуміти можливі тенденції та ризики, пов'язані зі змінами в економічних процесах

Рисунок 2.8 – Етапи моделювання за допомогою атрактора Лоренца

Використання атрактора Лоренца може допомогти зрозуміти, які області можуть бути особливо вразливими до хаосу та як вони можуть вплинути на ризики та волатильність. Аналізуючи динаміку, можна спрогнозувати періоди підвищеної волатильності та приймати заходи для зменшення можливих втрат. Також, моделі на основі атрактора Лоренца можуть бути використані для економічного прогнозування та прийняття рішень. Зокрема, їх можна застосовувати для аналізу оптимальних моментів входу чи виходу з ринку, управління портфелем інвестицій тощо. Застосування атрактора Лоренца до реальних фінансових даних може допомогти виявити хаотичні зміни та нелінійні зв’язки, які можуть бути приховані у класичних моделях. Це дозволяє краще розуміти поведінку ринків та приймати більш обґрунтовані рішення. Тож, аналіз атрактора Лоренца може служити інструментом для попередження економічних криз та управління їх наслідками. Розуміння хаотичних процесів може допомогти реагувати швидко та ефективно на зміни в економічних умовах. Усі ці застосування атрактора Лоренца в економіці допомагають краще розуміти складні та хаотичні аспекти економічних процесів. Важливо враховувати, що це лише один із можливих підходів до аналізу та моделювання економічних явищ, і реальність може бути значно складнішою.

Питання для самоконтролю

1. Що являє собою явище детермінованого хаосу?
2. Дайте визначення поняттю «детермінованість».

3. Дайте визначення поняттю «атрактор».

4. Дайте визначення поняттю «дивний атрактор».

5. Дайте визначення поняттю «граничний цикл».

6. Який фізичний зміст мають змінні, що входять до динамічної системи (атрактор Лоренца)?

7. Назвіть етапи моделювання за допомогою атрактора Лоренца.

8. Назвіть ключові ідеї для розуміння біфуркацій.

Лабораторне заняття №1

Тема: Детермінований хаос. Дивні атрактори

Мета роботи: отримати практичні навички у побудові фазового портрету нелінійної тривимірної динамічної системи – атрактор Лоренца.

Завдання. У середовищі MsExcel виконати побудову фазового портрету нелінійної тривимірної динамічної системи, яка відображає явище детермінованого хаосу. Побудувати її фазовий портрет у просторі *xy*, *xz*, *yz*, а також *xyz* для таких вхідних параметрів: $r = 30$; $b = 2{,}67$; $\sigma = 10$.

Хід роботи.

Динамічна система має вигляд: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\sigma(x+y) \\ \dfrac{dy}{dt} = -xz + rx - y. \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$

Для побудови фазового портрету у просторі *xy*, *xz*, *yz* необхідно систему перетворити до такого вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\sigma(x+y) \\ \dfrac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^{t+\Delta t} - x^t}{\Delta t} = -\sigma\left(x^t + y^t\right) \\ \dfrac{y^{t+\Delta t} - y^t}{\Delta t} = -x^t z^t + rx^t - y^t \\ \dfrac{z^{t+\Delta t} - z^t}{\Delta t} = x^t y^t - bz^t \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x^{t+\Delta t} - x^t = \Delta t \cdot (-\sigma) \cdot \left(x^t + y^t\right) \\ y^{t+\Delta t} - y^t = \Delta t \cdot (-x^t z^t + rx^t - y^t) \\ z^{t+\Delta t} - z^t = \Delta t \cdot (x^t y^t - bz^t) \end{cases}$$

На основі розрахованих значень координат *x*, *y*, *z* побудуємо «Точкову» діаграму в середовищі Microsoft Excel (рис. 2.9).

Для побудови фазового портрету у просторі *xyz* здійснемо перетворення координат за такими формулами:

$$x' = x - z \times \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$y' = y - z \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

На основі розрахованих значень координат x' та y' побудуємо «Точкову» діаграму в середовищі Microsoft Excel (рис. 2.10).

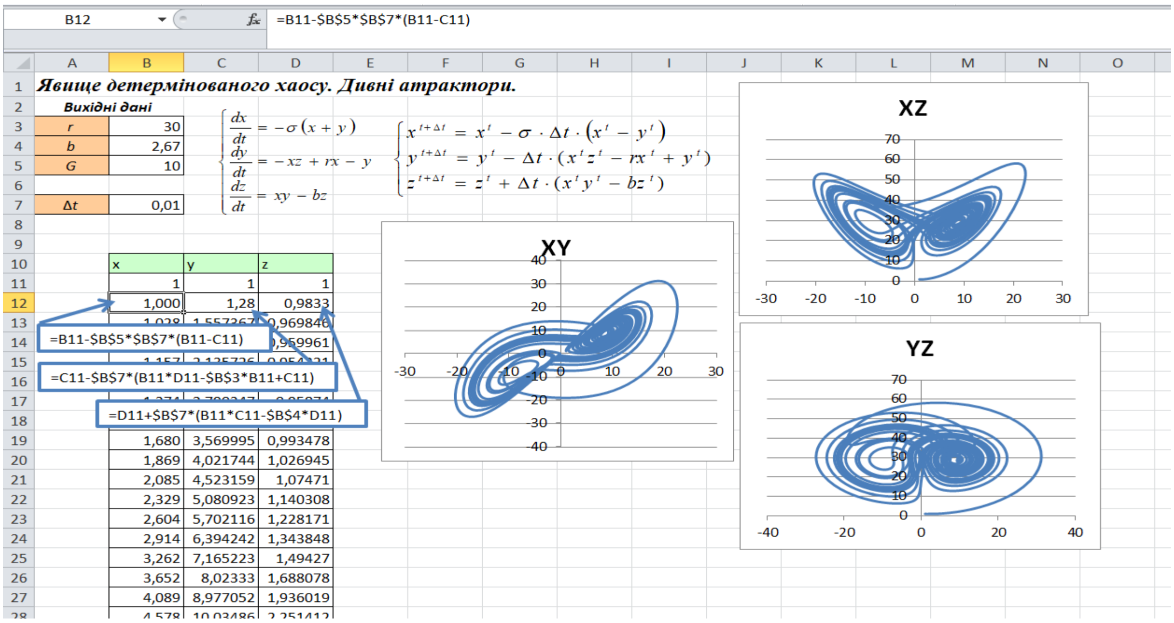


Рисунок 2.9 – Побудова фазових портретів у середовищі Microsoft Excel

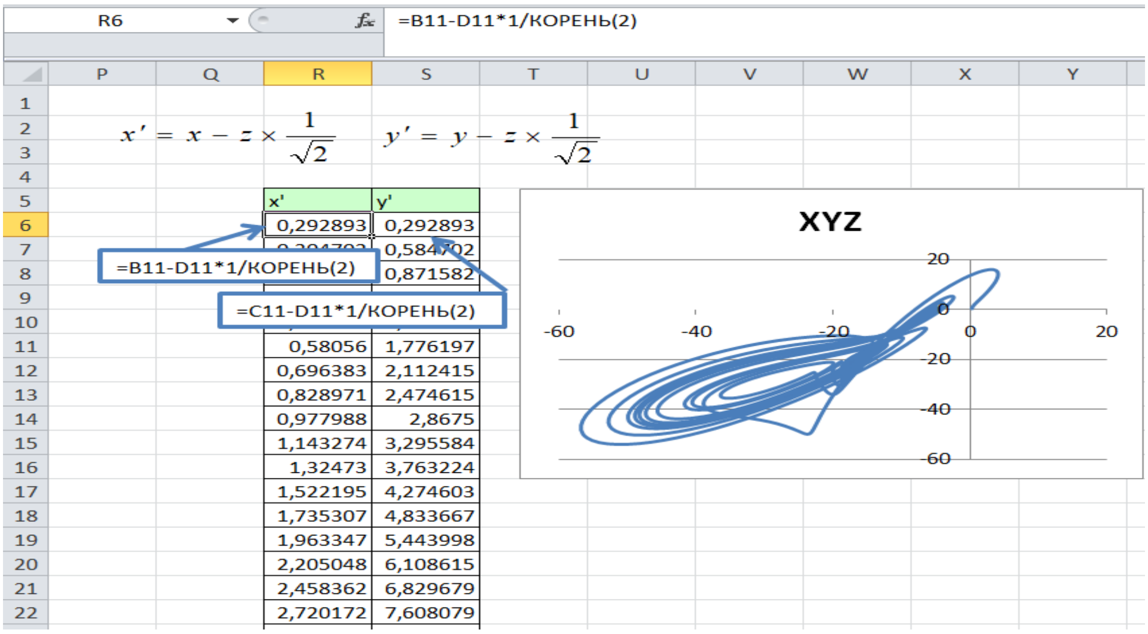


Рисунок 2.10 – Побудова фазового портрету в просторі *xyz* у середовищі Microsoft Excel

Чутливість траєкторій системи до малих змін у початкових параметрах можна показати у вигляді (рис. 2.11):

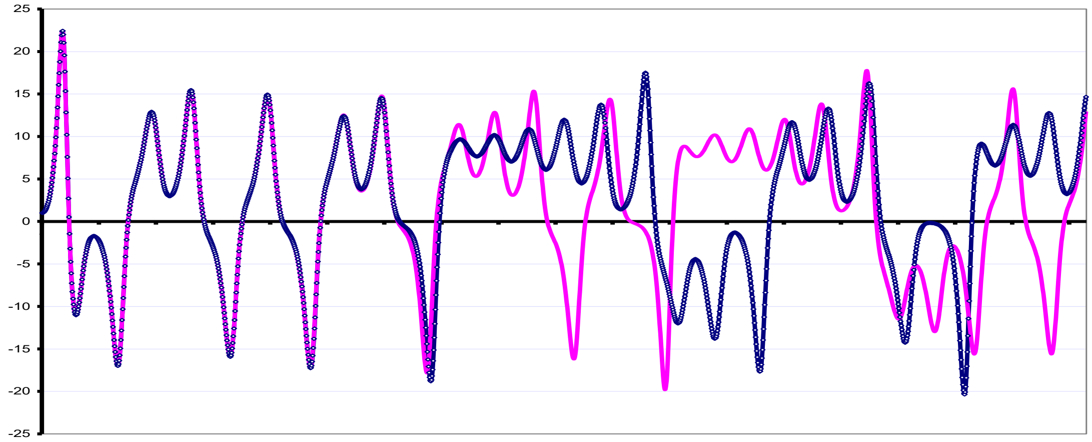


Рисунок 2.11 – Поведінка параметру системи X для різних початкових умов

На рис. 2.11 показано динаміка зміни параметра системи X у часі при невеликих змінах у початкових умовах (Δx_0 = 0,01). Як видно, на деякому невеликому початковому проміжку часу траєкторії повторюють одна одну, при цьому, їхнє поводження нагадує хаотичне. Але, починаючи з деякого моменту часу, досліджувані траєкторії розходяться й повторень у поводженні системи не спостерігається. Отже, строк упередження прогнозу динаміки досліджуваного параметра X значно залежить від того, наскільки точно визначений стан системи в початковий момент часу, що й потрібно було довести.

Тема 3. Фрактали. Фрактальні властивості хаосу

Мета: ознайомитися з поняттям фрактали та їх практичним застосуванням.

План

3.1 Поняття фракталів та їх практичне застосування
3.2 Класифікація фракталів
3.3 Метод фрактального аналізу в дослідженні хаосу
3.4 Фрактальний *R/S*-аналіз: метод нормованого розмаху Херста
3.5 Алгоритм послідовного *R/S* -аналізу часових рядів

Основні поняття

Фрактал, види фракталів, показник Херста, *R/S*-аналіз, часовий ряд, фрактальний аналіз.

3.1 Поняття фракталів та їх практичне застосування

Поняття фракталів виникло в середині 20 століття, коли вчені почали вивчати зв'язані з кризами та хаосом математичні структури, що виявилися дуже складними та цікавими. Фрактали відображають особливості неперервних структур у вигляді більш вузьких масштабних копій самих себе. Вони є підставою для розуміння хаотичних та нелінійних процесів та знаходять своє застосування у багатьох галузях науки та техніки.

Фрактали в реальному світі зумовлені глобальними статистичними структурами, що одночасно породжують локальні випадковості, тобто хаос і порядок співіснують. Для ринкового економічного аналізу це має суттєві наслідки.

Фрактал – це самоподібна, геометрична структура, яка відображається у багатьох масштабах та деталях. Одна з ключових характеристик фракталів – самоподібність, коли більші та менші частини структури виглядають подібно одна до одної. Для опису фракталів використовують різні математичні моделі: рекурсивні рівняння та ітераційні процеси. Фрактал можна визначити як об'єкт складної форми, який можна отримати у результаті виконання простого ітераційного циклу. Ці дивовижні фігури стали широко відомі у 70-их роках минулого століття завдяки французькому математику Бенуа Мандельброту. Поняття було введене ним у 1975 році для позначення нерегулярних самоподібних структур. Ітераційність (результат багаторазового повторення), рекурсивність (термін, що означає повторювальний характер людської діяльності і будь-кого соціального феномена) спричиняють такі властивості фракталів, як самоподібність: окремі частини схожі за формою на весь фрактал в цілому.

Фракталами називаються геометричні об'єкти: лінії, поверхні, просторові тіла, що мають сильно зрізану форму і володіючи властивостями самоподібності.

Самоподібність як основна характеристика фракталу означає, що він більш менш однаково улаштований в широкому діапазоні масштабів.

Бенуа Мандельброт визначив фрактали двома різними способами:

- фракталом називається структура, що складається з частин, кожна з яких певним чином подібна до цілого;
- фракталом називається множина, в якої розмірність Хаусдорфа строго більша за топологічну розмірність.

У широкому розумінні фрактал означає геометричну фігуру, яка має властивість самоподібності, тобто складається з частин кожна з яких подібна до всієї фігури в цілому. Якщо кожна частина деякої форми геометрично подібна цілому, то форму та її каскад називають самоподібними.

Фрактали – своєрідні і складні за внутрішньою структурою множини. Їх зображення – гарні геометричні форми з нерівними, можливо, фрагментарними обрисами. Самоподібні фрактали можна поділити на частини так, що кожна з утворених частин, хоча б приблизно буде зменшеною копією цілого. Вони не залежать від масштабу. Метричні характеристики, такі, як довжина і площа, не мають для них змісту, тому що фрактали нескінченні. Крім того, фрактали мають дробову розмірність.

Фрактали знаходять все більше і більше застосування в науці. Основна причина цього полягає в тому, що вони описують реальний мир іноді навіть краще, ніж традиційна фізика або математика. Фрактали використовуються при аналізі і класифікації сигналів складної форми, що виникають у різних галузях, наприклад при аналізі коливань курсу валют, цін на цінні папери в економіці.

Практичне застосування фракталів:

– комп’ютерна графіка та візуалізація: фрактали можуть бути використані для створення складних та реалістичних зображень. Особливі властивості фракталів дозволяють створювати природноподібні пейзажі, хаотичні структури та абстрактні образи;

– медичне зображення та діагностика: фрактальний аналіз може допомогти виявляти складні структури в медичних зображеннях, таких як судини або нейронні мережі. Це допомагає лікарям у ранньому виявленні захворювань та плануванні лікування;

– фінанси та економіка: фрактали застосовуються для аналізу фінансових ринків. Наприклад, рух цін на ринках може бути описаний фрактальними моделями, що допомагають передбачати тренди та ризики;

– телекомунікації: фрактальні антени можуть забезпечувати кращу широкосмугову передачу сигналу, оскільки вони мають самоподібні властивості;

– геологія та геофізика: фрактальні моделі використовуються для аналізу геологічних структур, таких як рельєф та пластичні рухи земної кори.

Поняття фракталів має глибокі математичні коріння та має широкий спектр практичних застосувань у різних галузях, від науки до мистецтва. Вивчення та застосування фракталів допомагає нам краще розуміти складні структури та хаос, які навколо нас.

Застосування фракталів постійно розширюється завдяки розвитку технологій та поглибленню розуміння їх властивостей. У майбутньому, можливо, ми побачимо ще більше неявних застосувань фракталів у таких сферах: штучний інтелект, робототехніка, біоінформатика та інші.

3.2 Класифікація фракталів

Фрактали можна класифікувати за різними ознаками, такими як їхні математичні властивості, геометрична форма та основні характеристики. Розглянемо основні групи класифікацій фракталів: геометричні, алгебраїчні та стохастичні фрактали (табл. 3.1).

Таблиця 3.1 – Класифікація кварталів

Типи фракталів	Характеристика
Геометричні фрактали	Одні з найвідоміших типів фракталів. Вони базуються на ітераційних рекурсивних рівняннях та зображуються на комплексній площині. Дані фрактали отримують за допомогою ламаної, що називається генератором. За один крок алгоритму кожний із відрізків замінюється на ламану-генератор у відповідному масштабі. У результаті нескінченого повторення цієї процедури утворюється геометричний фрактал. До геометричних фракталів відноситься сніжинка Коха, множина Кантора, килим Серпінського, трикутник Серпінського, крива Пєано, крива дракона, Т-Квадрат та губка Менгера та інші.
Алгебраїчні фрактали	Це сама найбільша група фракталів. Один із методів побудови таких фракталів полягає в такому. Береться формула, підставляєте в неї число і отримується результат. Потім підставляється в цю ж формулу результат і отримуємо наступне число. Ця процедура повторюється багато разів. У математиці це називається ітераційний процес. У результаті виходить набір чисел, які є точками фрактала.
Стохастичні (випадкові) фрактали	Ця група фракталів утворюються, якщо в ітераційному процесі хаотично змінюється будь-який його параметр. При цьому утворюються об’єкти дуже схожі на природні – не симетричні дерева, берегові лінії і т.д. Стохастичні фрактали використовуються при моделюванні рельєфів місцевості та поверхні моря.

Математичні об’єкти з фрактальними властивостями були відомі дуже давно, їх вважали екзотичними і навіть патологічними. Першою такою множиною була множина Кантора, що будується шляхом поділу відрізка [0; 1] на три рівні частини, видалення середнього інтервалу, і застосування цієї процедури до відрізків, що залишилися, нескінченну кількість разів. Г. Кантор, досліджуючи цю множину, встановив її самоподібність, а також той факт, що сума довжин видалених інтервалів дорівнює одиниці (тобто «довжина» множини, що залишилася, дорівнює нулю). Отже, множина Кантора – один із представників фрактальних множин.

Одним із фрактальних об’єктів є «*сніжинка Коха*». Ця фігура названа на честь німецького математика Нільса фон Коха, який побудував і досліджував її. Розглянемо, як будується окремий фрагмент «сніжинки Коха» – крива Коха. Побудова кривої починається з відрізка одиничної довжини (рис. 3.1) – це нульове покоління кривої Коха.

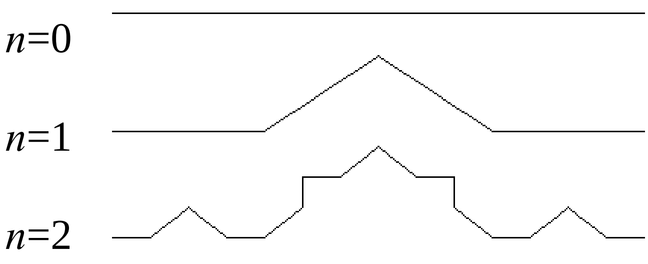


Рисунок 3.1 – Побудова триадної кривої Коха

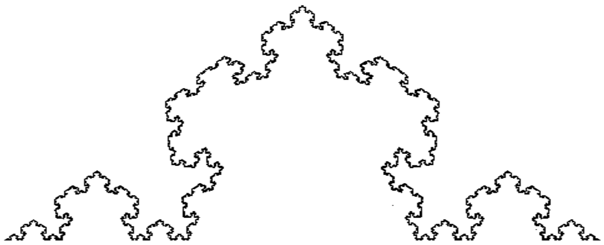
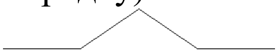


Рисунок 3.2 – Фрактальний об’єкт – крива Коха

Вихідною ланкою є одиничний відрізок (предфрактал нульового порядку). Кожна майбутня ланка замінюється на утворюючий елемент:  що складається з чотирьох ланок, які мають довжину 1/3 від первісної. Для побудови предфрактала наступного порядку кожна ланка замінюється на зменшений утворюючий елемент. У результаті одержуємо криву, що складається з 4*4 = 16 ланок, кожна з яких має довжину (1/3)/3 = 1/9, загальна довжина дорівнює 16/9. Довжина предфрактала n-го порядку дорівнює $(4/3)^n$. Очевидно, що довжина кривої Коха при n, що прагне до нескінченності, дорівнює нескінченності:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty.$$

Отже, у підсумку одержуємо криву нескінченної довжини, що заповнює обмежену множину на площині. Повторивши над об’єктом зазначене перетворення безліч разів, одержуємо фрактальний об’єкт, що буде мати властивість самоподібності – будь-яка завгодно мала ділянка отриманої фігури буде виглядати в точності так само, як і більший, батьківський об’єкт. Це означає, що незалежно від того, наскільки наблизитися до цього фракталу, його зображення не зміниться. Зображення кривої Коха, в цьому випадку, буде мати такий вигляд (рис. 3.2).

Якщо побудову кривої починати не з відрізку, а з трикутника і застосувати перераховані вище перетворення до кожної з його сторін, то одержимо сніжинку Коха (рис. 3.3). Ця фігура цікава тим, що її периметр – лінія нескінченної довжини, що обмежує кінцеву площу. Цю криву фон Кох, за його словами, одержав випадково, малюючи щось на папері під час «чергового нудного засідання». У 1896 році у своїй статті «Елементарний геометричний метод для вивчення деяких питань теорії кривих площин» він опублікував дослідження властивостей цієї кривої (ніде не диференційована, самоподібна, неперервна, але не має жодної дотичної).

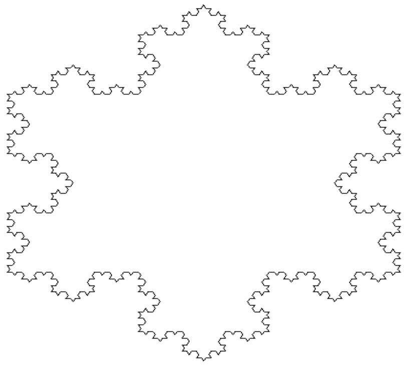


Рисунок 3.3 – Фрактальний об’єкт – сніжинка Коха

Наступний приклад геометричних фракталів – трикутник Серпінського. Трикутник Серпінського (рис. 3.4) – це відомий фрактал, який відображається у вигляді безлічі менших трикутників, сформованих шляхом послідовного видалення центральної частини більшого трикутника.

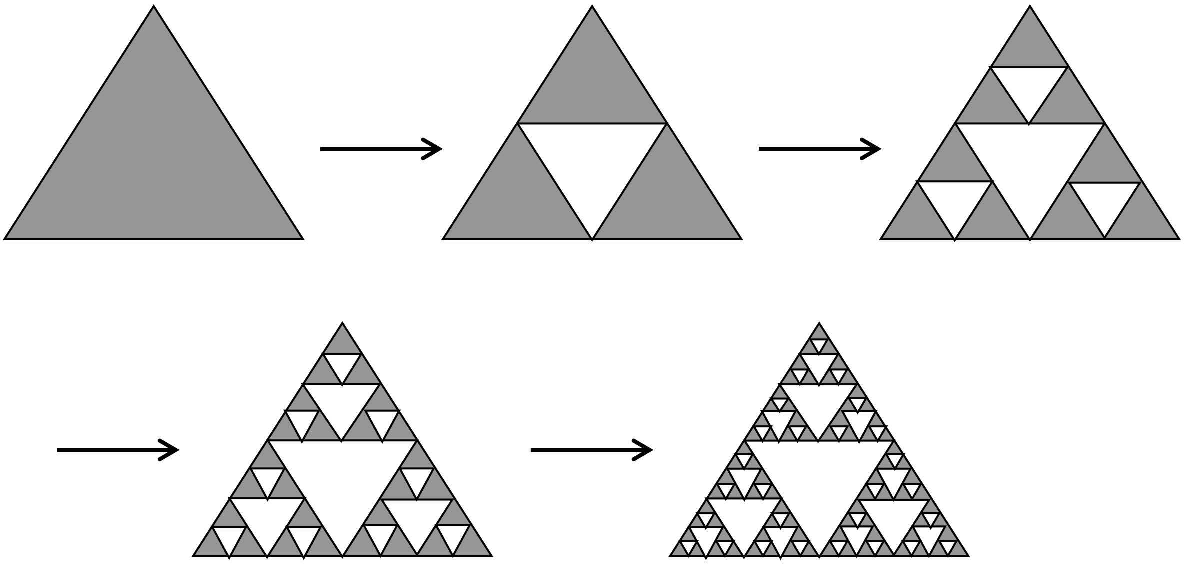


Рисунок 3.4 – Трикутник Серпінського

Цей фрактал є класичним прикладом самоподібного об’єкта, тобто його менші частини мають схожу форму з великим цілим. Основна ідея побудови трикутника Серпінського полягає у рекурсивному процесі ділення трикутника на менші трикутники і подальшому видаленні центральної частини. Кожен крок рекурсії виконується для кожного з менших трикутників. Цей процес може бути повторений нескінченну кількість разів, що приводить до вражаючої структурної складності. Починаючи з великого рівностороннього трикутника, на кожному кроці видаляється центральна частина кожного трикутника, залишаючи три менших трикутника. Цей процес ітеративно повторюється для кожного з менших трикутників, утворюючи все більше та більше дрібних трикутників. Трикутник Серпінського є прикладом фракталу з обмеженим розміром, оскільки довжина сторін трикутників постійно зменшується під час процесу. Він є одним із найбільш відомих та легко розпізнаваних фракталів і має важливе місце в світі математики та візуального мистецтва.

3.3 Метод фрактального аналізу в дослідженні хаосу

Метод фрактального аналізу є потужним інструментом для дослідження хаосу та нелінійних систем. Він дозволяє аналізувати та виявляти нерегулярні та складні структури, які характеризують хаотичні системи, які не підлягають класичним лінійним аналітичним методам. Основною ідеєю фрактального аналізу є використання поняття фракталів для опису та вивчення нелінійності, динамічної складності та хаосу в системах.

Припустимо, маємо часовий ряд $(x_1, x_2, \dots x_\tau)$, рівнями якого є економічний показник, динаміка якого нагадує хаос. Необхідно дати відповідь на питання – чи існує якась внутрішня закономірність системи, що може використовуватися при прогнозуванні даного явища? Часові ряди такого вигляду можуть бути дійсно хаотичними, тобто внутрішня закономірність в їхньому поводженні може бути відсутня. У цьому випадку їх не можна використовувати для прогнозу. Якщо ж ці ряди описують процеси, що побудовані на основі деякої внутрішньої самоорганізаціїї, то на їхній основі може бути отриманий прогноз.

Сьогодні розроблені такі методи, що дозволяють відрізнити детермінований хаос від випадкового процесу:

– метод дробної (фрактальної) розмірності атрактору;

– показники Ляпунова, як міра непередбачуваності руху траєкторій в атракторі й швидкості їхнього експонентного розбігу;

– кореляційна розмірність;

– показник Херста, що відображає невипадкове походження досліджуваних процесів;

– перетини й відображення Пуанкаре – найбільш ефективний інструмент виявлення закономірностей у хаотичному поводженні. При реалізації цього методу, атрактор розсікається якою-небудь поверхнею й вивчається структура перетину, що однозначно розкриває структуру атрактора. Це дозволяє виявити регулярність поводження динамічної системи.

