МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

С.М. Гребенюк, Н.М. Д’яченко,
М.І. Клименко, І.В. Красікова,
О.О. Тітова, І.Г. Ткаченко

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ – 1:
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми
«Математика»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол №__ від _______ 2024 р.

Запоріжжя
2024

УДК: 517.2/.3 (075.8)
М34

Математичний аналіз – 1: Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика» / С. М. Гребенюк, Н. М. Д'яченко, М. І. Клименко, І. В. Красікова, О. О. Тітова, І. Г. Ткаченко. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2024. 480 с.

Посібник охоплює один із найважливіших розділів математичного аналізу – диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної та має на меті сприяти студентам у оволодінні теоретичним матеріалом розділу та практичними навичками при розв'язанні відповідних задач.

Цей посібник містить теоретичну частину, практикум із розв'язання задач, варіанти індивідуальних завдань із прикладом виконання такого завдання, а також питання для самоконтролю і список рекомендованої літератури.

Посібник призначений для студентів спеціальності «Математика», а також може бути використаний студентами всіх спеціальностей математичного факультету для поглибленого вивчення математичного аналізу.

Рецензент
Є.В. Панасенко, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики

Відповідальний за випуск
С.М. Гребенюк, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики

ЗМІСТ

Частина 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Частина 2. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

ВСТУП

Математичний аналіз як наука, що досліджує функціональні залежності, є методологічною основою більшості сучасних математичних дисциплін, тому оволодіння його основами є невід'ємною складовою частиною підготовки не тільки майбутніх математиків, але й фахівців у галузях науки та техніки, де успішна діяльність пов'язана з необхідністю застосування сучасних математичних знань. Потреби практики та бурхливий розвиток сучасних інформаційних технологій вимагають постійного вдосконалення математичних методів досліджень, розробки питань математичного забезпечення. Це обумовлює необхідність оволодіння студентами фундаментальними знаннями із сучасного математичного аналізу. Опанування його основами створює умови, необхідні для вивчення студентами математичних спеціальностей інших фахових дисциплін.

Запропонований навчальний посібник містить стислий, але достатньо повний виклад змісту одного з основних розділів математичного аналізу – диференціального та інтегрального числення функції однієї змінної. Він призначений для надання допомоги студентам першого курсу денної та заочної форм навчання при виконанні домашніх завдань, підготовці до занять, контрольних робіт, заліків та іспитів у процесі їх самостійної роботи.

Хотілося б зауважити, що автори мали намір якнайбільше наблизити стиль посібника до стилю проведення занять із математичного аналізу в Запорізькому національному університеті, зберігаючи традиції кафедри математичного аналізу. Для цього застосовувалися позначення, логічні операції, предикати і квантори – такі, які використовуються викладачами і студентами під час занять.

Автори сподіваються, що посібник надасть майбутнім фахівцям-математикам суттєву допомогу в оволодінні знаннями з однієї з фундаментальних математичних дисциплін – математичного аналізу – та буде ефективно використаний ними при вивченні курсу.

Матеріали, викладені у посібнику, пройшли апробацію через впровадження в освітній процес навчально-методичних розробок[1], двом з яких було надано гриф Міністерства освіти і

---

[1] Див. список використаних джерел

науки України. До змісту навчальних посібників внесені зміни та доповнення відповідно до отриманого досвіду їхнього використання.

Відповідно до освітньо-професійної програми «Математика», дисципліна «Математичний аналіз – 1» є обов'язковою компонентною освітньо-професійної програми та належить до циклу професійної підготовки спеціальності.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Математичний аналіз - 1» є засвоєння знань з основ класичного аналізу дійсних функцій однієї змінної; набуття навичок та умінь дослідження властивостей числових послідовностей, обчислення границь, дослідження властивостей функцій однієї змінної, їх диференціювання та інтегрування.

Основними **завданнями** вивчення дисципліни «Математичний аналіз - 1» є:

- усвідомити внутрішню логіку розвитку поняття числа, функції, теорії границь, теорії диференціального та інтегрального числення функцій однієї змінної;
- набути вмінь та навичок щодо застосування понять та фактів математичного аналізу до розв'язання конкретних задач;
- оволодіти базою для подальшого вивчення дисциплін професійного спрямування: диференціальних рівнянь, комплексного аналізу, теорії ймовірностей, функціонального аналізу, чисельних методів, рівнянь математичної фізики та інших.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен набути таких результатів навчання (знання, уміння тощо) та компетентностей:

- Здатність розв'язувати складні задачі та практичні проблеми у математиці або у процесі навчання, що передбачає застосування теорій та методів математики, статистики й комп'ютерних технологій і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.
- Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
- Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності.
- Здатність формулювати проблеми математично та в символьній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.
- Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі.
- Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок.
- Здатність до кількісного мислення.
- Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.
- Знати принципи modus ponens (правило виведення логічних висловлювань) та modus tollens (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень.
- Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями.
- Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей.
- Знати теоретичні основи і застосовувати методи математичного аналізу для дослідження функцій однієї та багатьох дійсних змінних:
- Розв'язувати типові задачі математичного аналізу, алгебри, диференціальних та інтегральних рівнянь, оптимізації за допомогою чисельних методів.

Курс «Математичний аналіз-1» є базою для вивчення курсів: «Математичний аналіз-2», «Практикум з розв'язання задач», «Диференціальні рівняння», «Теорія ймовірностей». У кожному з цих курсів застосовуються властивості функцій однієї дійсної змінної, диференціальне та інтегральне числення.

Частина 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Розділ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

§ 1. Основи диференціального числення

1. Означення похідної функції в точці

Функцію будемо розглядати на інтервалі $D(f)=(a;b)$[1]. Розглянемо точку $x_0\in(a;b)$ та такий приріст аргументу Δx в точці x_0, що $x_0+\Delta x\in(a;b)$. Цьому приросту аргументу відповідає приріст функції в точці x_0:

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Тоді різницеве відношення $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ в точці x_0 утворює функцію, яка залежить від Δx, оскільки кожному значенню $\Delta x\in(a-x_0;b-x_0)\setminus\{0\}$ відповідає єдине значення різницевого відношення $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Точка $\Delta x=0$ є граничною точкою[2] множини $(a-x_0;b-x_0)\setminus\{0\}$, тому коректно розглядати границю різницевого відношення в точці $\Delta x=0$, а саме $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Така границя може існувати або не існувати. Наприклад, для неперервної в точці x_0 функції під знаком такої границі буде невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ згідно з таким означенням.

🗁**Означення 1.1** *(неперервності функції через прирости).* Функцію $f(x)$ називають неперервною в точці $x_0 \overset{def}{\Leftrightarrow}$ нескінченно малому приросту аргументу в точці x_0 відповідає нескінченно малий приріст функції $\Delta f(x_0)$ в цій точці, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$. (🗐 Повторіть усі означення неперервності функції в точці [**2**, с. 140]!)

🗁**Означення 1.2** *(похідної функції в точці). Похідною функції* $f(x)$ *в точці* x_0 називають границю різницевого відношення $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ (за умови її існування). Позначення: $f'(x_0)$. Тобто

---

[1] Замість інтервалу (a,b) можна розглядати будь-яку щільну в собі множину A, тобто таку множину, що будь-який окіл довільної точки x_0 множини A містить хоча б одну точку із A, відмінну від x_0.

[2] Граничною точкою множини A називають таку точку x_0, в будь-якому околі якої лежить хоча б одна точка множини A, відмінна від x_0.

☝ $$f'(x_0) \overset{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1.1}$$

Якщо в кожній точці $x \in (a,b)$ існує похідна $f'(x)$ функції $f(x)$, то похідна функції являє собою функцію, що залежить від x.

Приклад 1.1. Розглянемо функцію $f(x) \equiv c$, де $x \in \mathbb{R}$, тоді

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Приклад 1.2. Для функції $f(x) = x$, де $x \in \mathbb{R}$, маємо

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

🗀**Означення 1.3** *(односторонніх похідних функції). Лівою (правою) похідною* функції $f(x)$ в точці x_0 називають границю в точці $\Delta x = 0$ зліва (справа) різницевого відношення $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Позначення: $f'_+(x_0)$ для правої похідної і $f'_-(x_0)$ для лівої. Тобто

$$f'_\pm(x_0) \overset{def}{=} \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

З *критерію існування границі функції в точці*, що виражається через односторонні границі (🗐 повторіть [**2**, с.142]!), а також з означень 1.2 і 1.3 випливає таке твердження.

Твердження 1.1. Розглянемо точку $x_0 \in D(f)$

$$\exists f'(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \exists f'_+(x_0) \wedge \exists f'_-(x_0) \wedge f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

(✍ доведення здійснити самостійно!)

Приклад 1.3. Розглянемо границю різницевого відношення для функції $f(x) = |x|$ в точці $x_0 = 0$:

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1;$$

$$f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow \nexists f'(0).$$

2. Геометричний зміст похідної функції в точці

Розглянемо графік функції $y = f(x)$ на інтервалі (a,b).

Нехай точка $x \in (a;b)$, а Δx – такий приріст аргументу в точці *x*, що $x + \Delta x \in (a;b)$, тоді точки $M(x, f(x))$ і $P(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ належать графіку цієї функції.

🗀**Означення 1.4** *(дотичної до графіка функції). Дотичною до графіка функції $y = f(x)$ в точці M* називають граничне положення січної MP при прямуванні точки P до точки M (тобто при $\Delta x \to 0$), якщо таке граничне положення існує (рис. 1.1).

Тут пряма MS є граничним положенням січної MP, якщо при переміщенні точки P по графіку $y = f(x)$ до точки M кут $\angle PMS$ прямує до нуля.

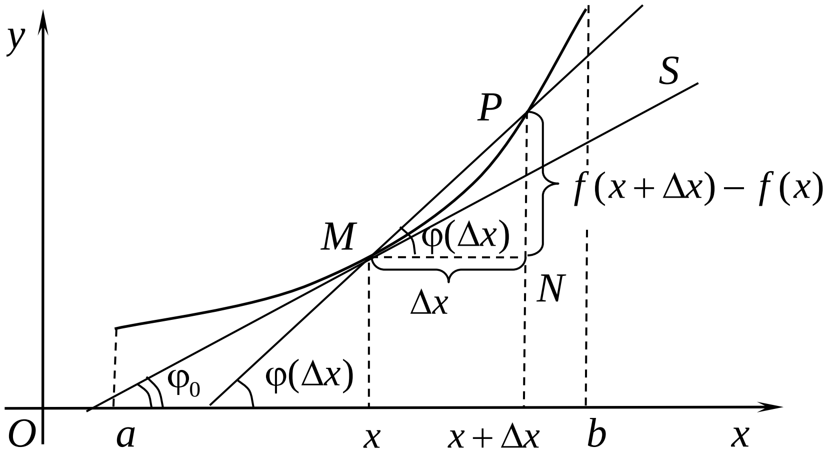


Рис. 1.1.

Оскільки точка M на графіку є фіксованою, то точка P однозначно визначається приростом Δx. Отже, кут $\angle PMN$ нахилу січної MP до осі Ox є функцією аргументу Δx. Позначимо цю функцію $\varphi(\Delta x)$.

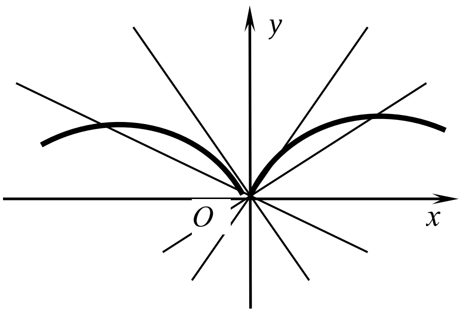


Рис. 1.2.

Дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці M існує, якщо $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x)$. На рис. 1.1 $\varphi_0 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x)$. Дотичною в цьому випадку виступає пряма MS. На рис. 1.2 в точці O $\nexists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x)$. В цьому випадку не існує дотичної до графіка функції в точці O.

Теорема 1.1 *(геометричний зміст похідної).* Якщо існує похідна функції $f(x)$ в точці $x,$ то:

1) в точці $M(x, f(x))$ існує дотична до графіка цієї функції;
2) кутовий коефіцієнт (тангенс кута нахилу дотичної до додатного напрямку осі OX) дорівнює похідній функції в точці $x,$ тобто

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = f'(x).$$

Доведення. Доведемо, що $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x)$, тобто, що в точці $M(x, f(x))$ існує дотична до графіка функції $f(x)$.

На рис. 1.1 в $\triangle MNP$ $(\angle N = 90°)$ маємо

$$\operatorname{tg}\varphi(\Delta x) = \frac{PN}{MN} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Rightarrow \varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Доведемо, що $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{arctg}\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Відомо, що $\exists f'(x) \Rightarrow \exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Тоді функція $g(t)=\mathrm{arctg}\, t$ неперервна при $t \in \mathbb{R}$, тому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{arctg} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \mathrm{arctg}\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \right) =$$
$$= \mathrm{arctg}(f'(x)).$$

Ми довели, що дотична в точці $M(x, f(x))$ існує, а оскільки її кут нахилу $\varphi_0 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x)$, то

$$\varphi_0 = \mathrm{arctg}(f'(x)) \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\, \varphi_0 = f'(x). \ \blacksquare$$

З аналітичної геометрії [1] відомо, що рівняння прямої, що проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$ та має кутовий коефіцієнт k, має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$, її нормаль – $y - y_0 = -\dfrac{1}{k}(x - x_0)$. Тоді, якщо функція $f(x)$ має похідну в точці x_0, то з геометричного змісту похідної отримаємо, що $k = f'(x_0)$, а *рівняння дотичної і нормалі до графіка функції в точці* $M(x_0, f(x_0))$ будуть мати вигляд:

$$\boxed{\begin{aligned} & y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0); \\ & y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \end{aligned}}$$

3. Механічний та економічний зміст похідної

Розглянемо механічний зміст похідної. Нехай функція шляху матеріальної точки, що рухається прямолінійно, залежно від часу $t \in [0; T]$ має вигляд $s(t)$, а $t_0 \in [0; T], \quad t_0 + \Delta t \in [0; T]$. Тоді миттєва швидкість у момент часу t_0 дорівнює

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0),$$

якщо така границя існує. Таким чином, отримуємо **механічний зміст похідної**: похідна від функції шляху в момент часу t_0 – це миттєва швидкість в цей момент часу.

Розглянемо **економічний зміст похідної**. Нехай функція $y = y(t)$ виражає кількість виробленої продукції y за час t. Необхідно знайти продуктивність праці в момент t_0. За період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ кількість виробленої продукції зміниться від значення $y_0 = y(t_0)$ до значення $y_0 + \Delta y = y(t_0 + \Delta t)$. Тоді середня продуктивність праці за цей період $z_{cp} = \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$. Продуктивність праці в момент t_0 можна визначити як граничне значення середньої продуктивності за період часу

---

[1] Аналітична геометрія: векторна алгебра. Площини та прямі : навч. посіб. для студентів освіт. рівня "бакалавр" напр. підгот. "Математика" / І.В. Зіновєєв, А.К. Приварников, Н.І.-В. Манько, О.Г Спиця. Запоріжжя : ЗНУ, 2015. 84 с.

від t_0 до $t_0+\Delta t$ при $\Delta t \to 0$, тобто $z=\lim\limits_{\Delta t\to 0} z_{cp}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$. Отже, похідна функції обсягу виробленої продукції за часом $y'(t_0)$ є продуктивністю праці в момент t_0.

4. Правила диференціювання

Операцію знаходження похідної будемо називати *диференціюванням.*

Твердження 1.2. Якщо функція $f(x)$ має похідну в точці x_0, то ця функція в точці x_0 є неперервною.

Доведення. Якщо існує похідна функції $f(x)$ в точці x_0, то згідно з означенням виконується рівність

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)=\alpha(\Delta x),$$

де $\alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала функція в точці $\Delta x=0$, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. Тоді приріст функції $f(x)$ в точці x_0 можна подати співвідношенням

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\Delta x\cdot\alpha(\Delta x).$$

Звідси отримаємо, що $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0 \Rightarrow f(x)$ – неперервна в точці x_0 (нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції в точці x_0, а це означає, що функція неперервна в точці x_0). ■

Зауваження 1.1. Зворотне твердження невірне. Наприклад, функція $f(x)=|x|$ – неперервна в точці $x_0=0$, хоча вона не має похідної в цій точці (див. приклад 1.3).

Теорема 1.2 *(арифметичні операції над похідними).*

$$\left.\begin{matrix}\exists u'(x)\\ \exists v'(x)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}1)\ \exists\big(u(x)\pm v(x)\big)',\\ 2)\ \exists\big(u(x)\cdot v(x)\big)',\\ 3)\ \exists\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)',\ \text{якщо } v(x)\neq 0.\end{cases}$$

При цьому вірні наступні співвідношення:

$$\boxed{\begin{aligned}&\big(Cu(x)\big)'=Cu'(x),\\ &\big(u(x)\pm v(x)\big)'=u'(x)\pm v'(x),\\ &\big(u(x)\cdot v(x)\big)'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x),\\ &\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}\end{aligned}}$$

Доведення. Доведемо формулу для похідної суми та різниці функцій.

$$\left(u(x)\pm v(x)\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)\right)-\left(u(x)\pm v(x)\right)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right).$$

Границя кожного різницевого відношення існує, оскільки існують похідні $u'(x)$ і $v'(x)$, тому [**2**, с. 144] границя суми/різниці дорівнює сумі/різниці границь. Отже, використовуючи означення похідної, отримаємо:

$$\left(u(x)\pm v(x)\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = u'(x)\pm v'(x).$$

Доведемо формулу похідної добутку функцій. Застосуємо означення похідної та виконаємо елементарні перетворення:

$$\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)+u(x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[v(x+\Delta x)\cdot\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right].$$

За умовою

$$\exists u'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\wedge\exists v'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}.$$

Оскільки $\exists v'(x)$, то за твердженням 1.2 функція $v(x)$ неперервна в точці x, тому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x)$. Отже, ми можемо застосувати *теорему про арифметичні дії над границями* [**2**, с. 144]. В результаті отримаємо:

$$\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} =$$
$$= u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x).$$

Доведемо формулу похідної частки. Як зазначалося, функція $v(x)$ неперервна в точці x. Внаслідок *теореми про сталість знаку неперервної в точці x функції* [**2**, с. 156] отримаємо, що при $v(x)\neq 0$ матимемо $v(x+\Delta x)\neq 0$ для всіх достатньо малих Δx. Отже, можна записати таке:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot v(x+\Delta x)\cdot v(x)} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot v(x+\Delta x)\cdot v(x)} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)\cdot\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}-u(x)\cdot\dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}.$$

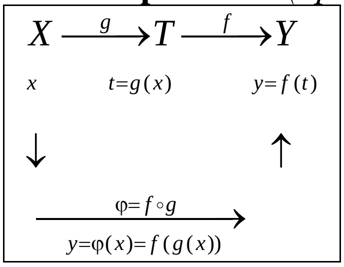
Далі так само, як і вище, скористаємося теоремою про арифметичні дії над границями, твердженням 1.2 щодо неперервності функції в точці x, припущенням про існування похідних функцій $u(x)$ і $v(x)$ у тій же точці. Отримаємо:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{v(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} - u(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{v(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)} =$$

$$= \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$

Формулу $\left(Cu(x)\right)' = Cu'(x)$ вивести *самостійно* ✍. ■

Теорема 1.3 *(про похідну складеної функції).*



Якщо функція $t = g(x)$ має похідну в точці $x \in X$, а функція $y = f(t)$ має похідну у відповідній точці $t = g(x) \in T$, тоді складена функція $y = \varphi(x) = f(g(x))$ має похідну в точці x, і має місце формула

$$☝\ \varphi'(x) = \left(f\left[g(x)\right]\right)' = f'(t)\cdot g'(x) = f'\left[g(x)\right]\cdot g'(x).$$

Доведення. Функція $g(x)$ задана на множині X. Розглянемо точку $x \in X$ та такий приріст аргументу Δx в точці x, що $x + \Delta x \in X$. Цьому приросту аргументу відповідає приріст функції в точці x:

$$\Delta t = \Delta g(x) = g(x+\Delta x) - g(x).$$

Позначимо $t = g(x) \in T$. З попереднього випливає, що $t + \Delta t \in T$. Приросту Δt аргументу в точці t відповідає приріст функції $y = f(t)$, що має вигляд:

$$\Delta y = \Delta f(t) = f(t+\Delta t) - f(t).$$

За означенням складеної функції, враховуючи, що $t = g(x)$, а $y = \varphi(x) = f(g(x))$, отримаємо приріст складеної функції в точці x:

$$\Delta y = \Delta\varphi(x) = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x).$$

Оскільки функція $y = f(t)$ має похідну в точці t, то

$$\Delta y = f'(t)\cdot\Delta t + \Delta t\cdot\alpha(\Delta t),$$

де $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\alpha(\Delta t) = 0$. Поділимо обидві частини останньої рівності на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(t)\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x} + \frac{\Delta t}{\Delta x}\cdot\alpha(\Delta t). \qquad (1.2)$$

Оскільки функція $t = g(x)$ має похідну в точці x, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta t}{\Delta x} = g'(x)$, а з твердження 1.2 випливає неперервність цієї функції в точці x, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta t = 0$. Виконаємо граничний перехід у рівності (1.2) з урахуванням вищесказаного:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(t)\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta x}}_{=g'(x)} + \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta x}}_{=g'(x)}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\alpha(\Delta t)}_{=0} = f'(t)\cdot g'(x).$$

Таким чином, $\exists \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(t)\cdot g'(x)$, тому, враховуючи, що $\Delta y=\Delta\varphi(x)=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$ – приріст складеної функції $y=\varphi(x)=f(g(x))$ в точці x, отримаємо:

$$\varphi'(x)=f'(t)\cdot g'(x).\ \blacksquare$$

Теорема 1.4 *(про похідну оберненої функції).* Якщо функція $f(x)$, що визначена на відрізку $[a;b]$[1], строго зростає, неперервна на $[a;b]$, має в усіх точках інтервалу $(a;b)$ похідну $f'(x)\neq 0$, тоді

1) існує обернена функція $g(y)=f^{-1}(y)$, що визначена, зростає, неперервна на відрізку $\left[f(a);f(b)\right]$;

2) у будь-якій точці $y=f(x)$ інтервалу $\left(f(a);f(b)\right)$ обернена функція $f^{-1}(y)$ має похідну, що обчислюється за формулою:

$$☝\ \left(f^{-1}(y)\right)'=\frac{1}{f'(x)}.$$

Аналогічна теорема має місце для спадної функції.

Доведення. Пункт 1) випливає з теореми про існування оберненої функції до монотонної неперервної на відрізку $[a,b]$ функції (🗐 повторіть теорему [**2**, с. 160]!).

Якщо $x=g(y)$ – обернена до $y=f(x)$, то приросту аргументу Δy функції $g(y)$ в точці y (тут $y\in\left(f(a);f(b)\right), y+\Delta y\in\left(f(a);f(b)\right)$) відповідає приріст функції $\Delta x=\Delta g(y)=g(y+\Delta y)-g(y)$. Тоді, за означенням оберненої функції, Δy – це приріст функції $f(x)$ в точці $x=g(y)$, що відповідає приросту аргументу Δx.

Оскільки $g(y)$ – неперервна в точці y, то при $\Delta y\to 0$ маємо $\Delta x\to 0$. Якщо $\Delta y\neq 0$, то $y+\Delta y\neq y$, тобто $y+\Delta y>y$ або $y+\Delta y<y$. Завдяки зростанню функції $g(y)$, одержимо

$$\left.\begin{matrix} g(y+\Delta y)>g(y), \\ g(y+\Delta y)<g(y), \end{matrix}\right] \Rightarrow\ g(y+\Delta y)\neq g(y)\ \Rightarrow\ \Delta x\neq 0.$$

Отже, якщо $\Delta y\to 0$, то $\Delta x\to 0$, а також якщо $\Delta y\neq 0$, то $\Delta x\neq 0$. Тому можливе здійснення таких граничних переходів:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\left\|\begin{matrix}\Delta y\neq 0\Rightarrow \\ \Delta x\neq 0\end{matrix}\right\|=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}=\left\|\begin{matrix}\Delta y\to 0\Rightarrow \\ \Delta x\to 0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}_{=f'(x)}}=\frac{1}{f'(x)},$$

тобто

$$\exists \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{f'(x)}\ \Rightarrow\ g'(y)=\frac{1}{f'(x)}\ \Rightarrow\ \left(f^{-1}(y)\right)'=\frac{1}{f'(x)}.\ \blacksquare$$

---

[1] Замість відрізка $[a;b]$ можна розглядати інтервал $(a;b)$, півінтервал, півпряму, всю числову пряму, а також окіл деякої точки.

Похідні від елементарних функцій (таблиця похідних)

$\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$, $x>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$;	$C'=0$, $(x)'=1$, $\left(x^{2}\right)'=2x$, $\left(x^{3}\right)'=3x^{2}$;
$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^{2}}$, $x\neq 0$;	$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$; $\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}}$, $x\neq 0$;
$(a^{x})'=a^{x}\ln a$, $0<a\neq 1$;	$(e^{x})'=e^{x}$;
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, $x>0$;	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, $x>0, 0<a\neq 1$;
$(\sin x)'=\cos x$;	$(\cos x)'=-\sin x$;
$(\mathrm{ctg}\,x)'=-\dfrac{1}{\sin^{2}x}$, $x\neq\pi n, n\in\mathbb{Z}$;	$(\mathrm{tg}\,x)'=\dfrac{1}{\cos^{2}x}$, $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$;
$(\mathrm{sh}\,x)'=\mathrm{ch}\,x$;	$(\mathrm{ch}\,x)'=\mathrm{sh}\,x$;
$(\mathrm{th}\,x)'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^{2}x}$;	$(\mathrm{cth}\,x)'=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^{2}x}$, $x\neq 0$;
$(\mathrm{arctg}\,x)'=\dfrac{1}{1+x^{2}}$;	$(\mathrm{arcctg}\,x)'=-\dfrac{1}{1+x^{2}}$;
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$, $\lvert x\rvert<1$;	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$, $\lvert x\rvert<1$

Доведення формул таблиці похідних

Отримаємо спочатку декілька формул для похідних, використовуючи означення, першу та другу істотні границі та наслідки з них (див. додаток А і [**2**, с. 127-133]). Після цього доведемо формули таблиці за допомогою теорем про похідну складеної та оберненої функцій.

1) Використаємо означення для отримання першої формули. Оскільки $\alpha\in\mathbb{R}$, то для коректності визначення степеневої функції x^{α} припустимо, що $x>0$. Нехай також $x+\Delta x>0$, тоді

$$\left(x^{\alpha}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x+\Delta x\right)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{\alpha}\cdot\left(\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}\cdot x}=x^{\alpha-1}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\dfrac{\Delta x}{x}}.$$

Впишемо окремо границю, позначаючи її через A:

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\dfrac{\Delta x}{x}}=\left\|\begin{matrix}u=\dfrac{\Delta x}{x},\\ u\to 0\end{matrix}\right\|=\lim_{u\to 0}\frac{\left(1+u\right)^{\alpha}-1}{u}.$$

Позначимо $q=\left(1+u\right)^{\alpha}-1$, тоді $q\to 0$ і

$$q+1=\left(1+u\right)^{\alpha},$$

$$\ln(q+1)=\alpha\ln\left(1+u\right),$$

$$\frac{\alpha\ln\left(1+u\right)}{\ln(q+1)}=1.$$

Звідси

$$\frac{\left(1+u\right)^{\alpha}-1}{u}=\frac{q}{u}\cdot 1=\frac{q}{u}\cdot\frac{\alpha\ln\left(1+u\right)}{\ln(q+1)}=\frac{q}{\ln(q+1)}\cdot\frac{\ln\left(1+u\right)}{u}\cdot\alpha.$$

Підставимо отримане під знак границі, яку позначено через A:

$$A=\underbrace{\lim_{q\to 0}\frac{q}{\ln(q+1)}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{u\to 0}\frac{\ln\left(1+u\right)}{u}}_{=1}\cdot\alpha=\alpha.$$

Отже, $\left(x^{\alpha}\right)'=x^{\alpha-1}\cdot A=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$.

2) Для похідної показникової функції маємо:

$$\left(a^{x}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^{x}}{\Delta x}=a^{x}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}}_{=\ln a}=a^{x}\cdot\ln a.$$

3) Знайдемо формулу похідної логарифмічної функції, використовуючи означення:

$$\left(\log_{a}x\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_{a}\left(x+\Delta x\right)-\log_{a}x}{\Delta x}=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_{a}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}}_{\to 1/\ln a}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}.$$

4) За означенням

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(x+\Delta x\right)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\underbrace{\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}_{\to\cos x}\right)=\cos x.$$

5) За означенням

$$(\operatorname{tg}x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\sin\left(x+\Delta x\right)}{\cos\left(x+\Delta x\right)}-\frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(x+\Delta x\right)\cos x-\sin x\cos\left(x+\Delta x\right)}{\Delta x\cos\left(x+\Delta x\right)\cos x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(x+\Delta x-x\right)}{\Delta x\cos\left(x+\Delta x\right)\cos x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\underbrace{\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos\left(x+\Delta x\right)}}_{\to 1/\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{1}{\cos^{2}x}.$$

6) Одержимо формулу похідної степеневої функції іншим способом, застосовуючи отриману раніше похідну $\left(e^x\right)' = e^x$, а також теорему про похідну від складеної функції. Нехай $x > 0$, тоді

$$\left(x^\alpha\right)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

7) Використаємо похідну $(\sin x)' = \cos x$ та теорему про похідну від складеної функції:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x.$$

8) Отримаємо похідну від $\operatorname{tg} x$ іншим способом, застосовуючи формули $(\sin x)' = \cos x$ і $(\cos x)' = \sin x$ та формулу похідної частки:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

9) Функція $y = \arcsin x$ є оберненою до $x = \sin y$ на відрізку $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. На цьому відрізку функція $x = \sin y$ є неперервною та зростаючою, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, а $(\sin y)' = \cos y$, тому функція $y = \arcsin x$ неперервна, зростаюча на відрізку $-1 \le x \le 1$, а її похідна на інтервалі $-1 < x < 1$, згідно з теоремою про похідну від оберненої функції, дорівнює

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Перед коренем обрано знак «+», оскільки функція $\cos y$ при $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ приймає додатні значення.

10) Функція $y = \ln x$ є оберненою до $x = e^y$ при $y \in \mathbb{R}$. На $\mathbb{R}$ функція $x = e^y$ є неперервною і зростаючою з множиною значень $x \in (0; +\infty)$, а $\left(e^y\right)' = e^y$, тому функція $y = \ln x$ є також неперервною та зростаючою на промені $x \in (0; +\infty)$, а її похідна, згідно з теоремою про похідну від оберненої функції, дорівнює

$$(\ln x)' = \frac{1}{\left(e^y\right)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

11) Функція $y = \operatorname{arctg} x$ є оберненою до $x = \operatorname{tg} y$ на інтервалі $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. На цьому інтервалі функція $x = \operatorname{tg} y$ є неперервною та зростаючою з множиною значень $x \in \mathbb{R}$, а $(\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{\cos^2 y}$, тому функція $y = \operatorname{arctg} x$ – неперервна,

зростаюча на прямій $x \in \mathbb{R}$, а її похідна, згідно з теоремою про похідну від оберненої функції, дорівнює

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Інші формули можна отримати самостійно ✍.

Логарифмічне диференціювання

Якщо додатна функція $y = f(x)$, що має похідну в точці x, визначена як добуток великої кількості функцій або є степенево-показниковою функцією, то можна застосовувати для обчислення похідної від неї логарифмічне диференціювання. А саме – обидві частини рівності

$$y = f(x)$$

логарифмують

$$\ln y = \ln\left[f(x)\right],$$

праву частину рівності перетворюють, застосовуючи властивості логарифмів. Після цього обчислюють похідну від обох частин перетвореної рівності, враховуючи, що $\ln\left[f(x)\right]$ – складена функція, а $y = f(x)$ – її проміжний аргумент, тому

$$\left(\ln\left[f(x)\right]\right)' = \frac{1}{y} \cdot y'.$$

Величину, яку визначено останньою формулою, називають логарифмічною похідною.

Приклад 1.4. Обчислимо *похідну від степенево-показникової функції*

$$y = \left[u(x)\right]^{v(x)}.$$

Область визначення функції: $\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}$. Зробимо зазначені вище перетворення:

$$\ln y = v(x) \ln u(x);$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x);$$

$$y' = y\left[v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)\right].$$

Підставимо замість y функцію $y = \left[u(x)\right]^{v(x)}$, отримаємо

$$\boxed{\left(\left[u(x)\right]^{v(x)}\right)' = \left[u(x)\right]^{v(x)} \cdot \left[v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)\right]}$$

Приклад 1.5. Розглянемо функцію

$$f(x)=\frac{a(x)\cdot b(x)\cdot c(x)}{d(x)\cdot h(x)\cdot g(x)}.$$

Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що в точці x

$$a(x)>0, b(x)>0, c(x)>0, d(x)>0, h(x)>0, g(x)>0.$$

Застосуємо до функції $f(x)$ логарифмічне диференціювання:

$$\ln f=\ln a+\ln b+\ln c-\ln d-\ln h-\ln g,$$

$$\frac{1}{f}f'=\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}-\frac{d'}{d}-\frac{h'}{h}-\frac{g'}{g},$$

отже,

$$\left(\frac{a\cdot b\cdot c}{d\cdot h\cdot g}\right)'=\frac{a\cdot b\cdot c}{d\cdot h\cdot g}\cdot\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}-\frac{d'}{d}-\frac{h'}{h}-\frac{g'}{g}\right).$$

5. Диференційовність функцій. Диференціал функції

Якщо існує похідна функції $f(x)$ в точці x_0, то, згідно з означенням, виконується рівність

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)=\alpha(\Delta x),$$

де $\alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала функція в точці $\Delta x=0$, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. Тоді приріст функції $f(x)$ в точці x_0 можна подати за допомогою співвідношення:

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\Delta x\cdot\alpha(\Delta x). \tag{1.3}$$

Оскільки $f'(x_0)$ є сталою у фіксованій точці x_0, то позначимо $A=f'(x_0)$. Функція $\Delta x\cdot\alpha(\Delta x)$ є нескінченно малою в точці $\Delta x=0$ більш високого порядку за Δx, тобто $\Delta x\cdot\alpha(\Delta x)=o(\Delta x)$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot\alpha(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0 \quad\Rightarrow\quad \Delta x\cdot\alpha(\Delta x)=o(\Delta x)$$

(🗐 повторити означення $o(\gamma)$ [**2**, с. 134]!). Тому (1.3) можна переписати:

$$\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x). \tag{1.4}$$

🗁**Означення 1.5** *(диференційовності й диференціала).* Якщо для деякого числа A приріст функції $y=f(x)$ в точці x_0 можна подати у вигляді (1.4), то:

1) функцію $f(x)$ називають *диференційовною в точці* x_0;

2) головну лінійну частину приросту функції $A\cdot\Delta x$ називають *диференціалом функції* $f(x)$ *в точці* x_0 та позначають $df(x_0)$ (або $dy(x_0)$), тобто

$$df(x_0)\overset{def}{=}A\cdot\Delta x.$$

Введемо позначення $dx=\Delta x$, тоді $df(x_0)=A\cdot dx$.

Із зауважень, наданих перед означенням 1.5, випливає, що функція, яка має похідну в точці, є в цій точці диференційовною. Справедливим є також обернене твердження, тому має місце така теорема.

Теорема 1.5 *(критерій диференційовності функції)***.** Функція $f(x)$ є диференційовною в точці x_0 тоді й лише тоді, коли вона в цій точці має похідну, крім того стала A в головній лінійній частині приросту функції дорівнює $f'(x_0)$.

Доведення. *Достатність* було доведено вище.

Необхідність. Поділимо обидві частини співвідношення (1.4) на Δx:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

здійснимо граничний перехід при $\Delta x \to 0$, отримаємо $f'(x) = A$. ■

Нехай функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, Тоді її приріст в цій точці представляється рівністю (1.4). Підставимо знайдене в теоремі 1.5 значення сталої A в (1.4):

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

Отже, головна лінійна частина приросту дорівнює $f'(x_0) \cdot \Delta x$. Звідки отримуємо формулу для обчислення диференціала функції в точці x_0:

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$$

Тоді

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

Вираз в правій частині останньої рівності застосовують для позначення похідної, тоді його читають: «де еф по де ікс в точці x_0».

Функцію, що є диференційовною в кожній точці інтервалу $(a;b)$, називають *диференційовною на інтервалі* $(a;b)$.

6. Застосування диференціала для наближених обчислень

Нехай $f'(x_0) \neq 0$. Абсолютна похибка наближення $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$:

$$\left|\Delta f(x_0) - df(x_0)\right| = \left|\Delta f(x_0) - f'(x_0) \cdot \Delta x\right| = o(\Delta x);$$

відносна похибка:

$$\left|\frac{\Delta f(x_0) - df(x_0)}{\Delta f(x_0)}\right| = \left|\frac{o(\Delta x)}{f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)}\right| = \left|\frac{\overset{\to 0}{\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}}}{f'(x_0) + \underset{\to 0}{\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}}}\right| = \alpha(\Delta x),$$

де $\alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала функція в точці $\Delta x = 0$, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Приклад 1.6.

1) Розглянемо функцію $f(x) = (1+x)^\alpha$ в точці $x_0 = 0$. Тоді

$$\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = (1 + \Delta x)^\alpha - 1,$$
$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f'(0) = \alpha, \quad dx = \Delta x,$$
$$df(0) = f'(0)dx = \alpha\Delta x,$$

$$\Delta f(0) \approx df(0),$$

$$\boxed{(1+\Delta x)^{\alpha} \approx 1+\alpha\cdot\Delta x}$$

2) Застосуємо отриману формулу для конкретних значень. Обчислимо $\sqrt{1{,}1}$. Тоді $\alpha = 1/2, \quad \Delta x = 0{,}1$; тому

$$\sqrt{1{,}1} = \sqrt{1+0{,}1} \approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}1 = 1{,}05 .$$

3) Аналогічно можна отримати такі наближені формули:

$$\boxed{\begin{array}{ll}
e^{\Delta x}-1 \approx \Delta x, & \\
a^{\Delta x}-1 \approx \Delta x \ln a, & \\
\ln(1+\Delta x) \approx \Delta x, & \\
\log_a(1+\Delta x) \approx \dfrac{\Delta x}{\ln a}, & \\
\sin\Delta x \approx \Delta x, & \mathrm{tg}\,\Delta x \approx \Delta x, \\
1-\cos\Delta x \approx \dfrac{1}{2}\left(\Delta x\right)^2, & \\
\arcsin\Delta x \approx \Delta x, & \mathrm{arctg}\Delta x \approx \Delta x
\end{array}}$$

(✍ Вивести формули самостійно!)

7. Властивості диференціалів

Мають місце такі формули:

☝

$d(u \pm v) = du \pm dv$,	$d(uv) = udv + vdu$,	$d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$

Дійсно, з формул $\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x)$, $df(x) = f'(x)\cdot dx$ випливає:

$$d\left(u(x) \pm v(x)\right) = \left(u(x) \pm v(x)\right)' dx = \left(u'(x) \pm v'(x)\right)dx =$$
$$= u'(x)\,dx \pm v'(x)\,dx = d(u(x)) \pm d(v(x)).$$

Аналогічно, оскільки $\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$, то

$$d\left(u(x)\cdot v(x)\right) = u'(x)dx\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)dx = d(u(x))\cdot v(x) + u(x)\cdot d(v(x)) .$$

Останню формулу отримати самостійно ✍.

✍ **Виконайте вправу:** застосовуючи формулу $df(x) = f'(x)\cdot dx$ і таблицю похідних, складіть таблицю диференціалів елементарних функцій.

8. Геометричний зміст диференціала

На рис. 1.3 пряма MS – дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці

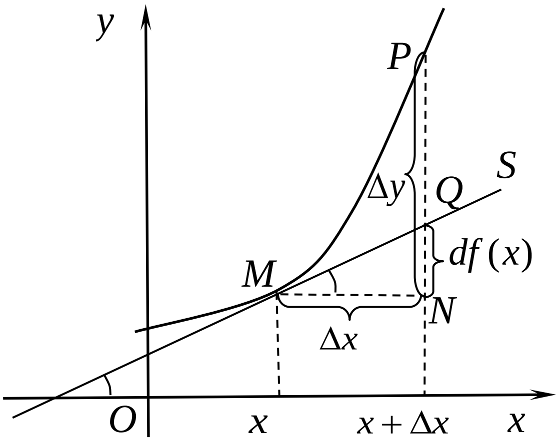


Рис. 1.3.

$M(x, f(x))$. Точка $P(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ належить графіку цієї функції. Нехай $MN \perp PN$, тоді в $\triangle QMN$ $\left(\angle N = 90^o\right)$ маємо

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = PN\,,\ \Delta x = MN\,,$$

$$QN = MN \cdot tg\angle OMN\,.$$

Оскільки

$df(x) = f'(x)\cdot\Delta x = tg\angle OMN \cdot MN$, то

$$QN = df(x)\,.$$

Геометричний зміст диференціала: диференціал функції $y = f(x)$ в точці x – це приріст ординати дотичної до графіка функції в точці $M(x, f(x))$.

9. Інваріантність форми першого диференціала

Як і у випадку, коли змінна x є незалежною, так і у випадку, коли x сама є диференційовною функцією, що залежить від іншої змінної, форма першого диференціала не змінюється, а саме: в обох випадках диференціал функції $f(x)$ дорівнює добутку похідної від цієї функції і диференціала аргументу dx, тобто $df(x) = f'(x)\cdot dx$. Зазначену властивість диференціала називають *інваріантністю форми першого диференціала.*

Доведемо цю властивість. Формула диференціала у випадку незалежної змінної x:

$$df(x) = f'_x(x)\cdot dx.$$

Нехай тепер ця змінна є залежною, тобто $x = x(t)$, тоді

$$dy = f'_t(t)dt = f'_x(x)\cdot \underbrace{x'(t)\cdot dt}_{=dx} = f'_x(x)\cdot dx\,.$$

Це й доводить потрібне.

10. Похідні вищих порядків

Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$ та диференційовна в кожній точці цього інтервалу. Тоді на інтервалі (a,b) буде визначеною також функція $f'(x)$. Якщо і ця функція є диференційовною у деякій точці x інтервалу $(a;b)$, тобто має в цій точці похідну (див. теорему 1.5), то значення похідної від функції $f'(x)$ в точці x називають *другою похідною функції* $f(x)$ *в точці* x і позначають $f''(x)$, тобто

$$f''(x) \overset{def}{=} \left(f'(x)\right)'.$$

Аналогічно визначаються третя, четверта похідна. Якщо похідна $(n-1)$-ого порядку від функції $f(x)$ вже визначена і вона є функцією $f^{(n-1)}(x)$, заданою на інтервалі $(a;b)$ і диференційовною в деякій точці x інтервалу (a,b), то значення похідної від $f^{(n-1)}(x)$ в точці x називають похідною n*-ого порядку від функції* $f(x)$ *в точці* x і позначають $f^{(n)}(x)$, тобто

$$f^{(n)}(x) \overset{def}{=} \left(f^{(n-1)}(x) \right)'.$$

☝ Таблиця похідних вищих порядків

$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \;\Rightarrow\; \left(P_m(x)\right)^{(n)} = \begin{cases} a_m m!, & n = m \\ 0, & n > m \end{cases};$	
$\left(x^{\alpha}\right)^{(n)} = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)\cdot x^{\alpha-n},$ $x>0, \alpha\in\mathbb{R};$	$\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},\ x\neq 0;$
$\left(a^x\right)^{(n)} = a^x\cdot\ln^n a,\ 0<a\neq 1;$	$\left(e^x\right)^{(n)} = e^x;$
$\left(\log_a x\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{x^n\cdot\ln a},\ 0<a\neq 1,\ x>0;$	$\left(\ln x\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{x^n},\ x>0;$
$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right);$	$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$

Отримання формул таблиці:

1) Розглянемо функцію $P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Якщо $m=1$, тоді

$$P_1(x) = a_1 x + a_0 \;\Rightarrow\; \left(P_1(x)\right)' = a_1,\;\; \left(P_1(x)\right)'' = \left(P_1(x)\right)''' = \ldots = 0.$$

Нехай при $m=k$ формула $\left(P_k(x)\right)^{(n)} = \begin{cases} a_k k!, & n=k \\ 0, & n>k \end{cases}$ є вірною.

Якщо $m=k+1$, то

$$P_{k+1}(x) = a_{k+1}x^{k+1} + \underbrace{a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0}_{=P_k^*(x)} = a_{k+1}x^{k+1} + P_k^*(x) \Rightarrow$$

$$\left(P_{k+1}(x)\right)^{(k+1)} = \left[\left(a_{k+1}x^{k+1}\right)'\right]^{\{k+1\}} + \left(P_k^{**}(x)\right)^{\{k+1\}} = \left(\underbrace{a_{k+1}(k+1)x^k}_{=P_k^{**}(x)}\right)^{\{k\}} + 0 =$$

$$= a_{k+1}(k+1)\cdot k! = a_{k+1}(k+1)!,$$

$$\left(P_{k+1}(x)\right)^{\{k+2\}} = \left(P_{k+1}(x)\right)^{\{k+3\}} = \ldots = 0.$$

2) Для функції $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha\notin\mathbb{N}$ доведемо формулу за індукцією:

Нехай $n = 1,2,3$, тоді

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$

$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}.$$

Нехай для $n=k$ формула $\left(x^{\alpha}\right)^{(k)} = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)\cdot x^{\alpha-k}$ є вірною.

Тоді для $n=k+1$ отримаємо

$$\left(x^{\alpha}\right)^{(k+1)}=\left(\left(x^{\alpha}\right)^{(k)}\right)'=\left(\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)\cdot x^{\alpha-k}\right)'=$$

$$=\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)\cdot(\alpha-k)\cdot x^{\alpha-(k+1)}.$$

3) Формула $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$, $x\neq 0$ є наслідком попередньої, якщо обрати $\alpha=-1$.

4) Розглянемо функцію $f(x)=\ln x$. Тоді $f'(x)=\dfrac{1}{x}$,

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

5) Розглянемо функцію $f(x)=a^x$. Тоді

$$f'(x)=a^x\ln a,\quad f''(x)=a^x\ln^2 a.$$

Нехай формула $\left(a^x\right)^{(n)}=a^x\cdot\ln^n a$ є вірною, тоді

$$\left(a^x\right)^{(n+1)}=\left(\left(a^x\right)^{(n)}\right)'=\left(a^x\cdot\ln^n a\right)'=a^x\cdot\ln^n a\cdot\ln a=a^x\cdot\ln^{n+1} a.$$

6) Розглянемо функцію $f(x)=\sin x$. Тоді

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\cdot 2\right).$$

Нехай формула

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\cdot n\right)$$

є вірною, тоді потрібно довести:

$$f^{(n+1)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\cdot(n+1)\right).$$

Доведення:

$$f^{(n+1)}(x)=\left[\left(\sin x\right)^{(n)}\right]'=\left[\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\sin\left(x+\frac{\pi(n+1)}{2}\right).$$

Інші формули отримати самостійно ✍.

Формула Лейбніца. Обчислимо похідні вищих порядків від добутку функцій $uv=u(x)v(x)$:

$$(uv)'=u'v+uv',$$

$$(uv)''=u''v+u'v'+u'v'+uv''=u''v+2u'v'+uv'',$$

$$(uv)''' = u'''v + u''v' + 2\left(u''v' + u'v''\right) + u'v'' + uv''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' .$$

Можна припустити наявність закономірності, що виражається формулою, в якій $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$:

$$\boxed{(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} = u^{(n)}v + n \cdot u^{(n-1)}v' + \ldots + C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} + \ldots + n \cdot u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}}$$

Доведення здійснимо за індукцією. Нехай формула

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} = u^{(n)}v + C_n^1 \cdot u^{(n-1)}v' + C_n^2 \cdot u^{(n-2)}v'' + \ldots + C_n^{k-1} u^{(n-k+1)} v^{(k-1)} +$$
$$+ C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} + \ldots + C_n^1 \cdot u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}$$

є вірною, тоді

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + \underline{u^{(n)}v'} + \underline{C_n^1 \cdot u^{(n)}v'} + \underline{\underline{C_n^1 \cdot u^{(n-1)}v''}} + \underline{\underline{C_n^2 \cdot u^{(n-1)}v''}} +$$
$$+ C_n^2 \cdot u^{(n-2)}v''' + \ldots + C_n^{k-1} u^{(n-k+2)} v^{(k-1)} + \underset{-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-}{C_n^{k-1} u^{(n-k+1)} v^{(k)}} + \underset{-\,-\,-\,-\,-\,-\,-}{C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)}} +$$
$$+ C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)} + \ldots + C_n^1 \cdot u''v^{(n-1)} + \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{C_n^1 \cdot u'v^{(n)}} + \underset{\sim\sim\sim}{u'v^{(n)}} + uv^{(n+1)} =$$
$$= u^{(n+1)}v + u^{(n)}v'\left[1 + C_n^1\right] + u^{(n-1)}v''\left[C_n^1 + C_n^2\right] + \ldots + u^{(n-k+1)}v^{(k)}\left[C_n^{k-1} + C_n^k\right] + \ldots +$$
$$+ u'v^{(n)}\left[1 + C_n^1\right] + u^{(n+1)}v = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n-k+1)} v^{(k)}.$$

У останній рівності застосовано співвідношення

$$1 + C_n^1 = 1 + n = C_{n+1}^1,$$
$$C_n^1 + C_n^2 = n + \frac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2,$$
$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) =$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{(n-k+1)k} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_{n+1}^k. \quad \blacksquare$$

11. Диференціали вищих порядків

Допоміжні позначення:

δx – диференціал аргументу,

$\delta y = \delta f(x)$ – диференціал функції.

Припустимо, що функція $y = f(x)$ диференційовна на (a,b), а x – незалежна змінна. Диференціал цієї функції $df(x) = dy = f'(x)dx$ ($x \in (a,b)$, $dx \in \mathbb{R}$) також називають першим диференціалом. Розглянемо його як функцію від x, вважаючи dx фіксованим. Нехай функція $y = f(x)$ має другу похідну в даній точці $x \in (a;b)$. Для позначення диференціала функції dy в цій точці будемо застосовувати символ δ. Тоді цей диференціал має вигляд

$$\delta(dy) = \delta\left(f'(x)\,dx\right) = \delta\left(f'(x)\right)dx = \left(f'(x)\right)'\delta x\,dx = f''(x)\,\delta x\,dx.$$

Загалом кажучи, приріст dx аргументу x та повторний приріст δx мають нерівні значення. При цьому в наведеному далі означенні накладається припущення про їх рівність.

🗀**Означення 1.6** *(диференціала другого порядку)*. Диференціалом другого порядку в даній точці $x \in (a;b)$ називають диференціал від першого диференціала, якщо $\delta x = dx$, і позначають його $d^2 f(x)$ або $d^2 y$. Тобто

$$d^2 y \overset{def}{=} \delta(dy)\big|_{\delta x = dx}.$$

Отже,

$$\boxed{d^2 y = f''(x)\left(dx\right)^2,}\boxed{\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x)}$$

Вираз в лівій частині останньої рівності застосовують для позначення другої похідної, тоді його читають: «де два ігрек по де ікс двічі».

Зауважимо, що $d^2 x = 0$, оскільки при обчисленні другого диференціала ми вважали $dx = \Delta x$ сталим.

Тепер розглянемо випадок, коли x – залежна змінна, тобто $x = x(t)$. Припустимо, що має сенс суперпозиція $y = f[x(t)]$, а функції $x(t)$ та $f(x)$ мають другі похідні в точках $t \in (\alpha;\beta)$ і $x = x(t)$ відповідно. Тоді, за означенням, $d^2 y = \delta(dy)\big|_{\delta t = dt}$. Внаслідок інваріантності форми першого диференціала, в цьому випадку він має вигляд $dy = f'(x)dx$. Отже,

$$d^2 y = \delta(dy)\big|_{\delta t = dt} = \delta\left(f'(x)dx\right)\big|_{\delta t = dt} = \left\{\delta\left(f'(x)\right)\cdot dx + f'(x)\cdot\delta(dx)\right\}\big|_{\delta t = dt} =$$

$$= \left\{f''(x)\delta x\right\}\big|_{\delta t = dt}\cdot dx + f'(x)\cdot\left\{\delta(dx)\right\}\big|_{\delta t = dt}.$$

Оскільки $\delta x\big|_{\delta t = dt} = \left\{x'(t)\cdot\delta t\right\}\big|_{\delta t = dt} = x'(t)\cdot dt = dx$ – це перший диференціал функції $x(t)$ в точці t, а $\left\{\delta(dx)\right\}\big|_{\delta t = dt}$ – це, за означенням, другий диференціал цієї функції в точці t, то

$$\boxed{d^2 y = f''(x)\left(dx\right)^2 + f'(x)d^2 x}$$

З останньої формули випливає, що **форма другого диференціала не є інваріантною**, тобто вона змінюється в залежності від того, чи є змінна x залежною або незалежною.

Функцію $f(x)$, що має другий диференціал в точці $x \in (a;b)$, називають *двічі диференційовною в цій точці*.

II. 🗀**Означення 1.7** *(диференціала n-ого порядку)*. Нехай $y = f(x)$ має n-у похідну в даній точці $x \in (a;b)$, аргумент x є незалежною змінною. *Диференціалом n-го порядку від функції $y = f(x)$ в точці x* називають диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку, якщо $\delta x = dx$, та позначають $d^n f(x)$ або $d^n y$. Тобто

$$d^n y \overset{def}{=} \delta\left(d^{n-1} y\right)\big|_{\delta x = dx}.$$

Функцію $f(x)$, що має диференціал n-го порядку в точці $x \in (a;b)$, називають *n разів диференційовною в цій точці*.

Індуктивно, у випадку, коли x є незалежною змінною, отримати (самостійно ✍) формули:

$d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n,$	$\dfrac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$

Форма n-го диференціала ($n > 1$) не є інваріантною.

Функцію $f(x)$, яка має похідну n-го порядку в кожній точці інтервалу $(a;b)$, називають n *разів диференційовною на цьому інтервалі*.

12. Диференціювання функцій, заданих параметрично

Якщо змінні x та y являють собою функції, що залежать від змінної $t \in T$, яка носить назву параметра, то кажуть, що функція задана параметрично:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Параметризуємо коло $x^2 + y^2 = a^2$:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi).$$

Для того, щоб мати право розглядати y як функцію від x, потрібно зробити припущення про те, що функція $x = \varphi(t)$ має обернену $t = \varphi^{-1}(x)$ в якомусь околі B даної точки $t \in T$, тоді в образі цього околу $x(B)$ буде визначеною функція $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$.

Припускаємо, що функції $x = \varphi(t)$ та $y = \psi(t)$ диференційовні стільки разів в околі B даної точки $t \in T$, скільки похідних нам потрібно обчислити, при цьому $\varphi'(t) \neq 0\ \forall t \in B$. Для першої похідної отримаємо:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y_t'(t)}{x_t'(t)}$$

Зауважимо, що останню формулу можна отримати в інший спосіб, застосовуючи можливість визначення функції $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ на образі $x(B)$ околу B даної точки $t \in T$:

$$y'(x) = \left(\psi(\varphi^{-1}(x))\right)' = \psi'(t) \cdot (\varphi^{-1}(x))' = \psi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Для обчислення другої похідної розглянемо функцію $z = g(t)$, яку в точках околу B визначимо формулою $g(t) = y'(x(t))$, тоді отримаємо нову функцію, що задана параметрично $\begin{cases} z = g(t) \\ x = \varphi(t) \end{cases}$, похідна від якої і буде відповідати другій похідній заданої функції. Отримаємо для $x \in x(B)$

$$y''(x)=\left(y'(x)\right)'=\frac{g'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{\left[\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^3}.$$

Або інакше: $y''(x)=\dfrac{g'(t)}{\varphi'(t)}=\dfrac{\left(y'(x)\right)'_t}{x'_t(t)}$ для $x\in x(B)$.

Приклад 1.7. Розглянемо функцію $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ графік якої називають *циклоїдою* (див. рис. 1.4 для випадку $a=1$).

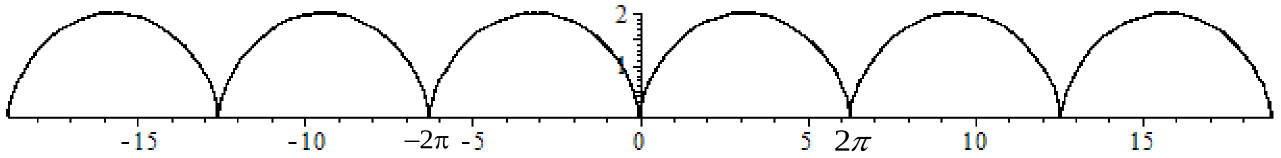


Рис. 1.4.

Знайдемо першу і другу похідну від цієї функції:

$$y'(x)=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2},$$

$$y''(x)=\frac{\left(\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}\right)'}{x'_t}=\frac{-\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}}{2a\sin^2\dfrac{t}{2}}=-\frac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}.$$

13. Диференціювання функцій, заданих неявно

Якщо функція $y=y(x)$ задовольняє рівняння $F(x,y)=0$, то кажуть, що функція задана неявно.

Наприклад, розглядаючи рівняння $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ й обираючи $F(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1$, ми звели його до вигляду $F(x,y)=0$. Тепер постає питання про функцію $y=y(x)$, яка задовольняє це рівняння. Тут ми бачимо, що при $x\in(-a;a)$ таких функцій можна знайти дві: $y_1(x)=+b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$ і $y_2(x)=-b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$.

Для того, щоб можна було говорити саме про *функцію*, задану неявно, потрібно накласти такі обмеження на x і y, за яких рівняння $F(x,y)=0$ є однозначно розв’язним відносно y. У зазначеному прикладі при $x\in(-a;a)$ і $y>0$ такою функцією є $y_1(x)$, а при $x\in(-a;a)$ і $y<0$ – функція $y_2(x)$.

Зауважимо також, що в загальному випадку можна лише вказати на такі обмеження, однак подати функцію $y=y(x)$, що є розв’язком рівняння $F(x,y)=0$, певною формулою неможливо. Прикладом такої функції, що задана неявно, є $\ln\left(x^2+y^2\right)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ при $x\in\left(0;x_0\right)$, $y\in\left(\frac{x_0}{2};e^{\frac{\pi}{4}}\right)$, де $x_0=\frac{2}{\sqrt{5}}e^{\frac{1}{2}arctg\frac{1}{2}}$.

Припустимо, що за певних обмежень на x і y, які записуються за допомогою співвідношень $x\in X$, $y\in Y$, рівняння $F(x,y)=0$ має єдиний розв’язок – функцію $y=y(x)$, яка є диференційовною на X.

Правило знаходження похідної від функції, що задана неявно: в зазначених припущеннях обчислюємо похідну від обох частин рівняння $F(x,y)=0$, вважаючи, що y – це функція, що залежить від x (тобто $y=y(x)$), а x – незалежна змінна:

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x))=0,$$

якщо така похідна існує.

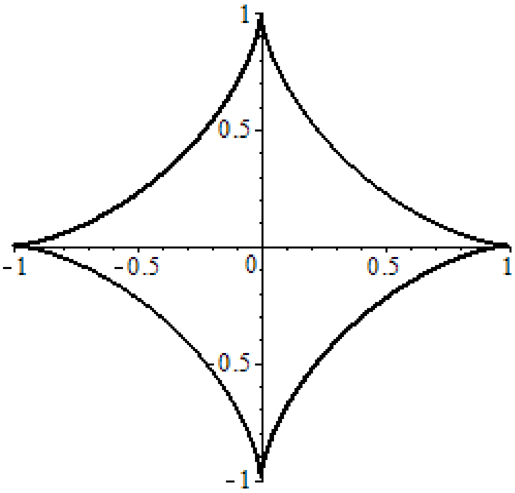


Рис. 1.5.