Фрактальна структура об’єкту передбачає незмінність ступеня складності структури об’єкту за збільшенням масштабу розгляду. Для характеристики фрактальної структури використовуються показник Херста (H) та показник фрактальної розмірності (D). Існує як мінімум дві варіації фрактальної розмірності (табл. 3.2) – D і A. Так, *фрактальну розмірність Хаусдорфова D* визначають за такою формулою: $D = 2 - H$.

Бенуа Мандельброт зазначає, що фрактальна розмірність є зворотною величиною від H. Наприклад, при H = 0,5 фрактальная розмірність дорівнює 2 (1 / 0,5), а при H = 0,8 фрактальная розмірність дорівнює 1,25 (1 / 0,8). Отже, *фрактальну розмірність за Мандельбротом A* розраховують за формулою: $A = 1/H$.

Таблиця 3.2 – Фрактальна розмірність

Показник	Значення		
Показник Херста H	$H \approx 0$	$H = 0{,}5$	$H = 1$
Фрактальна розмірність за Хаусдорфом D	$D \approx 2$	$D = 1{,}5$	$D = 1$
Фрактальна розмірність за Мандельбродом A	$A \to \infty$	$A = 2$	$A = 1$
	Пряма лінія	Випадковий ряд	Нескінченний лінійний ряд

Значення показника Херста знаходитися в межах від 0 до 1 і залежно від того якого значення він набуває формується висновок, щодо випадковості чи персистентності досліджуваного ряду (табл. 3.3).

Таблиця 3.3 – Характеристика часових рядів відносно значення показника Херста

Значення показника Херста (H)	Значення фрактальної розмірності	Характеристика ряду
$0 < H < 0{,}5$	$1{,}5 < D < 2$	Досліджуваний часовий ряд є антиперсистентний, тобто нестійкий. Спостерігається схильність економічної системи до постійної зміни тенденції (зростання змінюється спаданням, та навпаки). Стійкість подібної антиперсистентної поведінки залежить від того, наскільки H близький до нуля. Чим ближче його значення до нуля, тим ряд більш мінливий або волатильний.
$H = 0{,}5$	$D = 1{,}5$	Часовий ряд абсолютно випадковий або стохастичний, відсутність довготривалої статистичної залежності (випадкова поведінка економічного показника), тобто події не залежать одна від одної.
$0{,}5 < H < 1$	$1< D <1{,}5$	Досліджуваний часовий ряд є персистентним, спостерігається тренд, збереження тенденції до зростання чи спадання показника як у минулому, так і в майбутньому. При цьому чим ближче значення H до 1, тим тренд сильніший і частіше за все за його підйомом слідує підйом, а за спадом – спад.

В основу розрахунків Херст поклав формулу з роботи Альберта Ейнштейна про броунівський рух частинок: $R = \sqrt{T}$, де R – відстань, що пройшла броунівська частинка за час T; T – показник часу. Відповідно до цієї формули броунівська частинка рухалась на відстань, що дорівнює квадратному кореню з часу, витраченому на це пересування. При H = 0,5 система проходить за час T ту ж відстань, що і броунівська частинка. При більших значеннях H система проходить більш значну відстань за той же час T, що і броунівська частинка. Фрактальний аналіз дає можливість якісно оцінити ступінь прогнозованості досліджуваного часового ряду та виявити характер його поведінки – персистентний чи антиперсистентний. Метод фрактального аналізу найчастіше використовує алгоритм *R/S*-аналізу та показник Херста.

3.4 Фрактальний *R/S*-аналіз: метод нормованого розмаху Херста

Фрактальний аналіз, як новий напрямок в аналізі динаміки фінансових показників, сформувався на базі теорії фрактальних ринків, яка на відміну від теорії ефективних ринків (з'явилася ще на початку XX-го століття), стверджує, що розвиток ринкових процесів у майбутньому, як і майбутні значення часових рядів, які відображають ці процеси, залежать від ретроспективних змін. Основні кроки фрактального *R/S*-аналізу (рис. 3.5).

Розглядається часовий ряд Z, що складається з елементів
$\mathrm{Z} = \{\mathrm{z_i}\}$, де $\mathrm{i} = 1, 2, \dots, \mathrm{m}$, де m – кількість спостережень, що формують ряд

1 етап

Розбиття часового ряду на підпослідовності фіксованої довжини (рівні періоди: рік, місяць, квартал, тиждень, день). Визначення величини кроку $\Delta \geq 1$ та формування послідовності довжин відрізків, на які розбивається вихідний ряд: $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, n_l$, де $n_{k+1} = n_k + \Delta$, для всіх k від 1 до l-1. Максимальне значення l визначається за формулою: $n_l \leq [m/2]$.

2 етап

Для кожного з відрізків аналізованого часового ряду обчислимо середні значення за формулою: $\overline{z_\tau} = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{\tau} z_i$

Визначаємо накопичені відхилення ряду:
$$x_{\tau,t} = \sum_{i=1}^{t} (z_i - \overline{z_i}).$$

3 етап

Визначаємо розмах накопиченого відхилення *R*: $R(\tau) = \max\limits_{1\leq t\leq \tau} X_{\tau,t} - \min\limits_{1\leq t\leq \tau} X_{\tau,t}$

4 етап

На даному етапі обчислюється середньоквадратичне відхилення за формулою: $S_\tau = \sqrt{\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{\tau}(z_i - \bar{z}_i)^2}$

5 етап

Розмах накопиченого відхилення нормується шляхом ділення на середньоквадратичне відхилення для кожного відрізка τ і будується графік залежності: $lg\left(\frac{R_\tau}{S_\tau}\right)$ від $lg(\tau)$ так звана *R/*-траєкторія. Далі на основі методу найменших квадратів будується рівняння лінійної регресії, коефіцієнт при незалежній змінній і буде показником Херста. Рівняння буде мати вигляд: $lg\left(\frac{R_\tau}{S_\tau}\right) = lg(\alpha) + H \cdot lg(\tau)$, де $\alpha = const$

Рисунок 3.5 – Етапи розрахунку нормованого розмаху Херста

3.5 Алгоритм послідовного *R/S*-аналізу часових рядів

Перевага цього алгоритму полягає в його здатності виявлення циклів (квазіциклів) у досліджуваному часовому ряді, а також обчислення нижньої оцінки глибини пам'яті (про початок цього часового ряду).

Розглянемо алгоритм послідовного *R/S*-аналізу (рис. 3.6). Нехай розглядається деякий часовий ряд: $Z = (z_i)$, $i = 1,2,....,m$, де m – кількість спостережень, що складають часовий ряд.

Етап 1

Для аналізованого часового ряду розглядаються початкові відрізки $Z_\tau = z_1, z_2, ..., z_\tau$, обчислюємо їх поточне середнє значення $\overline{z_\tau} = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{n} z_i$, $\tau = 3,4,....,n$ та знаходимо для кожного з них накопичене відхилення $X_{\tau,t} = \sum_{i=1}^{t}\left(z_i - \overline{z_\tau}\right)$ для будь-якого поточного індексу $t = 1,2,....,\tau$

Етап 2

Для кожного початкового відрізка Z_τ обчислюємо наступні показники

Розмах варіації:
$$R(\tau) = \max_{1\le t\le \tau} X_{\tau,t} - \min_{1\le t\le \tau} X_{\tau,t}$$

Стандартне відхилення:
$$S_\tau = \sqrt{\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{\tau}(z_i - \bar{z}_i)^2}$$

Для кожного відрізка часового ряду нормуємо значення розмаху за допомогою стандартного відхилення, тобто представляємо у вигляді дробу R/S:
$$\left(\frac{R}{S}\right)_\tau = \frac{R(\tau)}{S(\tau)}, 3 \le \tau \le n$$

Етап 3

Будуємо *H*-траєкторію $H = H(\tau), \tau = 3,4,...,n$, координати точок якої (x_τ, y_τ) визначаються «емпіричним законом Херста»: $H(\tau) = \frac{lg\left(\frac{R(\tau)}{S(\tau)}\right)}{\lg\left(\frac{\tau}{2}\right)}$.

Етап 4

Друга, так звана *R/S*-траєкторія аналізованого часового ряду представляється в логарифмічних координатах послідовністю точок (x_τ, y_τ^0), де $x_\tau = \log(\tau/2)$, $y_\tau^0 = \log\frac{R(\tau)}{S(\tau)}$. З'єднуючи відрізком сусідні точки (x_τ, y_τ^0) та $(x_{\tau+1}, y_{\tau+1}^0)$, $\tau = 3,4,...,n-1$, одержимо графічне представлення *R/S*-траєкторії.

Рисунок 3.6 – Алгоритм послідовного *R/S*-аналізу

Суть алгоритму послідовного *R/S*-аналізу полягає в послідовному нарощуванні *H*-траєкторії та *R/S*-траєкторії аналізованого часового ряду, що й визначило його назву.

Поведінка побудованих на основі цієї функції *H*-траєкторії або залежності функції $H(\tau)$ від $lg\left(\frac{\tau}{2}\right)$, а також *R/S*-траєкторії, можуть бути використані для виявлення таких властивостей часового ряду:

– інтервали довготривалої і короткотривалої залежності (ідентифікація в часовому ряді довготривалої пам'яті);

– наявність циклічних складових і середньої довжини неперіодичного циклу

Із формули розрахунку показника Херста видно, що на його зростання впливають:

– збільшення розмаху коливань R;

– зменшення средьоквадратичного відхилення S;

– зменшення кількості спостережень τ.

При невеликій кількості спостережень τ показник Херста має схильність навіть на випадкових рядах оцінювати їх як персистентні (тобто зберігають тренд).

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення поняттю «фрактал».
2. Наведіть приклади геометричних фракталів.
3. Що розуміють під фрактальною розмірністю?
4. Назвіть типи фракталів.
5. Наведіть приклади алгебраїчних фракталів.
6. Наведіть приклади стохастичних фракталів.
7. Назвіть етапи фрактального *R/S*-аналізу.
8. Охарактеризуйте часові ряди відносно значення показника Херста.

Лабораторне заняття №2

Тема: Фрактальний *R/S*-аналіз

Мета роботи: отримати практичні навички проведення передпрогнозного фрактального аналізу часових рядів.

Завдання. У середовищі MsExcel на основі статистичних даних (40-70 спостережень) розрахувати показник Херста. Вихідні дані для проведення розрахунків підготувати самостійно використовуючи будь-які офіційні джерела статистичної інформації.

Хід роботи.

Для прикладу розрахунку показника Херста використаємо статистичні дані щодо ціни на акції за двадцять періодів. Відповідно до наведених на рис. 3.5 етапів розрахунку показника Херста першочергово визначимо середнє значення ціни акцій (рис. 3.7). Далі знайдемо відхилення кожного значення від середнього та розрахуємо накопичене відхилення. Для визначення розмаху накопиченого відхилення R спочатку обчислемо мінімальне та максимальне значення, а потім розмах *R*. Далі визначаємо середньоквадратичне відхилення ціни акцій і на основі отриманих значень *R* та *S* розрахуємо нормований розмах та знаходимо логарифм *R/S*.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	дата	ціна акцій, zi	(zi-Zcep)	накопчене відхилення			номер періоду	Макс	мин	Размах R	Стандотклон S	Нормований розмах R/S	Log(R/S)	
2	1	36,2377	-1,3075	-1,3075			1	-1,3075	-1,3075	0,0000	-			
3	2	36,3474	-1,1978	-2,5054			2	-1,3075	-2,5054	1,1978	0,0776	15,4420	1,1887	
4	3	36,2194	-1,3258	-3,8312			3	-1,3075	-3,8312	2,5237	0,0692	36,4558	1,5618	
5	4	35,6288	-1,9164	-5,7476			4	-1,3075	-5,7476	4,4401	0,3246	13,6769	1,1360	
6	5	35,9817	-1,5635	-7,3112			5	-1,3075	[illegible]	6,0036	0,2868	20,9336	1,3208	
7	6	36,5083	-1,0369	-8,3481			6	-1,3075	[illegible]	7,0406	0,3098	22,7296	1,3566	
8	7	36,5375	-1,0077	-9,3558			7	-1,3075	-9,3558	8,0483	0,3178	25,3272	1,4036	
9	8	36,7496	-0,7956	-10,1515			[illegible]	[illegible]	-10,1515	8,8439	0,3509	25,2039	1,4015	
10	9	36,3821	-1,1631	-11,3146			[illegible]	[illegible]	-11,3146	10,0071	0,3301	30,3133	[illegible]	
11	10	37,7022	0,1570	-11,1576			10	-1,3075	-11,3146	[illegible]	[illegible]	18,3670	[illegible]	
12	11	37,7626	0,2174	-10,9403			11	-1,3075	-11,3146	[illegible]	[illegible]	15,2832	1,1842	
13	12	38,0588	0,5136	-10,4267			12	-1,3075	-11,3146	10,0071	0,7611	13,1479	1,1189	
14	13	38,0935	0,5483	-9,8784			13	[illegible]	[illegible]	10,0071	0,8280	12,0865	1,0823	
15	14	37,7681	0,2229	-9,6556			14	[illegible]	[illegible]	10,0071	[illegible]	11,9457	1,0772	
16	15	37,8906	0,3454	-9,3102			15	-1,3075	-11,3146	10,0071	[illegible]	11,7685	1,0707	
17	16	37,4481	-0,0971	-9,4073			16	-1,3075	-11,3146	10,0071	0,8319	12,0298	1,0803	
18	17	37,5541	0,0089	-9,3985			17	-1,3075	-11,3146	10,0071	0,8183	12,2284	1,0874	
19	18	37,7461	0,2009	-9,1976			18	-1,3075	-11,3146	10,0071	0,8135	12,3006	1,0899	

=C2
=C3+D2
=H5-I5
=МАКС($D$2:D8)
=СТАНДОТКЛОН($B$2:B10)
=LOG(L9)
=МИН($D$2:D13)
=J14/K14

Рисунок 3.7 – Проведення фрактального аналізу в середовищі Microsoft Excel

За проведеми розрахунками будуємо графік залежності: $lg\left(\frac{R_\tau}{S_\tau}\right)$ від $lg(\tau)$ так звану *R/S*-траєкторію (рис. 3.8).

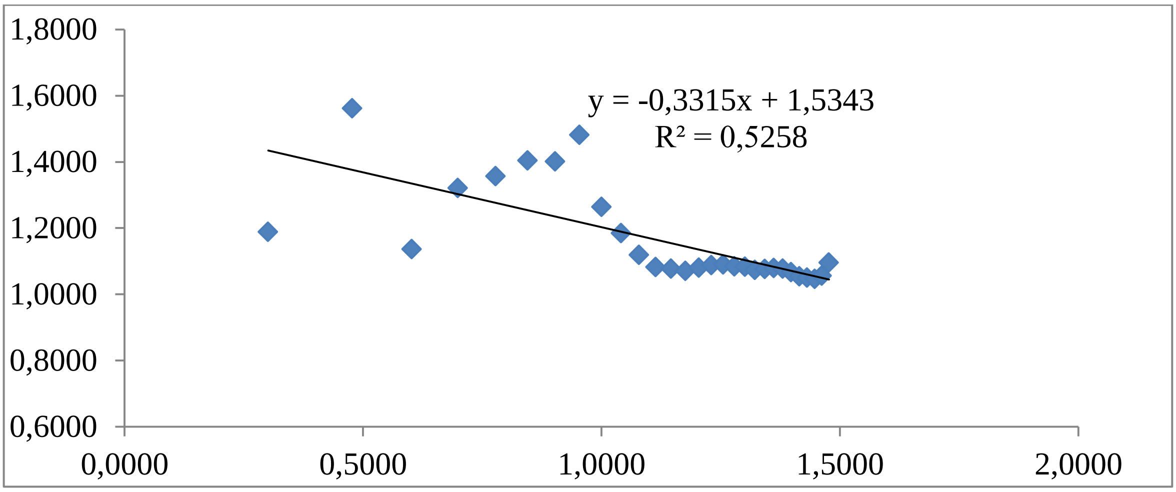


Рисунок 3.8 – *R/S*-траєкторія аналізованого ряду

У результаті проведених розрахунків значення показника Херста становить 0,53, а це свідчить що аналізований ряд є персистентним та спостерігається тренд. Аналізований ряд буде зберігати наявну тенденцію ще деякий час у майбутньому.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. МОДЕЛІ І МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ, ЩО ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ЕКОНОМІКИ

Тема 4. Прогнозування часових рядів із використанням моделей ARIMA.

Мета: ознайомитися з етапами побудови ARIMA моделей та їх практичним використанням.

План

1. Основні етапи аналізу даних при побудові ARIMA моделей
2. Методика побудови ARIMA моделей для прогнозування динаміки часових рядів
3. Практика побудови ARIMA моделей із використанням пакету STATISTICA

Основні поняття

Прогнозування, ARIMA модель, динаміка, часовий ряд, авторегресія, ковзне середнє.

1. Основні етапи аналізу даних при побудові ARIMA моделей

Організації і підприємства збирають і зберігають величезні обсяги даних в своїх базах даних. Цю колекцію даних можна ефективно використовувати для пошуку корисних шаблонів (закономірностей), які можуть поліпшити бізнес. Одним із найважливіших завдань для організацій є знаходження приблизного прогнозу на майбутнє. Перший етап у наближенні майбутнього складається зі збору даних із минулого. У зв’язку з цим зазвичай мають справу зі статистичними даними, отриманими через регулярні проміжки часу, наприклад, дні, місяці, роки і т.д., які повинні бути однаковими для всіх вимірювань. Зазвичай такі дані називаються часовими рядами.

Часовий ряд – це упорядкований набір спостережень змінної, взятих через рівні проміжки часу. Прогнозування часових рядів – це використання моделі для прогнозування майбутніх подій на основі відомих минулих подій. У ретроспективних даних може бути відсутнє значення за деякий період. Це значення може бути заповнено перед прогнозуванням будь-яким із методів, таких як просте середнє, ковзне середнє або зважене ковзне середнє. У часових рядах треба знайти закономірність у ретроспективних даних та екстраполювати цю закономірність на майбутнє. Часовий ряд, що містить спостереження однієї змінної, називається одновимірним, тоді як спостереження кількох змінних називаються багатовимірними.

Розглянемо порядок аналізу часових рядів.

1. Побудова і вивчення графіка – табличне подання часового ряду й описових статистиків частіше усього не дозволяє зрозуміти характер процесу, у той час як за графіком часового ряду можна зробити досить багато висновків.

Надалі вони можуть бути перевірені й уточнені за допомогою розрахунків. На основі візуального аналізу можна досить упевнено визначити:

– наявність тренду і його характер;

– наявність сезонних і циклічних компонентів;

– ступінь повільності або переривчастості змін послідовних значень ряду після усунення тренду.

2. Вибір моделі для часового ряду – модель може вважатися підібраною, якщо залишкова компонента ряду є процесом типу, як правило, «білого шуму». Після підбору залишки аналізуються для перевірки адекватності моделі та побудови надійних інтервалів.

3. Прогнозування або інтерполяція – останнім етапом аналізу часового ряду може бути прогнозування його майбутніх (екстраполяція) або відновлення пропущених (інтерполяція) значень і визначення точності цього прогнозу на базі підібраної моделі. Неоднозначність вибору моделі може спостерігатися як на етапі виділення детермінованого компонента ряду, так і при виборі структури ряду залишків. Тому досить часто розробляють декілька прогнозів, зроблених за допомогою різних моделей.

Методи моделювання часових рядів припускають, що наявні тенденції повторюються якщо не точно, то досить близько, тож вивчаючи минуле, можна приймати більш правильні рішення в майбутньому. Часові ряди можуть мати такі характеристики, як тренд (тенденція – це довгострокова закономірність у даних, яка демонструє послідовне зростання або зменшення з часом), циклічність (це коливання даних, які не є регулярними чи сезонними та часто пов’язані з діловими циклами чи економічними тенденціями), сезонність (стосується коливань даних, які повторюються через рівні проміжки часу, наприклад щодня, щотижня або щороку) і нерегулярність (це випадкові коливання даних, які не є передбачуваними та не відповідають тенденціям, сезонності чи циклу).

У традиційному аналізі часових рядів для опису цих чотирьох компонентів використовуються два підходи: мультиплікативний і адитивний. Мультиплікативна модель: $Y = T \cdot S \cdot C \cdot I$, адитивна модель: $Y = T + S + C + I$, де Y позначає спостереження, а T, S, C і I – тренд, сезонна, циклічна і нерегулярна складові відповідно. Мультиплікативна модель заснована на припущенні, що чотири компоненти часового ряду не обов’язково незалежні і можуть впливати одна на одну, тоді як в адитивній моделі передбачається, що чотири компоненти часового ряду не залежать одна від одної.

Одним із факторів, який впливає на вибір методу прогнозування є встановлений для прогнозу часовий горизонт. Збільшення термінів прогнозу для досліджуваного процесу збільшує дисперсію випадкової складової. Сукупна похибка прогнозу може бути розкладена на три складові:

– похибки, які виникають при визначенні форми зв’язку, тобто ступеню співпадання певної функції із наявним трендом;

– похибки при визначенні параметрів вибраної в якості тренду функції (похибки, які залежать від методу аналітичного виразу залежності);

– випадкові відхилення від тренду, спричинені індивідуальними особливостями процесу.

Правильно вибрана форма аналітичного виразу та найбільш точний метод визначення параметрів прогнозної моделі значною мірою підвищують оцінку точності прогнозу. Точність прогнозної моделі визначається на основі похибок прогнозу. Очевидно, що похибка прогнозу може бути розрахована після того, як період упередження (часовий горизонт прогнозу) вже завершився та є в наявності фактичні дані про прогнозований показник, або значення показника на ретроспективній ділянці. В останньому випадку наявна інформація ділиться на дві частини: на основі першої – оцінюються параметри моделі, а дані другої частини розглядаються в якості фактичних. Похибки прогнозів, отримані ретроспективно (на другій ділянці) характеризують точність відповідної моделі.

Сьогодні доступні різні методи прогнозування, такі як методи ковзної середньої, експоненційне згладжування, регресійний підхід, інтегрована модель авторегресії – ковзного середнього ARIMA, нейронні мережі і т.д. Останнім часом популярними стали ARIMA моделі (Autoregressive Integrated Moving Average), які пояснюють поведінку часового ряду, виходячи лише з його значень у попередні моменти часу, а також добре описують як стаціонарні, так і нестаціонарні часові ряди. Значна частина методів аналізу зорієнтована на стаціонарні процеси, статистичні властивості яких не змінюються протягом часу (середнє та дисперсія постійні у випадку нормального розподілу). Однак багато часових рядів мають нестаціонарний характер. Оскільки більшість часових рядів можна привести до стаціонарних після виділення тренду, сезонної компоненти чи взяття різниці, то стаціонарним часовим рядам приділяється велика увага.

2. Методика побудови ARIMA моделей для прогнозування динаміки часових рядів

Моделювання ARIMA (авторегресійне інтегроване ковзне середнє) – це статистичний метод, який використовується для аналізу та прогнозування даних часових рядів. Це потужний метод, який враховує минулі значення ряду та його зміни з часом, щоб спрогнозувати його поведінку в майбутньому. Моделі ARIMA широко використовуються в різних сферах, включаючи фінанси, економіку, моделювання клімату та інженерію. Моделі ARIMA особливо корисні для моделювання даних, які виявляють часову автокореляцію, яка є тенденцією часового ряду корелюватися з його минулими значеннями. Автокореляція виникає, коли точка даних у часовому ряді корелюється з минулою чи майбутньою точкою даних у тому самому ряді.

Абревіатура ARIMA означає авторегресійне інтегроване ковзне середнє, яке описує три основні компоненти моделі:

– авторегресія (AR) – залежність ряду від його власних минулих значень, тобто майбутні значення ряду моделюються як лінійна комбінація його минулих значень;

– інтегрований (I) – стосується необхідності усунення будь-яких тенденцій або сезонності в ряді, тим самим стабілізуючи середнє значення часового ряду, що забезпечує досягнення стаціонарності. Стаціонарність – це статистична властивість часового ряду, яка означає, що його статистичні властивості не змінюються з часом;

– ковзне середнє (MA) – відноситься до залежності ряду від минулих помилок, тобто аналізує минулі та поточні значення лагованих змінних, щоб визначити вихідну змінну. Для створення поточного прогнозу враховується середньозважене значення залишків від попередніх прогнозів. Іншими словами, майбутні значення ряду моделюються як лінійна комбінація минулих помилок, а не минулих значень ряду.

Поєднуючи ці три компоненти, моделі ARIMA можуть фіксувати основні закономірності та залежності в даних часових рядів, дозволяючи нам робити точні прогнози.

Модель ARIMA вказується за допомогою трьох параметрів:

– p: порядок компоненти авторегресії (AR);

– d: ступінь різниці, необхідний, щоб зробити ряд стаціонарним (I);

– q: порядок компонента ковзного середнього (MA).

Ці три параметри разом із даними серії використовуються для підгонки моделі ARIMA до даних. Коли модель підігнана, її можна використовувати для прогнозування майбутніх значень ряду.

Математично ARIMA можна виразити рівнянням:

$$x_t = \varphi_1 \cdot x_{(t-1)} + \varphi_2 \cdot x_{(t-2)} + \varphi_3 \cdot x_{(t-3)} + \ldots + \varepsilon_t$$

де x_t – значення y в момент часу t; φ_i – коефіцієнти рівняння (i = 1,2, ..., p); p – порядок авторегресії; ε_t – випадкова величина.

У моделі змінного середнього на відміну від попереднього способу припускають, що кожен елемент ряду схильний сумарному впливу випадкових попередніх помилок ε_i:

$$x_t = \theta_1 \cdot \varepsilon_{(t-1)} + \theta_2 \cdot \varepsilon_{(t-2)} + \ldots + \theta_q \cdot \varepsilon_{(t-q)} + \varepsilon_t$$

де x_t – значення y в момент часу t; θ_i – коефіцієнти рівняння (i = 1,2, ..., p); p – порядок моделі змінного середнього; ε_t – випадкова величина.

При моделюванні на основі ARIMA моделей дуже важливим є оцінка значень параметрів моделі, які забезпечують найкращу відповідність даним. Процес оцінки параметрів моделювання ARIMA передбачає вибір відповідних значень для трьох основних параметрів моделі, а саме порядку авторегресії (p), інтегрованого порядку (d) і порядку ковзного середнього (q). Порядок авторегресії (p) представляє кількість лагованих значень залежної змінної для включення в модель. Порядок ковзного середнього (q) представляє кількість лагованих значень терміна помилки для включення в модель. Інтегрований порядок (d) представляє кількість разів, коли оператор розрізнення застосовувався до даних часового ряду, щоб зробити його стаціонарним.

Існує кілька методів оцінки параметрів моделі ARIMA, включаючи оцінку максимальної правдоподібності (MLE), метод Ханнана-Ріссанена та метод умовної суми квадратів (CSS). MLE є найбільш часто використовуваним методом для оцінки параметрів ARIMA, оскільки він забезпечує найкращі оцінки параметрів, які максимізують функцію правдоподібності для спостережуваних даних. Метод Ханнана-Ріссанена – це двоетапний метод, який спочатку оцінює параметри авторегресії та ковзного середнього, а потім оцінює інші параметри за допомогою методу CSS. Метод CSS оцінює параметри шляхом мінімізації суми квадратів помилок між прогнозами моделі та фактичними даними.