Приклад 1.8. Розглянемо функцію, що задана неявно: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ при $x\in(-1;1)$, $y>0$. Лінію, координати якої задовольняють рівняння $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, називають астроїдою (див. рис. 1.5 для випадку $a=1$),

Знайдемо похідну першого та другого порядку:

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'=0;\quad y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}};$$

$$y''=-\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{-x\cdot\sqrt[3]{\frac{y}{x}}-y}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt[3]{y}}{x^2}\cdot\underbrace{\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)}_{=a^{\frac{2}{3}}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}}{3x\cdot\sqrt[3]{xy}}.$$

Зауважимо, що детально теорія неявних функцій розглядатиметься після вивчення теми «Функції багатьох змінних», оскільки ця теорія потребує додаткового теоретичного обґрунтування. Тому в цьому посібнику при розв’язанні задач на обчислення похідної від функцій, заданих неявно, будемо в більшості випадків звертати увагу саме на техніку їх обчислення, не вказуючи зазначені вище обмеження на x і y.

§ 2. Основні теореми про диференційовні функції

1. Монотонність функції в точці. Локальний екстремум

Розглянемо функцію $f(x)$ з областю визначення $D(f)$. Припустимо, що точка c – внутрішня точка $D(f)$, тобто ця точка належить $D(f)$ разом із деяким своїм околом $B_\delta(c) = (c-\delta; c+\delta)$. Надалі будемо припускати, що $B_\delta(c) \subset D(f)$.

🗁**Означення 1.8.** Функція $f(x)$ *зростає в точці* $c \in D(f)$ ($f(x) \nearrow$)☝

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists\delta > 0\ \forall x \in B_\delta(c) \begin{cases} x < c \Rightarrow f(x) < f(c), \\ x > c \Rightarrow f(x) > f(c). \end{cases}$$

Аналогічно дають означення спадної функції в точці.

🗁**Означення 1.9.** Функція $f(x)$ *монотонна в точці* $c \in D(f)$ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $f(x)$ зростає або спадає в точці $c \in D(f)$.

🗁**Означення 1.10.** Точка $c \in D(f)$ – *точка локального максимуму* ($loc\,\max$) *функції* $f(x)$ ☝ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\exists\delta > 0\ \forall x \in B_\delta(c) \setminus \{c\}\ f(x) < f(c)$.

Аналогічно дають означення локального мінімуму функції. А саме: Точка $c \in D(f)$ – *точка локального мінімуму* ($loc\,\min$) *функції* $f(x)$ ☝ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\exists\delta > 0\ \forall x \in B_\delta(c) \setminus \{c\}\ f(x) > f(c)$.

Тобто точка $c \in D(f)$ є точкою локального максимуму (мінімуму), якщо існує деякий окіл цієї точки, в межах якого значення $f(c)$ є найбільшим (найменшим) серед усіх значень функції в цьому околі.

🗁**Означення 1.11.** Точка $c \in D(f)$ – *точка локального екстремуму* ($loc\,extr$) *функції* $f(x)$ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ в точці c функція $f(x)$ має локальний максимум або локальний мінімум.

Теорема 1.6 *(достатня умова монотонності функції в точці)*.

$$☝\ \left|\begin{array}{l} 1)\ c \text{ – внутрішня точка } D(f), \\ 2)\ f(x) \text{ диференційовна в т. } c, \\ 3)\ f'(c) > 0\ (f'(c) < 0), \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x) \nearrow (\searrow) \text{ в т. } c.$$

Доведення. Розглянемо тільки випадок $f'(c) > 0$, оскільки випадок $f'(c) < 0$ може бути доведеним аналогічно. Тоді за означенням границі $f'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ отримаємо:

для $\varepsilon = f'(c) > 0$ $\exists\delta > 0 : \forall x = c + \Delta x \in D(f)$ $0 < |\Delta x| < \delta \Rightarrow$

$$\left| \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} - f'(c) \right| < \varepsilon = f'(c).$$

Звідки випливає

$$\forall x = c+\Delta x \in D(f) \quad 0<|x-c|<\delta \Rightarrow 0<\frac{f(x)-f(c)}{x-c}<2f'(c),$$

тобто

$$\forall x \in B_\delta(c)\setminus\{c\} \ \ \frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0.$$

Тому

$$\forall x \in B_\delta(c) \begin{cases} x<c \Rightarrow f(x)<f(c), \\ x>c \Rightarrow f(x)>f(c). \end{cases}$$

Висновок: $f(x)\nearrow$ в т. c. ■

Зауваження 1.2. Умова додатності похідної функції в точці c є лише достатньою умовою зростання функції в точці c. Наприклад, функція $f(x)=x^3$ (графік див. на рис. 1.6) зростає в точці 0:

$$\begin{cases} x>0 \Rightarrow f(x)=x^3>0=f(0), \\ x<0 \Rightarrow f(x)=x^3<0=f(0); \end{cases}$$

при цьому $f'(0)=3x^2\big|_{x=0}=0$.

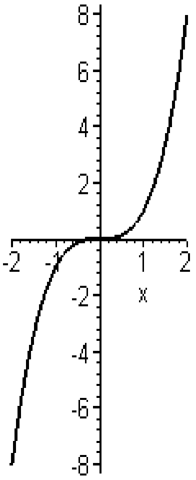


Рис. 1.6.

Теорема 1.7 Ферма *(необхідна умова локального екстремуму).*

☝ $$\left.\begin{array}{|l} f(x)\ \text{диференційовна в т.}\ c, \\ c-\text{точка}\ loc\quad extr, \end{array}\right\}\Rightarrow \quad f'(c)=0.$$

Доведення. 1 спосіб. Функція $f(x)-$ диференційовна в т. $c\Rightarrow\exists f'(c)$. Оскільки т. c – точка локального екстремуму, то в цій точці функція не може спадати, а тому, за теоремою 1.6, її похідна в цій точці не може бути меншою за нуль. Вона також не може зростати в т. c, тому похідна в цій точці не може бути більшою за нуль (за теоремою 1.6). Отже, $f'(c)=0$. Скорочений запис висловленого:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\searrow \text{ в точці } c \Rightarrow f'(c)\not<0, \\ f(x)\nearrow \text{ в точці } c \Rightarrow f'(c)\not>0. \end{array}\right\}\Rightarrow f'(c)=0.$$

2 спосіб. $f(x)$ – диференційовна в т. $c\Rightarrow\exists f'(c)=f'_+(c)=f'_-(c)$.

Нехай для визначеності c – точка локального максимуму, тоді $f(c+\Delta x)<f(c)$ $\forall c+\Delta x\in D(f)\setminus\{c\}$, звідки

$$\left.\begin{array}{l} f'(c)=f'_+(c)=\lim\limits_{\Delta x\to+0}\dfrac{\overbrace{f(c+\Delta x)-f(c)}^{-}}{\underset{+}{\Delta x}}\le 0, \\ f'(c)=f'_-(c)=\lim\limits_{\Delta x\to-0}\dfrac{\overbrace{f(c+\Delta x)-f(c)}^{-}}{\underset{-}{\Delta x}}\ge 0. \end{array}\right\}\Rightarrow f'(c)=0.\ ■$$

Геометричний зміст теореми Ферма.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\ \text{диференційовна в т. } c, \\ c-\text{точка } loc\, extr, \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\text{дотична в точці } M(c, f(c)) \text{ паралельна} \\ \text{вісі абсцис (див. рис. 1.7).}\end{array}$$

2. Теореми Ролля, Лагранжа, Коші

Теорема 1.8 Ролля *(про нуль похідної)*

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\ \text{неперервна на } [a;b], \\ f(x)\ -\text{диференційовна на } (a;b), \\ f(a)=f(b), \end{array}\right\}\Rightarrow\quad \exists\xi\in(a,b)\quad f'(\xi)=0.$$

Доведення. Оскільки функція неперервна на $[a;b]$ то, за *другою теоремою Вейєрштрасса* [**2**, с. 161], вона досягає свого найбільшого й найменшого значення, які будемо позначати M та m, відповідно.

1) Якщо $M=m$, то $f(x)=const$, тоді у всіх точках відрізка $f'(x)=0$.

2) Нехай $M>m$ і $f(a)=f(b)$, тоді хоча б одне із значень M або m досягається у внутрішній точці відрізка $[a;b]$, тобто існує така точка $\xi\in(a;b)$, що $f(\xi)=M$ або $f(\xi)=m$, тоді $\xi-$ точка $loc\, extr$. Отже, за теоремою Ферма $f'(\xi)=0$.■

Геометричний зміст теореми Ролля.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\ -\text{неперервна на } [a;b], \\ f(x)\ -\text{диференційовна на } (a;b), \\ f(a)=f(b), \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\exists\xi\in(a;b):\ \text{дотична в точці } (\xi, f(\xi)) \\ \text{паралельна вісі абсцис (див. рис. 1.8).}\end{array}$$

Теорема 1.9 Коші (формула Коші).

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\ \text{і}\ g(x)\ -\text{неперервні на } [a;b], \\ f(x)\ \text{і}\ g(x)\ -\text{диференційовні на } (a;b), \\ g'(x)\neq 0\,\forall x\in(a,b), \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{c}\exists\xi\in(a;b): \\ \boxed{\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}\end{array}$$

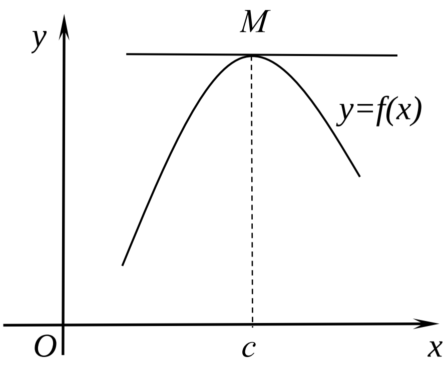


Рис. 1.7.

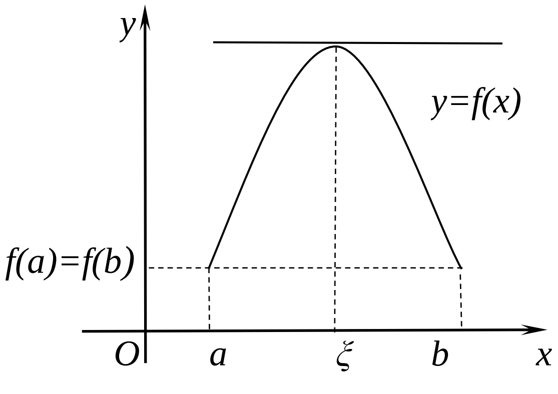


Рис. 1.8.

Доведення. Введемо допоміжну функцію

$$F(x)=f(x)-f(b)-\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}\cdot(g(x)-g(b)).$$

1) Вона є заданою коректно: знаменник не дорівнює нулю. Дійсно, в супротивному випадку застосуємо теорему Ролля:

$$\left.\begin{array}{l} g(x) \text{ – неперервна на } [a;b], \\ g(x) \text{ – диференційовна на } (a;b), \\ g(a)=g(b), \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{(за теоремою Ролля)} \\ \exists\xi\in(a;b):\quad g'(\xi)=0. \end{array}$$

Отримане суперечить умові. Отже, $g(a)\neq g(b)$.

2) Завдяки неперервності функцій $f(x)$ і $g(x)$ на $[a;b]$ і властивостям неперервних функцій, приходимо до висновку, що $F(x)$ – неперервна на $[a,b]$.

3) Аналогічно, $F(x)$ – диференційовна на $(a;b)$, причому

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}\cdot g'(x).$$

4) $F(a)=F(b)=0$.

Застосуємо теорему Ролля до функції $F(x)$:

$$1), 2), 3), 4) \Rightarrow \exists\xi\in(a;b):\ F'(\xi)=0,$$

тобто

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}\cdot g'(\xi)=0.$$

Звідси

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\quad (\xi\in(a;b)).\blacksquare$$

Теорема 1.10 Лагранжа (формула Лагранжа).

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ неперервна на } [a;b], \\ f(x) \text{ диференційовна на } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists\xi\in(a;b): \\ \boxed{f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)} \end{array}$$

Доведення. Нехай $g(x)=x$, тоді

1) $g(x)$ неперервна на $[a;b]$,

2) $g(x)$ – диференційовна на (a,b),

3) $g'(x)=1\neq 0\quad \forall x\in(a;b)$.

Застосовуємо теорему Коші:

$$\exists\xi\in(a,b):\ \frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{f'(\xi)}{1}.\ \blacksquare$$

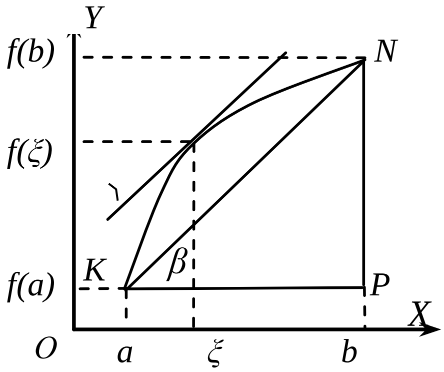


Рис. 1.9

Геометричний зміст теореми Лагранжа. Розглянемо рис. 1.9:

в $\triangle KPN$ $\left(\angle P=90^{\circ}\right)$ і

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{NP}{KP}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Звідси та з формули Лагранжа приходимо до висновку: *для диференційовної на* (a,b) *і неперервної на* $[a;b]$ *функції* $f(x)$

можна знайти таке $\xi \in (a;b)$, *що дотична в точці* $(\xi, f(\xi))$ *буде паралельна січній, що проходить через точки з координатами* $(a, f(a)), (b, f(b))$.

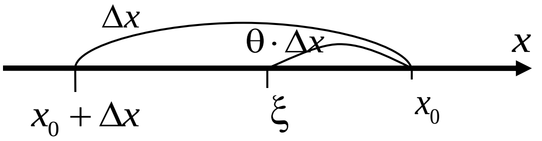
Нехай для функції $f(x)$ всі припущення теореми Лагранжа виконано. Розглянемо точку $x_0 \in (a;b)$ і такий приріст аргументу Δx в точці x_0, що $x_0 + \Delta x \in (a;b)$. Тоді виконується **формула Лагранжа скінченних приростів**

$$\boxed{\exists 0 < \theta < 1: \quad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x}$$

Дійсно, всі припущення теореми Лагранжа виконано на відрізку $[x_0; x_0 + \Delta x]$, якщо $\Delta x > 0$ (або на відрізку $[x_0 + \Delta x; x_0]$, якщо $\Delta x < 0$). На цьому відрізку формула Лагранжа набуває вигляду:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(\xi) \cdot \{x_0 + \Delta x - x_0\}$$

(тут точка ξ знаходиться поміж x_0 і $x_0 + \Delta x$). Тоді отримаємо:



$$\exists \theta \in (0;1): \quad \xi = x_0 + \theta \Delta x,$$

звідки

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x.$$

3. Наслідки з теореми Лагранжа

Теорема 1.11 *(про сталість функції, яка має на інтервалі похідну, що дорівнює нулю)*.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ диференційовна на } (a;b), \\ f'(x) = 0 \ \forall x \in (a;b), \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad f(x) = const \ \forall x \in (a;b).$$

Доведення. Нехай $x_0 \in (a;b)$ фіксована точка, а $x \in (a;b)$ – така довільна точка, що $x_0 \neq x$. Оскільки функція $f(x)$ диференційовна на $(a;b)$, то вона диференційовна на відрізку $[x_0; x]$ $([x; x_0])$, а тому неперервна на цьому відрізку. Таким чином, можна застосувати формулу Лагранжа:

$$\exists \xi \text{ поміж } x \text{ і } x_0: \ f(x) - f(x_0) = f'(\xi) \cdot (x - x_0).$$

За умовою $f'(\xi) = 0$, тому $f(x) = f(x_0)$. В силу довільності вибору точки $x \in (a;b)$ маємо: значення функції в усіх точках дорівнюють значенню в конкретній точці $x_0 \in (a;b)$. Якщо позначити $c = f(x_0)$, то $f(x) = c \quad \forall x \in (a;b)$.■

Геометричний зміст теореми 1.11. Якщо функція диференційовна на інтервалі, і в будь-якій його точці дотична до її графіка паралельна вісі абсцис, тоді ця функція є сталою.

Дійсно, паралельність дотичної до графіка функції вісі абсцис еквівалентна рівності похідної цієї функції нулю. Оскільки це виконується в будь-якій точці інтервалу, то доведення зводиться до попередньої теореми. ■

Теорема 1.12 *(про функції, що мають однакову похідну)*.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ і } g(x) \text{ диференційовні на } (a;b), \\ f'(x) = g'(x) \ \forall x \in (a;b), \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad f(x) = g(x) + const \ \forall x \in (a;b).$$

Тобто, якщо функції мають однакові похідні на інтервалі $(a;b)$, то вони в точках цього інтервалу відрізняються на константу.

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію $\varphi(x)=f(x)-g(x)$, тоді

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x) \text{ диференційовна на } (a,b),\\ \varphi'(x)=0\ \forall x\in(a;b),\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{r}\varphi(x)=f(x)-g(x)=const\\ \forall x\in(a;b).\end{array}$$ ■

🗁**Означення 1.12.** Нехай функція $f(x)$ визначена на множині $D(f)$ та $X\subset D(f)$.

$f(x)$ – *зростаюча* (↗) на $X \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1,x_2\in X \quad x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$,

$f(x)$ – *спадна* (↘) на $X \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1,x_2\in X \quad x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$,

$f(x)$ – *неспадна (нестрого зростаюча)* на X

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1,x_2\in X \quad x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2),$$

$f(x)$ – *незростаюча (нестрого спадна)* на X

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1,x_2\in X \quad x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2),$$

$f(x)$ – *монотонна (строго)* на $X \overset{def}{\Leftrightarrow} f(x)$ – зростаюча або спадна на X,

$f(x)$ – *нестрого монотонна* на $X \overset{def}{\Leftrightarrow} f(x)$ – незростаюча або неспадна на X.

В пункті 1 цього параграфа було розглянуто поняття монотонності функції в точці. Із останнього означення випливає, що зростаюча \ спадна функція на множині X буде зростаючою \ спадною в кожній внутрішній точці цієї множини. Зворотне твердження не є вірним. Функція $f(x)=\dfrac{1}{x}$ спадає в кожній точці множини $X=(-\infty;0)\bigcup(0;+\infty)$, однак не є спадною на цій множині. Дійсно, розглянемо $x_1<0$ та $x_2>0$. Нехай $\delta=\dfrac{|x_1|}{2}$, тоді

$$\left(x_1-\delta;x_1+\delta\right)\subset X \text{ і } \forall x\in\left(x_1-\delta;x_1+\delta\right)\left[\begin{array}{l} x<x_1\Rightarrow\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{x_1},\\ x>x_1\Rightarrow\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{x_1}.\end{array}\right.$$

Звідки випливає спадання функції $f(x)$ в точці x_1. Аналогічно доводиться спадання цієї функції в точці x_2 (доведіть це ✍!). При цьому, маємо:

$$x_1<0 \text{ і } x_2>0, \text{ тому } x_1<x_2 \text{ і } \frac{1}{x_1}<\frac{1}{x_2}.$$

Отже, функція $f(x)$ не є спадною на X.

Теорема 1.13 *(критерій нестрогої монотонності функції на інтервалі)***.** Якщо функція $f(x)$ – диференційовна на (a,b), то для того, щоб вона була неспадною (незростаючою) на цьому інтервалі, необхідно і достатньо, щоб похідна в усіх точках інтервалу була невід’ємною (недодатною), тобто $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) $\forall x \in (a,b)$.

Доведення. *Достатність.* Нехай $x_0 \in (a,b),\ x \in (a;b)$, а для визначеності припустимо, що $x_0 < x$. Оскільки $f(x)$ диференційовна на інтервалі (a,b), то вона диференційовна на відрізку $[x_0;x]$, що знаходиться в середині цього інтервалу, та неперервна на $[x_0;x]$ (за твердженням 1.2).

Отже, вимоги теореми Лагранжа виконуються на відрізку $[x_0;x]$, тому можна знайти точку $\xi \in (x_0;x)$ таку, що

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi) \cdot (x - x_0).$$

Якщо $f'(x) \geq 0$ на (a,b), а за припущенням $x_0 < x$, тоді $f(x) - f(x_0) \geq 0$, тобто $f(x) \geq f(x_0)$. Таким чином, $f(x)$ – неспадна функція (див. підкреслені співвідношення).

Необхідність. Нехай $f(x)$ – диференційовна і неспадна на (a,b). Доведемо, що $f'(x) \geq 0\ \ \forall x \in (a;b)$.

Припустимо супротивне: $\exists c \in (a;b)$: $f'(c) < 0$, тоді з теореми про достатню умову монотонності функції в точці маємо, що $f(x)$ в точці c спадає, а це суперечить умові. ■

Теорема 1.14 *(достатня умова строгої монотонності функції на інтервалі).*

☝
$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ диференційовна на } (a,b), \\ f'(x) > 0\ (< 0)\ \forall x \in (a;b), \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x) \nearrow (\searrow) \text{ на } (a,b).$$

Доведення дублює обґрунтування достатності теореми 1.13. ■

Умова додатності (від’ємності) похідної на інтервалі не є необхідною умовою зростання (спадання) функції на цьому інтервалі. Наприклад, функція $f(x) = x^3$ зростає ($\nearrow$) на $(-1;1)$, однак не у всіх точках інтервалу $(-1;1)$ вона має строго додатну похідну. А саме: в точці $x = 0$ похідна дорівнює нулю, тобто $f'(0) = 0$, отже, $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ на $(-1;1)$.

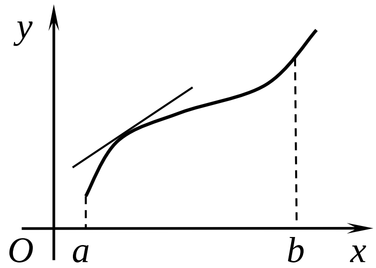


Рис. 1.10.

Геометричний зміст теореми 1.14 (див. рис. 1.10)**.** Якщо $f'(x) > 0$ на (a,b), то всюди на (a,b) дотична, що лежить у верхній півплощині, утворює з додатним напрямком осі Ox гострий кут, тому крива $y = f(x)$ «йде вгору» всюди на інтервалі (a,b).

Точки, в яких виконується необхідна умова екстремуму, тобто $f'(c) = 0$, домовимося називати *стаціонарними*, а стаціонарні точки й ті, в яких функція неперервна, а похідна не існує, – *критичними.*

4. Перша та друга достатні умови локального екстремуму

Теорема 1.15 *(перша достатня умова loc extr).*

1) $f(x)$ диференційовна в $B_\delta(c)\setminus\{c\}$,
2) $c-$ критична точка, внутрішня для $D(f)$

$\Rightarrow$

I) $\left.\begin{array}{l} f'(x)>0\,\forall x\in(c-\delta;c),\\ f'(x)<0\,\forall x\in(c;c+\delta),\end{array}\right\}\Rightarrow c-loc\max$;

II) $\left.\begin{array}{l} f'(x)<0\,\forall x\in(c-\delta,c),\\ f'(x)>0\,\forall x\in(c,c+\delta),\end{array}\right\}\Rightarrow c-loc\min$;

III) при переході через т. c в $B_\delta(c)\setminus\{c\}$ $f'(x)$ не змінює свій знак$\Rightarrow$ в точці c <u>немає</u> *loc extr.*

Доведення. I) Нехай $x\in B_\delta(c)\setminus\{c\}$ – довільна точка проколеного δ-околу. Оскільки функція $f(x)$ диференційовна в $B_\delta(c)\setminus\{c\}$, то вона диференційовна на піввідрізку $[x;c)$ $((c;x])$, а тому є неперервною на ньому. Крім того, функція неперервна в точці c. Тому можна застосувати на відрізку $[x;c]$ $([c;x])$ теорему Лагранжа:

$$f(x)-f(c)=f'(\xi)\cdot(x-c),$$

де ξ знаходиться поміж *x* і *c*. Звідси маємо:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)>0\forall x\in(c-\delta,c)\Rightarrow f(x)-f(c)=\underset{+}{f'(\xi)}\cdot\underbrace{(x-c)}_{-}<0\Rightarrow f(x)<f(c).\\ f'(x)<0\forall x\in(c,c+\delta)\Rightarrow f(x)-f(c)=\underset{-}{f'(\xi)}\cdot\underbrace{(x-c)}_{+}<0\Rightarrow f(x)<f(c).\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x)<f(c)\ \forall x\in B_\delta(c)\setminus\{c\}\Rightarrow c-$ точка $loc\max$.

II) Доведення аналогічне I).

III) Нехай для визначеності $f'(x)>0\ \ \forall x\in B_\delta(c)\setminus\{c\}$, тоді

$$\left.\begin{array}{l} x\in(c-\delta;c)\Rightarrow f(x)-f(c)=\underset{+}{f'(\xi)}\cdot\underbrace{(x-c)}_{-}<0\Rightarrow f(x)<f(c).\\ x\in(c;c+\delta)\Rightarrow f(x)-f(c)=\underset{+}{f'(\xi)}\cdot\underbrace{(x-c)}_{+}>0\Rightarrow f(x)>f(c).\end{array}\right\}\Rightarrow$$

в точці c <u>немає</u> *loc extr.* ■

Теорема 1.16 *(друга достатня умова loc extr).*

1) $f(x)$ – диференційовна в $B_\delta(c)$,
2) c –внутрішня точка $D(f)$,
3) $f'(c)=0$, 4) $\exists f''(c)$,

$\Rightarrow$

I) $f''(c)<0\Rightarrow c-loc\max$
II) $f''(c)>0\Rightarrow c-loc\min$
III) $f''(c)=0$ – сумнівний випадок.

Доведення.

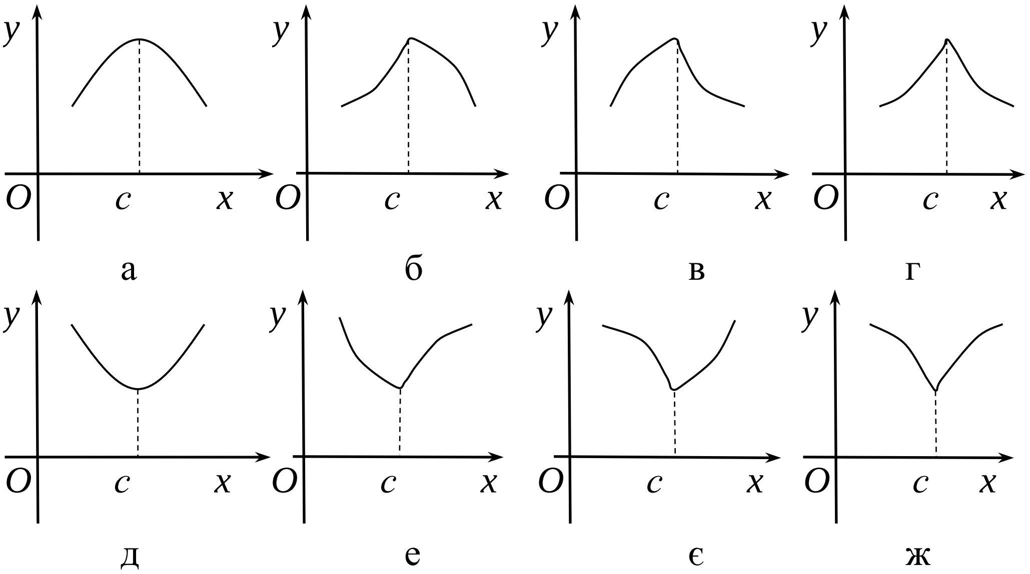
I) $f''(c)<0\Rightarrow f'(c)\searrow$ в точці $c\Rightarrow\forall x\in B_\delta(c)$ $\left.\begin{array}{l} x>c\Rightarrow f'(x)<f'(c)=0,\\ x<c\Rightarrow f'(x)>f'(c)=0,\end{array}\right\}\Rightarrow$

за першою достатньою умовою екстремуму, точка $c-m.loc\max$.

II) Доводиться аналогічно.

III) Функція $f(x)=x^3$ в точці 0 зростає і, відповідно, не має екстремуму, хоч $f'(0)=0$, а $f(x)=x^4$ в т. 0 має локальний мінімум, а $f'(0)=0$. Тому цей випадок є сумнівним. ■

На рис. 1.11 зображено можливі типи локальних екстремумів: максимумів (рис. 1.11 а-г) і мінімумів (рис. 1.11 д-ж). Екстремуми на рис. 1.11 б-г та е-ж називають піковидними; в таких точках екстремуму функція не є диференційовною.



а б в г

д е є ж

Рис. 1.11.

5. Доведення нерівностей за допомогою похідної

Можна виділити деякі з основних методів доведення нерівностей, що застосовують диференціальні властивості функцій.

I. Доведення нерівностей за допомогою теореми Лагранжа.

II. Доведення нерівностей з використанням монотонності функції.

III. Доведення нерівностей за допомогою властивостей опуклості функції.

I. Доведення нерівностей за допомогою теореми Лагранжа.

Приклад 1.9. Довести такі нерівності:

1. $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$; 2. $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \le |x - y|$.

Доведення.

1. $$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sin x - \text{неперервна на } [x;y] \text{ (або } [y;x]), \\ f(x) = \sin x - \text{диференційовна на } (x;y) \text{ (або } (y;x)), \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\exists \xi \text{ між } x \text{ і } y: \ |\sin x - \sin y| = |\cos\xi \cdot (x - y)| \le |x - y|;$$

2. $$\left.\begin{array}{l} f(x) = \operatorname{arctg} x - \text{неперервна на } [x;y] \text{ (або } [y;x]), \\ f(x) = \operatorname{arctg} x - \text{диференційовна на } (x;y) \text{ (або } (y;x)), \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\exists \xi \text{ між } x \text{ і } y: \ |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| = \left|\frac{1}{1+\xi^2} \cdot (x - y)\right| \le |x - y|.$$

II. Доведення нерівностей з використанням монотонності функції на інтервалі. Для розв'язання деяких задач будемо застосовувати такий логічний ланцюжок.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - \text{неперервна на } [a;b], \\ f(x) - \text{диференційовна на } (a;b), \\ f'(x)>0 \text{ на } (a;b), \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)\nearrow \text{ на } (a;b) \quad \text{і} \quad f(a)<f(x)<f(b)\ \ \forall x\in(a;b).$$

Аналогічно для випадку $f'(x)<0$ на (a,b) (запишіть логічний ланцюжок самостійно ✍!).

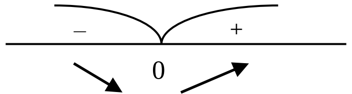
Приклад 1.10. Довести нерівність $e^x \geq 1+x$ для $x\in\mathbb{R}$.

Якщо $x=0$, то $e^0=1+0$, і нерівність, що перевіряється, перетворюється в рівність. Розглянемо неперервну на $[0;+\infty)$ функцію

$$f(x)=e^x-1-x.$$

Вона диференційовна на $(0;+\infty)$ і $f'(x)=e^x-1$.

Знаки похідної:



$$1)\ \left.\begin{array}{l} x>0, \\ f(x)\nearrow, \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)>f(0), \qquad 2)\ \left.\begin{array}{l} x<0, \\ f(x)\searrow, \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)>f(0),$$

$$e^x-1-x>0; \qquad e^x-1-x>0.$$

Отже, $e^x-1-x>0$ при $x\neq 0$ і $e^x-1-x=0$ при $x=0$, тому $e^x-1-x\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Приклад 1.11. Доведемо таку нерівність для $x>0$:

$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}.$$

Доведення проводимо за індукцією. Якщо $n=1$, то нерівність $e^x\geq 1+x$ вже доведена, навіть для всіх $x\in\mathbb{R}$.

Зробимо індуктивне припущення про справедливість нерівності для $n-1$, а саме:

$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad \forall x>0.$$

Розглянемо функцію

$$f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\ldots-\frac{x^n}{n!},$$

тоді,

$$f'(x)=e^x-1-\frac{2x}{2!}-\frac{3x^2}{3!}-\frac{4x^3}{4!}-\ldots+\frac{nx^{n-1}}{n!}=e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\ldots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Згадавши індуктивне припущення, отримаємо $f'(x)\geq 0\quad \forall x>0$. Звідси робимо висновок:

$$\left.\begin{array}{l} x>0, \\ f(x)\nearrow \text{на } (0;+\infty), \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)>f(0), \text{ крім того } \ f(0)=0, \text{ тому}$$

$$e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\ldots-\frac{x^n}{n!}>0 \quad \forall x>0.$$

Приклад 1.12. Нехай $x_i > 0 \ \forall i = \overline{1,n}$. Введемо позначення для середнього арифметичного й середнього геометричного:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}, \quad B = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}\ .$$

Доведемо, що $A \ge B$, тобто

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}\ .$$

Таку нерівність називають нерівністю Коші.

Наприклад, для $n = 2$ будемо мати

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \ge \sqrt{x_1 \cdot x_2}\ .$$

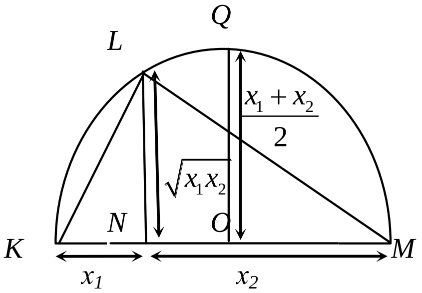


Рис. 1.12.

Геометричну інтерпретацію останньої нерівності можна отримати з рис. 1.12. А саме: середнє геометричне відповідає висоті *LN* прямокутного трикутника $\triangle KLM$ ($\angle L = 90^o$), а середнє арифметичне – радіусу *OQ* описаного навколо нього кола. Як бачимо, *LN*<*OQ*, що й відповідає зазначеній нерівності, оскільки $LN = \sqrt{x_1 x_2}$, а $OQ = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

У прикладі 1.10 було доведено нерівність $e^t \ge 1 + t, \ t \in \mathbb{R}$. При $t = x - 1$ маємо нерівність $e^{x-1} \ge x, \ x \in \mathbb{R}$.

Розглянемо $y_k = \frac{x_k}{A}, \quad k = 1,...,n,$ тоді $e^{y_k - 1} \ge y_k$, звідки

$$\left.\begin{array}{l} e^{\frac{x_1}{A}-1} \ge \frac{x_1}{A},, \\ e^{\frac{x_2}{A}-1} \ge \frac{x_2}{A} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ e^{\frac{x_n}{A}-1} \ge \frac{x_n}{A}, \end{array}\right\} \text{перемножимо} \Rightarrow e^{\frac{x_1}{A}+\frac{x_1}{A}+...+\frac{x_n}{A}-n} \ge \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}{A^n}\ .$$

Розглянемо показник степеня в лівій частині останньої нерівності і застосуємо означення величини *A* як середнього арифметичного:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{A \cdot n} \cdot n - n = \frac{A \cdot n}{A} - n = 0\,.$$

Отже, експонента має степінь 0, звідки отримаємо

$$1 = e^0 \ge \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}{A^n} \ \Rightarrow \ A^n \ge x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n \ \Rightarrow \ A \ge \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}\ .$$

Таким чином, $A \ge B$, що і треба було довести.

6. Розкриття невизначеностей. Правила Лопіталя

У цьому пункті проколений δ-окіл точки a позначимо $B_\delta(a)$, тобто

$$B_\delta(a) = (a - \delta; a) \cup (a; a + \delta)\,.$$

Теорема 1.17 *(І правило Лопіталя, розкриття невизначеностей* $\left[\dfrac{0}{0}\right]$*).*

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ f(x) \text{ і } g(x) \text{ диференційовні в } B_\delta(a),\\
2)\ g'(x)\neq 0 \quad \forall x\in B_\delta(a),\\
3)\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0, \text{ тобто під знаком}\\
\text{границі } \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} \text{ має місце невизначеність } \left[\dfrac{0}{0}\right],\\
4)\ \exists\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \text{ (скінченна або нескінченна),}
\end{array}\right\}\Rightarrow
\begin{array}{l}
1)\ \exists\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)},\\
2)\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}.
\end{array}$$

Доведення. 1) В точці a функції $f(x)$ і $g(x)$ довизначимо значенням 0, тобто $f(a)=0$ і $g(a)=0$.

Оскільки $f(x)$ і $g(x)$– диференційовні на $B_\delta(a)$, то

$$\left.\begin{array}{l}
f(x) \text{ і } g(x) \text{ неперервні на } B_\delta(a),\\
\left.\begin{array}{l}
f(a)=g(a)=0,\\
\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0,
\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)\, i\, g(x) - \text{непер. в т. } a,
\end{array}\right\}\Rightarrow
\begin{array}{l}
f(x) \text{ і } g(x)-\\
\text{неперервні на}\\
(a-\delta;a+\delta).
\end{array}$$

2) Доведемо теорему з використанням означення границі за Гейне. Розглянемо послідовність $\{x_n\}\subset B_\delta(a)$, таку, що $x_n\to a\wedge x_n\neq a\forall n$.

На відрізку $[x_n,a]\,([a,x_n])$ маємо:

$$\left.\begin{array}{l}
f(x) \text{ і } g(x) \text{ неперервні на}\\
{[x_n,a]}\,([a,x_n]),\\
f(x) \text{ і } g(x) \text{ диференційовна на}\\
(x_n;a)\ \big((a;x_n)\big), \quad g'(x)\neq 0 \text{ на}\\
(x_n;a)\ \big((a;x_n)\big),
\end{array}\right\}\Rightarrow
\begin{array}{l}
\text{можна використати}\\
\text{теорему Коші:}
\end{array}$$

$$\exists\xi_n\in(x_n;a)\ \big((a;x_n)\big)\ \ \frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Оскільки $f(a)=0$ і $g(a)=0$, то

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

За теоремою «про двох поліціянтів» (*принцип двостороннього обмеження*) (🗐 повторіть теорему [**2**, с. 102]!),

$$\begin{array}{ccc}
x_n<\xi_n<a & & x_n>\xi_n>a\\
\searrow\ \Downarrow\ \swarrow & \text{або} & \searrow\ \Downarrow\ \swarrow\ ,\\
a & & a
\end{array}$$

тобто $\lim\limits_{n}\xi_n=a$. За умовою $\exists\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=b$ (скінченна або нескінченна), тому за означенням границі за Гейне,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=b.$$

Отже, $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}=b \quad\Rightarrow\quad \exists\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=b$.

У силу довільності послідовності $\{x_n\}$, яка збігається до a, за означенням границі функції за Гейне,

$$\exists\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=b.\ \blacksquare$$

Зауваження 1.3. Перше правило Лопіталя виконується також і для границь $x\to a+0$ і $x\to a-0$.

Зауваження 1.4. Якщо похідні $f'(x)$ та $g'(x)$ є такими функціями, які задовольняють умови правила Лопіталя, то правило Лопіталя можна застосовувати двічі. Це роблять у тому випадку, коли залишається невизначеність після першого використання правила Лопіталя.

Зауваження 1.5. Якщо похідні $f'(x)$ та $g'(x)$ є неперервними в точці a, то перше правило Лопіталя можна записати у вигляді:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Зауваження 1.6. Зустрічаються випадки, коли $\nexists\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, хоча $\exists\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Наприклад,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\underset{\to 1}{\frac{x}{\sin x}}\cdot\underbrace{\underset{\text{н.м.ф.}}{x}\cdot\underset{\text{обм.}}{\cos\frac{1}{x}}}_{\text{н.м.ф.}}=0\ \Rightarrow\exists\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\text{[1]},$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\cos\frac{1}{x}-x^2\cdot\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{2x\cdot\cos\frac{1}{x}}^{\to 0}+\overset{\nexists}{\sin\frac{1}{x}}}{\underset{\to 1}{\cos x}}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пояснимо останнє. Розглянемо дві послідовності

$$x_n^{*}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\to 0 \text{ і } x_n^{**}=\frac{1}{2\pi n}\to 0,$$

тоді

---

[1] Тут і далі, під записом «н.м.ф.», будемо розуміти «нескінченно мала функція $f(x)$ у деякій точці a», тобто така функція, що $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$. Під записом «обм.» будемо розуміти «обмежена функція $f(x)$ у деякому околі точки a».

$$\lim_{n}\frac{f'(x_n^*)}{g'(x_n^*)}=\frac{1}{1}=1,\quad \lim_{n}\frac{f'(x_n^{**})}{g'(x_n^{**})}=\lim_{n}\frac{\frac{1}{2\pi n}}{1}=0.$$

Із означення границі функції за Гейне випливає відсутність границі: $\nexists\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Зауваження 1.7. У правилі Лопіталя стверджується, що за відповідних припущень із існування границі відношення похідних випливає існування границі відношення функцій (цей момент у формулюваннях тверджень виділено). Тому спочатку бажано відповідну рівність границь записувати під знаком запитання, який перекреслювати після перевірки існування границі відношення похідних.

Приклад 1.13. Обчислимо границю:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^2+2\cos x-2}=\left[\frac{0}{0}\right](\text{правилоЛопіталя})\overset{\cancel{?}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\left(x^4\right)'}{\left(x^2+2\cos x-2\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{4x^3}{2x-2\sin x}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right](\text{пр. Лопіталя})\overset{\cancel{?}}{=}\lim_{x\to0}\frac{12x^2}{2-2\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{6x^2}{1-\cos x}=\left\|\begin{matrix}x\to0\Rightarrow\\ 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right\|=\lim_{x\to0}\frac{12x^2}{x^2}=12.$$

Зауваження 1.8. Перше правило Лопіталя також можна використовувати, якщо $x\to\infty$, а саме:

$$\left.\begin{array}{l}1)\ f(x)\ \text{і}\ g(x)\ \text{диференційовні в}\\ B_\delta=\mathbb{R}\setminus(-\delta;\delta),\\ 2)\ g'(x)\neq0\quad\forall x\in B_\delta,\\ 3)\ \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0,\\ 4)\ \exists\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\ \text{скінченна або нескінченна,}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}1)\ \exists\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)},\\ 2)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}.\end{array}$$

Доведення. Заміна: $t=\dfrac{1}{x}$. Якщо $x\to\infty$, то $t\to0$. Введемо складені функції: $F(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $G(t)=g\left(\dfrac{1}{t}\right)$. Тоді

$$\lim_{t\to0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\ \text{(у випадку існування границь),}$$

$$G'(t)=g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(\frac{1}{t}\right)'=-g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{t^2}=-g'\left(x\right)\cdot x^2,\quad F'(t)=-f'\left(x\right)\cdot x^2. \tag{1.5}$$

1) Оскільки $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні в $B_\delta=\mathbb{R}\setminus(-\delta;\delta)$, тому із (1.5) $\Rightarrow$ $F(t)$ і $G(t)$ – диференційовні в $B_{1/\delta}(0)=\left(-1/\delta;1/\delta\right)\setminus\{0\}$.

2) Оскільки $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in B_\delta$ і $x \neq 0$, то із (1.5) $\Rightarrow$ $G'(t) \neq 0 \; \forall t \in B_{1/\delta}(0)$.

3) Оскільки $G(t) = g(x)$ і $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, то $\lim\limits_{t\to 0} G(t) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Аналогічно для $F(t)$: $\lim\limits_{t\to 0} F(t) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

4) Оскільки $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ і мають місце рівності (1.5), то

$$\lim_{t\to 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-f'(x)\cdot x^2}{-g'(x)\cdot x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \;\Rightarrow\; \exists \lim_{t\to 0} \frac{F'(t)}{G'(t)}.$$

Таким чином, всі припущення теореми 1.17 для $F(t)$ і $G(t)$ виконані, тому

$$\lim_{t\to 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{G(t)}.$$

Звідки маємо

$$\underset{\exists}{\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}} = \underset{\Rightarrow \quad \exists}{\lim_{t\to 0} \frac{F'(t)}{G'(t)}} = \underset{\Rightarrow \quad \exists}{\lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{G(t)}} = \underset{\Rightarrow \quad \exists}{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}}. \qquad \blacksquare$$

Теорема 1.18 *(II правило Лопіталя, розкриття невизначеностей* $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$*).*

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ f(x) \text{ і } g(x) \text{ диференційовні в } B_\delta(a), \\
2)\ g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in B_\delta(a), \\
3)\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty, \text{ тобто під знаком} \\
\text{границі } \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} \text{ має місце невизначеність } \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right], \\
4)\ \exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \text{ скінченна або нескінченна.}
\end{array}\right\} \Rightarrow
\begin{array}{l}
1)\ \exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} \\
2) \\
\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}.
\end{array}$$

Доведення. Нехай $x_n \to a$, тоді можливі два випадки: $x_n > a$ або $x_n < a$. Розглянемо перший випадок (у другому випадку доведення аналогічне).

Розглянемо $\begin{cases} x_n > a, \\ x_m > a \end{cases}$ і відповідно відрізки $[x_n; x_m]$ (або $[x_m; x_n]$). Оскільки $x_n \in B_\delta(a)$, $f(x)$ і $g(x)$ – диференційовні в $B_\delta(a)$ то $f(x)$ і $g(x)$ – диференційовні на $(x_n; x_m)$ (або $(x_m; x_n)$) і неперервні на $[x_n; x_m]$ (або $[x_m; x_n]$). Крім того, $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in B_\delta(a)$. Тому можна використати теорему Коші:

$$\frac{f(x_n) - f(x_m)}{g(x_n) - g(x_m)} = \frac{f'(c_{nm})}{g'(c_{nm})}, \tag{1.6}$$

де c_{nm} знаходиться між x_n і x_m.

<u>Випадок 1</u>: $\exists$ скінченна границя $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = b < \infty$.

За теоремою про «двох поліціянтів»,

$$\begin{array}{c} x_n < c_{nm} < x_m \\ \searrow \Downarrow \swarrow \\ a \end{array} \Rightarrow c_{nm} \to a, \quad \text{або} \quad \begin{array}{c} x_n > c_{nm} > x_m \\ \searrow \Downarrow \swarrow \\ a \end{array} \Rightarrow c_{nm} \to a.$$

Оскільки $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то за означенням границі за Гейне $\exists \lim\limits_{n,m\to\infty} \frac{f'(c_{nm})}{g'(c_{nm})}$, тоді

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall \left(n \ge n_0, m \ge n_0\right) \ \left| \frac{f'(c_{nm})}{g'(c_{nm})} - b \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зробимо перетворення:

$$\frac{f(x_n) - f(x_m)}{g(x_n) - g(x_m)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_m)}{f(x_n)}}{1 - \frac{g(x_m)}{g(x_n)}}. \tag{1.7}$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тоді за означенням границі за Гейне $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \infty$. Уведемо позначення $A_{nm} = \left(\frac{1 - \frac{f(x_m)}{f(x_n)}}{1 - \frac{g(x_m)}{g(x_n)}} \right)^{-1}$.

Зафіксуємо m, а n спрямуємо до нескінченності ($n \to \infty$), тоді $\lim\limits_{n\to\infty} A_{nm} = 1$, звідки

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_1 > n_0 : \forall n \ge n_1 \ \left| A_{nm} - 1 \right| < \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{|b| + \frac{\varepsilon}{2}}. \tag{1.8}$$

Тоді із (1.8) отримаємо

$$\left| A_{nm} \right| < \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{|b| + \frac{\varepsilon}{2}} + 1. \tag{1.9}$$

Оскільки із (1.6) і (1.7) випливає, що

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x_m)}{g(x_n) - g(x_m)} \cdot \left(\frac{1 - \frac{f(x_m)}{f(x_n)}}{1 - \frac{g(x_m)}{g(x_n)}} \right)^{-1} = \frac{f'(c_{nm})}{g'(c_{nm})} \cdot A_{nm},$$

тоді з урахуванням (1.9), отримаємо

$$\left| \frac{f(x_n)}{g(x_n)} - b \right| = \left| \frac{f'(c_{nm})}{g'(c_{nm})} \cdot A_{nm} - b \right| = \left| \left(\frac{f'(c_{nm})}{g'(c_{nm})} - b \right) \cdot A_{nm} + b \cdot A_{nm} - b \right| \le$$

$$\le \left| A_{nm} \right| \cdot \left| \frac{f'(c_{nm})}{g'(c_{nm})} - b \right| + |b| \cdot \left| A_{nm} - 1 \right| \le$$

$$\le\left(\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{|b|+\frac{\varepsilon}{2}}+1\right)\cdot\frac{\varepsilon}{2}+|b|\cdot\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{|b|+\frac{\varepsilon}{2}}=\frac{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+\frac{\varepsilon}{2}\cdot|b|+\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+|b|\cdot\frac{\varepsilon}{2}}{|b|+\frac{\varepsilon}{2}}=\frac{2\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+2\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot|b|}{|b|+\frac{\varepsilon}{2}}=\varepsilon .$$

Таким чином, $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\to b$. Разом маємо: $x_n\to a,\ x_n>a\ \Rightarrow\ \frac{f(x_n)}{g(x_n)}\to b$. В силу довільності послідовності $\{x_n\}$, приходимо до висновку, що

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=b .$$

<u>Випадок 2</u>: границя нескінченна $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$. Тоді, оскільки $g'(x)\neq 0\ \ \forall x\in B_\delta(a)$, то $f'(x)\neq 0\ \ \forall x\in B_\delta(a)$. Крім того, $\lim\limits_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0$.

Застосовуючи випадок 1, отримаємо

$$\exists\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty .\ \blacksquare$$

Приклад 1.14. Обчислимо границю:

$$\lim_{x\to 0+0}\left(\sqrt{x}\cdot\ln x\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}=\left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]\overset{\cancel{?}}{=}\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to 0+0}(-2\sqrt{x})=0 .$$

7. Опуклість функції

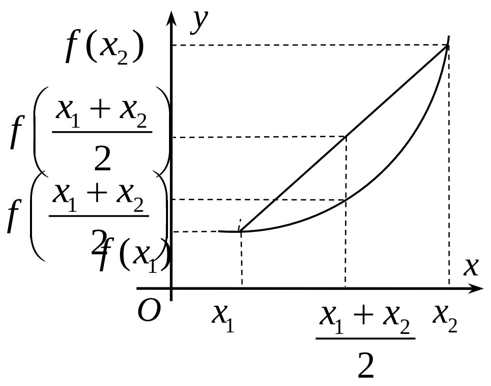


Рис. 1.13.

🗀**Означення 1.13** *(опуклості вниз)*. Функція $f(x)$ – *опукла вниз* на $[a,b]$[1] $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\forall x_1,x_2\in[a;b]\ \forall(q_1,q_2\ge 0\wedge q_1+q_2=1)$$
$$f(q_1x_1+q_2x_2)\le q_1f(x_1)+q_2f(x_2).$$

Зокрема, якщо $f(x)$ – опукла вниз на $[a,b]$, то (рис. 1.13)

$$\forall x_1,x_2\in[a,b]\ \ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} .$$

Аналогічно, функція $f(x)$ – *опукла вгору* на $[a;b]$ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\forall x_1,x_2\in[a;b]\ \forall(q_1,q_2\ge 0\wedge q_1+q_2=1)\ \ f(q_1x_1+q_2x_2)\ge q_1f(x_1)+q_2f(x_2).$$

Покажемо рівність множин

$$\left\{x=q_1x_1+q_2x_2:\ q_1,q_2\ge 0\wedge q_1+q_2=1\right\}=[x_1,x_2],\ \text{якщо}\ x_1<x_2 .$$

---

[1] Замість відрізка $[a,b]$ може виступати інтервал (a,b), півінтервал, півпряма (відкрита або замкнена) або пряма.

Першу із них позначимо через A.

Дійсно, нехай $x \in A$, тобто $x = q_1x_1 + q_2x_2$, а $q_1, q_2 \ge 0 \wedge q_1 + q_2 = 1$, тоді

$$x = q_1x_1 + q_2x_2 \le q_1x_2 + q_2x_2 = x_2(q_1 + q_2) = x_2,$$

$$x = q_1x_1 + q_2x_2 \ge q_1x_1 + q_2x_1 = x_1(q_1 + q_2) = x_1.$$

Тому $x_1 \le x \le x_2 \Rightarrow x \in [x_1, x_2]$. Отже, $A \subset [x_1, x_2]$.

З іншого боку, якщо $x_1 \le x \le x_2$, тоді для $q_1 = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad q_2 = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ маємо

$$q_1 + q_2 = \frac{x_2 - x + x - x_1}{x_2 - x_1} = 1, \; q_1, q_2 \ge 0,$$

$$q_1x_1 + q_2x_2 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot x_2 = \frac{x_1x_2 - xx_1 + xx_2 - x_1x_2}{x_2 - x_1} = \frac{x(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = x.$$

Тобто $x \in A$. Отже, $A \supset [x_1, x_2]$. Таким чином, рівність множин доведено.

Перша геометрична інтерпретація опуклості вниз: графік опуклої вниз на відрізку $[a,b]$ функції розташовується не вище за хорду, що сполучає будь-які дві точки цього графіка, абсциси яких лежать на відрізку $[a,b]$.

Доведення. Якщо $f(x)$ – опукла вниз на $[a,b]$, тоді підставимо у означення $q_1 = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad q_2 = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ та отримаємо:

$$\forall \; x_1, x_2 \in [a,b]: \;\; (x_1 \ne x_2 \wedge x_1 \le x \le x_2) \;\; f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot f(x_2).$$

Позначимо $y_1 = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot f(x_1) + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot f(x_2)$, тоді $f(x) \le y_1$.

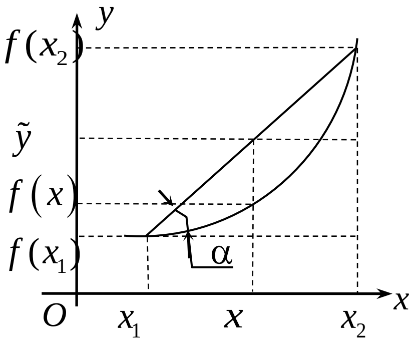


Рис. 1.14.

Нехай $\tilde{y}$ – ордината точки на хорді з абсцисою x. Доведемо, що $\tilde{y} = y_1$. Тоді одержимо (рис. 1.14):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\tilde{y} - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - \tilde{y}}{x_2 - x},$$

звідки

$$(\tilde{y} - f(x_1))(x_2 - x) = (f(x_2) - \tilde{y})(x - x_1),$$

$$\tilde{y} = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = y_1.$$

Таким чином, $\tilde{y} = y_1$, тому $f(x) \le \tilde{y}$. Це означає, що точка на графіку функції $f(x)$ з абсцисою x розташовується не вище за точку на хорді з тією ж абсцисою. ■

Лема 1.1. Має місце еквівалентність нерівностей $\forall \, x_1, x_2 \in [a,b]: \;\; x_1 < x < x_2$

$$f(x) \le \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot f(x_1) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot f(x_2) \;\Leftrightarrow\; \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Доведення. Пригадаємо, що $q_1 = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$, $q_2 = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, тоді

$$1 = q_1 + q_2 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Ліву частину нерівності $f(x) \le \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot f(x_2) + \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot f(x_1)$ помножимо на одиницю, яка виражається зазначеним вище співвідношенням:

$$f(x) \cdot \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \le \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot f(x_2) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot f(x_1).$$

Тоді

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\big(f(x) - f(x_2) \big) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\big(f(x_1) - f(x) \big),$$

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Усі перетворення були еквівалентні. ■

Теорема 1.19 *(критерій опуклості вниз).*

☝ $\left.\begin{array}{l} f(x)\ \text{– диференційовна} \\ \qquad \text{на } (a;b), \end{array}\right\} \Rightarrow$ для опуклості вниз функції $f(x)$ на $(a;b)$ необхідно й достатньо, щоб $f'(x) \nearrow$ нестрого на $(a;b)$.

Доведення. *Необхідність.* Функція $y = f(x)$ на $(a;b)$ опукла вниз, тому з урахуванням леми 1.1 матимемо

$$\forall\, x_1, x_2 \in (a,b):\quad x_1 < x < x_2 \qquad \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Оскільки $f(x)$ – диференційовна на $(a;b)$, то після граничного переходу при $x \to x_1$, $\;x \to x_2$ отримаємо

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \wedge \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'(x_2).$$

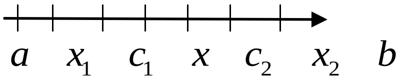
Отже, $\forall x_1, x_2 \in (a,b)\quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f'(x_1) \le f'(x_2)$, тобто $f'(x) \nearrow$ нестрого на інтервалі $(a;b)$.

Достатність. Розглянемо $x_1, x_2 \in (a,b):\ x_1 < x < x_2$. На $[x_1; x]$ застосуємо формулу Лагранжа (доведіть ✍ можливість її застосування!), тоді

$$\exists c_1 \in (x_1; x):\ f(x) - f(x_1) = f'(c_1) \cdot (x - x_1).$$

Аналогічно на $[x; x_2]$ маємо:

$$\exists c_2 \in (x_1, x_2):\ f(x_2) - f(x) = f'(c_2) \cdot (x_2 - x).$$



Звідси одержимо

$$f'(c_1)=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1},\quad f'(c_2)=\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}. \tag{1.10}$$

За умовою $f'(x)\nearrow$ нестрого на $(a;b)$, тому, оскільки $c_1<c_2$, то $f'(c_1)\le f'(c_2)$. З урахуванням (1.10) отримаємо

$$\forall\quad x_1,x_2\in(a;b):\quad x_1<x<x_2\quad \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Це й означає, згідно з лемою, опуклість вниз даної функції на (a,b).■

Наслідок 1.1 *(другий критерій опуклості вниз)*.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ – диференційовна} \\ \qquad \text{на } (a;b) \text{ двічі,} \end{array}\right\}\Rightarrow$$ для опуклості вниз функції $f(x)$ на $(a;b)$ необхідно й достатньо, щоб $f''(x)\ge 0$ на $(a;b)$.

Доведення. Функція $f(x)$ опукла вниз на $(a,b)\Leftrightarrow f'(x)$ на $(a;b)\nearrow$ нестрого (критерій опуклості вниз) $\Leftrightarrow$ $\left(f'(x)\right)'=f''(x)\ge 0$ на $(a;b)$ (згідно з критерієм нестрогої монотонності функції на інтервалі). ■

Друга геометрична інтерпретація опуклості вниз:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ –} \\ \text{диференційовна} \\ \text{на } (a;b), \end{array}\right\}\Rightarrow$$ функція $f(x)$ є опуклою вниз на $(a;b)$ тоді й лише тоді, коли дотична в будь якій точці $(a;b)$ розташовується нижче за графік функції.

Доведення. *Достатність.* Нехай $x_1,x_2\in(a;b)$, тоді рівняння дотичних в цих точках мають вигляд:

$$y=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1),$$
$$y=f(x_2)+f'(x_2)(x-x_2).$$

Оскільки дотичні розташовані нижче графіка функції, то

$$f(x)\ge f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1),$$
$$f(x)\ge f(x_2)+f'(x_2)(x-x_2).$$

Тобто

$$f(x)-f(x_1)\ge f'(x_1)(x-x_1),$$
$$f(x)-f(x_2)\ge f'(x_2)(x-x_2).$$

Нехай $a<x_1<x<x_2<b$. Розглянемо два випадки:

I. $x_1<x$ II. $x<x_2$

$$f'(x_1)\le\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \qquad f'(x_2)\ge\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}.$$

Здійснимо граничні переходи:

$$\underline{x\to x_2} \qquad \underline{x\to x_1}$$

$$f'(x_1)\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \qquad f'(x_2)\ge\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Таким чином, $x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) \le f'(x_2)$, що означає нестроге зростання $f'(x)$ на $(a;b)$, а тому за критерієм опуклості вниз отримаємо, що $f(x)$ – опукла вниз на $(a;b)$.

Необхідність. Нехай $f(x)$ – опукла вниз на $(a;b)$.