Після того, як параметри моделі ARIMA оцінені, модель можна використовувати для прогнозування майбутніх значень часового ряду. Однак важливо зазначити, що точність прогнозів значною мірою залежить від якості оцінок параметрів. Тому рекомендується протестувати та перевірити модель ARIMA за допомогою відповідних статистичних тестів перед використанням для прогнозування. Для вибору найкращої ARIMA моделі переважно застосовують алгоритм за методом Бокса-Дженкінса. Він передбачає побудову ARIMA моделі на основі наявного динамічного ряду. У деяких випадках навіть акцентують увагу на тому, що чим більша довжина динамічного ряду, тим буде кращою модель.

Деякі нестаціонарні часові ряди можуть бути приведені до стаціонарних за допомогою оператора послідовної різниці. Нехай часовий ряд y_t після застосування d раз оператора послідовної різниці став стаціонарним рядом $\Delta_{y_t}^d$, що задовольняє ARIMA (p, q). Тоді процес y_t називається інтегрованим процесом авторегресії і ковзної середньої ARIMA (p, d, q).

Методологія Бокса-Дженкінса підбору ARIMA моделі для ряду спостережень складається з трьох етапів.

1. Ідентифікація моделі. Тестування ряду на стаціонарність, використовуючи такі методи: візуальний аналіз графіку, візуальний аналіз *ACF* (вибіркова автокореляційна функція), *PACF* (часткова автокореляційна функція *P*), тести на одиничні корені. Якщо отримується стаціонарний ряд, то переходимо до наступного етапу, якщо ні – застосовуємо оператор взяття послідовної різниці і повторюємо тестування. На практиці послідовна різниця береться, як правило, не більше двох разів. Після того, як отримано стаціонарний часовий ряд, будуються його вибіркові *ACF* і *PACF*, які дозволяють сформулювати декілька гіпотез про можливі порядки авторегресії p і ковзної середньої q. Зазвичай використовуються моделі більш низьких порядків, як правило, з $p + q \leq 3$ (якщо немає сезонної компоненти). Вибіркові *ACF* і *PACF*, зазвичай, не співпадають із теоретичними аналогами, але достатньо близькі до них.

2. Оцінювання моделі і перевірка адекватності моделі. Для кожної з вибраних на першому етапі моделей оцінюються їх параметри і обчислюються

залишки. Кожна з моделей перевіряється, наскільки вона відповідає даним. Із моделей, адекватних даним, вибирається найпростіша (з меншою кількістю параметрів).

3. Прогнозування. Після того, як на другому етапі вибрана модель, можна будувати прогноз на один або декілька кроків за часом і оцінювати довірчі межі прогнозних значень.

3. Практика побудови ARIMA моделей з використанням пакету STATISTICA

У пакеті STATISTICA аналіз і прогноз по моделі авторегресії і ковзного середнього здійснюється в модулі Тимчасові ряди і прогнозування (Time Series / Forecasting). У процесі роботи генерується велика кількість діалогових і допоміжних вікон, таблиць, графіків. Для успішної навігації по ним наводиться схема переходів між чотирма основними діалоговими вікнами першого рівня (рис. 4.1).

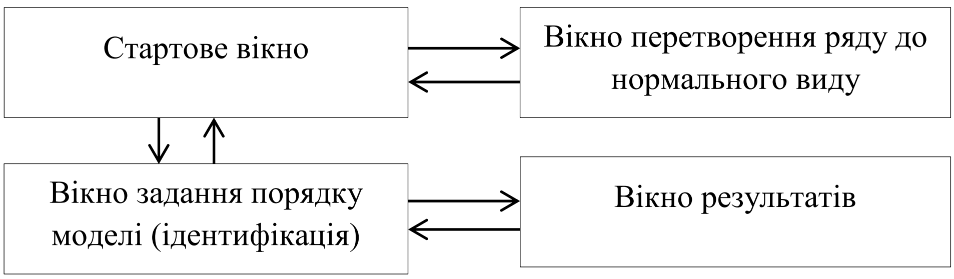
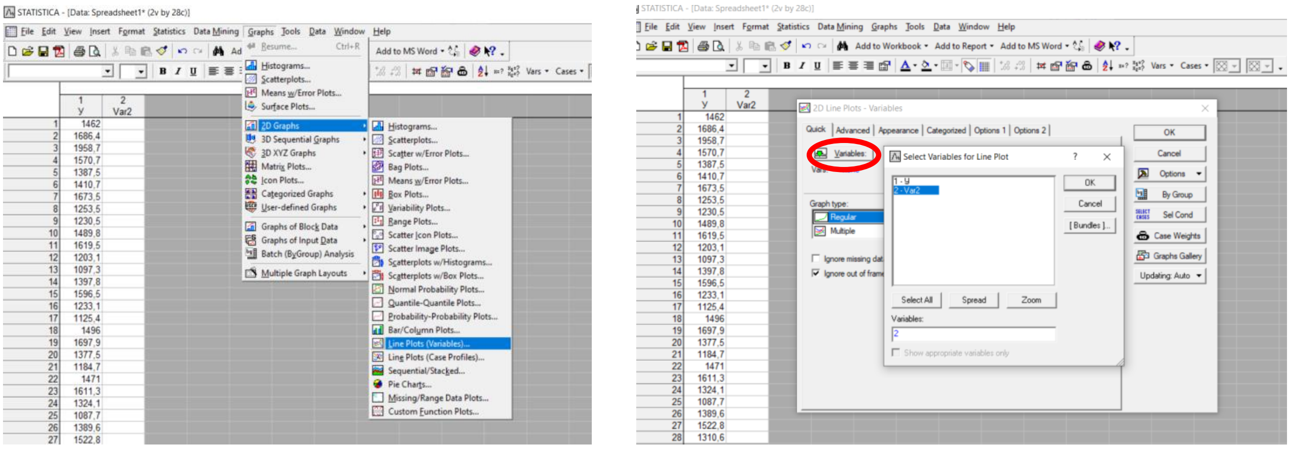


Рисунок 4.1 – Схема переходів між діалоговими вікнами

Модель ARIMA може бути застосована тільки до стаціонарних рядів, тому спочатку треба побудувати графік аналізованих даних і, якщо ряд не відповідає цій вимозі, то багаторазовими перетвореннями привести його до нормального (стаціонарного) виду. Аналіз і прогнозування поведінки тимчасового ряду, як зазначалося вище, складається з декількох етапів, що включають виконання різних статистичних та сервісних процедур:

1) візуальний аналіз вихідних даних;
2) перетворення ряду до стаціонарного виду;
3) ідентифікація моделі, тобто підбір порядку моделі p і q;
4) оцінка параметрів моделі;
5) перевірка адекватності моделі;
6) прогноз за моделлю.

1 етап. Спершу завантажуємо програму STATISTICA, створюємо нову Робочу книгу та експортуємо вхідні дані. Далі побудуємо графік за вхідними даними. Для цього виконаємо таку послідовність дій: *Graphs → 2D Graphs → Line Plots (Variables)* (рис. 4.2а). Відкриється діалогове вікно, у якому потрібно вибрати змінну за якою потрібно побудувати графік (рис. 4.2б).



а б

Рисунок 4.2 – Етапи побудови графіка вхідних даних

У результаті виконаних дій отримуємо графік вхідних даних, який наведено на рис. 4.3.

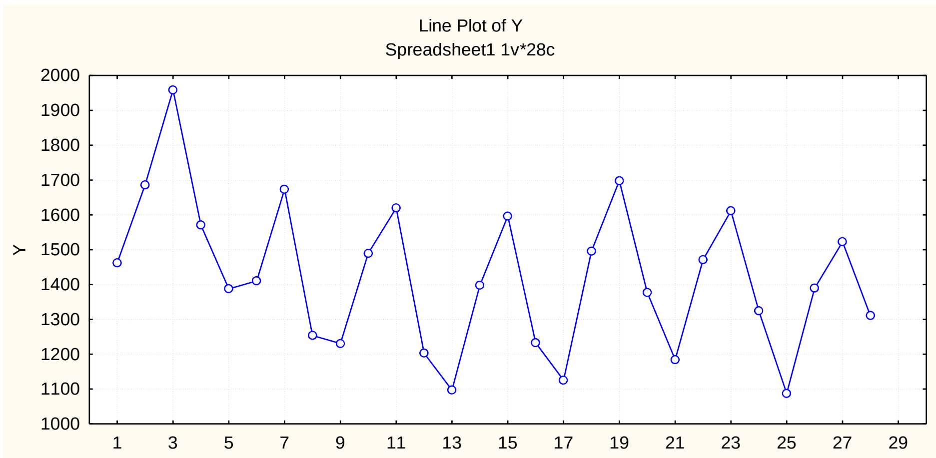
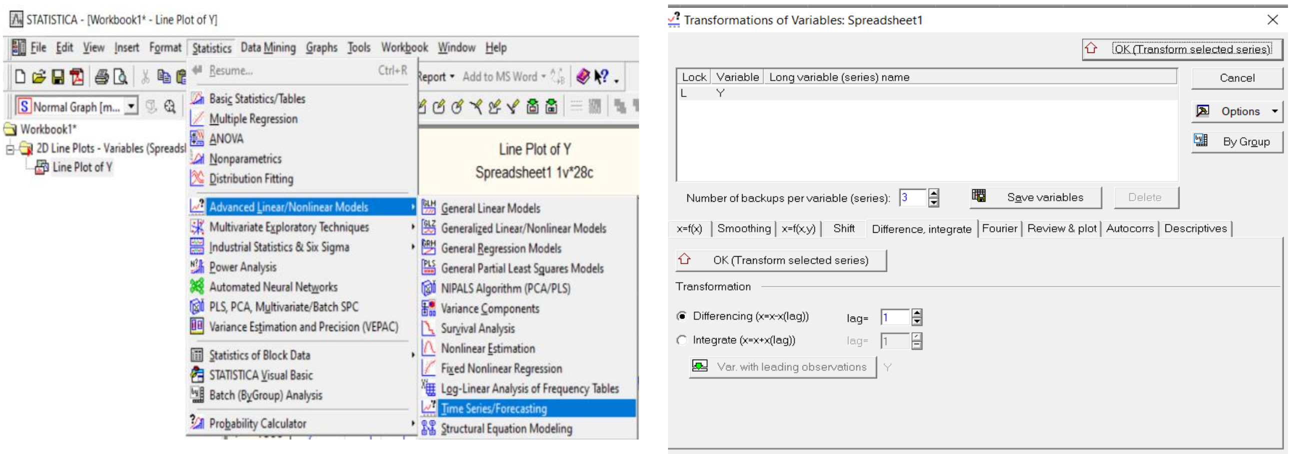


Рисунок 4.3 – Графік часового ряду обсягів продажів

2 етап. Як видно з рис. 4.3, для цього часового ряду характерні сезонні коливання, тож перейдемо до другого етапу аналізу – *Перетворення ряду до стаціонарного виду*.

Для того, щоб почати роботу з вхідними даними, треба викликати модуль для роботи з тимчасовими рядами ***Аналіз → Поглиблені методи аналізу → Тимчасові ряди і прогнозування*** (***Statistics → Advanced Linear / Nonlinear Models →Time Series / Forecasting,*** рис. 4.4а) або ввести в рядку пошуку (***Тимчасові ряди і прогнозування (Time Series / Forecasting***). Відкриється діалогове вікно (рис. 4.4б), у якому здійснюється приведення ряду до стаціонарного.

Для приведення ряду до стаціонарного виду переходимо у вікно для перетворень кнопкою ***OK*** (перетворення, авто- і кросскорреляції ***Transform selected series***) і на вкладці Графіки (***Review & Plots***) вибираємо команду для побудови графіку вихідного ряду. Там же ставимо галочку в режимі будувати Графік після кожного перетворення (***Plot Variables after each transformation***).



а б

Рисунок 4.4 – Діалогове вікно для перетворення ряду

Тепер результат кожного перетворення буде автоматично висвітлюватися на екрані у вигляді графіка, що дає змогу візуально оцінювати стаціонарність ряду.

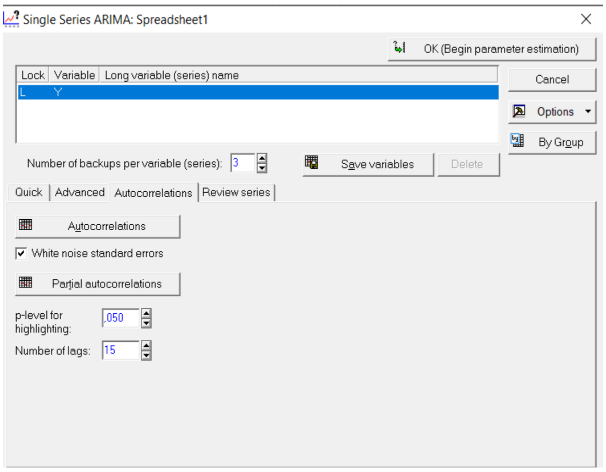
Рекомендуються такі перетворення:

- логарифмування для стабілізації дисперсії і зменшення амплітуд коливання часового ряду (вкладка $x = f(x)$);
- видалення тренду (вкладка $x = f(x)$);
- взяття різниці першого або вищого порядків на вкладці Різниця (*Difference*) для видалення лінійного тренда;
- згладжування (вкладка *Smoothing*);
- віднімання середнього, стандартизація ряду (вкладка $x = f(x)$).

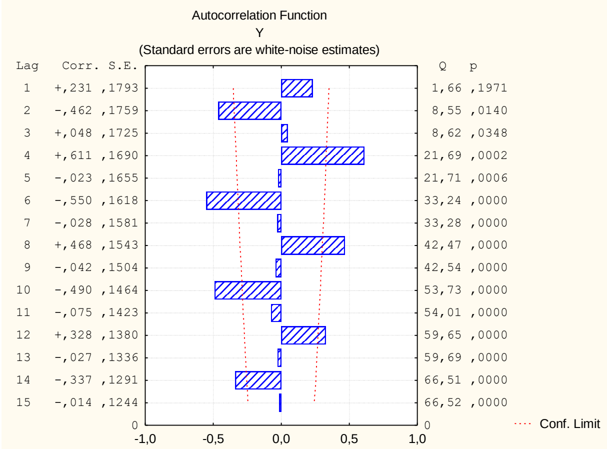
Для перевірки стаціонарності корисно також будувати для кожного перетвореного ряду графік автокореляційної функції – вкладка Автокореляції (***Autocorrs***). У стаціонарному ряді графік автокореляційної функції буде прагнути до нуля зі збільшенням лага. У процесі роботи модуля генерується багато рядів. Їх імена автоматично додаються в список, очолюваний ім’ям вихідного ряду. Будь-який ряд можна зберегти або видалити. Обрана чергова дія буде застосовуватися до ряду, виділеного в цьому списку.

3 етап – *Ідентифікація моделі*. Ідентифікація моделі – це вибір конкретного виду рівняння. Потрібно вказати програмі, скільки доданків буде в рівнянні авторегресії (p), скільки – в рівнянні змінного середнього (q). Величини p і q – це параметри моделі.

Для ідентифікації аналізованого ряду проведемо аналіз корелограми – графік автокореляційної функції (рис. 4.5). На цьому графіку, крім самої АКФ (автокореляційна функція), значення якої зображуються у вигляді стовпчиків, червоним кольором вказані довірчі інтервали для коефіцієнтів автокореляції, які в межах довірчих інтервалів незначно відрізняються від нуля.



а



б

Рисунок 4.5 – Побудова корелограми

Корелограма відображає графічно й чисельно коефіцієнти автокореляції та їх стандартні похибки для послідовності лагів із певного діапазону. Часовий ряд може мати такі компоненти як тренд, сезонність, циклічність та шум. Автокореляційна функція враховує всі ці компоненти при пошуці кореляцій, саме тому їх можна побачити на графіку.

Часткова автокореляційна функція (ЧАКФ) – це більш поглиблена версія звичайної автокореляційної функції. Відмінність полягає лише у виключенні кореляційної залежності між спостереженнями всередині лагів. Тобто часткова автокореляційна функція на кожному лагі відрізняється від звичайної на величину видалених автокореляцій із меншими часовими лагами. Із цього випливає, що часткова автокореляційна функція більш точно характеризує автокореляційні залежності всередині часового ряду

Аналізуючи корелограму (рис. 4.5б), на вигляд можемо віднести цей ряд до моделей MA – моделі ковзного середнього. Так само можемо припустити сезонну складову з лагом 4. Оскільки при $k > 1$ ми спостерігаємо значення процесу близького до нуля. Також через кожні чотири періоди сплеск процесу, отже, є сезонна складова. На графіку ряду видно піки і падіння через кожні чотири періоди, то візьмемо лаг сезонності 2 з періодом сезонності 4.

Рекомендації по підбору порядку моделі на основі аналізу графіків АКФ і ЧАКФ (часткова автокореляційна функція). Попередній висновок про порядок моделі ковзного середнього можна зробити за кількістю перших q значимих значень автокореляційної функції (рис. 4.5б). Зазначене правило добре, якщо підібраний порядок невеликий, наприклад, від одного до трьох-чотирьох.

Для підбору порядку авторегресії p інформативним є вид часткової автокореляційної функції. Якщо значимий перший коефіцієнт автокореляції, то $p = 1$. Якщо значимі два перших коефіцієнта, то $p = 2$.

Рішення, які значення задати для p і q, є не простими і вимагають проведення експерименту з різними моделями. Проте є такі практичні рекомендації, що узагальнюють обидва графіки:

1) задати параметр $p = 1$, якщо АКФ експоненціально спадає, а ЧАКФ різко виділяє значення на лагу 1, немає кореляції на інших лагах;

2) задати параметр $p = 2$, якщо АКФ має форму синусоїди або експоненціально спадає. ЧАКФ повинна різко виділятися на значеннях лагів 1 і 2;

3) задати параметр $q = 1$, якщо АКФ різко виділяє значення на лагу 1, немає кореляції на інших лагах. ЧАКФ експоненціально спадає;

4) задати параметр $q = 2$, якщо АКФ різко виділяється на лагу 1 і 2, немає кореляції на інших. ЧАКФ має форму синусоїди або експоненціально спадає;

5) задати $p = 1$ і $q = 1$, якщо АКФ експоненціально спадає з лага 1, ЧАКФ експоненціально спадає з лага 1.

4 етап – *Оцінювання параметрів моделі*. Існують різні методи оцінювання параметрів, які дають дуже схожі оцінки, але для цієї моделі одні оцінки можуть бути більш ефективні, а інші менш ефективні. Загалом, під час оцінювання порядку моделі використовується так званий квазіньютоновській алгоритм максимізації правдоподібності (вірогідності) спостереження значень ряду за значеннями параметрів. Практично, це вимагає обчислення (умовних) сум квадратів (SS) залишків моделі. Є різні способи обчислення суми квадратів залишків SS; ви можете обрати у блоці Estimation metod:

- наближений метод максимальної правдоподібності МакЛеода і Сейлз (1983), цей метод у пакеті STATISTICA встановлено за замовчуванням;
- наближений метод максимальної правдоподібності з ітераціями назад;
- точний метод максимальної правдоподібності по Меларду (1984).

Метод оцінювання вибирається в правій частині вікна (***Single Series ARIMA***, рис. 4.6). Система пропонує дві обчислювальні процедури, що реалізують метод максимальної правдоподібності, наближений і точний (***Exact***).

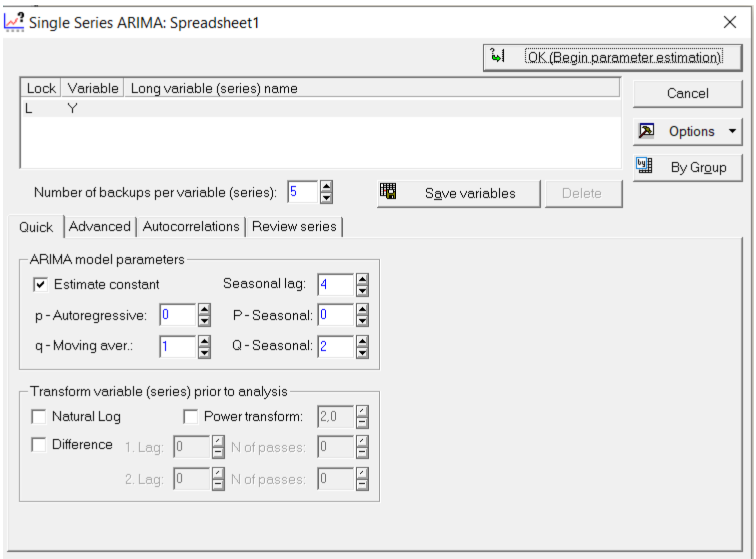


Рисунок 4.6 – Діалогове вікно Single Series ARIMA

У діалоговому вікні Single Series ARIMA (рис. 4.6) треба задати кількість членів у рівнянні моделі, наприклад, $p = 0$, $q = 1$ і наявність вільного члена – *Оцінити константу* (***Estimate constant***). Надалі, якщо модель вийде невдалою, треба буде варіювати значення *p* і *q* з урахуванням рекомендацій за виглядом графіків автокореляційної функції та часткової автокореляційної функції.

Так, для нашого прикладу процесу ARIMA (*p*, *d*, *q*) (*P*, *D*, *Q*), встановимо *p* = 0, *d* = 0, *q* = 1, *P* = 0, *D* = 0, *Q* = 2. Модель беремо з константою, заповнюємо параметри моделі в діалоговому вікно ***Single Series ARIMA*** у вкладці ***Quick***.

Після того, як було задано параметри моделі і таким чином визначено кількість невідомих коефіцієнтів у рівнянні, можна запустити процедуру їх знаходження (Оцінювання) кнопкою ***Ok*** (***Begin parameters estimation***).

Якщо ітераційний процес обчислення коефіцієнтів зійшовся, то з'явиться вікно з результатами обчислень *Результати АРПСС* (***Single Series ARIMA Results***). Для прикладу, який розглядається, отримуємо такі результати (рис. 4.7).

В інформаційному описі діалогового вікна результатів (рис. 4.7) висвічуються такі відомості:

- ім'я ряду спостережень;
- перелік перетворень (*Transformations*), яких зазнав ряд;
- вид моделі: Model (*p*, *d* , *Q*), де *d* – число перетворень типу взяття різниць першого або більш високих порядків;
- кількість спостережень у вихідному ряду (*No. of obs*);
- початкове і кінцеве значення залишкової Сума квадратів (SS) і середній квадрат залишків (MS);
- числові значення коефіцієнтів рівняння та їх стандартні помилки.

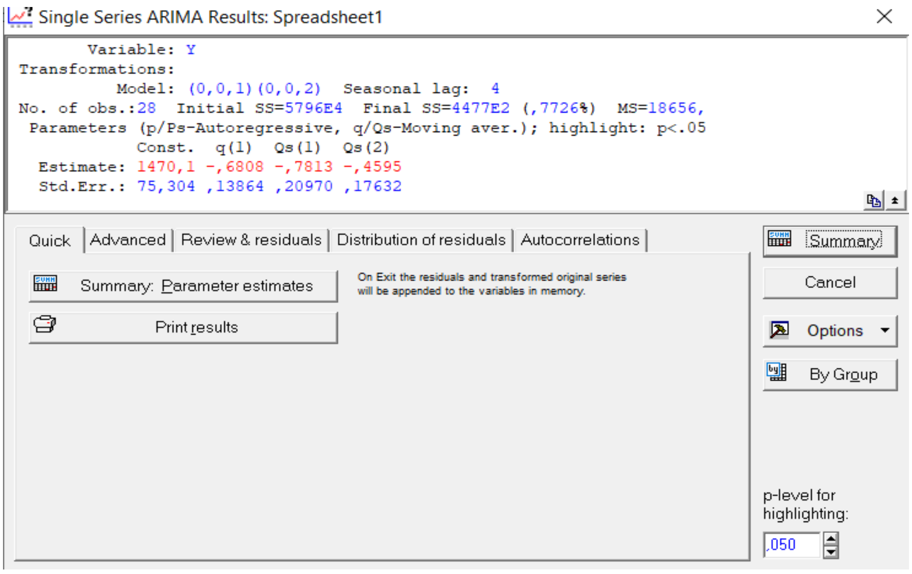


Рисунок 4.7 – Результати обчислень

Коефіцієнти рівняння моделі стійкі, якщо вони хоча б у два рази перевищують свої стандартні помилки (червоним кольором виділяються значимі коефіцієнти). Результати оцінки параметрів моделі представлені на рис. 4.8.

Paramet.	Input: Y (Spreadsheet1) Transformations: none Model:(0,0,1)(0,0,2) Seasonal lag: 4 MS Residual= 18656, Param.	Asympt. Std.Err.	Asympt. t(24)	p	Lower 95% Conf	Upper 95% Conf
Constant	1470,053	75,30352	19,52171	0,000000	1314,634	1625,472
q(1)	-0,681	0,13864	-4,91042	0,000052	-0,967	-0,395
Qs(1)	-0,781	0,20970	-3,72590	0,001050	-1,214	-0,349
Qs(2)	-0,460	0,17632	-2,60630	0,015482	-0,823	-0,096

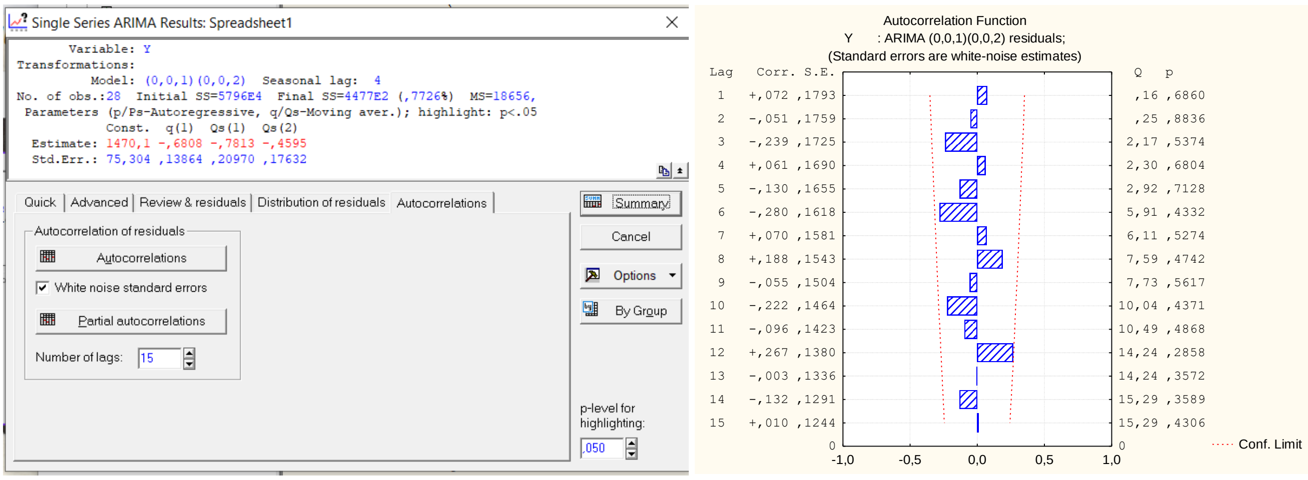
Рисунок 4.8 – Таблиця оцінок параметрів ARIMA

У першій колонці цієї таблиці (рис. 4.8) – оцінки параметрів, у другій – асимптотична стандартна помилка, у третій – значення *t*-критерію, у четвертій – рівні значимості (усі параметри статистично значущі), у п’ятій та шостій – відповідно верхні та нижні межі 95% довірчих інтервалів для відповідних невідомих параметрів моделі. У прикладі, що розглядається, інтервал (-0.967, -0,395) з ймовірністю 0,95 накриває справжнє значення параметра *q*(l). Число -0,681, наведене у першій колонці, є точкова оцінка невідомого параметра *q*(l).