Потрібно довести, що графік дотичної нижче за графік функції на $(a;b)$, а саме:

$$f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in (a,b). \qquad (1.11)$$

Нерівність (1.11) рівносильна двом іншим:

I. $x > x_0$, $\quad f'(x_0) \le \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;

II. $x < x_0$, $\quad f'(x_0) \ge \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Введемо перепозначення:

$$\left.\begin{matrix} x_2 = x, \\ x_1 = x_0, \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 < x, \\ f'(x_1) \le \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}; \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} x_2 = x_0, \\ x_1 = x, \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x < x_2, \\ f'(x_2) \ge \dfrac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}. \end{cases}$$

Згідно з доведенням необхідності в теоремі 1.19 опуклість вниз функції на $(a;b)$ еквівалентна двом отриманим нерівностям, які у свою чергу еквівалентні нерівності (1.11). ■

В наведених нижче прикладах дослідимо функції на опуклість.

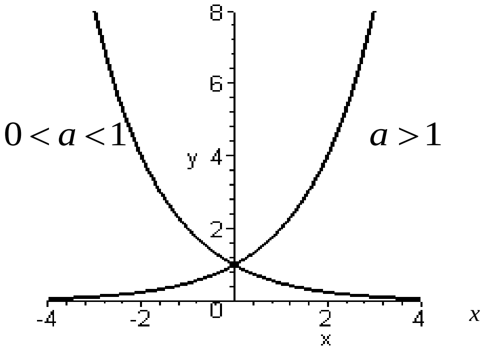


Рис. 1.15.

Приклад 1.15. Розглянемо функцію $y = a^x$, $a > 0$, $a \ne 1$. Знайдемо другу похідну: $y' = a^x \ln a$, $y'' = a^x (\ln a)^2 > 0$. Висновок: функція $y = a^x$ на $\mathbb{R}$ строго опукла вниз $(\cup)$. Графіки функцій зображено на рис. 1.15.

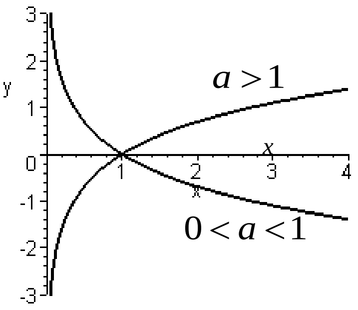


Рис. 1.16.

Приклад 1.16. Для функції $y = \log_a x, a > 0, a \ne 1$ знайдемо другу похідну: $y' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $y'' = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2} \right)$. Отримаємо:

1) $0 < a < 1 \Rightarrow y'' > 0 \Rightarrow$ функція опукла вниз $(\cup)$ на $(0;+\infty)$,

2) $a > 1 \Rightarrow y'' < 0 \Rightarrow$функція опукла вгору $(\cap)$ на $(0;+\infty)$.

Графіки функцій зображено на рис. 1.16.

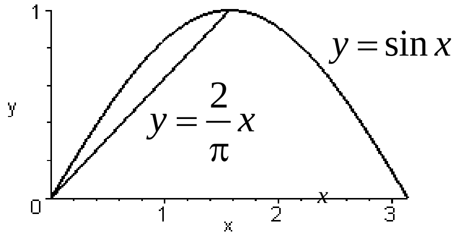


Рис. 1.17.

Приклад 1.17. Розглянемо функцію $y=\sin x$ при $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ (рис. 1.17). Отримаємо

$$y''=-\sin x<0 \quad \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right] \;\Rightarrow$$

$$y=\sin x-\text{ опукла вгору } (\cap) \text{ на } [0,\pi/2].$$

Для функції з прикладу 1.17 отримаємо одну важливу нерівність. Із першої геометричної інтерпретації опуклості вгору функції випливає, що хорда, яка сполучає точки $(0,0)$ і $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, тобто пряма $y=\frac{2}{\pi}x$ на відрізку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, розташована не вище за графік функції $y=\sin x$ (див. рис. 1.17). Звідси отримаємо нерівність

$$\sin x\ge\frac{2}{\pi}x \text{ при } \quad 0\le x\le\frac{\pi}{2}.$$

Пригадавши відому з теорії границь нерівність [**2**, с. 128]

$$\sin x\le x \text{ при } \quad x\ge 0,$$

одержимо

$$\boxed{\frac{2}{\pi}x\le\sin x\le x \text{ при } \quad 0\le x\le\frac{\pi}{2}}$$

8. Точки перегину

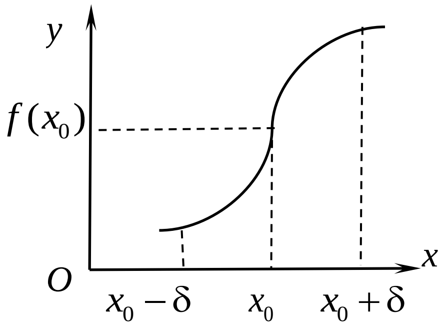


Рис. 1.18.

🗁 **Означення 1.14.** Нехай функція $f(x)$ є неперервною в точці x_0. Точка $M(x_0,f(x_0))$ – *точка перегину графіка функції* $y=f(x)$ ☝ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ існує такий δ-окіл точки x_0, в межах якого функція змінює напрямок опуклості при переході через точку x_0, тобто

$M(x_0,f(x_0))$ – *точка перегину графіка функції* $y=f(x)$ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\exists\delta>0:\big(\text{в } (x_0-\delta;x_0) \quad f(x) \quad -\cup(\cap)\big) \;\wedge\; \big(\text{в } (x_0;x_0+\delta) \quad f(x) \quad -\cap(\cup)\big).$$

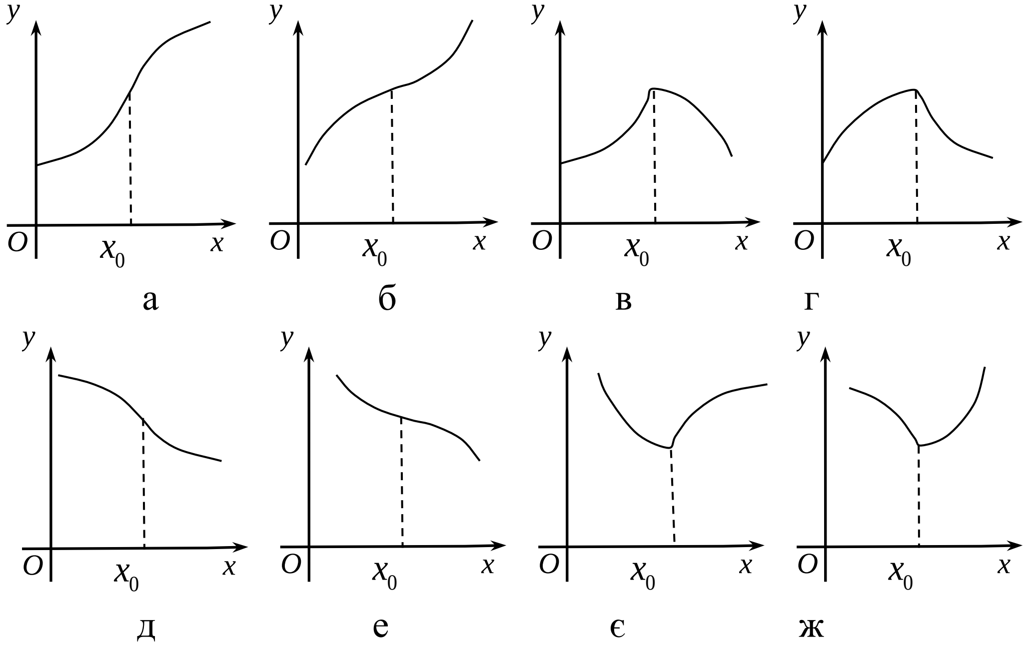
Теорема 1.20 *(необхідна умова перегину).*

☝ 1) $f(x)$ – диференційовна в $B_\delta(x_0)=(x_0-\delta;x_0+\delta)$,
2) $M(x_0,f(x_0))$ – точка перегину, 3) $\exists f''(x_0)$, $\Rightarrow \quad f''(x_0)=0$.

Доведення. Нехай $f(x)$ диференційовна в $B_\delta(x_0)$. Оскільки $M(x_0,f(x_0))$– точка перегину, то

$$\left.\begin{array}{l}\text{в } (x_0-\delta;x_0) \quad f(x)-\cup(\cap) \quad \Rightarrow \quad \text{(критерій опуклості) } f'(x)\nearrow(\searrow),\\ \text{в } (x_0;x_0+\delta) \quad f(x)-\cap(\cup) \quad \Rightarrow \quad \text{(критерій опуклості) } f'(x)\searrow(\nearrow),\end{array}\right\}\Rightarrow$$

т. x_0 – точка локального максимуму (мінімуму) функції $f'(x)\Rightarrow f''(x_0)=0$ (теорема Ферма). ■



а б в г

д е є ж

Рис. 1.19.

Умова $f''(x_0)=0$ є тільки необхідною умовою перегину в точці $M\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$. Наприклад, для функції $y=x^4$ в точці $x_0=0$ маємо $y''(0)=12x^2\big|_{x=0}=0$, але графік цієї функції в точці $(0,0)$ не має перегину (✍ накресліть графік функції!).

На рис. 1.19 зображено можливі типи перегинів графіків функцій. Перегини, зображені на рис. 1.19 в, г, є, ж відповідають піковидним екстремумам. Зауважимо, що при переході через точки екстремумів, зображених на рис. 1.11 а, г, д, ж, функція не змінює напрям опуклості, тому в цих точках немає перегинів.

Теорема 1.21 *(достатня умова перегину).*

$$\left.\begin{array}{l}\text{1) } f(x) \text{ двічі диференційовна в } B_\delta(x_0),\\ \text{2) } f''(x_0)=0\text{; 3) при переході через т. } x_0\\ \text{в } B_\delta(x_0) \text{ друга похідна } f''(x) \text{ змінює знак,}\end{array}\right\}\Rightarrow \quad M\left(x_0,f\left(x_0\right)\right) \text{ – точка перегину.}$$

Доведення. При переході через точку перегину x_0 в $B_\delta(x_0)$ друга похідна $f''(x)$ змінює свій знак, тому, застосовуючи другий критерій опуклості, отримаємо:

$$\left.\begin{array}{l}\forall x\in(x_0-\delta;x_0)\quad f'(x)>0\,(<0)\ \Rightarrow\ f(x)\ -\ \cup(\cap),\\ \forall x\in(x_0;x_0+\delta)\quad f'(x)<0\,(>0)\ \Rightarrow\ f(x)\ -\ \cap(\cup),\end{array}\right\}\Rightarrow\ M\big(x_0,f(x_0)\big)$$ – точка перегину (за означенням). ■

9. Асимптоти графіка функції

🗁**Означення 1.15.** Пряма $x=x_0$ – *вертикальна асимптота графіка функції* $y=f(x)$ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=\infty$.

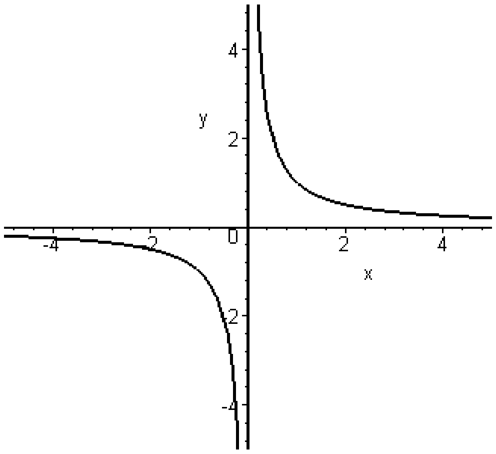


Рис. 1.20.

Приклад 1.18. Для функції $y=\dfrac{1}{x}$ (рис. 1.20) маємо

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty,\ \lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty.$$

Тому $x=0$ – вертикальна асимптота графіка цієї функції. Зауважимо, що вертикальну асимптоту графік функції може мати тільки в *точках розриву другого роду* цієї функції [**2**, с. 155].

🗁**Означення 1.16.** Пряма $y=kx+b$ – *похила асимптота графіка функції* $y=f(x)$ на $+\infty$ $(-\infty)$ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ відстань від точки графіка функції $y=f(x)$ до графіка прямої $y=kx+b$ прямує до 0, якщо $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$. (У випадку, коли функція визначена для як завгодно великих значень x).

Знайдемо формулу для обчислення k і b.

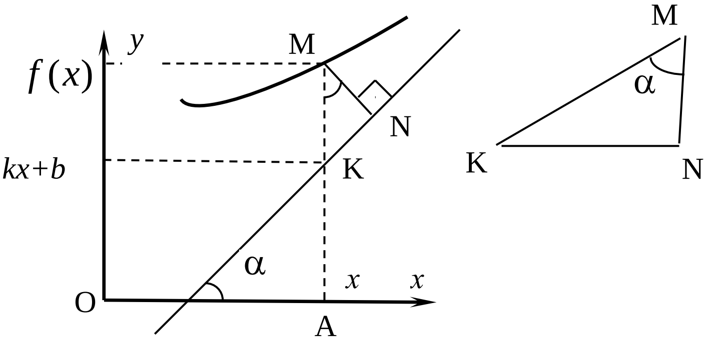


Рис. 1.21.

На рис. 1.21 відстань, про яку мова у означенні – це MN. У $\triangle KNM$ $(\angle N=90^{\circ})$ маємо:

$$MN=MK\cdot\cos\alpha,$$

Тоді

$$MK=AM-AK=$$
$$=\left|f(x)-\big(kx+b\big)\right|,$$

$$\left.\begin{array}{l}MN=\left|f(x)-\big(kx+b\big)\right|\cdot\cos\alpha,\\ x\to+\infty\Rightarrow\quad MN\to 0,\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left|f(x)-\big(kx+b\big)\right|=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-(kx+b)}{x}=0\Rightarrow$$

$$0=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k\right].$$

Висновок: ☝

$k=\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)}\dfrac{f(x)}{x}$,	$b=\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)}\big(f(x)-kx\big)$

Окремим випадком є *горизонтальна асимптота* $y = b$, тоді $k = 0$ і

$$\boxed{b = \lim_{x\to+\infty\,(-\infty)} f(x)}$$

Приклад 1.19. Графік функції $y = \dfrac{1}{x}$ має горизонтальну асимптоту на $+\infty$ і на $-\infty$ $y = 0$ (див. рис. 1.20), оскільки $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Приклад 1.20. Знайти асимптоти графіка функції $y = \dfrac{3x^3 - 2}{x^2}$.

Область визначення функції: $x \neq 0$.

1) Шукаємо горизонтальні асимптоти ($y = b$):

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3 - 2}{x^2} = \pm\infty .$$

Оскільки обчислена границя є нескінченною, графік заданої функції не має горизонтальної асимптоти.

2) Шукаємо вертикальні асимптоти ($x = x_0$):

$$\lim_{x\to\pm 0} \frac{3x^3 - 2}{x^2} = \lim_{x\to\pm 0}\left(3x - \frac{2}{x^2}\right) = \pm\infty .$$

Оскільки функція має нескінчену границю при $x \to 0$, то існує вертикальна асимптота $x = 0$. В інших точках функція неперервна, тобто інших вертикальних асимптот її графік не має.

3) Шукаємо похилі асимптоти ($y = kx + b$):

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\dfrac{3x^3 - 2}{x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3 - 2}{x^3} = 3, \text{ тобто } k = 3;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \big(y(x) - kx\big) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^3 - 2}{x^2} - 3x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2}{x^2} = 0, \text{ тобто } b = 0 .$$

Таким чином, похилою асимптотою для графіка заданої функції буде пряма $y = 3x$.

10. Загальна схема дослідження функції за допомогою похідної та побудова графіків

1) Знайти область визначення $D(f)$ заданої функції,
2) знайти множину значень $E(f)$ функції елементарними методами, якщо це можливо,
3) дослідити функцію на парність, непарність,
4) дослідити на періодичність,
5) дослідити на неперервність і з’ясувати характер точок розриву,
6) знайти асимптоти графіка функції (застосовувати результати п. 9, §2 цього розділу),

7) знайти проміжки монотонності, точки екстремуму (за допомогою достатньої умови монотонності функції на інтервалі, необхідної умови та достатніх умов локального екстремуму),
8) знайти проміжки опуклості, точки перегину (використати критерії опуклості, необхідну умову та достатню умови перегину),
9) знайти точки перетину з осями координат, значення функції в характерних точках,
10) побудувати графік функції.

Приклад 1.21. Провести повне дослідження та побудувати графік функції

$$y=\frac{x^3}{x^2-1}.$$

1) $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$. 2) $E(y)=\mathbb{R}$.

3) $y(-x)=-y(x)\Rightarrow$ функція непарна, тому її графік симетричний відносно точки O(0,0). *Отже, дослідження будемо проводити на промені* $[0;+\infty)$.

4) Функція неперіодична.

5) Точкою розриву на промені $[0;+\infty)$ є $x=1$. Оскільки

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=\left[\frac{1}{\left(1+0\right)^2-1}\right]=+\infty,\quad \lim_{x\to1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=\left[\frac{1}{\left(1-0\right)^2-1}\right]=-\infty,$$

то в точці $x=1$ розрив II роду.

Функції $g(x)=x^3$ і $h(x)=1-x^2$ неперервні на $[0;+\infty)$, як многочлени, тому дана функція у точках, де знаменник $h(x)=1-x^2$ на $[0;+\infty)$ не дорівнює нулю (тобто при $x\neq1$), є неперервною функцією як частка двох неперервних функцій.

6) З п. 5) випливає, що $x=1$ – вертикальна асимптота.

Знайдемо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-kx\big)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=0,$$

тому $y=x$ – похила асимптота на $+\infty$.

Оскільки графік функції має на $+\infty$ похилу асимптоту, то горизонтальні асимптоти в нього на $+\infty$ відсутні.

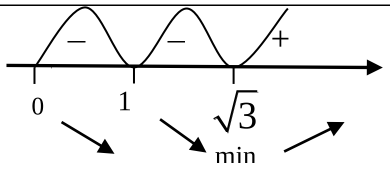
7) Для дослідження функції на монотонність і пошуку її точок екстремуму знайдемо першу похідну:

$$y'=\frac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

Знайдемо критичні точки на промені $[0;+\infty)$, тобто точки, в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує:

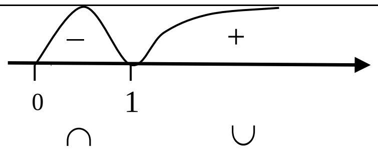
$$\begin{cases} y' = 0, \\ x \in [0;+\infty), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0, \\ x \in [0;+\infty), \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{3},\ x = 0\,;$$

y' не існує в точці $x = 1 \in [0;+\infty)$.

Знаки y':	
Характерні точки	
Напрямки монотонності, loc extr	
Значення функції в точках loc extr	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$

8) Для дослідження функції на опуклість і пошуку точок перегину її графіка знайдемо знак другої похідної на промені $(0;+\infty)$:

$$y'' = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)(2(x^2-1)\cdot 2x)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x\left(x^2+3\right)}{(x^2-1)^3}.$$

Знаки y'':	
Характерні точки	
Напрямки опуклості, точки перегину	

Внаслідок симетрії графіка функції відносно початку координат, функція опукла вниз, зокрема, на проміжку $(-1;0)$. Тому при переході через точку $x = 0$ функція змінює напрямок опуклості, що відповідає перегину в точці (0,0).

9) Точки перетину з осями: $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

Точка мінімуму $x = \sqrt{3}$ має тип, зображений на рис. 1.11 д, точка перегину (0,0) має тип, зображений на рис. 1.19 е.

10) Графік будуємо спочатку для $x \in [0;+\infty)$, після чого розповсюджуємо його симетрично відносно початку координат. В результаті отримаємо графік даної функції, що зображено на рис 1.22.

11. Пошук найбільших та найменших значень функції на відрізку

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то за *другою теоремою Вейєрштрасса* [**2**, с. 161], ця функція досягає свого найбільшого й найменшого значень в точках цього відрізка, тобто

$$\exists c_1 \in [a;b] \quad f(c_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \text{ і } \exists c_2 \in [a,b] \quad f(c_2) = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

Точки c_1, c_2 можуть бути або точками екстремуму або кінцями відрізку $[a;b]$.

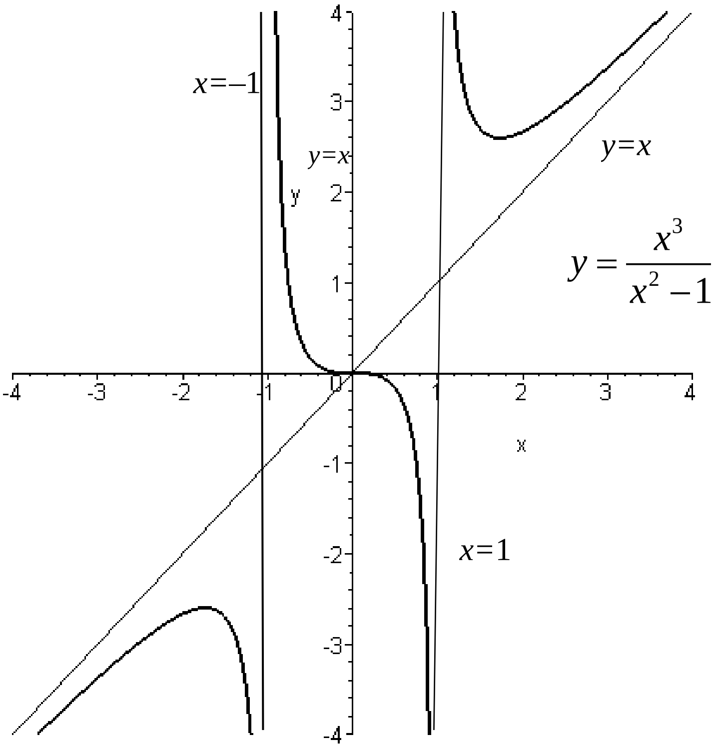


Рис. 1.22.

Схема пошуку найбільшого та найменшого значень:

1) Знаходимо критичні точки, тобто точки, в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує.

2) Відкидаємо з розгляду ті точки, що не належать відрізку $[a;b]$.

3) Знаходимо значення функції в критичних точках з відрізку й на кінцях відрізка $[a;b]$, обираємо з них найбільше і найменше, що й відповідатиме найбільшому й найменшому значенню функції на відрізку $[a;b]$.

Приклад 1.22. Розглянемо функцію $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$. Знайдемо похідну:

$$f'(x)=3\sin^2 x\cdot\cos x+3\cos^2 x\cdot(-\sin x)=3\sin x\cdot\cos x(\sin x-\cos x),$$

після чого знайдемо критичні точки – $f'(x)=0$:

$$\sin x=0;\qquad \cos x=0;\qquad \sin x=\cos x;$$

$$x=\pi n;\qquad x=\frac{\pi}{2}+\pi k;\qquad x=\frac{\pi}{4}+\pi m;\qquad n,m,k\in\mathbb{Z}.$$

Відкинувши критичні точки, що не належать відрізку $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$, отримаємо точки $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$. Знаходимо значення функції в обраних точках і на кінцях відрізку:

$$f(0)=1, \quad f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь: $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=1$, $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} f(x)=0$.

Приклад 1.23. Навколо півкулі радіуса r описано прямий круговий конус найменшого об'єму. При цьому припускається, що основа півкулі та конуса лежать в одній площині. Знайти цей об'єм.

На рис. 1.23 зображено переріз конуса вздовж його висоти. Об'єм у цьому випадку обчислимо за формулою

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot AO^2\cdot CO.$$

Із рис. 1.23 отримаємо

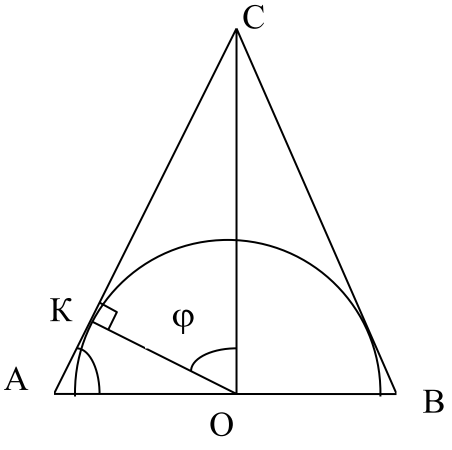


Рис. 1.23.

$$OK=r=const,$$

$$AO=\frac{r}{\sin\varphi},$$

$$CO=\frac{r}{\cos\varphi}.$$

Тоді

$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{r^2}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{r}{\cos\varphi}=$$

$$=\frac{1}{3}\pi r^3\frac{1}{\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi}.$$

Для того, щоб об'єм досягав найменшого значення, потрібно, щоб найбільшого значення досягала функція

$$f(\varphi)=\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi\to\max$$

на відрізку $[0;\pi/2]$.

Знайдемо критичні точки функції:

$$f'(\varphi)=2\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\cos\varphi+\sin^2\varphi(-\sin\varphi)=\sin\varphi(2\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)=0;$$

$$2\cos^2\varphi=\sin^2\varphi;$$

$$\mathrm{tg}^2\varphi=2; \ \mathrm{tg}\varphi=\pm\sqrt{2}; \qquad \sin\varphi=0;$$

$$\varphi=\mathrm{arctg}\sqrt{2}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]; \qquad \varphi=0\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

Для знаходження значення функції в критичній точці обчислимо значення в ній тригонометричних функцій:

$$\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right)}}=\sqrt{\frac{1}{3}},$$

$$\sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right)}=\sqrt{\frac{2}{3}},$$

тоді $f\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}$. Оскільки $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, то $\max\limits_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=\frac{2}{3\sqrt{3}}$, тому

$$\min V=\frac{1}{3}\pi r^3\frac{1}{\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi}\bigg|_{\varphi=\operatorname{arctg}\sqrt{2}}=\frac{\pi r^3\sqrt{3}}{2}.$$

§ 3. Формула Тейлора

1. Формула Тейлора для многочлена

Розглянемо многочлен степеня n

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n.$$

Обчислимо його похідні до порядку n включно:

$$p'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1},$$

$$p''(x)=2a_2+1\cdot2\cdot3a_3x+\ldots+(n-1)na_nx^{n-2},$$

$$p'''(x)=1\cdot2\cdot3a_3+\ldots+(n-2)(n-1)na_nx^{n-3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p^{(n)}(x)=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-2)(n-1)na_n=n!a_n$$

і значення їх у точці 0

$$p(0)=a_0,$$

$$p'(0)=a_1,$$

$$p''(0)=2a_2=2!a_2,$$

$$p'''(0)=3!a_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p^{(n)}(0)=n!a_n.$$

Звідки отримаємо (за домовленістю $0!=1$)

$$\boxed{a_k=\frac{p^{(k)}(0)}{k!},\quad k=\overline{0,n}}$$

Формула Маклорена для многочленів:

$$\boxed{p(x)=p(0)+\frac{p'(0)}{1!}x+\frac{p''(0)}{2!}x^2+\frac{p'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

Многочлен можна відтворити за його значенням та значеннями його похідних у точці 0.

За допомогою заміни $t=x-x_0$ можна отримати формулу розвинення многочлена за степенями $x-x_0$, що виражається через його похідні:

$$p(x)=p(t+x_0)=P(t)=A_0+A_1t+A_2t^2+\ldots+A_nt^n \qquad \Rightarrow A_0=P(0)=p(x_0),$$

$$P'(t)=\left(p\left(t+x_0\right)\right)'_t=p'_x\left(t+x_0\right)\cdot\left(t+x_0\right)'_t=p'_x\left(t+x_0\right) \;\Rightarrow A_1=P'(0)=p'(x_0),$$

$$P''\left(t\right)=\left(p'_x\left(t+x_0\right)\right)'_t=p''_{xx}\left(t+x_0\right)\left(t+x_0\right)'_t=p''_{xx}\left(t+x_0\right) \;\Rightarrow A_2=\frac{P''(0)}{2!}=\frac{p''(x_0)}{2!},$$

………………………………………………………………………………

$$P^{(n)}\left(t\right)=p^{(n)}_{x^n}\left(t+x_0\right) \qquad\qquad \Rightarrow A_n=\frac{P^{(n)}(0)}{n!}=\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Звідки

$$\boxed{p(x)=p(x_0)+\frac{p'(x_0)}{1!}\left(x-x_0\right)+\frac{p''(x_0)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\ldots+\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}\left(x-x_0\right)^n}$$

Цю формулу називають **формулою Тейлора** для многочлена в точці x_0.

2. Розвинення довільної функції

Припущення

☝	1) $f(x)$ задана на $(a;b)$, 2) $f(x)$ диференційовна $\left(n-1\right)$ раз на $(a;b)$, 3) $f(x)$ диференційовна n разів у точці $x_0\in(a;b)$

Розглянемо многочлен Тейлора

$$p_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\left(x-x_0\right)+\frac{f''(x_0)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\left(x-x_0\right)^n.$$

Якщо $f(x)$ довільна й не є многочленом, то $f(x)\neq p_n(x)$. Функцію $r_n(x)=f(x)-p_n(x)$ називають *залишковим членом формули Тейлора*.

Теорема 1.22 *(залишковий член формули Тейлора у формі Пеано)***.** У зазначених вище припущеннях залишковий член формули Тейлора в точці x_0 можна подати у формі Пеано:

$$\boxed{r_n(x)=o\left(\left(x-x_0\right)^n\right) \text{ в точці } x_0}$$

Тобто в зазначених припущеннях *функція майже не відрізняється від многочлена степеня n у деякому малому околі точки x_0*

Доведення формули Пеано. Дослідимо функцію $r_n(x)=f(x)-p_n(x)$. Маємо

$$p_n(x_0)=f(x_0),\quad r_n(x_0)=0,$$

$$p_n'(x_0)=f'(x_0),\; r_n'(x_0)=0,$$

$$p_n''(x_0)=f''(x_0),\; r_n''(x_0)=0,$$

$$\ldots \qquad\qquad\qquad \ldots$$

$$p_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0),\qquad r_n^{(n)}(x_0)=0.$$

Таким чином,

$$r_n(x_0)=r_n'(x_0)=r_n''(x_0)=\ldots=r_n^{(n)}(x_0)=0. \tag{1.12}$$

Тепер дослідження зводиться до необхідності доведення такого факту: якщо функція $r_n(x)$ задовольняє (1.12), тоді $r_n(x)=o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$ в точці x_0.

Доведення проведемо за індукцією.

1. Нехай $n=1$, тоді за умовою $r_1(x_0)=r_1'(x_0)=0$.

Потрібно довести: $r_1(x)=o(x-x_0)$.

Маємо:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_1(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{r_1(x)-r_1(x_0)}{x-x_0}=r_1'(x_0)=0,$$

а це за означенням функції $o(\gamma)$ означає, що $r_1(x)=o(x-x_0)$ в точці x_0.

2. Індуктивне припущення. Нехай справедливе співвідношення $r_n(x)=o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$ в точці x_0 за умови

$$r_n(x_0)=r_n'(x_0)=r_n''(x_0)=\ldots=r_n^{(n)}(x_0)=0.$$

3. Довести справедливість формули $r_{n+1}(x)=o\left(\left(x-x_0\right)^{n+1}\right)$ в точці x_0, за умови

$$r_{n+1}(x_0)=r_{n+1}{}'(x_0)=\ldots=r_{n+1}{}^{(n+1)}(x_0)=0. \qquad (1.13)$$

Із (1.13) випливає, зокрема, що $r_{n+1}(x)=r_{n+1}(x)-\underbrace{r_{n+1}(x_0)}_{=0}$. Скористаємося формулою Лагранжа (доведіть ✍ можливість її застосування!): поміж x і x_0 існує точка c така, що

$$r_{n+1}(x)=r_{n+1}(x)-r_{n+1}(x_0)=r_{n+1}'(c)\cdot\left(x-x_0\right). \qquad (1.14)$$

Позначимо $g_n(x)=r_{n+1}'(x)$, тоді

$$\begin{array}{c}g_n(x_0)=g_n'(x_0)=\ldots=g_n^{(n)}(x_0)=0,\\ \parallel \qquad\qquad \parallel \qquad\qquad \parallel\\ r_{n+1}{}'(x_0)=r_{n+1}{}''(x_0)=\ldots=r_{n+1}^{(n+1)}(x_0)=0.\end{array}$$

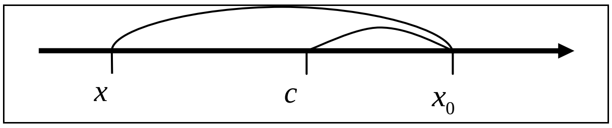
Тоді за індуктивним припущенням $g_n(x)=o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$. Тому

$$g_n(c)=o\left(\left(c-x_0\right)^n\right).$$

Доведемо, що

$$g_n(c)=o\left(\left(x-x_0\right)^n\right).$$

Дійсно, за побудовою $\left|x-x_0\right|>\left|c-x_0\right|$, тому



$$g_n(c)=o\left((c-x_0)^n\right) \;\Rightarrow\; \lim_{c\to x_0}\frac{g_n(c)}{(c-x_0)^n}=0 \Rightarrow \lim_{c\to x_0}\left|\frac{g_n(c)}{(c-x_0)^n}\right|=0,$$

$$\begin{array}{ccccc} 0\le & \left|\dfrac{g_n(c)}{(x-x_0)^n}\right| & < & \left|\dfrac{g_n(c)}{(c-x_0)^n}\right|. \\ \searrow & \downarrow & & \swarrow \\ & 0 & & \end{array}$$

Отже, $g_n(c)=o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$, тому $r_{n+1}{}'(c)=o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$. Таким чином, із (1.14) і останнього маємо

$$r_{n+1}(x)=r_{n+1}{}'(c)(x-x_0)=o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)(x-x_0)=o\left(\left(x-x_0\right)^{n+1}\right). \;\blacksquare$$

Формула Тейлора із залишковим членом у формі Пеано:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x)= f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\left(x-x_0\right)+\frac{f''(x_0)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\left(x-x_0\right)^n+ \\ +o\left(\left(x-x_0\right)^n\right) \end{aligned}}$$

Формулу Тейлора в точці $x_0=0$ називають **формулою Маклорена**.

Теорема 1.23. Нехай функція $f(x)$ задовольняє зазначеним вище припущенням і $f(x)=P_n(x)+o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$, де

$$P_n(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\ldots+A_n(x-x_0)^n \;-$$

деякий многочлен степеня, не вищого за n. Тоді $P_n(x)$ є многочленом Тейлора.

Доведення: Із формули Тейлора із залишковим членом у формі Пеано та із умови теореми маємо:

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\left(x-x_0\right)+\frac{f''(x_0)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\left(x-x_0\right)^n+o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)=$$

$$=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\ldots+A_n(x-x_0)^n+o\left(\left(x-x_0\right)^n\right).$$

Після граничного переходу при $x\to x_0$ в останній рівності отримаємо

$$A_0=f(x_0),$$

звідки

$$\frac{f'(x_0)}{1!}\left(x-x_0\right)+\frac{f''(x_0)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\left(x-x_0\right)^n+o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)=$$

$$=A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\ldots+A_n(x-x_0)^n+o\left(\left(x-x_0\right)^n\right).$$

Розділимо обидві частини останньої рівності на $(x-x_0)$, враховуючи, що $\dfrac{o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)}{x-x_0}=o\left(\left(x-x_0\right)^{n-1}\right)$:

$$\frac{f'(x_0)}{1!}+\frac{f''(x_0)}{2!}\left(x-x_0\right)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\left(x-x_0\right)^{n-1}+o\left(\left(x-x_0\right)^{n-1}\right)=$$

$$=A_1+A_2(x-x_0)+\ldots+A_n(x-x_0)^{n-1}+o\left(\left(x-x_0\right)^{n-1}\right).$$

Знову спрямуємо x до x_0, одержимо

$$A_1=\frac{f'(x_0)}{1!}.$$

Продовжуючи процес далі, отримаємо:

$$A_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\ k=0,1,2,...,n,$$

тобто многочлен $P_n(x)$ є многочленом Тейлора. Теорему доведено. ■

Теорема 1.23 стверджує, що жоден многочлен степеня, що не перевищує n, відмінний від многочлена Тейлора, не може наближати цю функцію з точністю $o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$ при $x\to x_0$.

Таблиця розвинень елементарних функцій за формулою Маклорена із залишковим членом у формі Пеано

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o\left(x^{2m}\right),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o\left(x^{2m+1}\right),$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right),$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^nx^n+o(x^n),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right).$$

Доведення формул таблиці будемо проводити, застосовуючи таблицю похідних вищих порядків.

1. Розглянемо розвинення $f(x)=e^x$ за формулою Маклорена ($x_0=0$). Оскільки $f^{(n)}(x)=e^x$, то $f^{(n)}(0)=e^0=1$. Підставимо в загальну формулу, отримаємо

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right).$$

2. Для функції $f(x)=\sin(x)$ відомо, що

$$f^{(n)}(x)=\left(\sin x\right)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),$$

тому

$$f(0)=0,$$

$$f'(0)=\sin\left(0+\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

$$f''(0)=\sin\left(0+\pi\right)=0,$$

$$f'''(0)=\sin\left(0+\frac{3\pi}{2}\right)=-1,$$

$$\ldots$$

$$f^{(2m-1)}(0)=\sin\left(0+\frac{\pi}{2}(2m-1)\right)=\sin\left(\pi m-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(\pi m\right)=(-1)^{m-1},$$

$$f^{(2m)}(0)=\sin\left(0+\frac{\pi}{2}\cdot 2m\right)=0.$$

Отже,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o\left(x^{2m}\right).$$

Аналогічно отримуємо розвинення

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{m}\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o\left(x^{2m+1}\right).$$

3. Для функції $f(x)=(1+x)^m$ відомо, що

$$f^{(n)}(x)=m\left(m-1\right)\left(m-2\right)\ldots\left(m-n+1\right)\left(1+x\right)^{m-n},$$

тоді

$$f(0)=1,$$

$$f'(0)=m(1+0)^{m-1}=m,$$

$$f''(0)=m(m-1),$$

$$\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(0)=m\left(m-1\right)\left(m-2\right)\ldots\left(m-n+1\right),$$

отже,

$$f(x)=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m\left(m-1\right)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m\left(m-1\right)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right).$$

4. Для отримання розвинення функції $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ виберемо в попередній формулі $m=-1$, тоді

$$f(x)=1-x+\frac{(-1)(-2)}{2!}x^2+\frac{(-1)(-2)(-3)}{n!}x^3+\ldots+\frac{(-1)^n n!}{n!}x^n+o\left(x^n\right),$$

тобто

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n).$$

Зауважимо, що остання формула відповідає формулі суми нескінченної спадної геометричної прогресії з першим членом $b_1 = 1$ і знаменником $q = -x$:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}.$$

Інші розвинення таблиці отримати самостійно ✍!

Інші форми подання формули Тейлора із залишковим членом у формі Пеано:

форма подання через прирости: $\Delta f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\left(\Delta x\right)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\left(\Delta x\right)^n + o\left(\left(\Delta x\right)^n\right),$
форма подання через диференціали: $\Delta f(x_0) = \frac{1}{1!}df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0) + o\left(\left(\Delta x\right)^n\right)$

Доведення. Форму подання формули Тейлора через приріст функції та приріст аргументу отримаємо, позначивши в розвиненні

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\left(x - x_0\right) + \frac{f''(x_0)}{2!}\left(x - x_0\right)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\left(x - x_0\right)^n +$$
$$+ o\left(\left(x - x_0\right)^n\right)$$

приріст аргументу в такий спосіб: $\Delta x = x - x_0$. Для отримання подання через диференціали будемо вважати, що x – незалежна змінна, тоді

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx, \quad d^2 f(x_0) = f''(x_0)\left(dx\right)^2,$$
$$d^{(n)} f(x_0) = f^{(n)}(x_0)\left(dx\right)^{(n)},$$

отже,

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = \frac{1}{1!}df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0) + o\left(\left(\Delta x\right)^n\right). \blacksquare$$

Зауваження 1.9. Формула Тейлора із залишковим членом у формі Пеано має численні застосування, однак усі вони локального характеру, тобто дозволяють досліджувати поведінку функції через поведінку її многочлена Тейлора лише в точках x, достатньо близьких до x_0. У деяких задачах функцію потрібно наблизити многочленом і визначити точність такого наближення, оцінюючи модуль різниці між функцією і многочленом. Це питання не може вирішити форма Пеано залишкового члена, яка може лише стверджувати прямування до нуля такої різниці при $x \to x_0$. Отже, потрібно знайти іншу форму залишкового члена:

Інші форми залишкового члена. *Припущення:*

☝	1) $f(x)$ задана на $[x_0; x_0 + \delta]$ $\left([x_0 - \delta; x_0]\right)$, 2) $f(x)$ неперервно диференційовна n разів на $[x_0; x_0 + \delta]$ $\left([x_0 - \delta; x_0]\right)$, 3) $f(x)$ диференційовна $\left(n+1\right)$ разів на $(x_0; x_0 + \delta)$ $\left((x_0 - \delta; x_0)\right)$

Форма Шльомільха-Роша (загальна форма)	$r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}\big(x_0+\Theta(x-x_0)\big)}{n!p}\cdot(1-\Theta)^{n-p+1}\cdot(x-x_0)^{n+1}$ $(0<\Theta<1,\ p\in\mathbb{N})$
При $p=n+1$ отримаємо форму Лагранжа	☝ $r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}\big(x_0+\Theta(x-x_0)\big)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}\ (0<\Theta<1)$
При $p=1$ отримаємо форму Коші	$r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}\big(x_0+\Theta(x-x_0)\big)}{n!}\cdot(1-\Theta)^{n}\cdot(x-x_0)^{n+1}$ $(0<\Theta<1)$

Доведення. За означенням залишковий член $r_n(x)=f(x)-p_n(x)$, тобто

$$r_n(x)=f(x)-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}\big(x-x_0\big)-\frac{f''(x_0)}{2!}\big(x-x_0\big)^2-\ldots-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\big(x-x_0\big)^n.$$

Введемо допоміжну функцію

$$\varphi(z)=f(x)-f(z)-\frac{f'(z)}{1!}\big(x-z\big)-\frac{f''(z)}{2!}\big(x-z\big)^2-\ldots-\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\big(x-z\big)^n.$$

Визначимо її властивості:

1) $\varphi(x_0)=r_n(x)$,

2) $\varphi(x)=0$,

3) обчислимо похідну, враховуючи припущення:

$$\varphi'_z(z)=-f'(z)-f''(z)\big(x-z\big)-f'(z)\big(-1\big)-\frac{f'''(z)}{2!}\big(x-z\big)^2-$$

$$-\frac{f''(z)}{2!}2\big(x-z\big)(-1)-\frac{f^{(4)}(z)}{3!}\big(x-z\big)^3-$$

$$-\frac{f'''(z)}{3!}3\big(x-z\big)^2(-1)-\ldots-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}\big(x-z\big)^n+\frac{f^{(n)}(z)}{n!}n\big(x-z\big)^{n-1},$$

тобто

$$\varphi'_z(z)=-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}\big(x-z\big)^n.$$

Виходячи з останніх двох припущень, приходимо до висновку про

1) неперервність $\varphi(z)$ на $[x_0;x_0+\delta]$ $\big([x_0-\delta;x_0]\big)$,

2) диференційовність $\varphi(z)$ на $(x_0;x_0+\delta)$ $\big((x_0-\delta;x_0)\big)$.

Введемо ще одну допоміжну функцію $\psi(z)$, яка б задовольняла властивості, аналогічні $\varphi(z)$, крім того

$$\psi'(z)\neq 0\ \ \forall z\in(x_0;x_0+\delta)\ \big((x_0-\delta;x_0)\big).$$

Тоді можна застосувати формулу Коші для $\varphi(z)$ і $\psi(z)$:

$$\exists\ c \text{ між } x \text{ і } x_0:\ \frac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{\psi(x_0)-\psi(x)}=\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)},$$

де $x\in[x_0,x_0+\delta]$ $\big([x_0-\delta,x_0]\big)$. Отже, враховуючи властивості функції $\varphi(z)$, отримаємо

$$\frac{r_n(x)-0}{\psi(x_0)-\psi(x)}=-\frac{f^{n+1}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n\cdot\frac{1}{\psi'(c)},$$

$$r_n(x)=\frac{f^{n+1}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n\cdot\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(c)}\quad(x_0\leqslant c\leqslant x).$$

Покладемо $\psi(z)=(x-z)^p$, тоді

$$\psi(x)=0,\qquad \psi(x_0)=(x-x_0)^p,$$

$$\psi'_z(z)=-p(x-z)^{p-1},\qquad \psi'(c)=-p(x-c)^{p-1},$$

тому

$$r_n(x)=\frac{f^{n+1}(c)}{p\cdot n!}(x-c)^{n+1-p}(x-x_0)^p, \tag{1.15}$$

де $x_0\leqslant c\leqslant x$. Оскільки c лежить між x і x_0, то

$$\exists\quad \Theta\in(0;1):\ c=x_0+\Theta(x-x_0),$$

отже, формула (1.15) набуває вигляду

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\Theta(x-x_0)\right)}{n!p}(x-x_0)^{n-p+1}\cdot(1-\Theta)^{n-p+1}\cdot(x-x_0)^p,$$

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\Theta(x-x_0)\right)}{n!p}(1-\Theta)^{n-p+1}\cdot(x-x_0)^{n+1}. \tag{1.16}$$

Таким чином, отримано формулу Шльомільха-Роша. Щоб отримати формулу Лагранжа, покладемо в (1.16) $p=n+1$, тоді

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\Theta(x-x_0)\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{1.17}$$

або

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(c\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ (x_0\leqslant c\leqslant x). \tag{1.18}$$

Щоб отримати формулу Коші, покладемо в (1.16) $p=1$:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\Theta(x-x_0)\right)}{n!}(1-\Theta)^n(x-x_0)^{n+1}. \tag{1.19}$$

Приклад 1.24. Оскільки функція $f(x)=e^x$ має похідну порядку n вигляду $f^{(n)}(x)=e^x$, то при $x_0=0$ залишковий член у формі Лагранжа (1.17) набуває вигляду

$$r_n(x)=\frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\ (0<\Theta<1),$$

і функція буде розвиненою за формулою Маклорена з залишковим членом зазначеної форми таким чином:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\qquad(0<\Theta<1).$$

Знайдемо наближене значення числа e з точністю до 0,001. Така задача зводиться до пошуку кількості n доданків у формулі Тейлора, для яких досягається необхідна точність. Тобто потрібно знайти значення n, при якому наближена формула $f(x) \approx p_n(x)$ має точність 0,001. Отримати оцінку точності дозволить оцінювання залишкового члена $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$.

У нашому випадку потрібно обрати $x = 1$, тоді

$$r_n(1) = \frac{e^{\Theta}}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Якщо $n = 6$, то $(n+1)! = 7! = 5040$, а

$$r_6 = \frac{3}{(n+1)!} < 0,0006 < 0,001.$$

Тому наближена формула

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$$

має точність 0,001.

Приклад 1.25. Розвинення функції $f(x) = \sin x$ за формулою Маклорена має вигляд

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + r_{2m}(x).$$

Знайдемо залишковий член у формі Лагранжа (1.17):

$$f^{(2m+1)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}(2m+1)\right) = \sin\left(x + \pi m + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \pi m\right) = (-1)^m \cos x,$$

$$r_{2m}(x) = \frac{(-1)^m \cos \Theta x}{(2m+1)!} x^{2m+1} \quad (0 < \Theta < 1).$$

1) Розглянемо наближену формулу

$$\sin x \approx x.$$

Знайдемо, для яких x ця наближена формула має точність 0,001. Для цієї формули $n = 1$, тому нерівність

$$|r_2(x)| = \left|\frac{(-1)^1 \cos \Theta x}{3!} \cdot x^3\right| < \frac{1}{6}|x|^3 < 0,001$$

здійснюється при $|x| < \sqrt[3]{0,006} < 0,1817$. Таким чином, наближена формула $\sin x \approx x$ має точність 0,001 при $-0,18 \le x \le 0,18$.

2) Розглянемо наближену формулу

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}.$$

Знайдемо, для яких x ця наближена формула має точність 0,001. Для цієї формули $n = 2$, тому

$$|r_4(x)| = \left|\frac{(-1)^3 \cos \Theta x}{5!} \cdot x^3\right| < \frac{1}{120}|x|^5 < 0,001.$$

Остання нерівність здійснюється при $|x| < 0,6543$, тому при таких x наближена формула $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!}$ має точність 0,001.

Рис. 1.24 ілюструє, що збільшення кількості доданків покращує точність формули Маклорена, а саме: із збільшенням їх кількості значення x, для яких досягається бажана точність, збільшуються, а графіки многочлена й довільної функції майже не відрізняються для ширшого діапазону значень аргументу x.

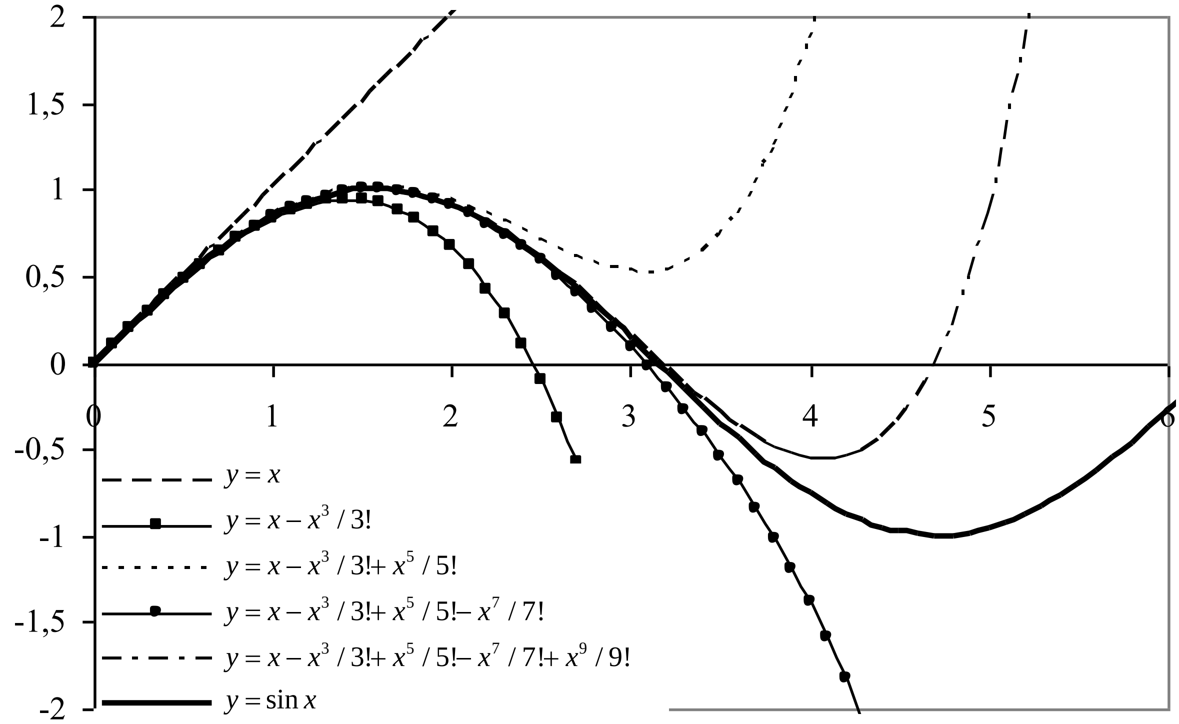


Рис. 1.24 .

3. Третя достатня умова локального екстремуму

Теорема 1.24 *(третя достатня умова* loc extr*)* Нехай функція $f(x)$ $(n-1)$ раз диференційовна в деякому δ-околі $B_\delta(c) = (c-\delta; c+\delta)$ точки c та має похідну порядку n в цій точці. Якщо перша похідна, що не обертається в нуль в точці c, має порядок n, і n є непарне число, то функція $f(x)$ у точці c не має екстремуму. Якщо така похідна парного порядку, то у випадку, коли вона додатна, функція буде мати в цій точці локальний мінімум, а коли від’ємна – максимум.

Доведення. За умовою

$$f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0, \; f^{(n)}(c) \neq 0. \qquad (1.20)$$

Завдяки припущенням теореми, до функції $f(x)$ можна застосувати формулу Тейлора в точці c із залишковим членом у формі Пеано. З урахуванням (1.20) отримаємо:

$$f(x) - f(c) = f^{(n)}(c) \cdot \frac{(x-c)^n}{n!} + o(x-c)^n = \frac{f^{(n)}(c) + \alpha}{n!} \cdot (x-c)^n \quad \forall x \in B_\delta(c),$$

де $\lim\limits_{x\to c}\alpha=0$.

Оскільки α – нескінченно мала функція в точці c, то

$$\operatorname{sgn}\left(f^{(n)}(c)+\alpha\right)=\operatorname{sgn}\left(f^{(n)}(c)\right)\ \forall x\in B_\delta(c)\setminus\{c\}.$$

Звідси

$$\operatorname{sgn}\left(f(x)-f(c)\right)=\operatorname{sgn}\left(f^{(n)}(c)\cdot(x-c)^n\right)\ \forall x\in B_\delta(c)\setminus\{c\}. \qquad (1.21)$$

<u>Випадок 1</u>: n – парне натуральне число. Тоді $(x-c)^n>0\ \ \forall x\in B_\delta(c)\setminus\{c\}$ і тому

$$\operatorname{sgn}\left(f(x)-f(c)\right)=\operatorname{sgn}\left(f^{(n)}(c)\right)\ \forall x\in B_\delta(c)\setminus\{c\}.$$

1) Якщо $f^{(n)}(c)>0$, то $f(x)-f(c)>0\ \ \forall x\in B_\delta(c)\setminus\{c\}\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ f(x)>f(c)\ \forall x\in B_\delta(c)\setminus\{c\}\ \Rightarrow\ c$ – точка loc min.

2) Якщо $f^{(n)}(c)<0$, то $f(x)-f(c)<0\ \ \forall x\in B_\delta(c)\setminus\{c\}\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ f(x)<f(c)\ \forall x\in B_\delta(c)\setminus\{c\}\ \Rightarrow\ c$ – точка loc max.

<u>Випадок 2</u>: n – непарне натуральне число. Нехай $f^{(n)}(c)>0$.

Якщо $x\in B_\delta(c)\setminus\{c\}$ і $x>c$, то із (1.21) маємо: $f(x)>f(c)$.

Якщо $x\in B_\delta(c)\setminus\{c\}$ і $x<c$, то із (1.21) – $f(x)<f(c)$.

Отже, в точці c немає екстремуму. Випадок $f^{(n)}(c)<0$ є аналогічним **(✍ розглянути самостійно !). ■**

Приклад 1.26. Дослідити функцію $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ на локальний екстремум у точці 0.

Точка $x=0$ є стаціонарною, оскільки $f'(0)=\left(e^x-e^{-x}-2\sin x\right)\Big|_{x=0}=0$.

Знайдемо вищі похідні:

$$f''(0)=\left(e^x+e^{-x}-2\cos x\right)\Big|_{x=0}=0,$$

$$f'''(0)=\left(e^x-e^{-x}+2\sin x\right)\Big|_{x=0}=0,$$

$$f^{IV}(0)=\left(e^x+e^{-x}+2\cos x\right)\Big|_{x=0}=4>0,$$

тому внаслідок останньої теореми зробимо висновок, що в точці 0 – локальний мінімум.

Розділ 2. ПРАКТИКУМ ІЗ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

§ 1. Означення похідної

У теоретичній частині були вже розглянуті приклади на обчислення похідної за означенням для деяких основних елементарних функцій. Наведемо в цьому параграфі два приклади як зразок, а детальніше застосування означення похідної для дослідження функцій на диференційовність буде розглянуто в § 3.

Приклад 2.1. а) Знайти $y'(1)$, якщо

$$y(x) = x + (x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,;$$

б) знайти $y'(5)$, якщо $y = (x-4)^4(x-2)^3(x-5)\sin(x-4)$.

Розв'язання. а) Знайдемо похідну функції в точці $x_0 = 1$ за означенням:

$$y'(1) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(1+\Delta x) - y(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+\Delta x + \Delta x\arcsin\sqrt{\dfrac{1+\Delta x}{2+\Delta x}} - 1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(1+\arcsin\sqrt{\dfrac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}\right) = 1+\frac{\pi}{4}. \blacksquare$$

б) Знайдемо похідну за означенням:

$$y'(5) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(5+\Delta x) - y(5)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^4(3+\Delta x)^3\Delta x\sin(1+\Delta x) - 0}{\Delta x} = 27\sin 1. \blacksquare$$

§ 2. Техніка диференціювання

Приклад 2.2. Знайти похідну y' функцій:

а) $y = \ln tg\dfrac{x}{2} - ctgx\cdot\ln\left(1+\sin x\right) - x$; **б)** $y = \left(\cos x^2\right)^{1/\sin x}$;

в) $y = \dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$; **г)** $y = e^x\left(\left(\sin x\right)^{\cos x} - \left(\cos x\right)^{\sin x}\right)$;

д) $y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$;

е) $y = \log_{\varphi(x)}\psi(x)$ $(\varphi(x)\neq 1, \varphi(x) > 0, \psi(x) > 0)$,

де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ диференційовні функції;

є) $y = f(e^x)\cdot e^{f(x)}$; **ж)** $y = f\left(f\left(f(x)\right)\right)$,

де $f(u)$ – диференційовна функція.