Запишемо отримане рівняння:

$$Y = 1470{,}053 + (1+ 0{,}681{*}L)(1 + 0{,}781{*}L4 + 0{,}46{*}L8){*}\varepsilon_t.$$

Оцінимо якість моделі чи ступінь її адекватності даним за допомогою аналізу залишків. У вікні ***Результати*** (рис. 4.7) переглянемо корелограму, обираємо вкладку ***Autocorrelations*** (рис. 4.9а) та натискаємо кнопку ***Autocorrelations.*** У результаті отримаємо корелограму, наведену на рис. 4.9б.



а б

Рисунок 4.9 – Корелограма

За видом корелограми можемо зробити висновок про стаціонарність отриманого ряду залишків. Оскільки значення ймовірностей *Q*-статистики більше 0,05 то автокореляції немає.

5 етап – *__Перевірка адекватності моделі__*. На жаль, єдиного загального правила для цього аналізу немає. Більш-менш обґрунтоване рішення можна прийняти, порівнявши наявні спостереження зі значеннями, отриманими за допомогою підібраної моделі.

Різниці між значеннями, що спостерігаються, і передбаченими значеннями називають залишками. Аналіз залишків дозволяє отримати уявлення, наскільки добре підібрана сама модель і наскільки правильно обраний метод оцінки коефіцієнтів.

Передбачається, що модель адекватна, якщо виконуються 2 вимоги:

1) залишки незалежні,

2) залишки розподілені за нормальним законом.

Для перевірки незалежності залишків зазвичай використовують критерій серій, критерій Дарбіна-Уотсона, автокореляційну функцію. У моделі ARIMA для цих цілей пропонується використовувати автокореляційну функцію (корелограму).

Для перевірки нормальності розподілу залишків найчастіше використовується графік розподілу, критерій Колмогорова-Смирнова, *хі*-квадрат і т.д.

Спочатку у вікні ***Single Series ARIMA Results*** оберемо вкладку ***Review & residuals*** і натиснемо кнопку ***Review residuals,*** у результаті отримаємо залишки (рис. 4.10).

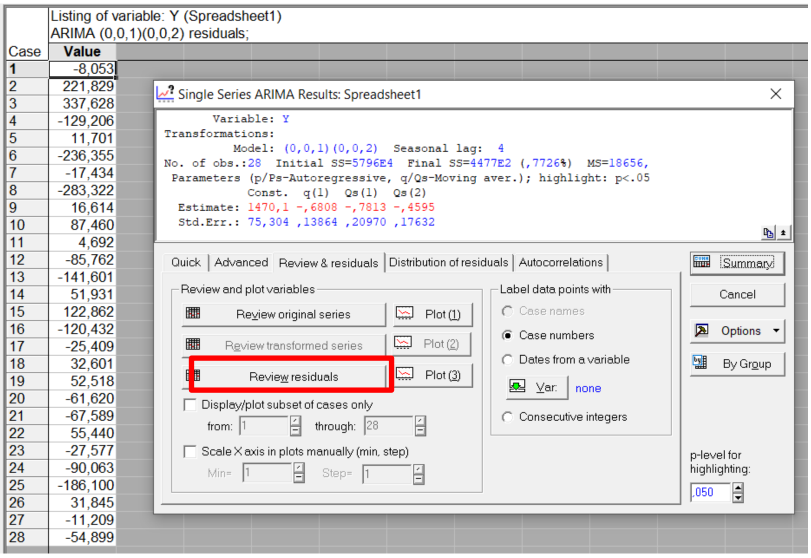
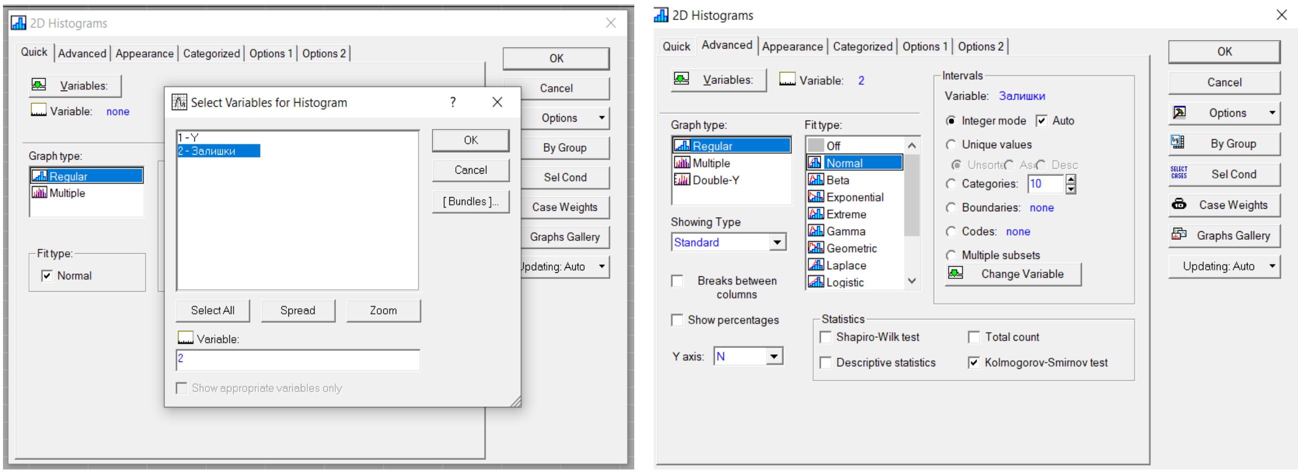


Рисунок 4.10 – Формування залишків

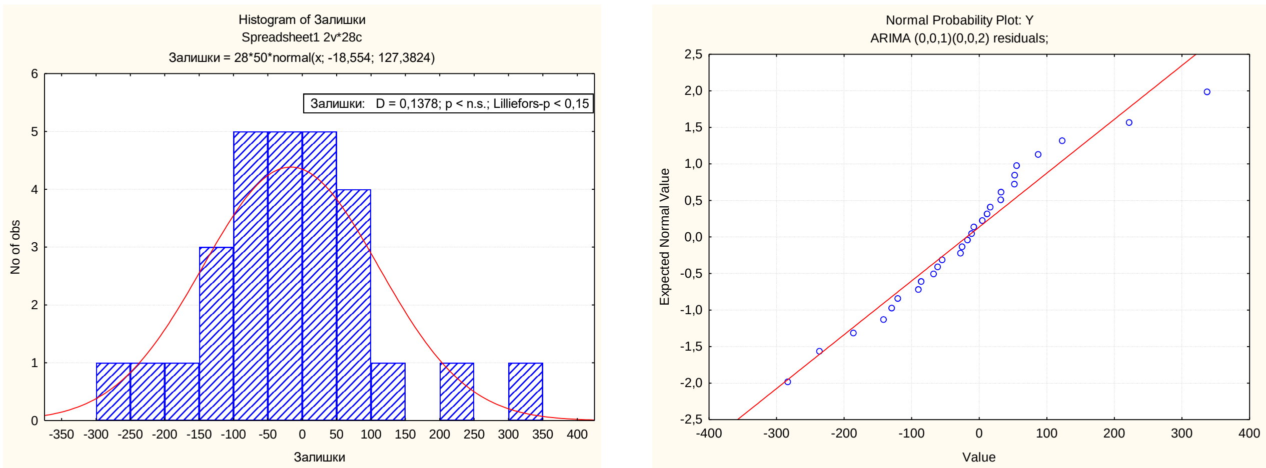
Копіюємо залишки і додаємо у файл із вихідними даними. Далі перейдемо до побудови графіку – гістограми залишків. Для цього виконаємо такі дії: ***Graphs → 2D Histograms → Variables***, обираємо вкладку ***Advanced,*** де встановлюємо параметри як показано на рис. 4.11.



а б

Рисунок 4.11 – Побудова графіку

У результаті виконаних дій отримаємо гістограму залишків (рис. 4.12).



а б

Рисунок 4.12 – Гістограма залишків

Із рис. 4.12 можемо зробити висновок, що розподіл залишків схожий на нормальний. Критерій Колмагорова становить 0,1378. Для аналізованої вибірки отримаємо: $D_{0,05} = \dfrac{1{,}36}{\sqrt{28}} = 0{,}257$, тобто *D*_факт (0,1378) менше за *D*_0,05 (0,257), приймається нульова гіпотеза, тобто розподіл відповідає нормальному.

Якщо розрахункове значення критерію менше або дорівнює табличному, то вважається, що розподіл відповідає нормальному за рівнем значимості альфа (0,05 або 0,01). У таблиці 4.1 наведено критичні значення критерію Колмагорова-Смирнова.

Таблиця 4.1 – Критичні значення критерію Колмогорова-Смирнова

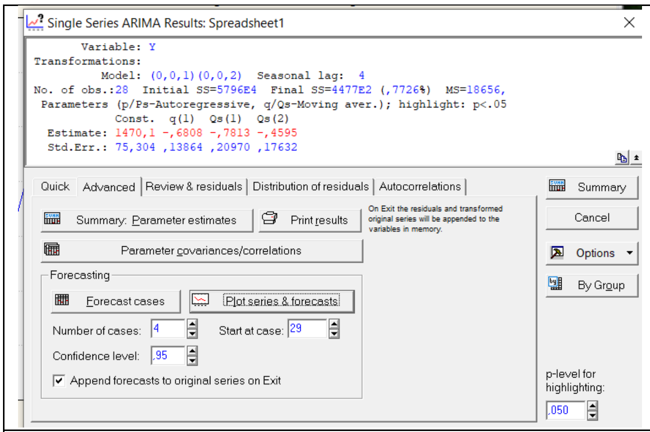
n	d_{max}		*n*	d_{max}	
	P = 0,05	*P = 0,01*		*P = 0,05*	*P = 0,01*
5	0,6074	0,7279	50	0,1921	0,2302
10	0,4295	0,5147	60	0,1753	0,2101
15	0,3507	0,4202	70	0,1623	0,1945
20	0,3037	0,3639	80	0,1518	0,1820
25	0,2716	0,3255	90	0,1432	
30	0,2480	0,2972	100	0,1358	
40	0,2147	0,2574	n > 100	$1{,}36/\sqrt{n}$	$1{,}63/\sqrt{n}$

Отже, отримана модель досить адекватно описує тимчасовий ряд, що досліджується.

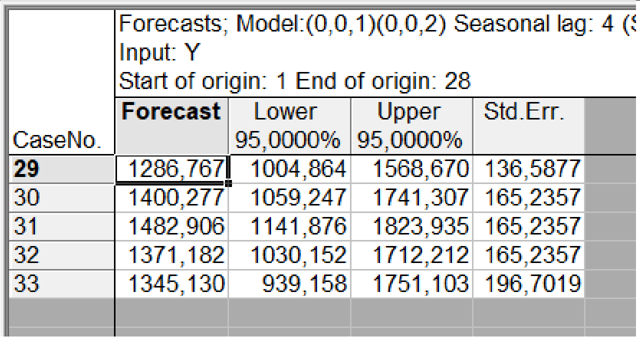
6 етап – *Прогноз за моделлю*. Параметри прогнозу можна задати у вікні результатів (***Single Series ARIMA Results)*** на вкладці Додатково (***Advanced***) у поле Прогноз (***Forecasting***):

- кількість періодів прогнозування (*Number of Cases*);
- номер елемента ряду, з якого передбачається почати прогноз (*Start at Case*);
- довірчу ймовірність прогнозу – Рівень довіри (*Confidence level*).

У вікні ***Single Series ARIMA Results*** (рис. 4.13а) оберемо вкладку ***Advancer,*** у блоці ***Forecasting*** обираємо (*Number of cases*), будуємо прогноз на п’ять періодів вперед та рівень значимості (*Confidence level*) 0,95. Потім нажимаємо кнопку ***Forecast cases*** і отримуємо прогноз, рівень довіри (верхній та нижній інтервали) та помилку прогнозу (рис. 4.13б).



а



Forecasts; Model:(0,0,1)(0,0,2) Seasonal lag: 4 (
Input: Y
Start of origin: 1 End of origin: 28

CaseNo.	Forecast	Lower 95,0000%	Upper 95,0000%	Std.Err.
29	1286,767	1004,864	1568,670	136,5877
30	1400,277	1059,247	1741,307	165,2357
31	1482,906	1141,876	1823,935	165,2357
32	1371,182	1030,152	1712,212	165,2357
33	1345,130	939,158	1751,103	196,7019

б

Рисунок 4.13 – Результати прогнозування

Далі побудуємо графік. У вікні ***Single Series ARIMA Results*** на вкладці ***Advancer*** у блоці ***Forecasting*** нажимаємо кнопку ***Plot series & forecasts***. Отримуємо графік ряду з доданими спрогнозованими значеннями червоного кольору і довірчими інтервалами для них. Рекомендується побудувати кілька моделей і вибрати найкращий варіант. Результати прогнозу подано на рис. 4.14.

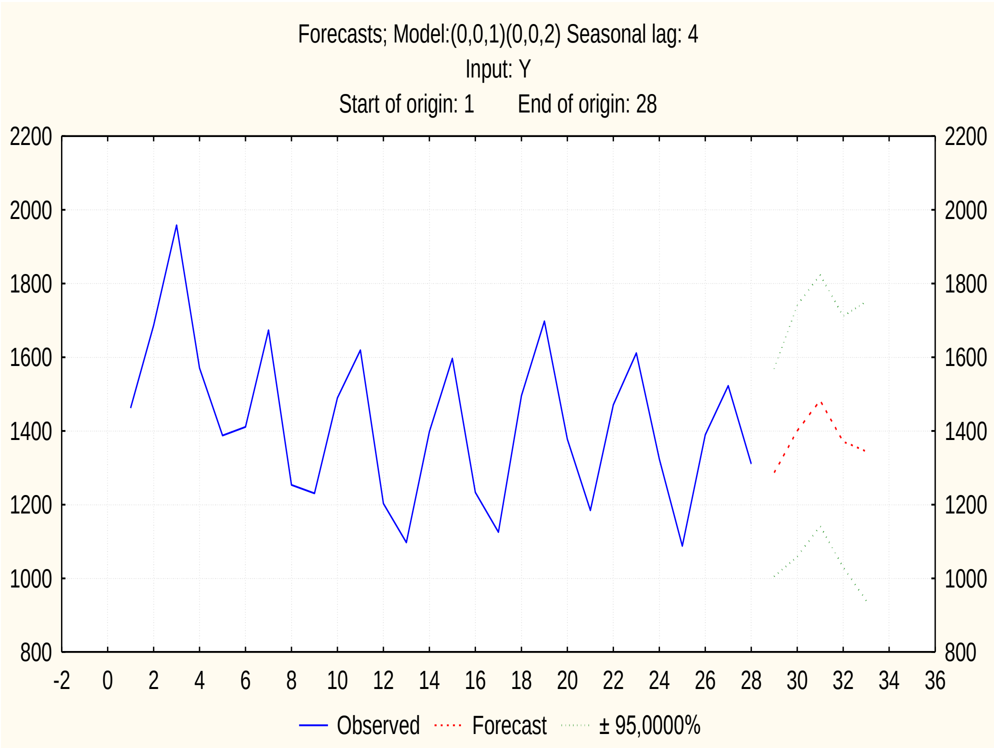


Рисунок 4.14 – Графічні результати прогнозування

Отриману модель часового ряду можемо визнати адекватною вихідним даним. Усі коефіцієнти моделі статистично значимі, між залишками відсутня автокореляція, залишки мають нормальний розподіл. Також відзначимо, що у досліджуваному ряді спостерігається наявність сезонної складової.

Питання для самоконтролю

1. Назвіть основні етапи аналізу даних при побудові ARIMA моделей.
2. Дайте визначення поняття «часовий ряд».
3. Що означає абревіатура ARIMA?
4. Назвіть етапи побудови ARIMA моделі з використанням пакету STATISTICA.
5. Поясніть, за допомогою яких параметрів задається ARIMA модель.
6. Які перетворення рекомендується виконати для приведення часового ряду до стаціонарного вигляду?
7. Як здійснюється перевірка адекватності побудованої ARIMA моделі?

Лабораторне заняття №3

Тема: Аналіз динаміки галузей України.

Мета: отримати практичні навички побудови ARIMA моделі з використанням пакету STATISTICA.

Завдання*:* провести аналіз динаміки фінансових показників галузей України та прогнозування їх розвитку.

Хід роботи.

1) Вихідні дані для виконання лабораторної роботи необхідно сформувати за допомогою офіційних статистичних даних, які розміщено на сайті Державної служби статистики України (https://www.ukrstat.gov.ua/).

2) Провести аналіз динаміки валового галузевого продукту (ВГП) за період з 2010 року по 2021 рік (використовувати щоквартальні дані).

3) Дати оцінку зміни трендів галузей і можливих наслідків. Провести прогнозування за допомогою програми STATISTICA для різних рівнів довірчої ймовірності (07; 0,8; 0,9; 0,95).

4) Зробити висновки.

Для визначення свого варіанту галузі студент використовує останню цифру номеру своєї залікової книжки (табл. 4.2).

Таблиця 4.2 – Варіанти індивідуальних завдань

Остання цифра студентського квитка	Галузь діяльності
0	Добувна промисловість
1	Переробна промисловість
2	Будівництво
3	Сільське, лісове та рибне господарство
4	Фінансова та страхова діяльність
5	Професійна, наукова та технічна діяльність
6	Транспорт, складське господарство, поштова та кур’єрська діяльність
7	Оптова та роздрібна торгівля
8	Освіта
9	Інформація та телекомунікації

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3. ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ ВИКОРИСТАННІ МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Тема 5. Приклади використання теорії катастроф до аналізу реальних систем

Мета: ознайомитися з лінійною динамічною моделлю довгих хвиль в економіці та навчитися її будувати.

План

5.1 Особливості довгострокової економічної динаміки

5.2 Лінійна динамічна модель довгих хвиль в економіці

Основні поняття

Динаміка, циклічні коливання, довгі хвилі, динамічна модель, економічна система, економічна рівновага.

5.1 Особливості довгострокової економічної динаміки

Порушення макроекономічної рівноваги в процесі саморозвитку національних економічних систем під впливом внутрішніх і зовнішніх факторів зумовлює явище економічної (макроекономічної) динаміки.

Багаторічні дослідження численних авторів довели існування різних за тривалістю циклічних (власне квазіциклічних) коливань економічних явищ і процесів. Одним із перших їх описав у XIX ст. К. Жугляр (ділові або торгові цикли). Остаточно довів і пояснив цю закономірність (промислові цикли) М.І. Туган-Барановський.

Основні види циклічних коливань формуються нерівномірністю руху потоків капіталів на кожному з рівнів економічної системи (взаємодією її інституційних секторів: домогосподарств, фірм і корпорацій, національної економіки, світової економіки) в процесі їх взаємної адаптації та коеволюції з циклічно змінюваними параметрами природного середовища. Й. Шумпетер встановив, що найпомітніший вплив на національну економіку справляють взаємозалежні цикли: Кітчина (короткі – з періодом 3-5 років), Жугляра (середні – близько 10 років) та, особливо, Довгі хвилі Кондратьєва (тривалістю в середньому понад 54 роки). Довгі хвилі в економіці – вид циклічних коливань економічної активності з амплітудою 40-60 років.

Взаємодія фінансових потоків «домогосподарства – фірми» викликає фінансово-інвестиційні цикли Кітчина (динаміку заощадження – інвестиції). Взаємодія «фірми – національна економіка» спричиняє базові для економічної динаміки ділові (промислові) цикли Жугляра (міжгалузеві переливи потоків капіталів, пов’язані з терміном життя машин і обладнання). Взаємодія «національна економіка – світова економіка» породжує великі цикли кон’юнктури – Довгі хвилі Кондратьєва (тривалі буми і депресії). Відомі також будівельно-інвестиційні (відновлення пасивної частини основного капіталу) цикли Кузнеця тривалістю 20-22 рр., особливо помітні в економіці США. Крім того, розглядають надвеликі цикли, зокрема зміни економічного і політичного лідерства з періодом у 100-120 років, а також – гіпотезу про столітній кондратьєвський цикл, що складається з двох Довгих хвиль, висунуту на початку 1990-х А. Грублером і М. Корольковим (незалежно один від одного). Згідно з концепцією М. Королькова, Довгі хвилі, що стартують на початку століття, стосуються власне інноваційних змін у базових макротехнологіях (формування нового технологічного укладу), які зазнають подальшого розвитку у Довгих хвилях середини століття, головне призначення яких – зміни в соціально-економічній структурі суспільства, відповідні новому технологічному та ресурсному укладам, що забезпечує його розвиток протягом цього століття. Тому головним енергетичним ресурсом протягом XIX ст. було вугілля, а XX ст. – вже нафта.

Довгі хвилі Кондратьєва відображають фундаментальні етапи еволюції соціально-економічних систем, що виявляються в динаміці економічної кон'юнктури та темпів економічного розвитку. Вони пов'язані з перебігом інноваційних процесів у національних та світовій економіках, зокрема, із послідовною зміною технологічних укладів, що супроводжується заміною на новій технологічній основі застарілих виробництв, споруд та інфраструктури. Життєвий цикл технологічного укладу триває приблизно 100 років, а період його домінування – приблизно 60 років, синхронізований із однією Довгою хвилею Кондратьєва.

Довгі хвилі в економіці складаються з двох фаз: фази піднесення (висхідна хвиля) і фази спаду (низхідна хвиля). *Фаза піднесення* пов'язана з масовим впровадженням нових технологій, оновленням та збільшенням виробничих фондів, зародженням і розвитком нових галузей економіки. Це сприяє розширенню інвестиційної діяльності, відкриває додаткові можливості отримання прибутку, підвищення заробітної плати. Фаза піднесення триває 25-30 років і змінюється *фазою спаду*, яка характеризується погіршенням умов господарювання застарілими технікою і технологіями, вичерпанням можливостей їх вдосконалення на еволюційній основі, загостренням структурної кризи в економіці, зниженням ефективності виробництва.

Тобто матеріальну основу Довгих хвиль становить певний технологічний спосіб виробництва, підтриманий притаманними йому енергетичними, сировинними та людськими ресурсами, що виникає завдяки впровадженню кластера базових інновацій. Він формується двома шляхами: по-перше, революційно, коли запроваджується якісно нова макротехнологія; по-друге, еволюційно, коли на основі нової макротехнології поліпшуються і удосконалюються існуючі технології попередніх технологічних укладів. Ці два процеси взаємодоповнюють один одного, причому в першому півстолітті домінують революційні, а в другому – еволюційні зміни.

Встановлено, що технічний прогрес розвивається хвилеподібно з циклічністю 50-60 років. На думку низки вітчизняних та зарубіжних вчених, починаючи з XVIII ст. відбулося 5 великих циклів. Їх хронологію і характеристику наведено на рис. 5.1.

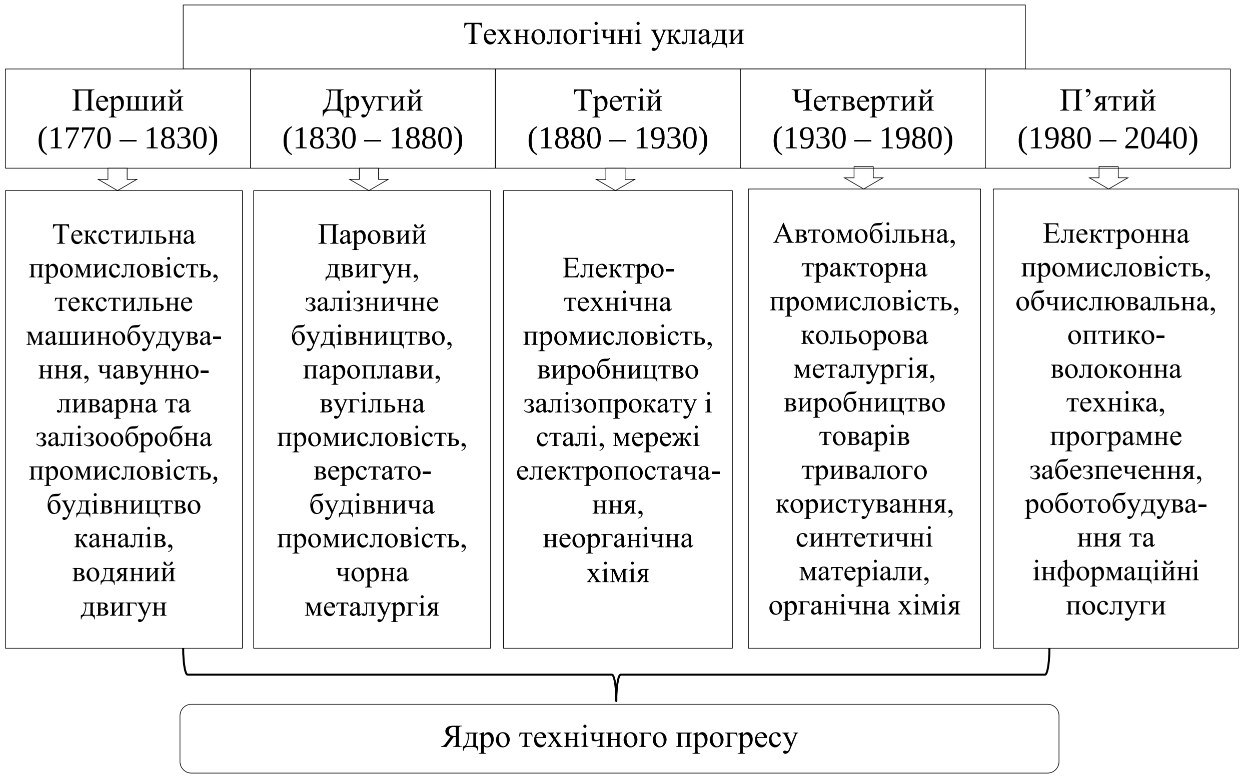


Рисунок 5.1 – Хронологія технологічних укладів

Важливою ознакою великих циклів є їх інтернаціоналізація. Народившись у найпередовіших у технологічному відношенні та найсприятливіших для інноваційних перетворень економічних системах, вони поступово поширюються на інші господарські структури. З утворенням цілісної системи світового господарства часовий проміжок процесу інтернаціоналізації великих циклів зменшується (рис. 5.2).

Варто зауважити, що М.Д. Кондратьєв до основних характеристик великих циклів відносив науково-технічні винаходи, відкриття, зміни технологічного устрою, оскільки всі ці складові мають вплив на соціально-економічне життя суспільства, утворення нових ринків і т.д. Науково-технічна революція розглядалася як основа циклу, а згідно теорії «інноваційних пакетів» нововведення розподіляються в часі нерівномірно і з’являються групами.