Розв'язання. а) $y' = \left(\ln tg\frac{x}{2}\right)' - \left(ctgx\cdot\ln\left(1+\sin x\right)\right)' - x' = \dfrac{\left(tg\frac{x}{2}\right)'}{tg\frac{x}{2}} -$

$$-\left(ctgx\right)'\cdot\ln\left(1+\sin x\right) - ctgx\cdot\left(\ln\left(1+\sin x\right)\right)' - 1 = \frac{1}{2tg\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} +$$

$$+\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\ln\left(1+\sin x\right) - ctgx\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x} - 1 =$$

$$=\frac{1}{\sin x}+\frac{\ln\left(1+\sin x\right)}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\sin x\left(1+\sin x\right)}-1=\frac{\ln\left(1+\sin x\right)}{\sin^2 x}.$$ ■

б) Застосуємо логарифмічне диференціювання:

$$y=\left(\cos x^2\right)^{1/\sin x},\qquad \ln y=\ln\left(\cos x^2\right)^{1/\sin x},$$

$$\ln y=\frac{1}{\sin x}\cdot\ln\cos x^2,\qquad \left(\ln y\right)'=\left(\frac{\ln\cos x^2}{\sin x}\right)',$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{\left(\ln\cos x^2\right)'\cdot\sin x-(\sin x)'\cdot\ln\cos x^2}{\sin^2 x}=\frac{\dfrac{\left(\cos x^2\right)'}{\cos x^2}\cdot\sin x-\cos x\cdot\ln\cos x^2}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{-\dfrac{\sin x^2\cdot(x^2)'}{\cos x^2}\cdot\sin x-\cos x\cdot\ln\cos x^2}{\sin^2 x}=\frac{-\dfrac{\sin x^2\cdot 2x}{\cos x^2}\cdot\sin x-\cos x\cdot\ln\cos x^2}{\sin^2 x}.$$

Отримали:

$$\frac{y'}{y}=\frac{-2x\sin x^2\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x^2\cdot\ln\cos x^2}{\sin^2 x\cdot\cos x^2}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на y:

$$y'=y\cdot\frac{-2x\sin x^2\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x^2\cdot\ln\cos x^2}{\sin^2 x\cdot\cos x^2}.$$

Оскільки $y=\left(\cos x^2\right)^{1/\sin x}$, то в результаті отримаємо

$$y'=-\left(\cos x^2\right)^{1/\sin x}\cdot\frac{2x\sin x^2\cdot\sin x+\cos x\cdot\cos x^2\cdot\ln\cos x^2}{\sin^2 x\cdot\cos x^2}.$$ ■

в) Застосуємо логарифмічне диференціювання:

$$\ln y=\ln\left(\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}\right);$$

$$\ln y=2\ln x-\ln(1-x)+\frac{1}{3}\ln(3-x)-\frac{2}{3}\ln(3+x);$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}-\frac{(1-x)'}{1-x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(3-x)'}{3-x}-\frac{2}{3}\cdot\frac{(3+x)'}{3+x};$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3-x}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3+x}\quad\Big|\times y;\quad y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}};$$

$$y'=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3-x}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3+x}\right).\ \blacksquare$$

г) Спочатку знайдемо похідні від функцій $(\sin x)^{\cos x}$ і $(\cos x)^{\sin x}$. Першу знайдемо логарифмічним диференціюванням

$$z=(\sin x)^{\cos x},$$

$$(\ln z)'=(\cos x\ln(\sin x))',$$

$$\frac{z'}{z}=-\sin x\ln(\sin x)+\cos x\frac{\cos x}{\sin x},$$

$$z'=(\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln(\sin x)+\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right).$$

Другу знайдемо, застосувавши тотожність $a=e^{\ln a}$, у такий спосіб:

$$\left((\cos x)^{\sin x}\right)'=\left(e^{\ln(\cos x)^{\sin x}}\right)'=\left(e^{\sin x\cdot\ln(\cos x)}\right)'=$$

$$=e^{\sin x\cdot\ln(\cos x)}\cdot\left(\cos x\cdot\ln(\cos x)+\sin x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}\right)=$$

$$=(\cos x)^{\sin x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln(\cos x)-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right).$$

В результаті отримаємо

$$y'=\left(e^x\left((\sin x)^{\cos x}-(\cos x)^{\sin x}\right)\right)'=e^x\left((\sin x)^{\cos x}-(\cos x)^{\sin x}\right)+$$

$$+e^x\cdot\left[(\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln(\sin x)+\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)+\right.$$

$$\left.+(\cos x)^{\sin x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln(\cos x)-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)\right].\ \blacksquare$$

д) Якщо $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$, то

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}\cdot\left(\varphi^2(x)+\psi^2(x)\right)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}\cdot\left(2\varphi(x)\cdot\varphi'(x)+2\psi(x)\cdot\psi'(x)\right)=$$

$$=\frac{\varphi(x)\cdot\varphi'(x)+\psi(x)\cdot\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}. \ \blacksquare$$

е) Якщо $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$ $(\varphi(x)\neq 1, \varphi(x)>0, \psi(x)>0)$, де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ – диференційовні функції, то

$$y'=\left(\log_{\varphi(x)}\psi(x)\right)'=\left(\frac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)}\right)'=\frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\cdot\ln\varphi(x)-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\cdot\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}=$$

$$=\frac{\varphi(x)\cdot\psi'(x)\cdot\ln\varphi(x)-\psi(x)\cdot\varphi'(x)\cdot\ln\psi(x)}{\varphi(x)\cdot\psi(x)\cdot\ln^2\varphi(x)}. \ \blacksquare$$

є) Якщо $y=f(e^x)\cdot e^{f(x)}$, то

$$y'=\left(f(e^x)\cdot e^{f(x)}\right)'=\left(f(e^x)\right)'\cdot e^{f(x)}+f(e^x)\cdot\left(e^{f(x)}\right)'=$$

$$=f'(e^x)\cdot e^x\cdot e^{f(x)}+f(e^x)\cdot e^{f(x)}\cdot f'(x)=e^{f(x)}\cdot\left(f'(e^x)\cdot e^x+f(e^x)\cdot f'(x)\right). \ \blacksquare$$

ж) Для функції $y=f\left(f\left(f(x)\right)\right)$ маємо:

$$y'=f'\left(f\left(f(x)\right)\right)\cdot f'\left(f(x)\right)\cdot f'(x). \qquad \blacksquare$$

Приклад 2.3. Показати, що існує однозначна функція $y=y(x)$, що визначена рівнянням, та знайти її похідну y'_x:

а) $y^3+3y=x$; **б)** $y-\varepsilon\sin y=x$ $(0<\varepsilon<1)$.

Розв'язання. а) Знайдемо похідну x'_y:

$$x'_y=3y^2+3>0\ \forall y\in\mathbb{R},$$

тому функція $x=x(y)$ є строго зростаючою на $\mathbb{R}$ *(достатня умова монотонності функції на інтервалі)*, причому її похідна в жодній точці з $\mathbb{R}$ не дорівнює нулю. Звідси випливає існування однозначної оберненої функції $y=y(x)$, похідна якої дорівнює *(теорема 1.4 про похідну оберненої функції)*

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{3(y^2+1)}.$$

Існування однозначної функції $y=y(x)$ можна обґрунтувати в інший спосіб. Припустимо супротивне, тобто що існують дві нерівні функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$, що визначені рівнянням $y^3+3y=x$, тоді

$$\left(y_1\right)^3+3y_1=x \text{ і } \left(y_2\right)^3+3y_2=x,$$

звідки

$$\left(y_1\right)^3+3y_1=\left(y_2\right)^3+3y_2,$$

$$\left(y_1-y_2\right)\left(\left(y_1\right)^2+y_1y_2+\left(y_2\right)^2+3\right)=0.$$

Неповний квадрат суми $\left(y_1\right)^2+y_1y_2+\left(y_2\right)^2$ приймає строго додатні значення, отже значення виразу $\left(y_1\right)^2+y_1y_2+\left(y_2\right)^2+3$ ніколи не може дорівнювати нулю.

Таким чином, виписана рівність буде вірною лише при $y_1 - y_2 = 0$, тобто при $y_1(x) \equiv y_2(x)$. Це суперечить припущенню. Отже, існує єдина функція $y = y(x)$, що визначена заданим рівнянням. ■

б) Розв'яжемо поставлену задачу за допомогою похідної. Другий спосіб пропонуємо читачеві реалізувати самостійно. Знайдемо похідну x'_y і пригадаємо, що $0 < \varepsilon < 1 : x'_y = 1 - \varepsilon \cos y > 0 \;\; \forall y \in \mathbb{R}$. Тому функція $x = x(y)$ є строго зростаючою на $\mathbb{R}$ і її похідна в жодній точці із $\mathbb{R}$ не дорівнює нулю. Звідси випливає існування однозначної оберненої функції $y = y(x)$, похідна якої дорівнює

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y}. \quad ■$$

Приклад 2.4. Визначити області існування обернених функ-цій $x = x(y)$ та знайти їхні похідні, якщо

а) $y = x + \ln x$; **б)** $y = x + e^x$; **в)** $y = \operatorname{sh} x$; **г)** $y = \operatorname{th} x$.

Розв'язання. а) ОДЗ (область допустимих значень або область визначення функції): $x > 0$; множина значень – $\mathbb{R}$. Знайдемо похідну y'_x при $x > 0$:

$$y'_x = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0 \; \forall x > 0.$$

Тому функція строго зростає і має ненульову похідну для всіх $x > 0$. Таким чином, існує обернена функція $x = x(y)$ на $\mathbb{R}$ (на множині значень даної функції), похідна якої дорівнює

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{x}{x+1}. \quad ■$$

б) ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$; множина значень – $\mathbb{R}$. Знайдемо похідну y'_x:

$$y'_x = 1 + e^x > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

задана функція строго зростає і має ненульову похідну на $\mathbb{R}$. Отже, існує обернена функція $x = x(y)$ на $\mathbb{R}$, похідна якої дорівнює

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+y-x}. \quad ■$$

в) ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$; множина значень – $\mathbb{R}$, похідна:

$$y'_x = \operatorname{ch} x > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Функція строго зростає і має ненульову похідну на $\mathbb{R}$, тому існує обернена функція на $\mathbb{R}$, похідна якої дорівнює

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}. \quad ■$$

г) ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$; множина значень – $|y| < 1$, похідна:

$$y'_x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Отже, існує обернена функція при $|y| < 1$, похідна якої дорівнює

$$x'_y = \mathrm{ch}^2 x = \frac{1}{1-\mathrm{th}^2 x} = \frac{1}{1-y^2} \quad (|y|<1). \qquad \blacksquare$$

Приклад 2.5. Виділити однозначні неперервні гілки обер-нених функцій $x = x(y)$, знайти їхні похідні, побудувати графіки, якщо $y = 2x^2 - x^4$.

Розв'язання. Похідна цієї функції $y'_x = 4x - 4x^3$ дорівнює нулю в точках $x = 0$, $x = \pm 1$. Тому на кожному із проміжків $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;+\infty)$ функція строго монотонна і має ненульову похідну. Отже, на кожному із цих проміжків вона має однозначну гілку обернених функцій.

В рівнянні $y = 2x^2 - x^4$ покладемо $t = x^2$, отримаємо квадратне рівняння $t^2 - 2t + y = 0$, для якого

$$D/4 = 1 - y \ge 0 \Leftrightarrow y \in (-\infty;1],$$

$$t_1 = 1 + \sqrt{1-y} \ge 0 \text{ при } y \in (-\infty;1], \qquad t_2 = 1 - \sqrt{1-y} \ge 0 \text{ при } y \in [0;1].$$

В результаті отримаємо рівняння однозначних гілок обернених функцій

$$x_1 = \sqrt{1+\sqrt{1-y}} \text{ при } y \in (-\infty;1],$$

$$x_2 = -\sqrt{1+\sqrt{1-y}} \text{ при } y \in (-\infty;1],$$

$$x_3 = \sqrt{1-\sqrt{1-y}} \text{ при } y \in [0;1],$$

$$x_4 = -\sqrt{1-\sqrt{1-y}} \text{ при } y \in [0;1].$$

Графіки цих гілок зображені на рис. 2.1. Похідна від будь-якої з таких гілок має вигляд: $x'_i = \dfrac{1}{4x\left(1-x^2\right)}$ $\forall i = 1, 2, 3, 4$. ■

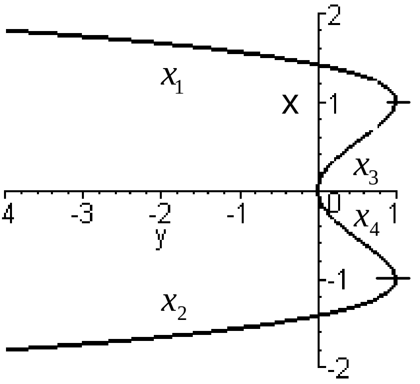


Рис. 2.1.

§ 3. Диференційовність і диференціал

Приклад 2.6. Дослідити функції на диференційовність
а) $y = |x|$; **б)** $y = |\sin^3 x|$.

Розв'язання. а) У прикладі 1.3 було доведено, що для функції $f(x) = |x|$ в точці $x = 0$ односторонні похідні $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$, тому

$$f'_+(0) \ne f'_-(0) \Rightarrow \nexists f'(0).$$

Отже, згідно з *твердженням 1.1* і *теоремою 1.5*, у точці $x = 0$ функція $y = |x|$ недиференційовна.

Нехай тепер $x \ne 0$, тоді для $x > 0$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x} =$$

$$=\left\| \begin{array}{l} x>0 \Rightarrow |x|=x; \\ (\Delta x \to 0 \wedge x>0) \Rightarrow \\ \Rightarrow x+\Delta x>0 \Rightarrow |x+\Delta x|=x+\Delta x \end{array} \right\| = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=1;$$

для $x<0$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x+\Delta x|-|x|}{\Delta x}=$$

$$=\left\| \begin{array}{l} x<0 \Rightarrow |x|=-x; \\ (\Delta x \to 0 \wedge x<0) \Rightarrow \\ \Rightarrow x+\Delta x<0 \Rightarrow |x+\Delta x|=-x-\Delta x \end{array} \right\| = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-x-\Delta x+x}{\Delta x}=-1.$$

Отже, приходимо до висновку: функція $y=|x|$ диференційовна при $x\neq 0$, окрім того, отримано формулу

$$\left(|x|\right)'=\operatorname{sgn} x \quad \text{при} \quad x\neq 0 \ \blacksquare$$

б) Для функції $y=\left|\sin^3 x\right|$ окремо розглянемо точки, в яких вираз під знаком модуля дорівнює нулю, тобто $\sin^3 x=0$, тоді

$$\sin x=0 \Leftrightarrow x=\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

В цих точках за означенням матимемо

$$y'(\pi n)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(\pi n+\Delta x)-y(\pi n)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left|\sin^3(\pi n+\Delta x)\right|-\left|\sin^3(\pi n)\right|}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left|\sin^3(\Delta x)\right|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left|(\Delta x)^3\right|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^3\cdot\operatorname{sgn}\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^2\cdot\operatorname{sgn}\Delta x=0.$$

В точках, де $\sin^3 x\neq 0$, тобто $x\neq \pi n\ \forall n\in\mathbb{Z}$ отримаємо

$$y'=|\sin^3 x|'=\operatorname{sgn}\left(\sin^3 x\right)\cdot\left(\sin^3 x\right)'=\operatorname{sgn}\left(\sin^3 x\right)\cdot 3\sin^2 x\cdot\cos x.$$

Приходимо до висновку, що задана функція диференційовна на $\mathbb{R}$. ■

Приклад 2.7. Знайти похідні й побудувати графіки функцій та їх похідних, якщо

а) $y=|\sin x|$; **б)** $y=\ln|x|$;

в) $y=\begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{при } |x|<1, \\ \dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x+\dfrac{|x|-1}{2} & \text{при } |x|\geq 1. \end{cases}$

Розв'язання. **а)** Для функції $y=|\sin x|$ розглянемо точки, де $\sin x=0$, тобто $x=\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$. Знайдемо праву та ліву похідні в них:

$$y'_{+}(\pi n)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{y(\pi n+\Delta x)-y(\pi n)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{|\sin(\pi n+\Delta x)|-|\sin(\pi n)|}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{|\sin(\Delta x)|}{\Delta x}=\left\|\begin{array}{l}\sin\Delta x\overset{\Delta x\to 0}{\sim}\Delta x\\ (\text{додаток А})\end{array}\right\|=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$y'_{-}(\pi n)==\lim_{\Delta x\to-0}\frac{|\sin(\pi n+\Delta x)|-|\sin(\pi n)|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{|\sin(\Delta x)|}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

Оскільки $y'_{-}(\pi n)\neq y'_{+}(\pi n)$ $\forall n\in\mathbb{Z}$, то в точках $x=\pi n,$ $n\in\mathbb{Z}$ функція не є диференційовною.

В точках $x\neq\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$ одержимо

$$y'=|\sin x|'=\operatorname{sgn}(\sin x)\cdot(\sin x)'=\operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\cos x=\begin{cases}\cos x,\ 2\pi n<x<\pi+2\pi n;\\ -\cos x,\ -\pi+2\pi n<x<2\pi n.\end{cases}.$$

Отримана похідна існує у всіх точках, де $x\neq\pi n$, тому приходимо до висновку, що задана функція диференційовна на $\mathbb{R}\setminus\{\pi n,n\in\mathbb{Z}\}$, і похідна в цих точках дорівнює $y'=\operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\cos x$. Графіки функції та її похідної зображені відповідно на рис. 2.2 а і на рис. 2.2 б. ■

б) Для функції $y=\ln|x|$ точка, в якій вираз під модулем дорівнює 0 (тобто $x=0$), не входить в область визначення, тому будемо шукати похідну тільки в точках, де $x\neq 0$:

$$y'=\frac{1}{|x|}\cdot|x|'=\frac{1}{|x|}\cdot\operatorname{sgn}x=\frac{1}{|x|}\cdot\frac{x}{|x|}=\frac{x}{|x|^2}=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}.$$

Графіки функції та її похідної зображені відповідно на рис. 2.3 а та на рис. 2.3 б. ■

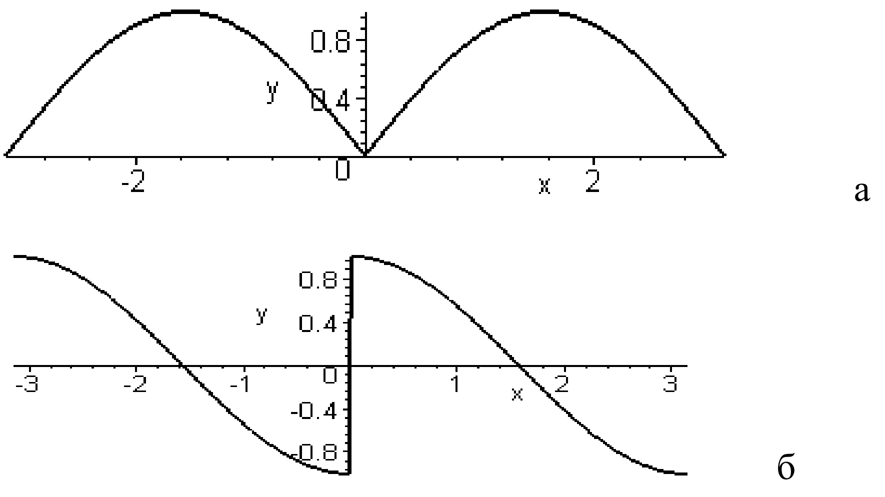
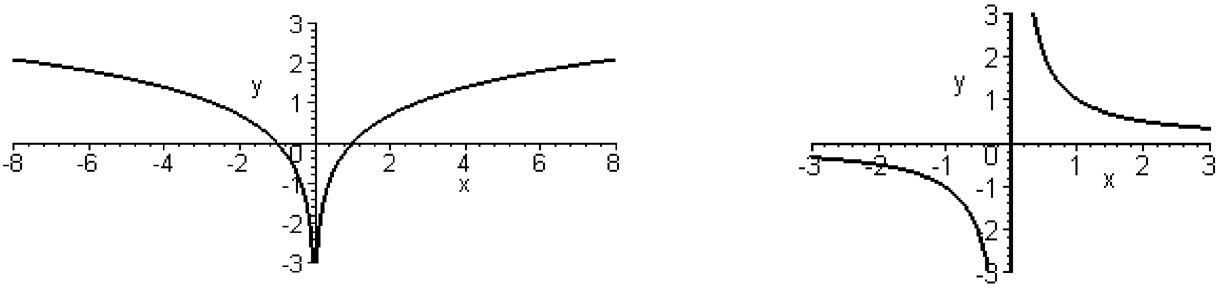


Рис. 2.2.



а б

Рис. 2.3.

в) Для функції $y=\begin{cases}\operatorname{arctg} x & \text{при } |x|<1,\\ \dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x+\dfrac{|x|-1}{2} & \text{при } |x|\geq 1,\end{cases}$ якщо $|x|<1$, то

$$y'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

Якщо $x>1$, то

$$y'(x)=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}\right)'=\frac{1}{2}.$$

Якщо $x<-1$, то

$$y'(x)=\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{-x-1}{2}\right)'=-\frac{1}{2}.$$

В точках $x=\pm 1$ обчислимо праву та ліву похідні. Так, для точки $x=1$ матимемо:

$$y'_+(1)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{y(1+\Delta x)-y(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{1+\Delta x-1}{2}-\frac{\pi}{4}}{\Delta x}=\frac{1}{2},$$

$$y'_-(1)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{y(1+\Delta x)-y(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\operatorname{arctg}(1+\Delta x)-\frac{\pi}{4}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\operatorname{arctg}(1+\Delta x)-\operatorname{arctg}1}{\Delta x}=\left\|\begin{matrix}a=1+\Delta x, b=1,\ a\cdot b>-1,\\ \operatorname{arctg} a-\operatorname{arctg}\mathrm{b}=\operatorname{arctg}\dfrac{a-b}{1+a\cdot b}\end{matrix}\right\|=$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\operatorname{arctg}\frac{\Delta x}{2+\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{2+\Delta x}=\frac{1}{2}.$$

Оскільки $y'_+(1)=y'_-(1)$ то в точці $x=1$ функція є диференційовною і $y'(1)=\frac{1}{2}$.

Для точки $x=-1$ маємо:

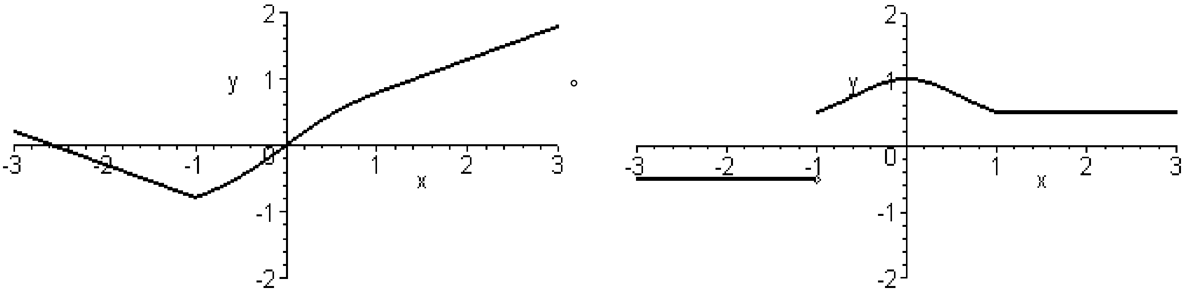
$$y'_+(-1)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{y(-1+\Delta x)-y(-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\operatorname{arctg}(-1+\Delta x)-\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\Delta x}=$$

$$= \lim_{\Delta x\to -0}\frac{-\left(\operatorname{arctg}(1-\Delta x)-\operatorname{arctg}1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to -0}\frac{-1}{\Delta x}\cdot\operatorname{arctg}\frac{-\Delta x}{2+\Delta x}=\frac{1}{2},$$

$$y'_-(-1)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{y(-1+\Delta x)-y(-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{-\frac{\pi}{4}+\frac{1-\Delta x-1}{2}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\Delta x}=-\frac{1}{2}.$$

Оскільки $y'_+(-1)\neq y'_-(-1)$, то в точці $x=-1$ функція не є диференційовною.

Графіки функції та її похідної зображені відповідно на рис. 2.4 а, б. ■



а б

Рис. 2.4.

Приклад 2.8. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{при } x\neq 0;\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$$

має розривну похідну.

Розв'язання. Якщо $x\neq 0$, то

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}.$$

Отримана функція є неперервною при $x\neq 0$. Дійсно, функції $\sin\frac{1}{x}$ та $\cos\frac{1}{x}$ неперервні як складені при $x\neq 0$, а $f'(x)$ неперервна при $x\neq 0$ як добуток і різниця неперервних при $x\neq 0$ функцій.

Якщо $x=0$, то

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}=[\text{н.м.ф.}\times\text{обм.}]=0.$$

Розглянемо $\lim\limits_{x\to 0+0}y'(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$. Тут

$$\left.\begin{aligned}&1)\ \lim_{x\to 0+0}2x\sin\frac{1}{x}=[\text{н.м.ф.}\times\text{обм.}]=0,\\ &2)\ \nexists\lim_{x\to 0+0}\cos\frac{1}{x},\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \nexists\lim_{x\to 0+0}y'(x).$$

Таким чином, похідна в точці $x = 0$ має розрив II роду, а в усіх інших точках – неперервна. ■

Приклад 2.9. За яких умов функція

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0; \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

а) неперервна при $x = 0$; б) диференційовна при $x = 0$; в) має неперервну похідну при $x = 0$?

Розв'язання. а) Оскільки $f(0) = 0$, то для того, щоб функція була неперервною, потрібно задовольнити вимогу:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0.$$

Для заданої функції границя

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x\right)^n \cdot \sin\frac{1}{x}$$

існує і дорівнює нулю, якщо $n > 0$. Отже, за цієї ж умови функція $f(x)$ неперервна в точці $x = 0$.

б) В точці $x = 0$ маємо

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(\Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\Delta x\right)^n \sin\dfrac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x\right)^{n-1} \cdot \sin\frac{1}{\Delta x}.$$

Остання границя існує і дорівнює нулю за умови, коли $n - 1 > 0$, тобто $n > 1$. За цієї ж умови функція диференційовна в точці $x = 0$.

в) Якщо $x \neq 0$, то

$$f'(x) = nx^{n-1}\sin\frac{1}{x} - x^{n-2}\cos\frac{1}{x}.$$

Отримана функція є неперервною при $x \neq 0$ (доведення аналогічне прикладу 2.8). Для того, щоб $f'(x)$ в точці $x = 0$ була неперервною, потрібно задовольнити при $n > 1$ вимогу:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0.$$

Для функції $f'(x)$ границя

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(nx^{n-1}\sin\frac{1}{x} - x^{n-2}\cos\frac{1}{x}\right)$$

дорівнює нулю, якщо $n - 2 > 0$, тобто $n > 2$. Отже, за цієї ж умови $f'(x)$ неперервна в точці $x = 0$. ■

Приклад 2.10. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ якщо } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, \text{ якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

має похідну лише при $x = 0$.

Розв'язання. Функція $f(x)$ неперервна лише в точці $x=0$, а в усіх інших точках вона розривна (🗐 повторіть доведення цього факту; розв'язання аналогічного прикладу №2.23 див. у [**2**, с. 143]).

За твердженням 1.2, похідна може існувати лише в тих точках, у яких функція неперервна. Отже, в кожній точці $x \neq 0$ похідної не існує.

Розглянемо тепер точку $x=0$. Якщо $\Delta x \neq 0$ і $\Delta x \in \mathbb{Q}$, то

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^2-0}{\Delta x}=\Delta x.$$

Якщо $\Delta x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, то

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{0-0}{\Delta x}=0.$$

Отже,

$$\begin{array}{c}\forall \Delta x \neq 0 \;\; 0 \le \left|\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\right| \le |\Delta x| \\ \searrow \qquad \Downarrow \qquad \swarrow \quad \text{при } \Delta x \to 0. \\ 0\end{array}$$

Звідки та за означенням похідної, отримаємо:

$$\exists f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=0.$$

Таким чином, функція $f(x)$ в точці $x=0$ має похідну, що дорівнює 0, а в усіх інших точках не має похідної. ■

Приклад 2.11. Знайти односторонні похідні та дослідити функції на диференційовність:

а) $y=[x]\sin\pi x$, де $[x]$ – ціла частина числа x;

б) $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$; **в)** $y=\big|\ln|x|\big| \quad (x\neq 0)$.

Розв'язання. а) При обчисленні будемо застосовувати формули (перевірте їх ✍!)

$$\boxed{[n+0]=n, \quad [n-0]=n-1, \quad n\in\mathbb{Z}}$$

Окремо розглядаємо ті значення аргументу, при яких вираз під знаком цілої частини є цілим. У даному випадку – це $x=n, \quad n\in\mathbb{Z}$. В таких точках односторонні похідні знайдемо за означенням:

$$y'_+(n)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{y(n+\Delta x)-y(n)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{[n+\Delta x]\sin(\pi n+\pi\Delta x)-[n]\sin(\pi n)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{[n+\Delta x](-1)^n\sin(\pi\Delta x)}{\Delta x}=(-1)^n\lim_{\Delta x\to+0}\frac{[n+\Delta x]\pi\Delta x}{\Delta x}=(-1)^n\pi[n+0]=(-1)^n\pi n,$$

$$y'_-(n)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{[n+\Delta x](-1)^n\sin(\pi\Delta x)}{\Delta x}=(-1)^n\pi[n-0]=(-1)^n\pi(n-1).$$

Оскільки права та ліва похідні в кожній із розглянутих точок набувають різних значень, то в цих точках функція не є диференційовною.

Нехай тепер $x \neq n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, тоді $[x] = const$ на кожному із інтервалів $(k; k+1),\, k \in \mathbb{Z}$, тому

$$y'_+(x) = y'_-(x) = y'(x) = [x]\big(\sin \pi x\big)' = [x]\pi\cos \pi x,$$

і функція в цих точках диференційовна. ■

б) Область визначення функції $y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$:

$$1 - e^{-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Формально обчислимо похідну за правилами диференціювання:

$$y' = \left(\sqrt{1 - e^{-x^2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{-x^2}}}\left(1 - e^{-x^2}\right)' = \frac{2xe^{-x^2}}{2\sqrt{1 - e^{-x^2}}} = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}.$$

Отримана похідна не визначена в точках, де $1 - e^{-x^2} = 0$, тобто в точці $x = 0$. У цій точці знайдемо односторонні похідні за означенням:

$$y'_\pm(0) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{y(\Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\sqrt{1 - e^{-(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = \left\| \begin{matrix} \Delta x \to \pm 0 \Rightarrow \\ 1 - e^{-(\Delta x)^2} \sim (\Delta x)^2 \end{matrix} \right\| = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \pm 1$$

.

Вони не співпадають, тому в точці $x = 0$ функція не є диференційовною. У всіх інших точках функція диференційовна і значення односторонніх похідних співпадають із значенням похідної, тобто

$$y'_+(x) = y'_-(x) = y'(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} \quad (x \neq 0). \quad ■$$

в) Для функції $y = \left|\ln |x|\right| \quad (x \neq 0)$ окремо розглянемо точки, де вираз під модулем дорівнює 0, тобто $\ln |x| = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Отримаємо

$$y'_\pm(1) == \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{y(1 + \Delta x) - y(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\left|\ln |1 + \Delta x|\right|}{\Delta x} = \left\| \begin{matrix} \Delta x \to 0 \Rightarrow \\ 1 + \Delta x > 0 \Rightarrow \\ |1 + \Delta x| = 1 + \Delta x \end{matrix} \right\| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\left|\ln(1 + \Delta x)\right|}{\Delta x} = \left\| \begin{matrix} \Delta x \to \pm 0 \Rightarrow \\ 1 + \Delta x \gtrless 1 \Rightarrow \\ \ln(1 + \Delta x) \gtrless 0 \end{matrix} \right\| = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\pm \ln(1 + \Delta x)}{\Delta x} = \pm 1,$$

$$y'_\pm(-1) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{y(-1 + \Delta x) - y(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\left|\ln |-1 + \Delta x|\right|}{\Delta x} = \left\| \begin{matrix} \Delta x \to 0 \Rightarrow \\ -1 + \Delta x < 0 \Rightarrow \\ |-1 + \Delta x| = 1 - \Delta x \end{matrix} \right\| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\left|\ln(1 - \Delta x)\right|}{\Delta x} = \left\| \begin{matrix} \Delta x \to \pm 0 \Rightarrow \\ 1 - \Delta x \lessgtr 1 \Rightarrow \\ \ln(1 - \Delta x) \lessgtr 0 \end{matrix} \right\| = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\mp \ln(1 - \Delta x)}{\Delta x} = \pm 1,$$

односторонні похідні нерівні, як у точці $x = 1$, так і в $x = -1$, тому в точках $x = \pm 1$ функція не є диференційовною.