У періоди піднесень середні хвилі характеризуються короткими депресіями та інтенсивними підйомами, в періоди спадів відбуваються протилежні явища. До основних причин Довгих хвиль відносять внутрішні фактори економічного росту. Це пояснюється тим, що вони пов’язані з циклічністю в розвитку виробничих сил суспільства, перш за все в їхній найбільш революційній частині – засобами виробництва.

Щодо матеріальної основи, то нею виступають структурні оновлення технологічного способу виробництва. Ці структурні оновлення відбуваються еволюційно, якщо покращують і удосконалюють існуючі технології, а революційно – якщо відбуваються якісні зміни в матеріалізації наукових знань та технічні революції.

Рисунок 5.2 – Класифікація методів регулювання економічних циклів за видами

Структурні оновлення технологічного способу виробництва доповнюють та підсилюють один одного:

- еволюційний шлях дозволяє використовувати потенціал існуючих технологій та підготувати умови для їхнього стрімкого розвитку;
- революційний шлях – це перехід до нових технологічних принципів, які згодом розповсюджуються еволюційно.

Теорія Довгих хвиль має надзвичайно важливе значення для економіки:

- по-перше, вона закладає наукові основи довгострокового прогнозування економічного прогресу;
- по-друге, дає змогу визначити фундаментальні закономірності функціонального розвитку способів виробництва та їхні фазові переходи.

5.2 Лінійна динамічна модель Довгих хвиль в економіці

Співіснування множини інвестиційних циклів капіталу в економіці є матеріальною основою спектру коливань сукупного обсягу виробництва з різними частотами. Пояснення механізму перетворення життєвих циклів капіталу в коливальний рух обсягу виробництва полягає в дискретному характері утворення капіталу, що викликає запізнюючий ефект віддачі в усій економіці. Зупинимося більш докладно на цьому методі дослідження коливань, що полягає у вивченні взаємодії різних реакцій пристосування в економічній системі. Рух таких коливань може бути описаний диференційними рівняннями, які характеризують динаміку пристосування змін в одних показниках до абсолютних значень і змін в інших. У центрі нашої уваги будуть процеси пристосування запасів капіталу до обсягів виробництва й навпаки, а також їхньої реакції на зрушення в макроекономічних співвідношеннях, таких як норма прибутку, капіталовіддача й т.ін. Динаміка реагування одних показників на абсолютні зміни інших може бути представлена такою формою диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\alpha\left(X - bY\right). \qquad (5.1)$$

Тобто, швидкість зміни фактору X безупинно запізнюється відносно Y.

де α – коефіцієнт пристосування швидкості X до Y;

b – характеризує середнє співвідношення між X й Y, або бажаний (нормативний) рівень цього співвідношення.

Коефіцієнт b забезпечує порівнянність змінних, що вимірюються у різних одиницях, і своїм знаком показує напрямок зміни X відносно Y, тобто точку рівноваги.

У ринковій економіці коефіцієнт пристосування звичайно лежить у межах $0 < \alpha < 1$. Якщо $\alpha = 0$, то фактор X не реагує на зміни в Y.

У командній економіці найчастіше $\alpha < 0$, тобто початкове відхилення від положення рівноваги має тенденцію зростати в часі. Отже, не тільки немає прагнення до стану рівноваги й воно ніколи не досягається, але й деформується нормальне або нормативне середнє співвідношення між X й Y, що веде до руйнування всього механізму або переходу системи до іншого виду (наприклад, командна економіка переплітається з тіньовою, що є неминучим при постійних й зростаючих дефіцитах).

Якщо коефіцієнт $\alpha \approx 1$, то будь-яке відхилення від стану рівноваги негайно відновлюється. Однак таке реагування є надмірно відчутним до раптових змін (шоків) в економіці й веде до нестійкості системи. Економічна стабільність досягається при середніх значеннях коефіцієнта α між 0 й 1 (більш повільне пристосування). Отже, величина коефіцієнта пристосування відіграє важливу роль у визначенні тривалості коливань системи. Величина α обернено пропорційна тривалості життєвого циклу.

У роботі С. Меньшикова й Л. Клименко наводиться така модель Довгих хвиль в економіці:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= -\alpha(y - bk) \\ \frac{\partial k}{dt} &= -\beta(k - gp) \\ p &= y - k \end{aligned} \tag{5.2}$$

де y – темп приросту продуктивності праці;

k – темп приросту капіталоозброєнності;

p – темп приросту норми прибутку;

α, β, b, g – структурні коефіцієнти.

У моделі використовуються не абсолютні значення, а темпи росту заданих показників.

Перше рівняння виводиться на базі виробничої функції, яка припускає, що обсяг випуску продукції визначається сполученням факторів – обсягом основного капіталу та трудовими ресурсами (зайнятістю):

$$ВипускПродукції = f(K, L) \tag{5.3}$$

Якщо обидві частини цього співвідношення розділити на L одержимо, що продуктивність праці є функцією капіталоозброєнності. Як свідчить статистичний аналіз, продуктивність праці змінюється за капіталоозброєнністю в такий спосіб: росте швидше останньої в періоди тривалих підйомів і повільніше – в періоди тривалих спадів.

Найбільш важливий у цьому рівнянні, з погляду аналізу Довгої хвилі, є коефіцієнт пристосування α. Він показує, наскільки швидко і в якому напрямку реагує швидкість росту продуктивності праці на зміну співвідношення між продуктивністю й капіталоозброєнністю. За оцінками на основі статистичних рядів США за 1889-1982 роки цей коефіцієнт становив від 0,033 до 0,048, що вказує на досить низьку швидкість реагування, а отже, на тривалий період коливань темпу зростання продуктивності праці щодо темпу зростання капіталоозброєнності.

Друге рівняння отримано з інвестиційної функції, в якій капіталовкладення визначаються прибутком.

Динамічні властивості моделі визначаються характеристичним рівнянням. Виведемо його. Підставивши рівняння 5.3 у рівняння 5.2, одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= -\alpha y + \alpha b k \\ \frac{\partial k}{\partial t} &= -\beta k + \beta g(y-k) = -\beta k + \beta g y - \beta g k = \beta g y + k(-\beta - \beta g) \end{aligned} \tag{5.4}$$

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\begin{vmatrix} -\alpha-\lambda & \alpha b \\ \beta g & -\beta-\beta g-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (-\alpha-\lambda)(-\beta-\beta g-\lambda)-\alpha\beta b g = 0 \tag{5.5}$$

Розкривши дужки й згрупувавши, одержуємо:

$$\lambda^2 + \lambda(\alpha + \beta(1+g)) + \alpha\beta(1+g-bg) = 0 \tag{5.6}$$

Вважаючи, що b = 1 (на тривалих відрізках часу в 25-30 років темпи зростання продуктивності праці й капіталоозброєнності приблизно збігаються), одержимо:

$$\lambda^2 + \lambda(\alpha + \beta(1+g)) + \alpha\beta = 0 \tag{5.7}$$

Регулярні цикли (тобто коливання з постійною амплітудою) з’являються при g = -2 й $\alpha = \beta$ = 0,34 (20-річний цикл); $\alpha = \beta$ = 1 (7-річний цикл).

Вихідну модель (5.2) можна розширити рівнянням:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\gamma(z - fy), \tag{5.8}$$

де z – темп приросту прибутку, що створюється за людино-годину;

γ, f – коефіцієнти;

y – темп приросту продуктивності праці.

Це рівняння виводиться із співвідношення між прибутком і національним продуктом. У тривалому аспекті прибуток зростає трохи швидше, ніж продукт. Оцінюючи коефіцієнти на відповідній статистиці тимчасових рядів США за 1889-1982 роки, отримані такі значення коефіцієнтів пристосування $\alpha = \beta = 0{,}25$, $\gamma = 0{,}124$, а коефіцієнтів, що характеризують рівноважні співвідношення між змінними: b=0,62, g=-1,7, f=1,05. Модель дає загасаюче коливальне рішення з періодом в 53,7 роки.

Подальші перетворення моделі (5.2), (5.8) стосуються структури інвестицій трьох видів. У результаті рівняння 5.2 замінюється трьома рівняннями, що характеризують рух кожного виду інвестицій – екстенсивних й інтенсивних:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_1}{\partial t} &= -\beta_1(k_1 - h\nu) \\ \frac{\partial k_2}{\partial t} &= -\beta_2(k_2 - my), \\ \frac{\partial k_3}{\partial t} &= -\beta_3(k_3 - jp) \end{aligned} \qquad (5.9)$$

де k_1 – темп приросту екстенсивного капіталу;

k_2 – темп приросту інтенсивного капіталу І роду (вкладеного в нову виробничу техніку);

k_3 – темп приросту інтенсивного капіталу ІІ роду (вкладеного у випуск нових товарів);

ν – темп приросту валового внутрішнього продукту;

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – коефіцієнти пристосування;

h, m, j – коефіцієнти рівноважного (або нормативного) співвідношення змінних.

У моделі передбачається, що екстенсивні інвестиції визначаються потребою пристосування до очікуваного запасу екстенсивного капіталу, що залежить від темпу приросту виробництва. Інтенсивні інвестиції І роду корелюють зі змінами в продуктивності праці, а інтенсивні інвестиції ІІ роду – з темпами приросту норми прибутку.

Оскільки було введено три нових змінних, знадобилися додаткові замикаючі рівняння й тотожності:

$$\begin{aligned} k_s &= k_1 + k_2 + k_3 \\ k &= k_s - l \\ l &= \nu - y \\ \nu &= n_1 * k_s(t-1) + n_2 * l \end{aligned} \quad , \qquad (5.10)$$

де k_s – темп приросту суми всіх видів капіталу;

l – темп приросту зайнятості;

k – темп приросту загальної капіталоозброєнності;

n_1, n_2 – коефіцієнти виробничої функції.

Останнє рівняння (5.10) являє собою варіант класичної виробничої функції. Оцінка коефіцієнтів для розширеної моделі (5.10) показала такі результати: найменшою швидкість пристосування виявилася для інвестицій у нові продукти: β_3=0,022. Вона в 4,5 рази нижча, ніж швидкість пристосування екстенсивних інвестицій (β_1=0,094), і в 2,5 рази нижча факторозберігаючих інтенсивних інвестицій (β_2=0,059). Розходження у швидкостях пристосування відображає розходження тривалості життєвих циклів різних видів капіталу й можливість появи в моделі спектра коливань.

Імітація моделі (тобто обчислення її рішень при заміні похідних різницевими аналогами) і теоретичний аналіз (за допомогою коренів характеристичного рівняння) дійсно показали наявність коливань різної тривалості. При цьому емпіричне рішення дає такі цикли: запас агрегованного капіталу коливається з періодом, близьким до 60 років, капіталовіддача – з періодом близько 40 років, а для норми прибутку характерні більш часті коливання – тривалістю, що наближається до 20 років. Теоретичне рішення моделі містить коливання трьох видів: 32, 38 й 48 років.

Отже, хоча життєві цикли різного виду капіталу являють собою матеріальну основу для виникнення спектра періодичних коливань в економіці, довжина таких коливань не є прямим відбиттям життєвого циклу того або іншого виду капіталу, але трансформується всією системою економічних зв’язків. При цьому найважливішу роль відіграють процеси взаємодії нагромадження капіталу різних видів, норми прибутку, робочої сили, її оплати, а також конкретних економічних умов, у яких ці зв’язки проявляються. А також, якщо з системи прибрати рівняння екстенсивних інвестицій то, як показує теоретичний аналіз коренів характеристичного рівняння, пропадає 20-30-річний цикл.

Якщо виключити рівняння інвестицій у виробництво нових продуктів, то в рішенні залишаються лише 40-60-річні хвилі. Однак, коли із системи видаляється рівняння інвестицій у нову техніку, то тривалі коливання зникають зовсім. Отже, аналіз моделі знову приводить нас до вже зробленого раніше висновку, що головну роль у виникненні тривалих коливань в економіці відіграють саме вкладення в радикально нову виробничу техніку.

Питання для самоконтролю

1. Охарактеризуйте особливості довгострокової економічної динаміки.
2. Охарактеризуйте хронологію технологічних укладів.
3. Проаналізуйте класифікацію методів регулювання економічних циклів за видами.
4. Охарактеризуйте основні види циклічних коливань.
5. Що характеризує коефіцієнт пристосування та які значення може мати?

6. Охарактеризуйте рівняння моделі Довгих хвиль в економіці.

Лабораторне заняття №4

Тема: Лінійна модель довгих хвиль в економіці.

Мета: отримати практичні навички побудови моделі довгих хвиль в економіці.

Завдання: у середовищі Microsoft Excel виконати побудову лінійної динамічної моделі довгих хвиль в економіці, за допомогою майстра діаграм. Динамічна система має вигляд:

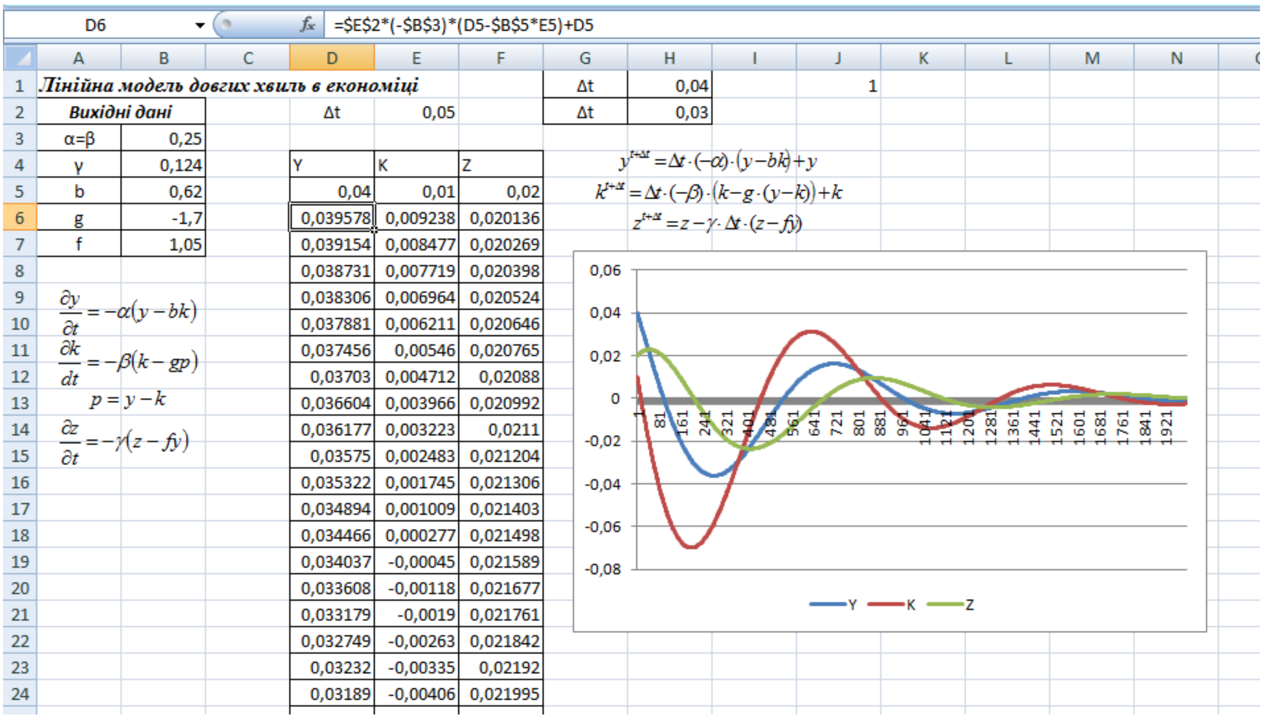
$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\alpha(y - bk)$$
$$\frac{\partial k}{dt} = -\beta(k - gp),\ p = y - k\ ;$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\gamma(z - fy)$$

$$y^{t+\Delta t} = \Delta t \cdot (-\alpha) \cdot (y - bk) + y$$
$$k^{t+\Delta t} = \Delta t \cdot (-\beta) \cdot (k - g \cdot (y - k)) + k$$
$$z^{t+\Delta t} = z - \gamma \cdot \Delta t \cdot (z - fy)$$

Побудувати фазовий портрет системи для таких вхідних параметрів: $\alpha = \beta = 0{,}25$, $\gamma = 0{,}124$, b=0,62, g= -1,7, f=1,05, Δt = 0,05; 0,04; 0,03. Y = 0,04*i, K = 0,01* i, Z = 0,02* i (i – номер варіанту). Зробити висновки, щодо коливань, які відбуваються у моделі.

Хід роботи.

Реалізації лінійної моделі довгих хвиль в економіці в середовищі Microsoft Excel наведено на рис. 5.3.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	*Лінійна модель довгих хвиль в економіці*						Δt	0,04		1
2	*Вихідні дані*			Δt	0,05		Δt	0,03		
3	α=β	0,25								
4	γ	0,124		Y	K	Z	$y^{t+\Delta t}=\Delta t\cdot(-\alpha)\cdot(y-bk)+y$			
5	b	0,62		0,04	0,01	0,02	$k^{t+\Delta t}=\Delta t\cdot(-\beta)\cdot(k-g\cdot(y-k))+k$			
6	g	-1,7		0,039578	0,009238	0,020136	$z^{t+\Delta t}=z-\gamma\cdot\Delta t\cdot(z-fy)$			
7	f	1,05		0,039154	0,008477	0,020269				
8				0,038731	0,007719	0,020398				
9	$\frac{\partial y}{\partial t}=-\alpha(y-bk)$			0,038306	0,006964	0,020524				
10				0,037881	0,006211	0,020646				
11	$\frac{\partial k}{dt}=-\beta(k-gp)$			0,037456	0,00546	0,020765				
12				0,03703	0,004712	0,02088				
13	$p=y-k$			0,036604	0,003966	0,020992				
14	$\frac{\partial z}{\partial t}=-\gamma(z-fy)$			0,036177	0,003223	0,0211				
15				0,03575	0,002483	0,021204				
16				0,035322	0,001745	0,021306				
17				0,034894	0,001009	0,021403				
18				0,034466	0,000277	0,021498				
19				0,034037	-0,00045	0,021589				
20				0,033608	-0,00118	0,021677				
21				0,033179	-0,0019	0,021761				
22				0,032749	-0,00263	0,021842				
23				0,03232	-0,00335	0,02192				
24				0,03189	-0,00406	0,021995				

Рисунок 5.3 – Результати моделювання лінійної моделі довгих хвиль в економіці

Лінійна модель довгих хвиль в економіці є відображенням особливостей еволюції ринкової системи з її нерівномірністю розвитку, диспропорціями, запізненням у відповідях на зовнішній вплив, ефектами вступу нових країн у світову господарську систему, а також появою таких нових явищ, як глобальні енергетичні, продовольчі, екологічні кризи. Довгі хвилі – форма соціально-економічного розвитку ринкової системи, у якій фаза кризи є сануючою, оновлюючою, причому коливання кон’юнктури пов’язані зі змінами як окремих економічних параметрів, так і чинників суспільної масової свідомості, ідеології та еволюції конфліктів інтересів різних соціальних груп.

Тема 6. Екстенсивні та інтенсивні фактори розвитку. Факторні моделі

Мета: ознайомитись з однофакторними та багатофакторними моделями економічного зростання

План

6.1 Екстенсивні та інтенсивні фактори розвитку
6.2 Однофакторні моделі економічного зростання
6.3 Багатофакторні моделі економічного зростання
6.4 Виробничі цикли та лагові моделі
6.5 Динамічна функція Кобба-Дугласа

Основні поняття

Економічний розвиток, факторні моделі, виробничій цикл, лагова модель, виробнича функція.

6.1 Екстенсивні та інтенсивні фактори розвитку

Економічний розвиток – процес взаємодії багатьох факторів, серед яких важливо розрізняти екстенсивні та інтенсивні. Поєднання цих двох груп факторів визначає тип економічного зростання.

<u>Екстенсивне зростання</u> – це збільшення виробництва виключно за рахунок кількісного збільшення ресурсів попередньої якості.

<u>Інтенсивне зростання</u> – це зростання виробництва виключно за рахунок його вдосконалення (в тому числі і підвищення якості ресурсів) при незмінних кількісних обсягах ресурсів.

У реальній економіці здебільшого ознаки екстенсивного та інтенсивного розвитку поєднані. Залежно від переважання екстенсивних чи інтенсивних факторів розвитку можна говорити про переважно екстенсивний чи переважно інтенсивний типи економічного розвитку. Зрозуміло, що екстенсивний чи переважно екстенсивний шлях розвитку може бути використаний лише в обмежені періоди часу, оскільки він призводить до неминучого вичерпування джерел зростання. Необхідною умовою збереження високих темпів розвитку при збільшенні ролі інтенсивних факторів є підвищення ефективності використання виробничих ресурсів – збільшення виходу продукції на одиницю затрат.

Із огляду на це важливими задачами економічної динаміки є вимірювання та прогнозування ефективності виробництва. Основними частковими показниками економічної ефективності є: продуктивність праці, фондовіддача, випуск продукції на одиницю витраченої сировини та матеріалів і т.п. Загальною властивістю всіх цих показників є те, що вони характеризують дію кожного виробничого фактора окремо (однофакторний підхід). Методологія визначення сукупної (інтегральної) ефективності факторів ґрунтується на вивченні процесу їхньої взаємодії (багатофакторний підхід).

6.2 Однофакторні моделі економічного зростання

Однофакторна модель економічного зростання відображає залежність динаміки обсягу виробництва *y(t)* від динаміки одного із виробничих факторів x_{it}:

$$y(t) = f_i(x_{it}) \tag{6.1}$$

Функція є динамічним варіантом виробничої функції, основаної на припущенні про взаємодоповнення виробничих факторів. Ця функція умовно «приписує» результат виробництва якомусь одному виробничому фактору залежно від його кількості, якості, ефективності використання. Для дослідження динаміки виробництва у залежності від виробничих ресурсів, природних ресурсів тощо будують особливі однофакторні моделі.

Із функцією (1) пов'язані такі часткові показники використання ресурсів:

1) середні $\mu_{it} = {}^{y(t)}/_{x_{it}}, \ \ t = 0, 1, 2, \ldots;$

2) граничні $v_i(t_1, t_2) = {}^{(y_{t_2} - y_{t_1})}\Big/_{(x_{it_2} - x_{it_1})}$

Зрозуміло, що середні та граничні показники ефективності ресурсів є змінними величинами: вони змінюються в часі, залежать від величини ресурсу. При аналізі економічної динаміки часто виникає питання щодо частки приросту продукції, одержаної за рахунок екстенсивних та інтенсивних факторів. Для відповіді на це питання в межах однофакторного підходу подамо обсяг виробництва у вигляді добутку двох величин – кількості однорідного ресурсу та ефективності його використання:

$$y(t) = x_{it} \cdot \mu_{it}.$$

Приріст цієї функції за будь-який проміжок часу A_t становить:

$$\Delta y(t) = (x_{it} + \Delta x_{it}) \cdot (\mu_{it} + \Delta\mu_{it}) - x_{it} \cdot \mu_{it} =$$
$$= \mu_{it} \cdot \Delta x_{it} + x_{it} \cdot \Delta\, \mu_{it} + \Delta x_{it} \cdot \Delta\mu_{it}$$

Отже, приріст виробництва розкладають на три складові, економічний зміст яких можна інтерпретувати так:

1) приріст, одержаний за рахунок приросту витрат ресурсу (екстенсивна складова);

2) приріст, одержаний за рахунок приросту ефективності використання ресурсу (інтенсивна складова);

3) приріст, одержаний за рахунок взаємодії приростів кількості та ефективності використання ресурсу (спірна складова).

Наведемо геометричну інтерпретацію розкладання приросту виробництва на три складові: екстенсивну, інтенсивну та спірну.

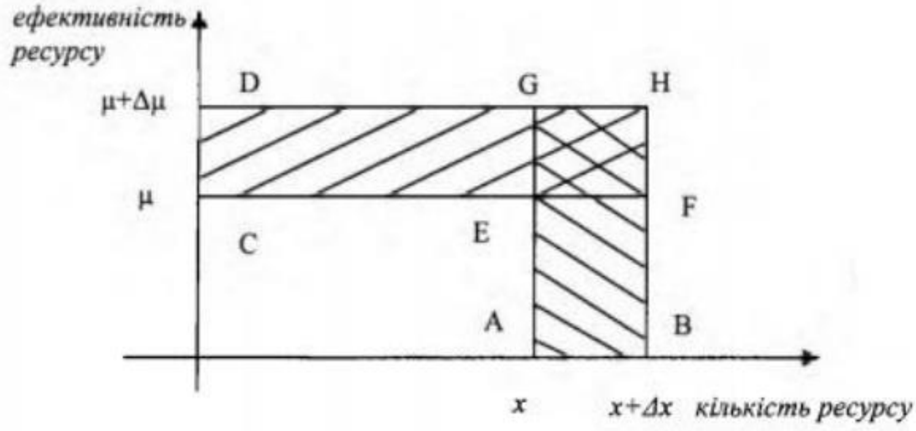


Рисунок 6.1 – Геометрична інтерпретація розкладання приросту виробництва на три складові

Загальний приріст виробництва дорівнює всій заштрихованій площі. Чистий приріст за рахунок збільшення кількості ресурсу (**екстенсивна складова**) рівний площі прямокутника **ABFE**, чистий приріст за рахунок збільшення ефективності використання ресурсу (**інтенсивна складова**) рівний площі прямокутника **CDGE**. Приріст, одержаний за рахунок взаємодії обох факторів (**спірна складова**), рівний площі прямокутника EFHG.

Формально спірну складову уже не можна розкласти на частини. Найбільш поширена методика, яку, зокрема, використовували в минулому, цілком приєднує її до інтенсивної складової (наприклад, при розрахунку приросту виробництва, одержаного за рахунок зростання чисельності робітників та за рахунок збільшення продуктивності праці весь отриманий ефект відносили до фактора зростання продуктивності праці).

У літературі пропонують і інші варіанти, наприклад, поділ спірної компоненти навпіл, розподіл її величини пропорційно до $\Delta\chi$ та $\Delta\mu$ тощо.

Величину $\lambda_{x_{it}} = \dfrac{\mu_i \Delta x_i}{\Delta y(t)}$ називають часткою екстенсивних факторів зростання, а величину $\lambda_{\mu_{it}} = \dfrac{x_i \Delta \mu_i}{\Delta y(t)}$ часткою інтенсивних факторів зростання.

Підвищення ефективності використання виробничих факторів та інтенсифікація виробництва – взаємопов’язані, але не тотожні поняття. Зростання ефективності – необхідна умова інтенсифікації зростаючого виробництва. Проте не всяке зростання ефективності означає, що здійснюється інтенсифікація. Ознакою інтенсифікації є частка приросту, отриманого за рахунок збільшення ефективності виробничих факторів.

6.3 Багатофакторні моделі економічного зростання

Багатофакторна модель на відміну від однофакторної відображає взаємодію низки виробничих факторів із урахуванням зміни їхньої якості, ефективності використання, а також загальних наслідків науково-технічного прогресу та вдосконалення організації виробництва. Багатофакторна модель економічного зростання має вигляд:

$$y(t) = f(X_t, A_t, t),$$

де X – вектор фізичних об'ємів виробничих ресурсів;

A – вектор параметрів, які характеризують якість та ефективність ресурсів.

Ця функція є динамічним варіантом виробничої функції із взаємозамінними ресурсами, але на відміну від статичної функції її параметри змінюються в часі, і вона може явно включати змінну часу. Модель здебільшого будують, використовуючи емпіричні динамічні ряди об'ємів виробництва і виробничих ресурсів, тобто як багатофакторне рівняння регресії. На основі функції визначають середні μ, і граничні ν_{it} показники ефективності використання ресурсів:

$$\mu_{it} = \frac{f(X_t, A_t, t)}{x_{it}}, \qquad \nu_{it} = \frac{\partial f(X_t, A_t, t)}{\partial x_{it}}.$$

Перевага наведених показників ефективності порівняно з аналогічними показниками однофакторної моделі полягає у тому, що в них враховано поєднання всіх основних виробничих факторів. Завдяки цьому за їхньою допомогою можна дослідити поєднання виробничих факторів, які приводять, наприклад, до найбільшого зростання продуктивності праці чи до найбільшої економії деяких природних ресурсів і тому подібне Ознакою підвищення ефективності використання виробничих факторів у динаміці виробництва є нерівності:

$$\frac{d\mu_{it}}{dt} > 0, \ \frac{d\nu_{it}}{dt} > 0.$$

Якщо середня ефективність i-го ресурсу зростає, то темп приросту виробництва буде вищим за темп приросту відповідного ресурсу. В основі багатофакторного аналізу ролі екстенсивних та інтенсивних факторів економічного зростання лежить розкладання повного приросту функції на складові та економічна інтерпретація цього розкладу. Проте формально повний приріст функції n змінних як суму n доданків, які відповідають приростам аргументів (якщо вони не прямують до нуля), представити не можна. З огляду на це неможливо отримати точних однозначних оцінок вкладу кожного фактора у приріст функції. Економічний зміст цього висновку очевидний: ефект взаємодії факторів не можна представити як суму ефектів дії кожного фактора зокрема, його досягають лише в сукупній взаємодії всіх факторів (властивість емерджентності будь-якої кібернетичної системи).

6.4 Виробничі цикли. Лагові моделі

Процес суспільного відтворення – це взаємне переплетення багатьох часткових циклічних процесів відтворення, що суттєво відрізняються своєю тривалістю. Тривалість циклу суспільного виробництва, який зв'язує в одне ціле всі часткові виробничі процеси, зазвичай, приймають рівним одному року. Проте це лише теоретичне припущення, прийнятне для аналізу відтворення валового внутрішнього продукту загалом. Виробничі цикли конкретних видів продукції суттєво відрізняються своєю тривалістю. Наприклад, у багатьох галузях промисловості, які створюють предмети праці і предмети споживання, тривалість виробничих циклів вимірюють хвилинами, годинами, днями, в будівництві – роками, лісовому господарстві – десятиріччями.

Цикли, що входять у систему суспільного відтворення – відтворення населення, основних фондів, природного середовища – мають тривалість, яка багатократно перевищує тривалість процесів матеріального виробництва. Важливою характеристикою відтворення населення, основних фондів, елементів біосфери є тривалість життя. Це поняття належить до великих неоднорідних систем і має досить складну статистичну структуру. У процесі функціонування суспільного виробництва виникають задачі поєднання, синхронізації часткових циклів відтворення. Зміна в одному процесі відтворення здебільшого спричиняє зміну в динаміці інших процесів. Це потребує розроблення комплексних динамічних моделей, які характеризують взаємопов'язані процеси.

Взаємозв'язки між елементами соціально-економічного процесу, як правило, не є миттєвими. Між причиною і наслідком, стимулюючою дією та її ефектом, вкладенням ресурсів і одержанням продукції практично завжди існує певний проміжок часу, який називають часовим лагом (лагом запізнення, просто лагом). Найпростіша лагова модель має такий вигляд:

$$y(t) = f\left(x_{t-\tau}\right),$$

де τ – лаг. Величину $y(t)$ в момент часу t визначають за значенням величини x у момент часу $(t-\tau)$.

Моделі такого типу широко використовують у ретроспективному динамічному аналізі та прогнозуванні. Якщо лагове співвідношення пов'язує значення одного і того ж показника в різні моменти часу, то така модель називається авторегресійною.

Авторегресійна лінійна модель загального вигляду виражає значення показника в певний момент часу через значення цього ж показника в попередні моменти:

$$y(t) = \sum_{\tau=0}^{\Theta} a_\tau y_{t-\tau} + \varepsilon_t,$$

де α, y – коефіцієнти лінійної регресії;

Θ – найбільше значення авторегресійного лага;

ε – випадкова (залишкова) компонента.

У схемі циклу суспільного відтворення лаги наявні в більшості зв'язків: між вкладенням виробничих ресурсів та випуском продукції; між розподілом продукції на розширення виробничих факторів і підвищення матеріального та культурного рівня життя населення і т.д.

У моделюванні економічної динаміки розрізняють два основні види лагів: інвестиційні та демографічні.

Інвестиційний лаг охоплює період часу від початку проєктування об'єкта до його введення в дію на повну потужність. У багатьох випадках в інвестиційному лазі виділяють будівельний лаг – від початку будівництва об'єкта до введення його у дію.

Демографічний лаг охоплює період від народження людини до вступу в працездатний вік (16 років) або до початку трудової діяльності після одержання загальної освіти та професійної підготовки (17-23 роки).

У більшості соціально-економічних процесів лаг не є строго визначеною величиною, а розподілений у часі. Якщо значення лага є чітко визначеним, то його називають *зосередженим*. Якщо лаг набуває значення з певного проміжку часу, то його називають *розподіленим*. Лінійна модель розподіленого лага має вигляд:

$$y(t) = \sum_{\tau=0}^{\Theta} \omega_\tau y_{t-\tau} + \varepsilon_t,$$

де ω_τ – невід'ємні параметри, сукупність яких називають структурою лагу.

6.5 Динамічна функція Кобба-Дугласа

Для вивчення зв'язку між загальним обсягом валового внутрішнього продукту (національного доходу) та двома найважливішими факторами виробництва (робочою силою та основними фондами) використовується функція Кобба-Дугласа:

$$Y = \alpha L^{\alpha L} K^{\alpha K},$$

де L – витрати праці (labor), K – витрати виробничих фондів (capital).

У теоретичному та прикладному динамічному макроекономічному аналізі найчастіше застосовують два види МВФ: мультиплікативну функцію Кобба-Дугласа (ФКД) та функцію з постійною еластичністю заміни ресурсів (ПЕЗ). Порівняно з іншими, ці функції мають такі переваги:

– чітка економічна інтерпретація;

– показники економічної динаміки, ефективності та інтенсифікації, які відповідають цим функціям, мають зручну аналітичну форму.

Загальними властивостями функцій Кобба-Дугласа і ПЕЗ є однорідність і постійна еластичність заміни ресурсів.

Динамічна функція Кобба-Дугласа для двох виробничих факторів має вигляд:

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta},$$

де A, α, β – параметри моделі,

α, β – коефіцієнт еластичності випуску капіталом та працею відповідно.

Величина *A* залежить від обраних одиниць вимірювання, крім того, чисельні значення цього параметра визначаються також ефективністю виробничого процесу.

Подальшу динамізацію ФКД можна проводити шляхом включення до її складу динамічних коефіцієнтів еластичності. При побудові динамічної функції Кобба-Дугласа *A(t)* найчастіше беруть у вигляді: $A(t) = a_0 e^{\lambda t}$.

Із врахуванням цього динамічна ФКД має вигляд: $y(t) = a_0 e^{\lambda t} (L(t))^{a_L} (K(t))^{a_K}$.

Ступінь однорідності ФКД визначають сумою коефіцієнтів еластичності α і β. Якщо $\alpha+\beta=1$, то рівень ефективності не залежить від масштабів виробництва. Якщо $\alpha+\beta<1$, то середні витрати, розраховані на одиницю продукції зменшуються, при збільшенні маштабів виробництва,а при $\alpha+\beta>1$ – зростають з розширенням масштабу виробництва. Ці властивості не залежать від чисельних значень *K* і *L* та зберігають силу в будь-якій точці виробничої функції. Виробничу функцію Кобба-Дугласа незручно оцінювати безпосередньо за методом найменших квадратів, тому їх представляють у лінійному вигляді: $\ln Q = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L + u$.

Питання для самоконтролю

1. Чим відрізняються екстенсивний економічний розвиток від інтенсивного?
2. Які Ви знаєте типи факторних моделей? Надайте їх визначення та характеристику.
3. Охарактеризуйте багатофакторну модель економічного зростання.
4. Охарактеризуйте виробничі цикли та лагові моделі.
5. Які фактори виробництва включено до виробничої функції?
6. Як визначити ступінь однорідності виробничої функції?
7. Що представляє собою факторна модель?
8. Які фактори вважають інтенсивними факторами розвитку?
9. Які фактори вважають екстенсивними факторами розвитку?
10. Як можна визначити вплив виробничого фактора на результат?
11. Які види виробничих функцій ви знаєте?

Лабораторне заняття №6

Тема. Екстенсивні та інтенсивні фактори розвитку: факторні моделі.

Мета: навчитися проводити аналіз на основі факторних моделей економічного розвитку та досліджувати вплив економічних факторів.

Завдання:

1. На основі даних про показники функціонування підприємства дослідити екстенсивний та інтенсивний складники в розвитку його виробництва.

2. Дослідити вплив екстенсивних та інтенсивних факторів зростання валового випуску підприємства залежно від взаємодії двох виробничих ресурсів.

Хід роботи.

Завдання 1. На основі даних табл. 6.1 дослідіть екстенсивний та інтенсивний складники у зростанні валового випуску підприємства. Обсяг виробництва $y(t)$ подано у вигляді добутку двох величин – чисельності працівників (x_{it}) та продуктивності праці працівників підприємства (μ_{it}): $y(t) = x_{it} \cdot \mu_{it}$.

Таблиця 6.1 – Показники функціонування підприємства

Показник	Базовий період	Звітний період
Валовий випуск підприємства, тис. од.	138,9+i	165,4+i
Чисельність працівників, осіб	1426+i	1486+i
Продуктивність праці, тис. од./ос.	0,0974+i	0,1113+i
Величина основних виробничих фондів, тис. грн	237,2+i	245,9+i
Фондовіддача основних виробничих фондів, од./грн	0,5856+i	0,6726+i

*i – номер по журналу.

Завдання 2. На основі даних табл. 6.1 дослідіть вплив екстенсивних та інтенсивних факторів зростання валового випуску підприємства залежно від взаємодії двох виробничих ресурсів: витрат праці та величини виробничих фондів. Припустимо, що обсяг валового випуску підприємством описується степеневою виробничою функцією, яка має такий вигляд:

$$y = x_1^{\beta_1} \cdot a_1^{\gamma_1} \cdot x_2^{\beta_2} \cdot a_2^{\gamma_2},$$

де y – обсяг валового випуску продукції;

x_1 – затрати праці (чисельність працівників);

a_1 – продуктивність праці;

x_2 – величина основних виробничих фондів;

a_2 – фондовіддача основних виробничих фондів;

$\beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2$ – відомі параметри.

Значення параметрів степеневої виробничої функції за варіантами наведено в табл. 6.2.

Таблиця 6.2 – Варіанти для виконання завдання 2

Номер варіанту	Значення параметрів	Номер варіанту	Значення параметрів
1	$\beta_1 = \gamma_1 = 1/4$; $\beta_2 = \gamma_2 = 3/4$	11	$\beta_1 = \gamma_1 = 2/8$; $\beta_2 = \gamma_2 = 6/8$
2	$\beta_1 = \gamma_1 = 2/5$; $\beta_2 = \gamma_2 = 3/5$	12	$\beta_1 = \gamma_1 = 4/8$; $\beta_2 = \gamma_2 = 4/8$
3	$\beta_1 = \gamma_1 = 3/7$; $\beta_2 = \gamma_2 = 4/7$	13	$\beta_1 = \gamma_1 = 5/8$; $\beta_2 = \gamma_2 = 3/8$
4	$\beta_1 = \gamma_1 = 2/3$; $\beta_2 = \gamma_2 = 1/3$	14	$\beta_1 = \gamma_1 = 3/9$; $\beta_2 = \gamma_2 = 6/9$
5	$\beta_1 = \gamma_1 = 5/9$; $\beta_2 = \gamma_2 = 4/9$	15	$\beta_1 = \gamma_1 = 2/9$; $\beta_2 = \gamma_2 = 7/9$
6	$\beta_1 = \gamma_1 = 1/3$; $\beta_2 = \gamma_2 = 2/3$	16	$\beta_1 = \gamma_1 = 1/9$; $\beta_2 = \gamma_2 = 8/9$
7	$\beta_1 = \gamma_1 = 4/5$; $\beta_2 = \gamma_2 = 1/5$	17	$\beta_1 = \gamma_1 = 6/8$; $\beta_2 = \gamma_2 = 2/8$
8	$\beta_1 = \gamma_1 = 3/8$; $\beta_2 = \gamma_2 = 5/8$	18	$\beta_1 = \gamma_1 = 2/3$; $\beta_2 = \gamma_2 = 1/3$
9	$\beta_1 = \gamma_1 = 2/7$; $\beta_2 = \gamma_2 = 5/7$	19	$\beta_1 = \gamma_1 = 1/7$; $\beta_2 = \gamma_2 = 6/7$
10	$\beta_1 = \gamma_1 = 4/7$; $\beta_2 = \gamma_2 = 3/7$	20	$\beta_1 = \gamma_1 = 6/7$; $\beta_2 = \gamma_2 = 1/7$

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4. СТОХАСТИЧНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

Тема 7. Теорія економічних циклів. Моделювання на базі часових рядів

Мета: ознайомитися з поняттям економічного і ділового циклів, навчитися застосовувати модель Самуельсона-Хікса.

План

7.1 Поняття економічного і ділового циклів в економіці

7.2 Модель Самуельсона-Хікса – модель мультиплікатора-акселератора

7.3. Методика прогнозування динаміки ВВП на основі моделі Самуельсона-Хікса

Основні поняття

Економічний цикл, діловий цикл, мультиплікатор, акселератор, прогнозування, модель Самуельсона-Хікса.

7.1 Поняття економічного і ділового циклів в економіці

Під циклом в економіці, особливо на макрорівні, слід розуміти періодичні коливання рівнів економічної активності, а саме обсягу випуску, рівня цін і зайнятості. По суті, економічний цикл представляє собою послідовність повторюваних один за одним альтернативних фаз, кожна з яких створює умови для настання наступної, що, врешті-решт, приводить до відтворення циклу.

Економічний цикл – це повторення протягом декількох років піднесень і занепадів рівнів економічної активності, які відрізняються один від одного тривалістю та інтенсивністю при наявності довгострокової тенденції до економічного зростання.

Отже, економічні цикли – це періоди часу між двома однаковими станами економічної кон'юнктури, що відображає динаміку макроекономічної кон'юнктури. На сьогоднішній день найбільш вивченими вважаються ділові цикли.

Діловий цикл являє собою періодичні коливання економічної кон'юнктури в ринковій економіці. Він вимірюється інтервалами часу між двома наступними однаковими фазами.

Діловий цикл економіки складається з чотирьох основних фаз: експансія (підйом, пожвавлення); піднесення (бум, пік); рецесія (спад, занепад, криза); депресія (дно). Економіка рухається від стану неповної зайнятості до повної зайнятості (тобто відбувається підйом із дна, який закінчується піком).

У найпростішому визначенні цикли характеризують періодичні злети і падіння ринкової кон'юнктури, які, перш за все, проявляються в різних формах невідповідності попиту і пропозиції. Крім того, під циклом розуміють безперервні коливання економіки, коли зростання змінюється спадом. Нерідко фахівці пишуть про діловий цикл, під яким розуміється розвиток економіки, що складається також із хвиль підйомів і спадів економічної кон'юнктури.

Модель економічного циклу Самуельсона-Хікса являє собою типово кейнсіанську динамічну модель, у якій передбачається, що рівень цін і ставка відсотка постійні, при цьому модель розглядає тільки ринок благ. У моделі подані тільки два суб'єкти – домашні господарства і фірми. Обсяг споживання в поточному періоді визначається величиною прибутку попереднього періоду. Обсяг індуційованих інвестицій у поточному періоді визначається величиною приросту прибутку попереднього періоду. У цій моделі приймається як постулат, що характер динаміки національного доходу визначається характером поведінки економічних суб'єктів. У формальному вигляді характер поведінки домашніх господарств виражається через величину граничної схильності до споживання, характер поведінки фірм – через приріснy капіталомісткість (акселератор).

В основі моделі ділового циклу, розробленої і запропонованої Дж. Хіксом, лежить взаємодія і взаємозв'язок між мультиплікатором і акселератором, які визначають характер коливань економіки. Інакше кажучи, мова йде про взаємодію трьох складових: національний дохід; споживання; накопичення капіталу.

Мультиплікатор відображає залежність між приростом величини національного доходу і нарощуванням капіталовкладень. Мультиплікатор – це коефіцієнт, що виражає співвідношення між приростом доходу і викликає цей приріст збільшенням обсягу інвестицій. Він показує залежність приросту національного доходу від приросту інвестицій. Мультиплікатор збільшується в тому випадку, коли споживачі схильні використовувати приріст їхніх доходів для нарощування споживання. Навпаки, він зменшується, якщо посилюється схильність споживачів до накопичення заощаджень.

Акселератор – це гранична схильність до інвестування. Він відображає залежність між приростом вкладень і приростом національного доходу. Визначається він відношенням приросту інвестицій (ΔI) до приросту доходу (ΔY).

Роботи Дж. Хікса і його погляд на модель мультиплікатора-акселератора нерозривно пов'язані з роботами та ідеями П. Самуельсона. Нерідко моделі цих двох вчених об'єднують в одну. Усі вони побудовані на основі кейнсіанської школи економічної думки. Розглянемо позицію П. Самуельсона більш докладно.

Модель П. Самуельсона спирається виключно на виконання умов мультиплікатора спільно з принципом акселерації, який визначає інвестиції і потреби в них. Ця модель включає в себе виключно ринок благ. Відповідно, такі показники, як ставка відсотка і рівень цін, вважаються незмінними, а обсяг пропозиції економічних благ – абсолютно еластичним.

Відповідно до моделі Дж. Хікса невідповідність між попитом і пропозицією змінює перш за все не ціни, а виробничі інвестиції. Тобто, за допомогою мультиплікатора у держави з'являється можливість впливати на випуск (національне виробництво), викликаючи його коливання, які, своєю чергою, ведуть до зміни індукованих інвестицій (мотивовані підвищенням попиту на вироблену продукцію, тобто залежать від динаміки національного доходу). Отже, відповідно до моделі Хікса, головною причиною, що породжує економічні та ділові цикли, служить акселеративний вплив зміни доходу на інвестиції, який ще більше посилюється за рахунок відповідного мультиплікативного впливу інвестицій на зміну доходу. По суті в цьому і проявляється дія механізму взаємодії між мультиплікатором і акселератором, за допомогою моделювання якого вивчається процес реагування економічної системи на порушення вихідного стану її рівноваги.

7.2 Модель Самуельсона-Хікса – модель мультиплікатора-акселератора

Модель Самуельсона-Хікса розглядає тільки ринок благ і тому рівень цін, відносні ціни благ і ставка відсотка передбачаються незмінними. Відповідно до кейнсіанської концепції також передбачається, що обсяг пропозиції є досконало еластичним.

Обсяг споживання домашніх господарств у поточному періоді визначається величиною їхнього доходу в попередньому періоді:

$$C_t = C_{a,t} + C_y \cdot Y_{t-1}, \qquad (7.1)$$

де $C_{a,t}$ – автономне споживання в період часу t.

Підприємці здійснюють *автономні* інвестиції, обсяг яких при заданій ставці відсотка фіксований, та *індуковані* інвестиції, залежні від приросту сукупного попиту в попередньому періоді

Індуковані інвестиції здійснюють після того, як переконалися, що збільшення сукупного попиту є стійким. Тому приймаючи рішення про обсяг індукованих інвестицій, орієнтуються на збільшення сукупного попиту (національного доходу) не в поточному, а в попередньому періоді. Обсяг інвестицій підприємницького сектору:

$$I_t = I_{a,t} + \eta(Y_{t-1} - Y_{t-2}), \qquad (7.2)$$

де $I_{a,t}$ – автономні капіталовкладення.

η – акселератор.

При прийнятих припущеннях економіка буде знаходитися в стані рівноваги, якщо:

$$Y_t = C_{a,t} + C_y \cdot Y_{t-1} + I_{a,t} + \eta(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + A_t$$

або (7.3)

$$Y_t = \left(C_y + \eta\right) \cdot Y_{t-1} - \eta \cdot Y_{t-2} + A_t,$$

де $A_t = C_{a,t} + I_{a,t}$ – екзогенна величина автономного попиту.

Рівняння (7.3) є неоднорідним різницевим рівнянням другого порядку, що характеризує динаміку національного доходу в часі.

При фіксованій величині автономних витрат $(A_t = A = const)$ в економіці досягається довгострокова рівновага, коли обсяг національного доходу стабілізується на визначеному рівні y^*, тобто $y_t = y_{t-1} = y_{t-2} = \cdots = y_{t-n} = y^*$, де n – число періодів з незмінною величиною автономних витрат. Із рівняння (7.3) випливає, що $y^* = \dfrac{A}{1 - C_y}$.

Розглянемо характер динаміки національного доходу, якщо після досягнення довгострокової рівноваги зміниться величина автономного попиту. Для цього замінимо неоднорідне різницеве рівняння (7.3) однорідним. Уведемо такі позначення:

$$y_t - y^* = \Delta y_t. \tag{7.4}$$

Значення y_t і y^* задовольняють рівність (7.3), тому можна записати таке однорідне різницеве рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами:

$$\Delta Y_t = \left(C_y + \eta\right) \cdot \Delta Y_{t-1} - \eta \cdot Y_{t-2}$$
$$\text{або } \Delta Y_t - \left(C_y + \eta\right) \cdot \Delta Y_{t-1} - \eta \cdot Y_{t-2} = 0. \tag{7.5}$$

Напрям зміни y_t визначається напрямом зміни Δy_t, тому що $y_t = y^* + \Delta y_t$.

Як зазначалось раніше, характер зміни Δy_t залежить від значення дискримінанта характеристичного однорідного рівняння (7.5). Оскільки в цьому випадку дискримінант дорівнює $\left(C_y + \eta\right)^2 - 4\eta$, то динаміка національного доходу визначається та залежить від значення граничної схильності до споживання C_y або мультиплікатора $\dfrac{1}{1 - C_y}$ і акселератора η (рис. 7.1).

Якщо $\left(C_y + \eta\right)^2 - 4\eta > 0$, то показник y_t змінюється монотонно, а при $\left(C_y + \eta\right)^2 - 4\eta < 0$ зміна y_t відбувається коливально. Отже, графік функції $\left(C_y + \eta\right)^2 = 4\eta$, представлений на рис. 7.1, відокремлює множину сполучень (η, C_y), що забезпечують монотонну зміну y_t, від множини комбінацій значень (η, C_y), що приводять до коливань y_t. Збігатиметься значення y_t до деякої скінченої величини або розбігатиметься у нескінченність, залежить від значення η. Характеристичне рівняння: $\lambda^2 - \left(C_y + \eta\right)\lambda - \eta = 0$.

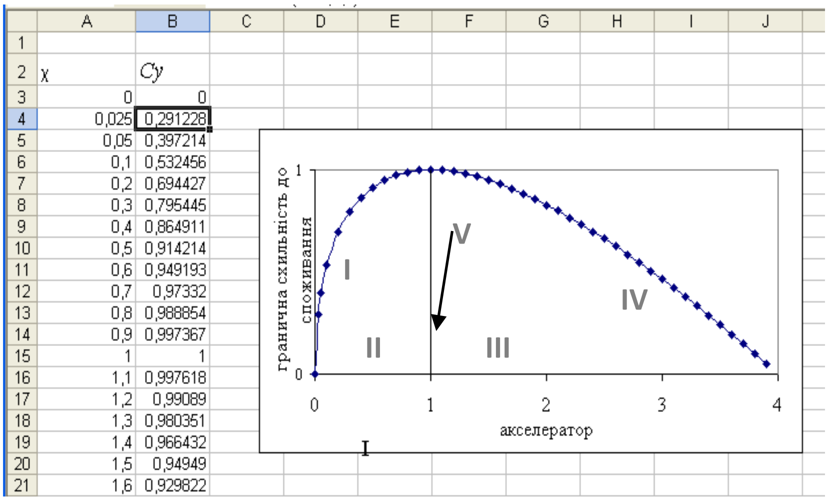


Рисунок 7.1 – Розподіл значень граничної схильності до споживання та акселератора залежно від їхнього впливу на характер динаміки національного доходу при зміні автономного попиту

Якщо $\eta < 1$, то рівновага встановиться на визначеному рівні. При $\eta > 1$ порушена рівновага більше не відновиться. Коли $\eta = 1$, тоді значення y_t будуть коливатися з постійною амплітудою. У результаті вся множина сполучень (η, C_y), виявилася розділеною на п'ять областей, як це показано на рис. 7.1.

Якщо значення (η, C_y) вказують на область I, то після порушення рівноваги в результаті зміни автономного попиту значення y_t монотонно збігатиметься до нового рівноважного рівня $y^* = \dfrac{A_0 + \Delta A}{1 - C_y}$ (рис. 7.2.а).

При значеннях (η, C_y) з області II, національний доход досягне нового рівноважного рівня, пройшовши через загасаючі коливання (рис.7.2.б).

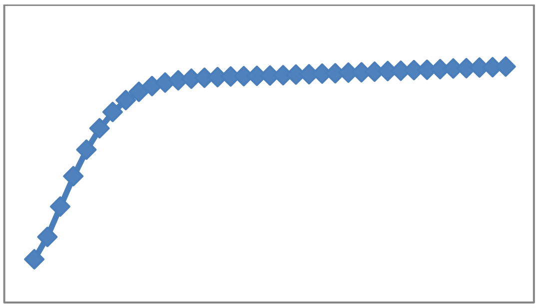
Сполучення значень (η, C_y) в області III (рис. 7.2.в), відповідають нестабільній рівновазі, динаміка y_t здобуває характеру вибухових коливань.

Комбінації значень (η, C_y) з області IV приводять до того, що після порушення рівноваги значення y_t монотонно спрямовуються в нескінченність (рис. 7.2.г).

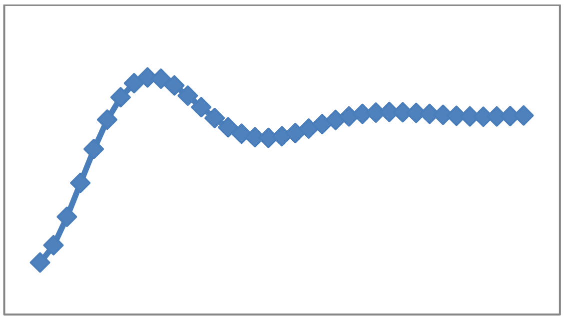
І нарешті, якщо акселератор дорівнює одиниці, то при будь-якому значенні граничної схильності до споживання у випадку порушення рівноваги виникають рівномірні незатухаючі коливання y_t (рис. 7.2.д).

У реальній економіці $C_y < 1$, а $\eta > 1$, тобто це області III і IV. При таких сполученнях значень граничної схильності до споживання і акселератора рівновага нестійка, і при її порушенні в моделі y_t дуже швидко приймає неправдоподібні значення. Але величина національного доходу не може істотно перевищувати величину національного доходу повної зайнятості. Це обмежує амплітуду коливань обсягу національного доходу зверху. З іншого боку, обсяг індукованих інвестицій не може бути менше від'ємної величини амортизації, і це обмежує амплітуду коливання величини національного доходу знизу.

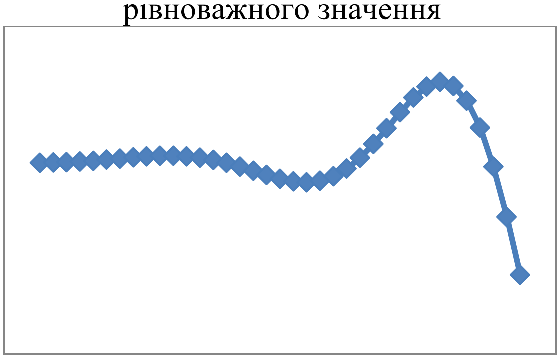
У таких умовах збільшення автономних інвестицій приводить до коливань величини національного доходу навіть при визначенні величин C_y і $\aleph$ в області IV.



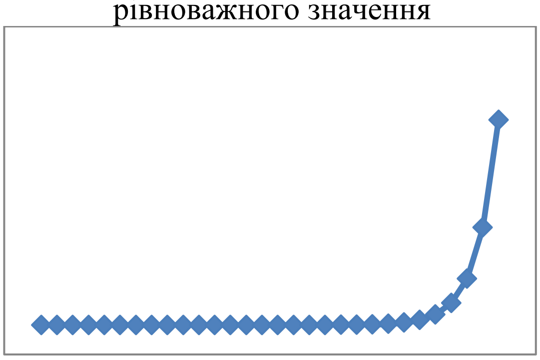
а) y_t монотонно збігається до нового рівноважного значення



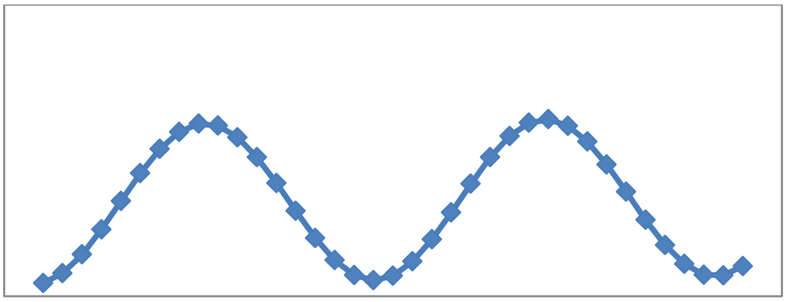
б) y_t коливально збігається до нового рівноважного значення



в) y_t здобуває характер вибухових коливань



г) значення y_t монотонно спрямовуються в нескінченність



д) рівномірні незатухаючі коливання y_t.

Рисунок 7.2 – Варіанти динаміки національного доходу в моделі

7.3 Методика прогнозування динаміки ВВП на основі моделі Самуельсона-Хікса

Проблема побудови задовільних прогнозів динаміки валового внутрішнього продукту (ВВП) полягає в наступному. Місячні дані обсягів ВВП мають чітко виражену сезонну складову, а також визначену циклічність. Наявність річної сезонності пов’язана із сезонністю в галузях економіки, що відображається в падінні рівня ВВП січня поточного року до грудня минулого року з поступовим зростанням протягом наступного року. Сутність циклічного компонента визначається закономірностями спадів і підйомів економіки.

При прогнозуванні динаміки ВВП річну сезонність показників вдається добре врахувати класичними статистичними методами, але циклічність – справа значно складніша. Якщо економіка, що знаходиться в стані рівноваги, починає під впливом будь-яких факторів зростати, у дію вступає механізм мультиплікатора-акселератора (взаємного «підштовхування» інвестицій і доходів). Цей механізм, здавалося б, повинен забезпечити «вічне» процвітання. Але цього не відбувається: через визначений час підйом змінюється спадом, глибоким і тривалим, котрий, однак, не триває вічно, а рано чи пізно поступається місцем підйомові.

Розглянемо один із підходів до побудови прогнозного значення ВВП на основі рівняння Самуельсона-Хікса:

$$\mathrm{y_t = (C_y + \eta) y_{t-1} - \eta y_{t-2} + A_t}, \tag{7.6}$$

яке можна переписати у вигляді: $\mathrm{y_t = C_y y_{t-1} + \eta(y_{t-1} - y_{t-2}) + A_t}$. (7.7)

Основна статистична інформація – це місячні спостереження ВВП країни із січня року $\grave{O}_1$ по грудень року $\grave{O}_2$ в порівняних цінах січня року $\grave{O}_1$. Рівень ВВП у січні року $\grave{O}_1$ приймають за 100%, тоді величини ВВП у місяцях, що залишилися, будуть дорівнювати частинам від цієї величини.

Часовий ряд даних ВВП у приведених цінах необхідний тому, що звичайно ряд номінальних величин ВВП неухильно зростає, що очевидно, пов’язано з наявністю в статистичних даних елемента інфляції.

Очевидно, вихідний ряд місячних рівнів ВВП у порівнянних цінах містить усього кілька десятків спостережень, чого, взагалі кажучи, недостатньо, щоб робити надійні статистичні висновки. Тим більше, мало що можна сказати, вивчаючи річні обсяги величин. Тому трохи видозмінимо рівняння Самуельсона-Хікса, а саме вважатимемо, що y_t – це не річний рівень ВВП, а місячний, і різниця $y_{t-1} - y_{t-2}$ розглядатиметься не як різниця між двома сусідніми роками величин ВВП, а як різниця між однойменними місяцями сусідніх років. Тоді рівняння Самуельсона-Хікса запишеться в такому вигляді:

$$y_t = A + c y_{t-12} + v(y_{t-12} - y_{t-24}) + \varepsilon_t, \tag{7.8}$$

де величини ε_t є помилками моделі, величина яких говорить про відповідність моделі реальним даним. Якщо величини ε_t не додати в рівняння (7.8), то воно не має змісту тому, що зазначене рівняння на наявних статистичних даних просто не виконується.

Надалі при дослідженні динаміки ВВП, буде зручно оперувати моделлю не у вигляді (7.8), але в інших еквівалентних формах. Введемо в розгляд ряд парних різниць місячних рівнів ВВП у базисних цінах, що задається формулою:

$$\Delta_{t-12} = y_t - y_{t-12}.$$

Тоді рівняння (7.8) можна переписати у вигляді:

$$y_t = A + cy_{t-12} + v\Delta_{t-12} + \varepsilon_t\,. \qquad (7.9)$$

Якщо в рівнянні (7.9) розкрити дужки і привести подібні члени, то воно перепишеться як:

$$y_t = A + cy_{t-12} - u_1 y_{t-12} - u_2 y_{t-24} + \varepsilon_t\,, \qquad (7.10)$$

де $u_1 = -(c + v),\quad u_2 = -v$.

З іншого боку, якщо з рівняння (7.11) виразити змінну y_{t-12} через ті, що залишилися, та згрупувати, одержуємо ще одне еквівалентне представлення співвідношення (7.10):

$$y_{t-12} = c_0 + \alpha_1\Delta_t + \alpha_2\Delta_{t-12} + \delta_t \qquad (7.11)$$

де $c_0 = \dfrac{A}{1-c}$, $\alpha_1 = -\dfrac{1}{1-c}$, $\alpha_2 = \dfrac{v}{1-c}$ і $\delta_t = \dfrac{\varepsilon_t}{1-c}$.

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення терміну «акселератор».
2. Дайте визначення терміну «мультипликатор».
3. Дайте визначення терміну «економічний цикл».
4. Дайте визначення терміну «діловий цикл».
5. У чому різниця між автономними та індукованими інвестиціями?
6. У чому сутність моделі економічного циклу Самуельсона-Хікса?
7. Охарактеризуйте значення граничної схильності до споживання та акселератора залежно від їхнього впливу на характер динаміки національного доходу при зміні автономного попиту.

Лабораторне заняття №6

Тема: Модель економічного циклу Самуельсона-Хікса

Мета: навчитися застосовувати модель економічного циклу Самуельсона-Хікса.

Завдання: грунтуючись на вивченні ефекту взаємодії мультиплікатора-акселератора, побудувати програмну реалізацію процесу розв’язання задач та геометричну інтерпретацію за допомогою програмного середовища MsExcel.

Виконати побудову і дослідити поведінку динаміки національного доходу в моделі Самуельсона-Хікса за таких умов:

1) функція споживання домашніх господарств задана таким чином: $C_t = 50 + 0{,}873 \cdot Y_{t-1}$;

2) функція попиту підприємців на автономні і індуковані інвестиції представлена як: $I_t = 265 + \eta(Y_{t-1} - Y_{t-2})$;

3) протягом деякого часу до періоду t_0 включно економіка знаходиться в динамічній рівновазі при попиті підприємців на автономні інвестиції в обсязі 250 грошових одиниць. Це означає, що в кожному періоді вироблялося 1700 од. благ, з яких 50 + 0,8*1700 = 1410 споживають домашні господарства. З періоду t_1 підприємці вирішили, що обсяг автономних інвестицій має дорівнювати 350 грошових одиниць. Як у результаті реалізації такого рішення буде змінюватися величина сукупного попиту (отже, і національного доходу) при чотирьох різних поєднаннях акселератора та граничної схильності до споживання, а саме: $(\eta = 0{,}478; C_y = 0{,}873)$; $(\eta = 0{,}785; C_y = 0{,}873)$; $(\eta = 1{,}298; C_y = 0{,}873)$;. $(\eta = 2{,}345; C_y = 0{,}873)$;

4) дослідіть випадок коли відбувається порушення рівноваги та виникають рівномірні незатухаючі коливання. За умови, якщо акселератор дорівнює одиниці, а гранична схильність до споживання має будь-яке значення.

Хід роботи.

Використовуючи задані умови побудуємо і дослідимо поведінку динаміки національного доходу. Спочатку внесемо всі вихідні дані на робочій лист MsExcel. Розрахуємо обсяги споживання домашніх господарств (C), попит підприємців на автономні та індуковані інвестиції (I_a та $I_{ін}$) і величину національного доходу для періоду 1-36.

Розглянемо перший випадок коли акселератор і гранична схильність до споживання становлять відповідно $\eta = 0{,}478; C_y = 0{,}873$. У цьому випадку значення (η, C_y) потрапляють у першу область, що свідчить про те, що після порушення рівноваги в результаті зміни автономного попиту значення національного доходу монотонно збігатиметься до нового рівноважного значення. Приклад виконання наведено на рис. 7.3.

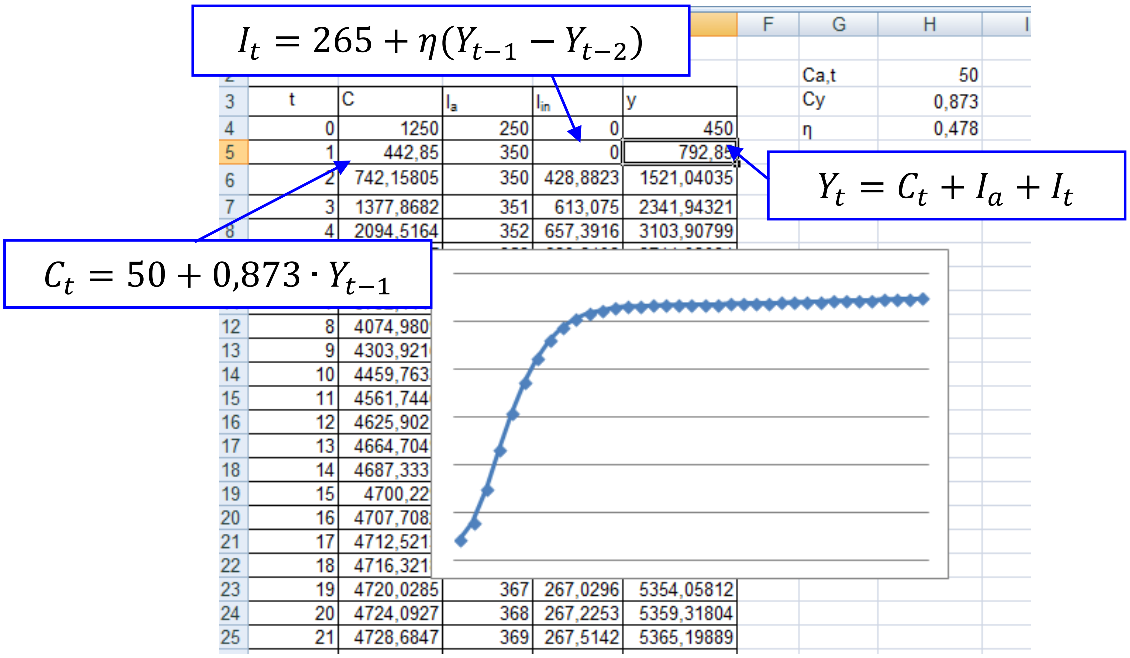
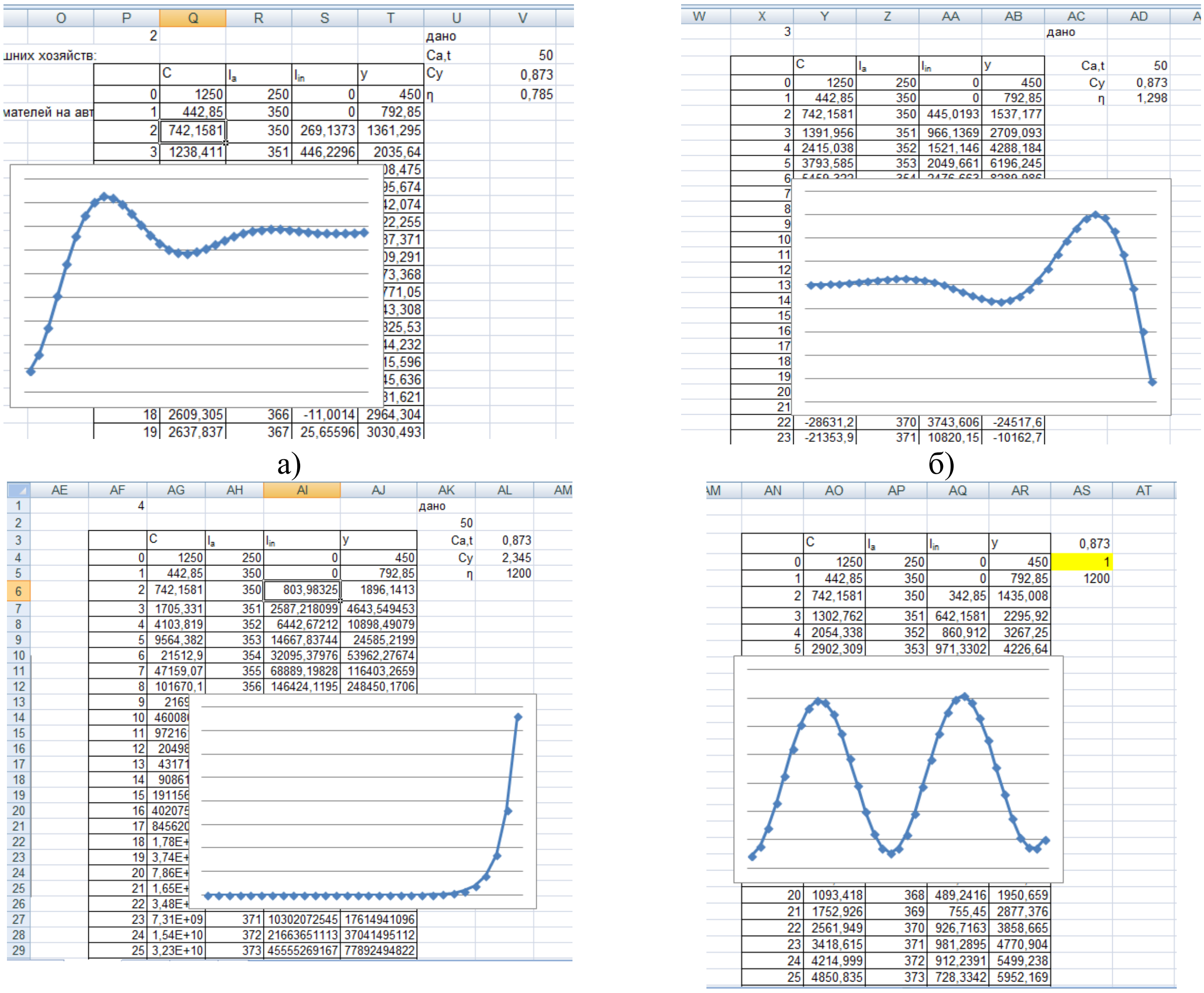


Рисунок 7.3 – Динаміка національного доходу – монотонно збігається до нового рівноважного значення

Розглянемо другий випадок – значення акселератора та граничної схильності до споживання дорівнюють $\eta = 0{,}785; C_y = 0{,}873$. Результати розрахунків наведено на рис. 7.4.а. З графічного подання динаміки національного доходу можемо зробити висновок, що національний дохід досягне нового рівноважного рівня, пройшовши через загасаючі коливання.



а) б) в) г)

Рисунок 7.3 – Динаміка національного доходу за заданих умов

Третій випадок (рис. 7.4.б) – значення акселератора та граничної схильності до споживання дорівнюють $\eta = 1{,}298; C_y = 0{,}873$. За таких умов спостерігається нестабільна рівновага, динаміка національного доходу характеризується вибуховими коливаннями.

Четвертий випадок (рис. 7.4.в) – значення акселератора та граничної схильності до споживання дорівнюють $\eta = 2{,}345; C_y = 0{,}873$. За таких умов спостерігається порушення рівноваги, а значення національного доходу монотонно спрямовується в нескінченність.

У випадку коли акселератор дорівнює одиниці, то при будь-якому значенні граничної схильності до споживання при порушенні рівноваги виникають рівномірні незатухаючі коливання національного доходу (рис. 7.3.г).

Тема 8. Дискретні динамічні моделі в економіці

Мета: ознайомитися з методикою дослідження зміни ціни в умовах із прогнозованими цінами.

План

8.1 Моделі попиту та пропозиції

8.2 Модель ринку з прогнозованими цінами

8.3 Приклад застосування моделі ринку з прогнозованими цінами

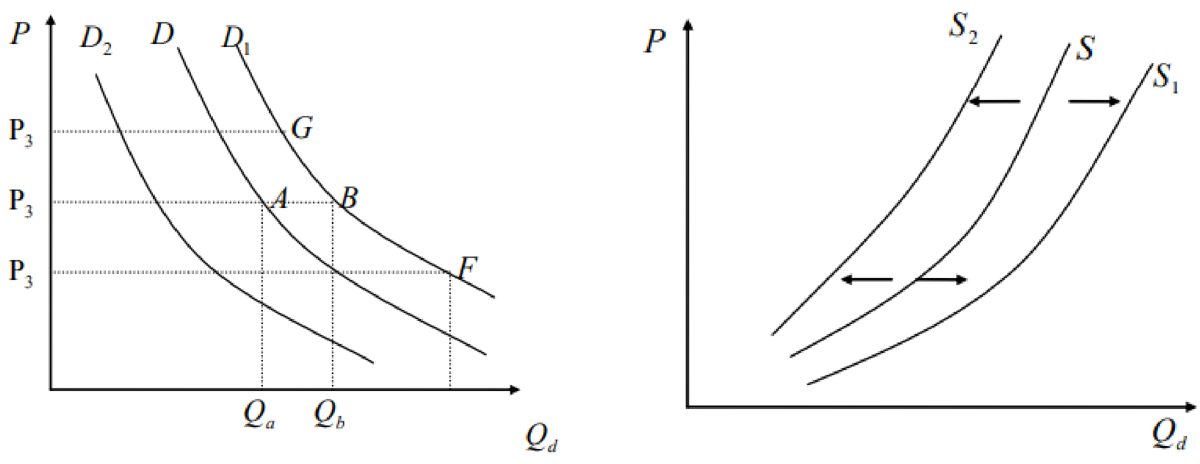
Основні поняття

Модель, ринок, прогнозовані ціни, економічна рівновага, динаміка, попит, пропозиція.

8.1 Моделі попиту та пропозиції

Стан ринкової економіки, рівень і механізм розвитку описуються за допомогою таких понять, як попит та пропозиція.

Попит характеризується шкалою, що розкриває готовність покупців у даний відрізок часу отримувати продукт за кожною, із запропонованих на ринку, ціною. На динаміку попиту впливають цінові і нецінові чинники. Залежність обсягу попиту від цін фіксується законом попиту і представлена кривою з негативним нахилом (рис. 8.1). Крива попиту – це крива, кожна точка якої показує, за якими цінами протягом відповідного періоду покупці могли б купувати різну кількість товару.



а) Крива попиту б) Крива пропозиції

Рисунок 8.1 – Криві попиту та пропозиції

На рис. 8.1.а показано, що у випадку зміни факторів, які впливають на величину попиту, можуть змінюватися відношення між величиною попиту та ціною. Нехай за ціною P_1 домогосподарства купують деякий товар у кількості Q_a одиниць (точка A кривої D). За умов зростання доходу домогосподарства можуть придбати за ціною P_1 вже більше товару (Q_b). У цьому випадку говорять про рух кривої попиту вправо. Якщо під впливом зміни якогось фактора відбувається зниження Q_d, то крива попиту зміститься вліво. Попит на товар визначається всією кривою попиту. Рух кривої попиту вправо означає збільшення попиту, а рух кривої вліво – зменшення попиту.

Попит відображає:

– потребу покупця в деяких товарах або послугах, бажання придбати ці товари або послуги в певній кількості;

– можливість сплатити за покупку за цінами, що знаходяться в межах «доступного» діапазону.

Зворотна залежність динаміки попиту від рівня цін визначається трьома причинами. По-перше, зниження цін збільшує число покупців. По-друге, зниження цін розширює купівельну спроможність споживачів. По-третє, насичення ринку призводить до зниження корисності додаткових одиниць продукту, тому покупці готові купувати його тільки за нижчими цінами. Вплив цінових чинників призводить до зміни величини попиту, пересуваючи його значення вище точки постійної кривої попиту.

На попит впливають і нецінові чинники (рис. 8.2): переваги і смаки споживачів, розміри ринку, дохід («ефект доходу»), ціни на супутні товари (субститути і доповнюючі), очікування споживачів. Дія нецінових чинників призводить до зміни в обсязі попиту і виражається зсувом кривої попиту вправо (якщо він зростає) і вліво (якщо він знижується). «Зміну в попиті», яка проявляється в русі кривої попиту вліво або вправо, не слід плутати зі «зміною величини попиту», тобто з переміщенням по кривій попиту вгору або вниз. При цьому сам попит не змінюється, а збільшується або зменшується Q_d, тобто кількість товару, на який є попит за тої чи іншої ціни.

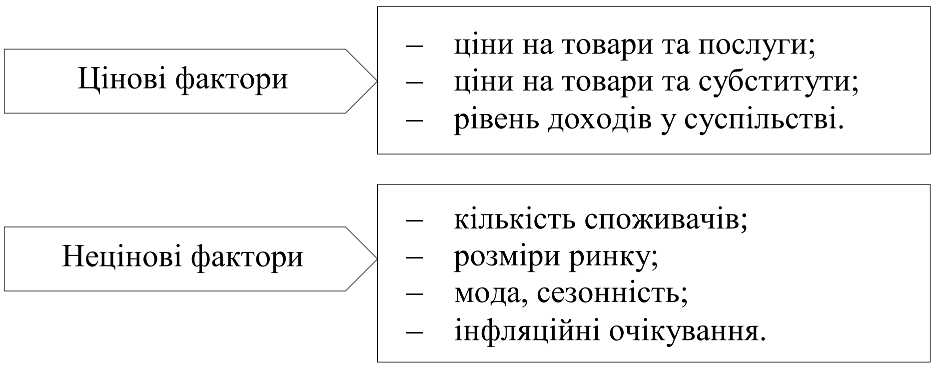


Рисунок 8.2 – Фактори, що впливають на попит

Пропозиція також може бути описана за допомогою відповідної шкали. У ній представлені різна кількість продукту, що виробник бажає зробити і продати за встановленою ціною в конкретний часовий період. Пропозиція – кількість товару, яка реалізується виробниками на ринку.

Залежність обсягу пропозиції від цін фіксується законом пропозиції, який описується кривою з позитивним нахилом. Крива пропозиції – крива, яка показує кількість товару або послуги, яку продавці пропонують до продажу за різними цінами протягом відповідного періоду (рис. 8.1.б).

Фактори, які впливають на обсяг пропозиції на ринку товару, зрушують криву пропозиції вправо при збільшенні кількості запропонованого товару, вліво – при зменшенні. Крива S_1 – розширення пропозиції, крива S_2 – зниження пропозиції. Рух кривої пропозиції вправо означає, що пропозиція змінюється за тієї ж ціни, не один із факторів, які впливають на пропозицію не змінюється, а якщо ціна зростає, то відбувається рух по кривій пропозиції вгору або вниз (пропозиція товару не змінюється).

Прямий зв’язок пропозиції і рівня цін пояснюється дією закону знижувальної продуктивності факторів виробництва. Зміна цін призводить до зміни величини пропозиції та ілюструється рухом її уздовж постійної кривої пропозиції від однієї комбінації «ціна – обсяг» до іншої. Дія нецінових чинників призводить до зміни в обсязі пропозиції, що виражається у зсуві кривої пропозиції вправо (якщо вона зростає) і вліво (якщо вона скорочується). До нецінових чинників, що впливають на пропозицію, належать: ціни на виробничі ресурси, зміни в технології виробництва, державна політика у сфері оподаткування і субсидування, структура ринку.

Закон попиту відображає головну тенденцію – згортання обсягу закупівель зі зростанням цін на товар в умовах, коли грошові можливості покупця обмежені певною межею.

Закон пропозиції при інших незмінних чинниках величина (обсяг) пропозиції збільшується зі збільшенням ціни на товар.

8.2 Модель ринку з прогнозованими цінами

Для моделювання динамічних процесів в економіці застосовують диференційні рівняння другого порядку (рис. 8.3). У простих випадках моделювання ринку зазвичай вважають, що попит і пропозиція залежать тільки від поточної вартості товару. Однак, у реальній ситуації ці фактори залежать ще і від тенденції ціноутворення, і від темпів зміни ціни.

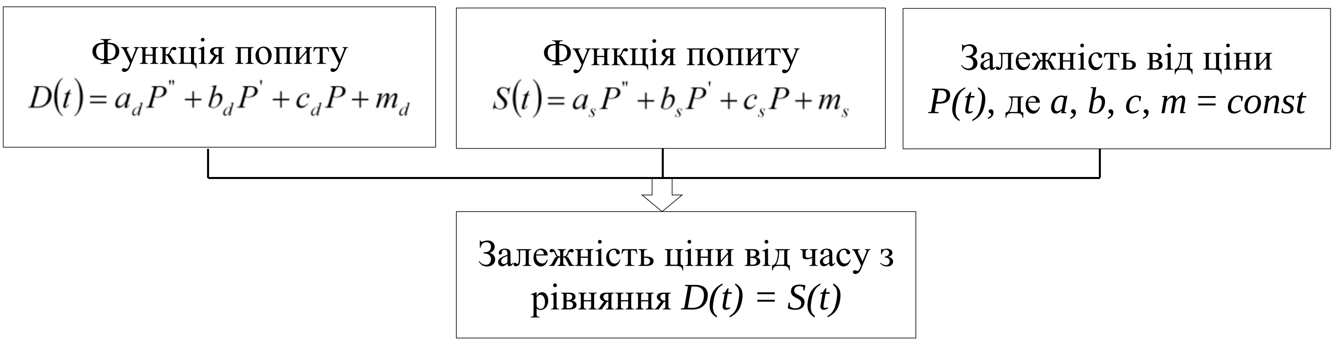


Рисунок 8.3 – Модель ринку з прогнозованими цінами

Розглянемо модель ринку із прогнозованими цінами. У моделях із неперервними і диференційованими за часом функціями характеристики поточної вартості товару зображуються відповідно першою та другою похідною функції вартості *P(t)*. Розглянемо це питання на конкретному прикладі.

Нехай, функції попиту *D(t)* і пропозиції *S(t)* мають такий вигляд:

$$D(t) = 3P'' - P' - 2P + 18$$
$$S(t) = 4P'' + P' - 3P + 3$$

Вибрані залежності цілком реалістичні і мають такий зміст:

1) попит стимулюється темпом зміни ціни: якщо темп зростання збільшується ($P'' > 0$), ринок збільшує зацікавленість у товарі, і навпаки – швидке зростання цін відлякує покупців. У зв'язку з цим доданок із P' міститься у функції попиту зі знаком «–».

2) пропозиція зростає значною мірою із зростанням темпу зміни ціни. Тому, доданок із P'' у функції *S(t)* має більший коефіцієнт, ніж у функції *D(t)*. Зростання цін також збільшує пропозицію, тому, доданок, що містить P' у функції *S(t)* стоїть зі знаком «+».

Поставимо задачу отримати модель ринку із прогнозованими цінами, що характеризуються залежністю цін вартості від часу. Як відомо, рівноважний стан ринку характеризується рівністю «попит дорівнює пропозиції»:

$$S(t) = D(t)$$
$$3P'' - P' - 2P + 18 = 4P'' + P' - 3P + 3$$
$$P'' + 2P' + 5P = 15$$

Це рівняння – модель із прогнозованими цінами. Проведемо дослідження і аналіз отриманої моделі. З математичної точки зору модель ринку із прогнозованими цінами являє собою звичайне лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку.

Розв'язок такого рівняння шукається як сума загального розв'язку однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного. Однорідне рівняння має вигляд: $P'' + 2P' + 5P = 0$.

Відповідне характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \ \rightarrow \ D = 4 - 4 \cdot 5 = -16.$$

Маємо комплексно спряжені характеристичні корені:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

$$\mathrm{Re}(\lambda) = \alpha = -1; \ \mathrm{Im}(\lambda) = \beta = 2$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння моделі, що розглядається, може бути представлений у трьох варіантах (рис. 8.4).

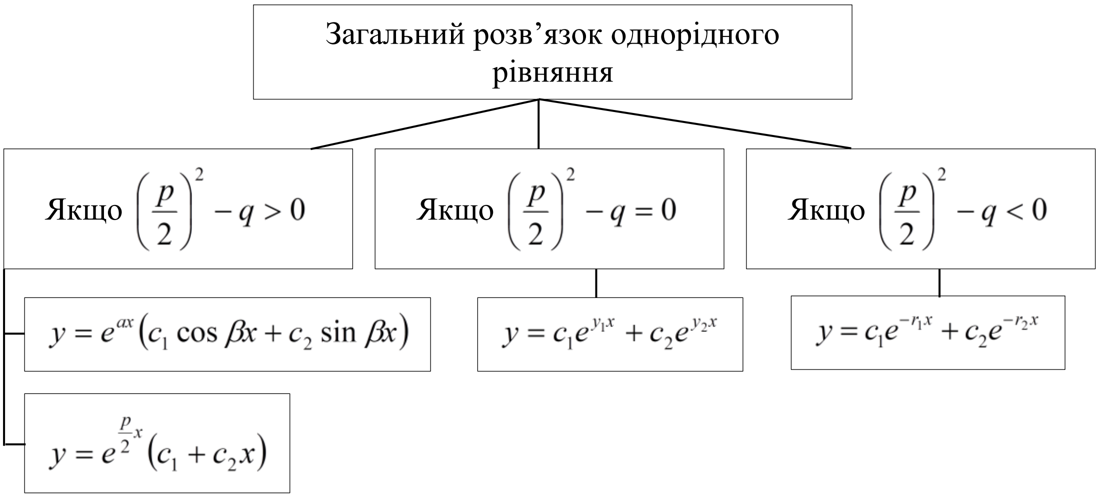


Рисунок 8.4 – Загальний розв’язок однорідного рівняння

Відповідно до рис. 8.4 під час розв’язання характеристичного рівняння можливі такі розв’язки:

1) характеристичні числа λ_1, λ_2 є дійсними числами та не дорівнюють одне одному. Тоді загальний розв’язок однорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$P(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t};$$

2) характеристичні числа λ_1, λ_2 є дійсними числами та дорівнюють одне одному $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Тоді загальний розв’язок однорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$P(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t};$$

3) характеристичні числа є комплексно-спряженими числами $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Тоді загальний розв’язок однорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$P(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t).\right)$$

У цьоому випадку питання про розв’язки диференціального рівняння повністю вирішуються загальною формою розв’язку:

$$P(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t\right); C_1, C_2 = const.$$

Загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку щодо функції $P(t)$ складається з суми будь-якого його частинного розв’язку неоднорідного рівняння $(y_{ч.р.})$ та загального розв’язку $(y_{з.р.})$ відповідного однорідного рівняння.

Нехай права частина рівняння має вигляд $f(x)=P_n(x)e^{ax}$, де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня, тут можливі два випадки:

– α не є коренем характеристичного рівняння, тоді $y_{ч.р.}=Q_n(x)e^{ax}$, де $Q_n(x)$ – многочлен n-го степеня із неозначеними коефіцієнтами;

– α є коренем характеристичного рівняння кратності r (r = 1 або r = 2) , тоді $y_{ч.р.}=x^r Q_n(x)e^{ax}$.

Загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$P(t)=e^{-t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t); C_1, C_2=const.$$

Частинний розв'язок рівняння знайдемо, враховуючи, що права частина є сталим числом. Отже, частинний розв'язок шукаємо в тій самій формулі *P=A, A – const*. Для знаходження *A* підставимо в рівняння *5A=15, A=3*.

Остаточно додаємо знайдені розв'язки:

$$P(t)=3+e^{-t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t); C_1, C_2=const.$$

Із отриманих результатів видно, що для моделі існує врівноважений стаціонарний стан, до якого прямує система з часом:

$$P_{ст}=\lim_{t\to\infty}P(t)=3.$$

Оскільки є тригонометричні функції, то це графік гармонійний. Загалом динаміка ринку із прогнозованими цінами має коливний характер і з часом наближається до стійкого стану.

Сталі C_1, C_2 можна визначити із початкових умов. У нашому випадку, якщо є відомою ціна і тенденції її зміни.

8.2 Приклад застосування моделі ринку з прогнозованими цінами

Дослідимо динаміку зміни ціни в умовах із прогнозованими цінами. Встановимо існування рівноважного стану, якщо функція попиту і пропозиції мають вигляд:

D(t)=5P''- P '- 5P+19;
S(t)=15P '' + P'+10P+3.

У початковий момент часу відома ціна: *P(0)=3, P'(0)=1.*

Як зазначалося вище, рівноважний стан ринку характеризується рівністю: попит дорівнює пропозиції, тоді

S(t)=D(t): 5P''-P'-5P+19=15P''+P'+10P+2
-10P''-2P'-15P+17=7 → 10P''+2P'+15P=17.

Звідси однорідне рівняння має вигляд: *10P’’+2P’+15P=0.*

Отримуємо таке характеристичне рівняння:

$$10\lambda^2+2\lambda+15=0;$$
$$D = 4 - 600 = -596.$$

Визначимо корені рівняння: $\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{596i}}{20} = -\frac{1}{5} \pm \frac{\sqrt{596}}{20} i$, тоді $\alpha = -\frac{1}{5}$; $\beta = \frac{\sqrt{596}}{20} i$ – корені є комплексно спряжені.

Отже, загальний розв’язок рівняння має вигляд:

$$P(t) = e^{\frac{1}{5}t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Враховуючи, що *P=A, A – const* знайдемо частинний розв’язок рівняння:

$$10A''+2A'+15A=17$$

$$15A = 17 \rightarrow A = \frac{15}{17} = 1\frac{2}{15} \rightarrow P(t) = e^{\frac{1}{5}t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + \frac{17}{15}.$$

Із першої початкової умови маємо:

$$1 = -\frac{1}{5}C_1 + C_2 \rightarrow C_1 = 3 - \frac{17}{15} = 3 - 1\frac{2}{15} = 1\frac{13}{15} = \frac{28}{15}, \text{ тоді}$$

$$P(t) = -\frac{1}{5}e^{\frac{1}{5}t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-\frac{1}{5}t}(C_1 \sin t + C_2 \cos t).$$

Із другої умови: $1 = -\frac{1}{5}C_1 + C_2 \rightarrow C_2 = 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{28}{15} = 1 + \frac{28}{75} = \frac{103}{75}$, тоді

$$P(t) = -\frac{1}{5}e^{\frac{1}{5}t}\left(\frac{28}{15}\cos t + \frac{103}{75}\sin t\right) + \frac{17}{15}.$$

Рівноважний стан визначимо з умови: $P_{st} = \lim_{t \to \infty} P(t) = \frac{17}{15} = 1\frac{2}{15}$.

На основі отриманого розв’язку можна зробити висновок про те, що існує врівноважений стаціонарний стан, до якого з часом наближається функція ціни (рис. 8.5).

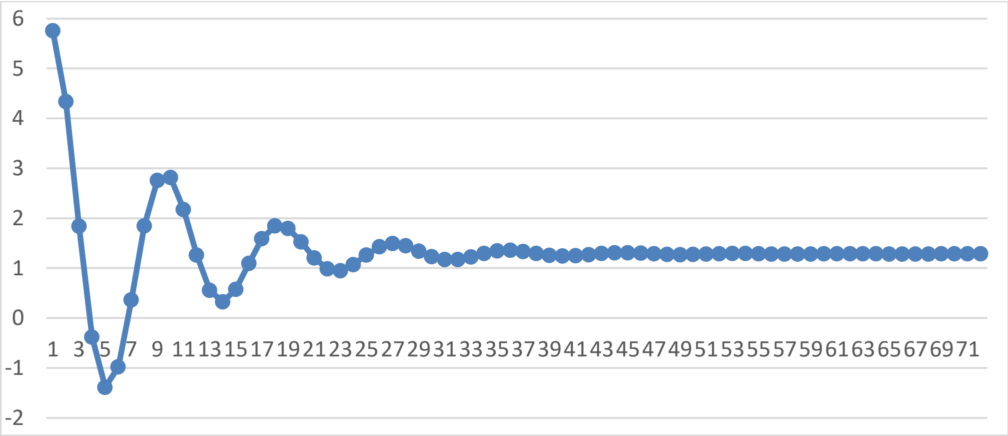


Рисунок 8.5 – Врівноважений стаціонарний стан

Питання для самоконтролю

1. Динамічні системи та їх властивості.
2. Назвіть характерні риси динамічного моделювання.
3. Охарактеризуйте залежності моделі ринку з прогнозованими цінами.
4. Назвіть можливі розв'язки диференційного рівняння моделі ринку із прогнозованими цінами.
5. Чи враховуються нелінійні аспекти впливу факторів на цінову динаміку?
6. Чи враховуються сезонні тенденції або циклічні коливання при прогнозуванні цін?

Лабораторне заняття №7

Тема: Модель ринку з прогнозованими цінами.

Мета: навчитися досліджувати динаміку зміни ціни в умовах із прогнозованими цінами.

Завдання: на основі моделі ринку із прогнозованими цінами відобразити динаміку зміни ціни та дослідити існування рівноважного стану для заданих функцій попиту та пропозиції у випадках, коли є відомими (табл. 8.1):

1) початкова ціна та тенденція її зміни;
2) початкова ціна та початковий попит.

Зробити висновки.

Таблиця 8.1 – Вихідні дані для виконання лабораторної роботи

№ п/п	Функція попиту	Функція пропозиції	Початкові умови I	Початкові умови II
1	$D(t)=3\cdot P''(t)-P'(t)-5\cdot P(t)+25$	$S(t)=8\cdot P''(t)-P'(t)+$ $+5\cdot P(t)+5$	$P(0)=5$ $P'(0)=3$	$P(0)=5$ $D(0)=15$
2	$D(t)=5\cdot P''(t)-P'(t)-2\cdot P(t)+15$	$S(t)=15\cdot P''(t)+P'(t)+$ $+3\cdot P(t)+5$	$P(0)=7$ $P'(0)=5$	$P(0)=7$ $D(0)=17$
3	$D(t)=7\cdot P''(t)-2\cdot P'(t)-3\cdot P(t)+17$	$S(t)=14\cdot P''(t)+P'(t)+$ $+4\cdot P(t)+7$	$P(0)=5$ $P'(0)=4$	$P(0)=5$ $D(0)=14$

Продовження таблиці 8.1

№ п/п	Функція попиту	Функція пропозиції	Початкові умови I	Початкові умови II
4	$D(t)=P''(t)-3\cdot P'(t)-3\cdot P(t)+12$	$S(t)=10\cdot P''(t)+P'(t)+$ $+7\cdot P(t)+2$	$P(0)=5$ $P'(0)=2$	$P(0)=5$ $D(0)=18$
5	$D(t)=5\cdot P''(t)-P'(t)-8\cdot P(t)+33$	$S(t)=8\cdot P''(t)+P'(t)+$ $+12\cdot P(t)+18$	$P(0)=5$ $P'(0)=5$	$P(0)=5$ $D(0)=19$
6	$D(t)=5\cdot P''(t)-2\cdot P'(t)-3\cdot P(t)+22$	$S(t)=35\cdot P''(t)+3\cdot P'(t)+$ $+17\cdot P(t)+2$	$P(0)=7$ $P'(0)=5$	$P(0)=7$ $D(0)=20$
7	$D(t)=6\cdot P''(t)-3\cdot P'(t)-12\cdot P(t)+21$	$S(t)=31\cdot P''(t)+4\cdot P'(t)+$ $+6\cdot P(t)+2$	$P(0)=9$ $P'(0)=7$	$P(0)=9$ $D(0)=12$
8	$D(t)=5\cdot P''(t)-P'(t)-3\cdot P(t)+20$	$S(t)=23\cdot P''(t)+4\cdot P'(t)+$ $+5\cdot P(t)+5$	$P(0)=6$ $P'(0)=2$	$P(0)=6$ $D(0)=25$
9	$D(t)=6\cdot P''(t)-P'(t)-5\cdot P(t)+17$	$S(t)=21\cdot P''(t)+2\cdot P'(t)+$ $+5\cdot P(t)+10$	$P(0)=7$ $P'(0)=1$	$P(0)=7$ $D(0)=23$
10	$D(t)=7\cdot P''(t)-P'(t)-3\cdot P(t)+12$	$S(t)=18\cdot P''(t)+P'(t)+$ $+7\cdot P(t)+7$	$P(0)=6$ $P'(0)=2$	$P(0)=6$ $D(0)=24$
11	$D(t)=8\cdot P''(t)-P'(t)-6\cdot P(t)+14$	$S(t)=17\cdot P''(t)+P'(t)+$ $+3\cdot P(t)+7$	$P(0)=7$ $P'(0)=1$	$P(0)=7$ $D(0)=17$
12	$D(t)=5\cdot P''(t)-P'(t)-5\cdot P(t)+10$	$S(t)=22\cdot P''(t)+3\cdot P'(t)+$ $+4\cdot P(t)+3$	$P(0)=5$ $P'(0)=2$	$P(0)=5$ $D(0)=21$
13	$D(t)=14\cdot P''(t)-P'(t)-4\cdot P(t)+20$	$S(t)=25\cdot P''(t)+2\cdot P'(t)+$ $+7\cdot P(t)+15$	$P(0)=6$ $P'(0)=1$	$P(0)=6$ $D(0)=11$
14	$D(t)=7\cdot P''(t)-P'(t)-7\cdot P(t)+19$	$S(t)=19\cdot P''(t)+3\cdot P'(t)+$ $+8\cdot P(t)+10$	$P(0)=7$ $P'(0)=2$	$P(0)=7$ $D(0)=14$
15	$D(t)=7\cdot P''(t)-P'(t)-4\cdot P(t)+17$	$S(t)=25\cdot P''(t)+P'(t)+$ $+7\cdot P(t)+7$	$P(0)=5$ $P'(0)=1$	$P(0)=6$ $D(0)=25$

САМОСТІЙНА РОБОТА

Самостійна робота студентів передбачає виконання лабораторних робіт відповідно до свого варіанту та опрацювання ряду теоретичних питань із дисципліни «Моделювання економічної динаміки», які не увійшли до лекційного матеріалу курсу. У табл. 1 наведено теоретичні питання для самостійного опрацювання за кожною розгляненою темою.

Таблиця 1 – Питання для самостійного опрацювання

№ з/п	Назва теми	Питання
1	Тема 1. Математичне моделювання динамічних процесів.	Властивості динамічних систем.
2		Математичний апарат опису динамічних характеристик складних систем.
3		Традиції математичної економіки.
4		Інструментальні засоби економічної динаміки для морделювання й аналізу економічних процесів.
5	Тема 2. Детермінований хаос. Дивні атрактори.	Дивні атрактори та виникнення турбулентності.
6		Аттрактори динамічних систем. Хаотичний атрактор.
7		Синергетична парадигма вивчення складних економічних систем.
8		Розвиток концепції самоорганізації.
9		Хаос і порядок.
10	Тема 3. Фрактали як геометричні об’єкти. Види фрактальних розмірностей та способи їх обчислення	Види фрактальних розмірностей: ємкісна розмірність, інформаційна розмірність, поняття *k*-ентропії Колмогорова, кореляційна розмірність.
11		Обчислення фрактальної розмірності і показників Ляпунова аналітичним способом.
12		Зображення дивних атракторів та фрактальних границь.
13		Фрактальний граф як засіб моделювання структурного хаосу.
14	Тема 4. Прогнозування часових рядів з використанням моделей ARIMA.	Синергетичний підхід до моделювання й аналізу економічних процесів.
15		Моделювання динаміки економічних процесів.
16		Рівновага та стійкість динамічних систем.
17		Моделі економічних змін таїх аналіз.

Продовження таблиці 1

№ з/п	Назва теми	Питання
18	Тема 5. Приклади використання теорії катастроф до аналізу реальних систем.	Модель соціальної мобілізації (лінійна).
19		Модель природного росту.
20		Модель Еванса.
21		Формалізація стохастичних динамічних моделей.
22		Стохастичні моделі економічної динаміки.
23	Тема 6. Екстенсивні та інтенсивні фактори розвитку. Факторні моделі.	Статичні виробничі функції. Функції виробничих витрат.
24		Моделі економічних змін та їх аналіз.
25		Типи, структури динамічних моделей та характер їх використання.
26		Моделі дискретних, неперервних та складних динамічних систем в економіці.
27	Тема 7. Теорія економічних циклів. Моделювання на базі часових рядів.	Моделі економічних циклів Гудвіна.
28		Модель зовнішньої торгівлі.
29		Ефект мультиплікатора у відкритій економіці.
30		Модель Тевеса.
31		Вплив флуктуацій на динаміку споживчих благ.
32	Тема 8. Дискретні динамічні моделі в економіці.	Моделі попиту та пропозиції.
33		Інтегральні криві динамічної моделі Кейнса.
34		Моделі економічного розвитку України.
35		Динамічна Модель Кейнса.

ПІДСУМКОВИЙ КОНТРОЛЬ

Підсумковий контроль із дисципліни «Моделювання економічної динаміки» відбувається у формі заліку. Підсумковий контроль складається з теоретичної та практичної частини. Теоретична частина складається із 20 тестових запитань, правильна відповідь оцінюється у 1 бал. Таким чином, за теоретичну частину підсумкового контролю можна отримати до 20 балів.

Теоретичне опитування відбувається у тестовій формі через платформу Moodle за посиланням: https://moodle.znu.edu.ua/mod/quiz/view.php?id=115079. Питання для підготовки до заліку включають теми № 1 – 8:

1. Поняття моделі. Математична модель.
2. Основні поняття економічної динаміки: біфуркація, катастрофа, динамічна система, типи поведінки одновимірних динамічних систем.
3. Процес математичного моделювання.
4. Основні поняття економічної динаміки: особова точка системи, фазовий портрет системи, граничний цикл, біфуркація (навести приклад).
5. Основні вимоги до математичної моделі.
6. Типи математичних моделей і методологія конструювання.
7. Біфуркація та дивні атрактори.
8. Поняття детермінованого хаосу в економічних системах.
9. Дивні атрактори. Атрактор Лоренца.
10. Етапи моделювання економічної системи за допомогою атрактора Лоренца.
11. Поняття фракталів та їх практичне застосування.
12. Класифікація фракталів.
13. Метод фрактального аналізу в дослідженні хаосу.
14. Фрактальний *R/S*-аналіз: метод нормованого розмаху Херста.
15. Алгоритм послідовного *R/S*-аналізу часових рядів.
16. Основні етапи аналізу даних при побудові ARIMA моделей.
17. Методика побудови ARIMA моделей для прогнозування динаміки часових рядів.
18. Особливості довгострокової економічної динаміки.
19. Лінійна динамічна модель довгих хвиль в економіці.
20. Класифікація методів регулювання економічних циклів за видами.
21. Екстенсивні та інтенсивні фактори розвитку.
22. Однофакторні моделі економічного зростання.
23. Багатофакторні моделі економічного зростання.
24. Виробничі цикли та лагові моделі.
25. Динамічна функція Кобба-Дугласа.
26. Поняття економічного і ділового циклів в економіці.
27. Модель Самуельсона-Хікса – модель мультиплікатора-акселератора.
28. Методика прогнозування динаміки ВВП на основі моделі Самуельсона-Хікса.
29. Модель ринку з прогнозованими цінами.
30. Динамічні системи та їх властивості.

Практична частина підсумкового контролю складається з однієї типової задачі (подібні було розглянуто на лабораторних заняттях). Задачу потрібно виконати в середовищі Microsoft Excel та завантажити у СЕЗН Moodle за посиланням: https://moodle.znu.edu.ua/mod/assign/view.php?id=114588.

Результат розв’язку задачі оцінюється за такою шкалою:

- 20 балів (максимальна оцінка): студент правильно розв’язав задачу;
- 19-17 балів: студент розв’язав задачу з помилками, але зрозуміло, що він знає алгоритм розв’язання задачі;
- 16-13 бали: студент розв’язав задачу з помилками, з яких зрозуміло, що він частково знає алгоритм розв’язання задачі;
- 12-9 бали: студент правильно виписав формулу, за якою можна розв’язати задачу, та зробив спробу її розв’язання, наприклад, виконав значні допоміжні розрахунки;
- 8-5 бал: студент правильно виписав формулу, за якою можна розв’язати задачу, та намагався зробити допоміжні розрахунки;
- 4-1 бал: студент правильно виписав формулу, за якою можна розв’язати задачу;
- 0 балів: студент не розв’язав задачу.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Акулов М. Г., Тютюніков І. Є., Куперштейн Л. М., Ткаченко М. І. Моделювання економічної динаміки : навч. посіб. / під ред. М. Г. Акулова. Вінниця : ВФЕУ, 2017. 310 с.

2. Бродський Ю. Б., Молодецька К. В. Моделювання економічної динаміки : підручник. Житомир : ЖНАЕУ, 2016. 132 с.

3. Григорків В. С. Моделювання економіки : підручник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2019. 360 с.

4. Григорків В. С., Григорків М. В., Скращук Л. В. Диференціальні моделі економічної динаміки: основи теорії та приклади : навч. посіб. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2015. 214 с.

5. Кочура Є. В., Косарев В. М. Моделювання макроекономічної динаміки : навч. посіб. Дніпропетровськ : ДУЕП, 2003. 236 с.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. Бродський Ю. Б., Малютіна В. П. Економіко-математичне моделювання : конспект лекцій. Житомир : ЖНАЕУ, 2010. 116 с.
2. Гладка О. М., Карпович І. М., Сінчук А. М. Моделі економічної динаміки для фахівців з інформаційних технологій : навч. посіб. Рівне : РДГУ, 2019. 158 с.
3. Коюда П. М., Новожилова М. В., Чуб І. А. Моделювання економічної динаміки : навч. посіб. Харків : ТОВ «Компанія СМІТ», 2006. 140 с.
4. Кочура Є. В. Моделювання макроекономічної динаміки : навч. посіб. Київ : Центр навчальної літератури, 2013. 236 с.
5. Burkhard Heer and Alfred Maußner. Dynamic General Equilibrium Modeling Computational Methods and Applications. Third Edition, 2023, Springer, P. 950.

Додаткова:

1. Моделювання економічної динаміки : навч. посіб. / Клебанова Т. С. та ін. Харків : ИНЖЭК, 2005. 244 с.
2. Лавінський Г. В., Бушуєва І. В., Пшенишнюк О. С., Устенко С. В. Моделювання економічної динаміки : навч. посіб. Київ : ЕКМО, 2003. 128 с.
3. Лисенко Ю. Г., Петренко В. Л., Тимохін В. Н., Філіппов А. В. Економічна динаміка : навч. посіб. Донецьк : ДонГУ, 2000. 176 с.
4. Пономаренко К. А. Основи економічної кібернетики. Київ : КНТЕУ, 2002. 432 с.
5. Вітлінський В. В. Моделювання економіки. Київ, 2007. 406 с.
6. Новожілова М. В., Коюда П. М., Чуб І. А. Моделювання економічної динаміки : навч.-метод. посіб. для сам. роб. Харків : ХДТУБА, 2006. 140 с.
7. Коляда Ю. В. Адаптивна парадигма моделювання економічної динаміки : монографія. Київ : КНЕУ, 2011. 297 с.
8. Gleick, James. Chaos: Making a New Science. New York, N.Y., U.S.A.: Penguin, 1988.
9. Mandelbrot, Benoit B. Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk : Selecta Volume E. New York: Springer, 1997.
10. Stiven L. Brunton, Jose Nathan Kutz Data-driven science and engineering : machine learning, dynamical systems, and control. Cambridge, United Kingdom ; New York, NY : Cambridge University Press, 2019.
11. Michael J. Radzicki System Dynamics and Its Contribution to Economics and Economic Modeling. 2014.

Навчально-методичне видання
(*українською мовою*)

Лось Віта Олексіївна
Максишко Наталія Костянтинівна
Макаренко Олена Іванівна

МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

Навчально-методичний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Економіка» освітньо-професійної програми «Економічна кібернетика»

Рецензент *М.М .Іванов*
Відповідальний за випуск *Н.К. Максишко*
Коректор *В.В. Рянічева*