Розглянемо $x \neq \pm 1$. В прикладі 2.7 б) було знайдено $\left(\ln|x|\right)' = \dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$, тому при $x \neq \pm 1$ і $x \neq 0$ одержимо

$$y'_+(x) = y'_-(x) = y'(x) =$$

$$= \operatorname{sgn}(\ln|x|) \cdot (\ln|x|)' = \frac{\operatorname{sgn}(\ln|x|)}{x} = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{якщо } |x| > 1, \\ -\dfrac{1}{x}, \text{якщо } 0 < |x| < 1. \end{cases}$$

Отримана похідна в усіх точках $x \neq \pm 1$ і $x \neq 0$ існує, тому в цих точках функція диференційовна. ■

Приклад 2.12. Обчислити

а) $d\left(e^{\sin\left(x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin\frac{2}{x}\right)} + \ln\left(\cos x\right)\right)$; **б)** $\dfrac{d}{d(x^2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$;

в) $d\left(\dfrac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)$, **г)** $d\left(\operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}\right)$,

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ диференційовні функції, x – незалежна змінна.

Розв'язання. а) Диференціал обчислюється за формулою $df(x) = f'(x) \cdot dx$ (див. розділ 1, §1, п. 5), тому для функції $f(x) = e^{\sin\left(x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin\frac{2}{x}\right)} + \ln\left(\cos x\right)$ отримаємо:

$$df(x) = \left(e^{\sin\left(x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin\frac{2}{x}\right)} \cdot \left(\sin\left(x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin\frac{2}{x}\right)\right)' + \frac{\left(\cos x\right)'}{\cos x}\right) dx =$$

$$= \left(e^{\sin\left(x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin\frac{2}{x}\right)} \cdot \cos\left(x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin\frac{2}{x}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \cdot \sin\frac{2}{x} + x^{\frac{3}{2}} \cdot \cos\frac{2}{x} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right)\right) - tgx\right) dx =$$

$$= \left(e^{\sin\left(x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin\frac{2}{x}\right)} \cdot \cos\left(x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin\frac{2}{x}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} \cdot \sin\frac{2}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\cos\frac{2}{x}\right) - tgx\right) dx. \quad ■$$

б) $$\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' dx}{(x^2)' dx} = \frac{\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} dx}{2x dx} = \frac{x\cos x - \sin x}{2x^3}. \quad ■$$

в) $$d\left(\frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right) = d\left(u^2 + v^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(u^2 + v^2\right) =$$

$$=-\frac{du^2+dv^2}{2\left(u^2+v^2\right)\sqrt{u^2+v^2}}=-\frac{2udu+2vdv}{2\left(u^2+v^2\right)\sqrt{u^2+v^2}}=-\frac{udu+vdv}{\left(u^2+v^2\right)\sqrt{u^2+v^2}}. \ \blacksquare$$

г) $d\left(arctg\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v^2}{u^2+v^2}\cdot\frac{vdu-udv}{v^2}=\frac{vdu-udv}{u^2+v^2}.$ ■

Приклад 2.13. Замінюючи приріст функції диференціалом, знайти наближено такі значення:

а) $\sqrt[3]{1,02}$;   **б)** $\sqrt[7]{100}$;

в) $\sin 29^o$;   **г)** $\operatorname{arctg}1,05$.

Розв’язання. **а)** Знайдемо наближене значення $\sqrt[3]{1,02}$. Оскільки $\Delta f(x_0)\approx df(x_0)$ (див. розділ 1, §1, п. 6), то для функції $f(x)=\sqrt[3]{x}$ оберемо $x_0=1$, $\Delta x=0,02$, тоді

$$\Delta f(x_0)\approx df(x_0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x_0\right)^2}}\cdot\Delta x;$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta f(1)\approx\dfrac{0,02}{3}=0,0067,\\ \Delta f(1)=f(1,03)-f(1),\quad f(1)=1,\end{array}\right\}\Rightarrow f(1,03)\approx 1+0,0067=1,0067.$$

Отже, $\sqrt[3]{1,02}\approx 1,0067$. Зауважимо, що полегшити обчислення можна було б, застосовуючи для таких обчислень формули, отримані в теоретичній частині. ■

б) Наближено обчислимо $\sqrt[7]{100}$. Оскільки

$$\sqrt[7]{100}=\sqrt[7]{128-28}=2\cdot\sqrt[7]{1-\frac{28}{128}}=2\cdot\sqrt[7]{1-\frac{7}{32}},$$

то обираючи $f(x)=\sqrt[7]{x}$, $x_0=1$, $\Delta x=-\frac{7}{32}$, отримаємо

$$\Delta f(x_0)\approx df(x_0)=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt[7]{\left(x_0\right)^6}}\cdot\Delta x;$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta f(1)\approx-\dfrac{1}{32}=-0,03125,\\ \Delta f(1)=f\left(1-\dfrac{7}{32}\right)-f(1),\quad f(1)=1,\end{array}\right\}\Rightarrow f\left(1-\frac{7}{32}\right)\approx 1-0,03125=0,96875.$$

Отже, $\sqrt[7]{100}\approx 2\cdot 0,96875=1,9375$. ■

в) Для наближеного обчислення $\sin 29^o$ зробимо попередні перетворення:

$$\sin 29^o=\sin(30^o-1^o)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\right).$$

Оберемо $f(x)=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{6}$, $\Delta x=-\frac{\pi}{180}$, тоді

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0) = \cos x_0 \cdot \Delta x;$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) \approx -\dfrac{\pi\sqrt{3}}{360} \approx -0{,}0151, \\ \Delta f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = f\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{180}\right) - f\left(\dfrac{\pi}{6}\right), \\ f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} = 0{,}5, \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{180}\right) \approx 0{,}5 - 0{,}0151 = 0{,}4849.$$

Отже, $\sin 29^o \approx 0{,}4849$. ■

г) Для наближеного обчислення $\operatorname{arctg} 1{,}05$ оберемо $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}05$, тоді

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0) = \frac{1}{1 + (x_0)^2} \cdot \Delta x;$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta f(1) \approx \dfrac{0{,}05}{2} \approx 0{,}025,\ f(1) = \dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}7854, \\ \Delta f(1) = f(1{,}05) - f(1), \end{array}\right\} \Rightarrow f(1{,}05) \approx 0{,}8104.$$

Отже, $\operatorname{arctg} 1{,}05 \approx 0{,}8104$. ■

§ 4. Геометричний зміст похідної

Приклад 2.14. Довести, що у астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ довжина відрізка дотичної, що обмежена осями координат, є сталою величиною.

Розв'язання. В теоретичній частині було обчислено похідну від заданої функції (див. приклад 1.8):

$$y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$$

Знайдемо рівняння дотичної в точці $M(x_0, y_0)$ (див. розділ 1, §1, п. 2):

$$y - y_0 = -\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}(x - x_0).$$

Знайдемо координати точок перетину дотичної з осями. Розглянемо перетин з віссю ординат:

$$x = 0 \Rightarrow y - y_0 = \sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}} x_0 \Rightarrow y = \sqrt[3]{(x_0)^2 y_0} + y_0 = \sqrt[3]{y_0} \cdot \left(\sqrt[3]{(x_0)^2} + \sqrt[3]{(y_0)^2}\right).$$

Оскільки точка $M(x_0, y_0)$ належить астроїді, то $\sqrt[3]{(x_0)^2} + \sqrt[3]{(y_0)^2} = \sqrt[3]{a^2}$, тому шукана точка має координати $\left(0; \sqrt[3]{y_0} \cdot \sqrt[3]{a^2}\right)$. Аналогічно, точка перетину з віссю абсцис має координати $\left(\sqrt[3]{x_0}\cdot\sqrt[3]{a^2};0\right)$. Знайдемо відстань між знайденими точками

$$d=\sqrt{\left(\sqrt[3]{x_0}\cdot\sqrt[3]{a^2}\right)^2+\left(\sqrt[3]{y_0}\cdot\sqrt[3]{a^2}\right)^2}=\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2+\left(\sqrt[3]{y_0}\right)^2}=\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}=a.$$

Знайдена відстань є сталою величиною, що й треба було довести. ■

Приклад 2.15. Визначити кут, під яким перетинаються криві

$$y=\sin x \text{ і } y=\cos x.$$

Розв'язання. Знайдемо точки перетину кривих:

$$\begin{cases} y=\sin x, \\ y=\cos x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x=\sin x, \\ y=\cos x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}, \\ y=\cos x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+\pi n, \\ y=(-1)^n\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Кут φ між прямими $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$ визначається з формули [1]

$$tg\varphi=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|.$$

Дотичні до графіків заданих функцій в точках $\frac{\pi}{4}+\pi n$ мають кутові коефіцієнти відповідно

$$k_1=(\sin x)'\big|_{x=\frac{\pi}{4}+\pi n}=(\cos x)\big|_{x=\frac{\pi}{4}+\pi n}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)=(-1)^n\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$k_2=(\cos x)'\big|_{x=\frac{\pi}{4}+\pi n}=(-\sin x)\big|_{x=\frac{\pi}{4}+\pi n}=-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)=(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

тому $tg\varphi=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|=\left|\frac{(-1)^n\frac{\sqrt{2}}{2}-(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+(-1)^n\frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}\Rightarrow\varphi=arctg\left(2\sqrt{2}\right)$. ■

Приклад 2.16. За якої умови кубічна парабола

$$y=x^3+px+q$$

дотикається вісі Ox?

Розв'язання. Точки перетину кубічної параболи з віссю абсцис задовольняють рівняння:

$$x^3+px+q=0.$$

В точках, в яких задана лінія дотикається до вісі Ox, похідна y' дорівнює нулю, тобто:

$$3x^2+p=0.$$

---

[1] Аналітична геометрія: векторна алгебра. Площини та прямі : навч. посіб. для студентів освіт. рівня "бакалавр" напр. підгот. "Математика" / І.В. Зіновєєв, А.К. Приварников, Н.І.-В. Манько, О.Г Спиця. Запоріжжя : ЗНУ, 2015. 84 с.

Отже,

$$\begin{cases} x^3+px+q=0, \\ 3x^2+p=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+px+q=0, \\ x=\pm\sqrt{-\dfrac{p}{3}}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pm\dfrac{2p}{3}\sqrt{-\dfrac{p}{3}}+q=0, \\ x=\pm\sqrt{-\dfrac{p}{3}}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{4p^3}{27}=q^2, \\ x=\pm\sqrt{-\dfrac{p}{3}}. \end{cases}$$

Таким чином, коефіцієнти кубічної параболи повинні задовольняти вимогу: $\left(\dfrac{p}{3}\right)^3+\left(\dfrac{q}{2}\right)^2=0$. ■

Приклад 2.17. Написати рівняння дотичної та нормалі до кривої

а) $y=(x+1)\cdot\sqrt[3]{3-x}$ у точках $A(-1,0), B(2,3), C(3,0)$;

б) $\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$ у точках $t=0, t=1$;

в) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1, \quad M(6;6,4)$; **г)** $xy+\ln y=1, \quad M(1;1)$.

Розв'язання. а) Для функції $f(x)=(x+1)\cdot\sqrt[3]{3-x}$, що задана явно, знайдемо похідну:

$$f'(x)=\sqrt[3]{3-x}+(x+1)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{\sqrt[3]{(3-x)^2}} \text{ при } x\neq 3, \quad f'(3)=\infty.$$

Рівняння дотичної та нормалі можна побудувати за формулами:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0);$$

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Для точки $A(-1,0)$ маємо: $x_0=-1, \quad f(-1)=0, \quad f'(-1)=\sqrt[3]{4}$, тому рівняння дотичної та нормалі до кривої в цій точці мають, відповідно, вигляд:

$$y=\sqrt[3]{4}(x+1); \quad y=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1).$$

Для точки $B(2,3)$ маємо: $x_1=2, \quad f(2)=3, \quad f'(2)=0$, тому дотична з рівнянням $y-3=0$ паралельна вісі абсцис, а нормаль – вісі ординат – $x-2=0$.

Для точки $C(3,0)$ маємо: $x_2=3, \quad f(3)=0, \quad f'(3)=\infty$, тому дотична перпендикулярна вісі абсцис і має рівняння $x-3=0$, а нормаль $y=0$ паралельна цій вісі. ■

б) Для функції $\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$, що задана параметрично, похідна обчислюється за формулою $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$ (див. розділ 1, §1, п. 12), тому маємо

$$y'_x = \frac{\left(3t - t^3\right)'}{\left(2t - t^2\right)'} = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3}{2}(1 + t).$$

Значенню параметра $t = 0$ відповідає точка $x_0 = 0, y_0 = 0$ на декартовій площині й похідна $y'_x = \frac{3}{2}$, а рівняння дотичної та нормалі набувають відповідно вигляду:

$$y = \frac{3}{2}x; \quad y = -\frac{2}{3}x.$$

Для параметра $t = 1$ маємо: $x_1 = 1, y_1 = 2$, $y'_x = 3$, тому рівняння дотичної та нормалі набувають відповідно вигляду:

$$y - 2 = 3(x - 1), \quad y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1),$$

тобто

$$3x - y - 1 = 0, \quad x + 3y - 7 = 0. \ \blacksquare$$

в) За правилом диференціювання неявних функцій (див. розділ 1, §1, п. 13) обчислюємо похідну від обох частин заданого рівняння $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$, вважаючи, що y – це функція, що залежить від x (тобто $y = y(x)$), а x – незалежна змінна:

$$\frac{2x}{100} + \frac{2y \cdot y'}{64} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{16x}{25y}.$$

Точка $M(6; 6,4)$ задовольняє рівняння заданого еліпса, тому $x_0 = 6; y_0 = 6,4$. Похідна в цій точці дорівнює $y' = -\frac{3}{5}$. Отже, рівняння дотичної та нормалі в цій точці –

$$y - 6,4 = -\frac{3}{5}(x - 6); \quad y - 6,4 = \frac{5}{3}(x - 6),$$

тобто

$$3x + 5y - 50 = 0; \quad 5x - 3y - 10,8 = 0. \ \blacksquare$$

г) Для функції $xy + \ln y = 1$ маємо область визначення $y > 0$, похідну

$$y + xy' + \frac{y'}{y} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y^2}{1 + xy},$$

$$M(1; 1) \Rightarrow x_0 = 1; y_0 = 1; y'(x_0) = -\frac{1}{2}:$$

дотичну в точці *M*: $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \Rightarrow \quad x + 2y - 3 = 0$;

нормаль у точці *M*: $y - 1 = 2(x - 1) \quad \Rightarrow \quad 2x - y - 1 = 0$. $\blacksquare$

§ 5. Похідні та диференціали вищих порядків

Приклад 2.18. Знайти другі похідні від функцій:

а) $y=(x+5)\cdot\ln(x+5)$; **б)** $\begin{cases} x=e^{2t}\cos^2 t, \\ y=e^{2t}\sin^2 t \end{cases}$;

в) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ (логарифмічна спіраль);

г) $\rho=a(1+\cos\varphi)$ (кардіоїда).

Розв'язання. а) Для явно заданої функції $y=(x+5)\cdot\ln(x+5)$ маємо область визначення $x>-5$. Знайдемо першу і другу похідні:

$$y'=\ln(x+5)+\frac{x+5}{x+5}=\ln(x+5)+1,$$

$$y''=\left(\ln(x+5)+1\right)'=\frac{1}{x+5}. \quad ■$$

б) Для функції $\begin{cases} x=e^{2t}\cos^2 t, \\ y=e^{2t}\sin^2 t, \end{cases}$ що задана параметрично, похідна обчислюється за формулою $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$, тому маємо:

$$x'_t(t)=2e^{2t}\cos^2 t-e^{2t}2\cos t\sin t=2\cos t\cdot e^{2t}\left(\cos t-\sin t\right);$$

$$y'_t(t)=2e^{2t}\sin^2 t+e^{2t}2\sin t\cos t=2\sin t\cdot e^{2t}\left(\sin t+\cos t\right);$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2\sin t\cdot e^{2t}\left(\sin t+\cos t\right)}{2\cos t\cdot e^{2t}\left(\cos t-\sin t\right)}=\operatorname{tg} t\cdot\frac{\operatorname{tg} t+1}{1-\operatorname{tg} t}=tg\, t\cdot\frac{\operatorname{tg} t+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg} t\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\operatorname{tg} t\cdot\operatorname{tg}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\cdot$$

Похідна є визначеною при $t\neq\pi/4+\pi n, n\in\mathbb{Z}, t\neq\pi k, k\in\mathbb{Z}$. Другу похідну знаходимо за формулою $y''_{xx}=\dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$ (див. розділ 1, §1, п. 12):

$$y''_{xx}=\frac{\left(\operatorname{tg} t\cdot\operatorname{tg}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)'_t}{2\cos t\cdot e^{2t}\left(\cos t-\sin t\right)}=\frac{\dfrac{\operatorname{tg}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2 t}+\dfrac{\operatorname{tg} t}{\cos^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}}{2\cos t\cdot e^{2t}\left(\cos t-\sin t\right)}=$$

$$=\frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+\cos t\cdot\sin t}{2\cos^3 t\cdot\cos^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\cdot e^{2t}\left(\cos t-\sin t\right)}=\frac{\cos 2t+\sin 2t}{4\cos^3 t\cdot\cos^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\cdot e^{2t}\left(\cos t-\sin t\right)}. \quad ■$$

в) Для обчислення похідної від функції $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, що задана неявно, обчислимо спочатку похідну за змінною x від наведених нижче виразів, вважаючи, що $y=y(x)$:

$$\left(\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{y'x-x'y}{x^2}=\frac{y'x-y}{x^2};$$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left(x^2+y^2\right)'_x=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2x+2yy')=\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Тепер продиференціюємо задану рівність $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$:

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x$$

і підставимо знайдені похідні

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Після перетворень отримаємо

$$y'x-y=x+yy';$$

$$y'=\frac{x+y}{x-y}.$$

Обчислимо другу похідну як похідну від першої, пам'ятаючи, що $y=y(x)$:

$$y''=\frac{(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{2xy'-2y}{(x-y)^2}.$$

Підставимо в отриманий вираз для другої похідної замість y' знайдене вище значення $y'=\frac{x+y}{x-y}$, отримаємо

$$y''=\frac{2x\frac{x+y}{x-y}-2y}{(x-y)^2}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{(x-y)^3}.\ \blacksquare$$

г) Розглянемо функцію $\rho=a(1+\cos\varphi)$ в полярній системі координат. Графік зображено на рис. 2.5 при $a=1$. Знаючи, що

$$\begin{cases}x=\rho(\varphi)\cos\varphi,\\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi,\end{cases}\quad \varphi\in[-\pi;\pi),$$

отримаємо за формулою похідної від функції, що задана параметрично:

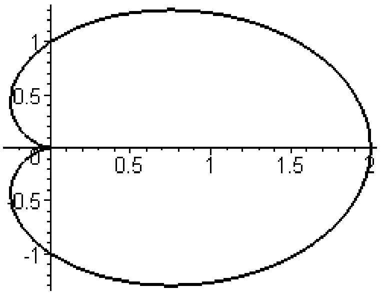


Рис. 2.5.

$$y'_x = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi}{\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi}.$$

Застосовуючи знайдену формулу, обчислюємо:

$$\rho' = a(1+\cos\varphi)' = -a\sin\varphi;$$

$$y'_x = \frac{-a\sin\varphi\sin\varphi + a(1+\cos\varphi)\cos\varphi}{-a\sin\varphi\cos\varphi - a(1+\cos\varphi)\sin\varphi} = -\frac{\cos\varphi + \cos 2\varphi}{\sin\varphi + \sin 2\varphi} =$$

$$= -\frac{2\cos\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = -\mathrm{ctg}\frac{3\varphi}{2},\ \ \varphi \notin \left\{-\pi; \pm\frac{2\pi}{3}; 0\right\}.$$

Знайдемо тепер другу похідну при $\varphi \notin \left\{-\pi; \pm\frac{2\pi}{3}; 0\right\}$. Для цього спочатку знайдемо першу похідну, яка є функцією, заданою параметрично (від параметра φ):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi = a(1+\cos\varphi)\cos\varphi, \\ y'_x = \mathrm{ctg}\frac{3\varphi}{2}. \end{cases}$$

Похідна від неї і буде дорівнювати другій похідній від цієї функції, а саме:

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{-\frac{1}{\sin^2\frac{3\varphi}{2}}\cdot\frac{3}{2}}{-a\sin\varphi\cos\varphi - a(1+\cos\varphi)\sin\varphi} = \frac{3}{2a\sin^2\frac{3\varphi}{2}2\sin\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} =$$

$$= \frac{3}{4a\sin^3\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}.\ \blacksquare$$

Приклад 2.19. Знайти d^2y, якщо

а) $y = \frac{u}{v}$, **б)** $y = \ln\sqrt{u^2+v^2}$,

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ двічі диференційовні функції, x – незалежна змінна.

Розв'язання. а) $y = \frac{u}{v} \Rightarrow dy = \frac{vdu - udv}{v^2}$;

$$d^2y = \frac{v^2\cdot d(vdu - udv) - d(v^2)\cdot(vdu - udv)}{\left(v^2\right)^2} =$$

$$= \frac{v^2\cdot(dvdu + vd^2u - dudv - ud^2v) - 2vdv\cdot(vdu - udv)}{v^4} =$$

$$= \frac{v\cdot(vd^2u - ud^2v) - 2dv\cdot(vdu - udv)}{v^3}\quad (v \neq 0).\ \blacksquare$$

б) $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}=\frac{1}{2}\ln\left(u^2+v^2\right)\Rightarrow dy=\frac{d(u^2+v^2)}{2\left(u^2+v^2\right)}=\frac{udu+vdv}{u^2+v^2}$;

$$d^2y=\frac{\left(u^2+v^2\right)d(udu+vdv)-d\left(u^2+v^2\right)(udu+vdv)}{\left(u^2+v^2\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(u^2+v^2\right)(dudu+ud^2u+dvdv+vd^2v)-(2udu+2vdv)(udu+vdv)}{\left(u^2+v^2\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(v^2-u^2\right)(du)^2-4uvdudv+\left(u^2-v^2\right)(dv)^2+\left(u^2+v^2\right)(ud^2u+vd^2v)}{\left(u^2+v^2\right)^2}$$

$$(u^2+v^2\neq 0).\ \blacksquare$$

Приклад 2.20. Знайти $y^{(50)}$, якщо $y=x^2\sin 2x$.

Розв’язання. Для знаходження цієї похідної застосуємо формулу Лейбніца. Нехай $u=x^2$, $v=\sin 2x$ (за u обрано многочлен!). Оскільки

$$u'=2x,\qquad u''=2,\qquad u'''=0,$$

то формула Лейбніца буде містити лише 3 доданки, а саме:

$$(uv)^{(50)}=\sum_{k=0}^{50}C_{50}^k u^{(k)}v^{(50-k)}=C_{50}^0uv^{(50)}+C_{50}^1\cdot u'v^{(49)}+C_{50}^2u''v^{(48)}+0.$$

Обчислимо 50, 49 і 48 похідні від функції v, застосовуючи формулу із таблиці похідних вищих порядків $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$:

$$v^{(50)}=2^{50}\sin\left(2x+\frac{50\pi}{2}\right)=-2^{50}\sin 2x;$$

$$v^{(49)}=2^{49}\sin\left(2x+\frac{49\pi}{2}\right)=2^{49}\cos 2x;$$

$$v^{(48)}=2^{48}\sin\left(2x+\frac{48\pi}{2}\right)=2^{48}\sin 2x.$$

Отримані результати зведемо в таблицю 2.1.

Таблиця 2.1.

k	$n-k$	C_n^k	$u^{(k)}$	$v^{(n-k)}$
0	50	$C_{50}^0=1$	$u=x^2$	$v^{(50)}=-2^{50}\sin 2x$
1	49	$C_{50}^1=50$	$u'=2x$	$v^{(49)}=2^{49}\cos 2x$
2	48	$C_{50}^2=\frac{50\cdot 49}{2}=25\cdot 49$	$u''=2$	$v^{(48)}=2^{48}\sin 2x$

Підставимо їх у формулу Лейбніца:

$$(uv)^{(50)}=C_{50}^0uv^{(50)}+C_{50}^1\cdot u'v^{(49)}+C_{50}^2u''v^{(48)}=$$

$$=1\cdot x^2\cdot(-2^{50}\sin 2x)+50\cdot 2x\cdot 2^{49}\cos 2x+25\cdot 49\cdot 2\cdot 2^{48}\sin 2x;$$

$$(uv)^{(50)}=2^{50}\cdot\left(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1225}{2}\sin 2x\right).\ \blacksquare$$

Приклад 2.21. Знайти $y^{(n)}$, якщо

а) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$; **б)** $y=\dfrac{x^{10}}{x^2+x-2}$ для $n>10$;

в) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$; **г)** $y=\sin^3 x$;

д) $y=\ln\dfrac{a-bx}{a+bx}$; **е)** $y=x\ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

є) довести формулу $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^n\ln x\right)=n!\cdot\left(\ln x+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right)$.

Розв'язання. а) Спочатку виділимо цілу частину:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}(cx+d)-\frac{ad}{c}+b}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}(cx+d)}{cx+d}+\frac{-\frac{ad}{c}+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\left(b-\frac{ad}{c}\right)\cdot\frac{1}{cx+d}.$$

Застосуємо формулу з таблиці похідних вищих порядків $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ для обчислення відповідної похідної від останнього дробу. Будемо мати: $\left(\dfrac{1}{cx+d}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(cx+d)^{n+1}}\cdot c^n$, звідки

$$y^{(n)}=\left(b-\frac{ad}{c}\right)\cdot\frac{(-1)^n n!}{(cx+d)^{n+1}}\cdot c^n=\frac{(-1)^n n!c^{n-1}(bc-ad)}{(cx+d)^{n+1}}.\ \blacksquare$$

б) Здійснимо перетворення раціонального дробу:

$$y=\frac{x^{10}}{x^2+x-2}=x^{10}\cdot\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{x^{10}}{3}\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x^{10}}{x-1}-\frac{x^{10}}{x+2}\right)$$

Результатом ділення многочлена $Q(x)=x^{10}$ на двочлен $(x-a)$ буде многочлен 9-го степеня з коефіцієнтом 1 при старшому степені, а залишком ділення (згідно з *теоремою Безу* [1, с. 99]) – значення многочлена $Q(x)$ в точці a, тобто $Q(a)$. Отже, матимемо:

$$\frac{x^{10}}{x-1}=x^9+a_8x^8+\ldots+a_1x+a_0+\frac{1^{10}}{x-1},$$

$$\frac{x^{10}}{x+2}=x^9+b_8x^8+\ldots+b_1x+b_0+\frac{(-2)^{10}}{x+2}.$$

Таким чином,

---

[1] Олійник А.С., Сущанський В.І. Лекції з алгебри: навчальний посібник. – Еиїв : ВПЦ Київський університет, 2019. URL: https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2019/03/lecturesinalgebra2019.pdf

$$y = P_8(x) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1^{10}}{x-1} - \frac{(-2)^{10}}{x+2}\right) = P_8(x) + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1024}{3(x+2)},$$

де $P_8(x)$ – многочлен 8-ого степеня.

Оскільки обчислюється похідна більше, ніж 8-го порядку, то вона буде нульовою для многочлена 8-го степеня, тому шукана похідна відповідно до формули

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

набуде вигляду

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{3(x-1)^{n+1}} - \frac{1024\cdot(-1)^n n!}{3(x+2)^{n+1}} = (-1)^n n!\cdot\left(\frac{1}{3(x-1)^{n+1}} - \frac{1024}{3(x+2)^{n+1}}\right). \ \blacksquare$$

в) Область визначення функції $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$: $x < 1/2$. Застосуємо формулу

$$\left(x^\alpha\right)^{(n)} = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)\cdot x^{\alpha-n}$$

для $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, тоді

$$y^{(n)} = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\cdot(1-2x)^{-\frac{1}{2}-n}\cdot(-2)^n =$$

$$= \frac{(-1)^n\cdot(-2)^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot(1-2x)^n\cdot\sqrt{1-2x}} = \frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^n\cdot\sqrt{1-2x}} \qquad (x<1/2)^1. \ \blacksquare$$

г) Спочатку застосуємо формулу, що знижує степінь синуса:

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x.$$

Також застосуємо формулу

$$(\sin ax)^{(n)} = a^n\cdot\sin\left(ax + \frac{\pi n}{2}\right).$$

В результаті будемо мати:

$$y^{(n)} = \left(\sin^3 x\right)^{(n)} = \left(\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x\right)^{(n)} =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) - \frac{1}{4}\cdot 3^n\cdot\sin\left(3x + \frac{\pi n}{2}\right). \ \blacksquare$$

д) ОДЗ: $\dfrac{a-bx}{a+bx} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\left|\dfrac{a}{b}\right|, \left|\dfrac{a}{b}\right|\right).$

У випадку, коли $a > 0$ при $x \in \left(-\left|\dfrac{a}{b}\right|, \left|\dfrac{a}{b}\right|\right)$ маємо:

---

[1] Тут і далі застосовано позначення для подвійних факторіалів:
$(2n-1)!! \overset{def}{=} 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$, $(2n)!! \overset{def}{=} 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)$.

$$\ln\frac{a-bx}{a+bx}=\ln(a-bx)-\ln(a+bx).$$

Оскільки

$$(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n},$$

то

$$y^{(n)}=\left(\ln(a-bx)-\ln(a+bx)\right)^{(n)}=$$

$$=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(a-bx)^n}\cdot(-b)^n-(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(a+bx)^n}\cdot b^n=$$

$$=b^n(n-1)!\cdot\left(-\frac{1}{(a-bx)^n}+\frac{(-1)^n}{(a+bx)^n}\right).$$

У випадку, коли $a<0$ при $x\in\left(-\left|\frac{a}{b}\right|,\left|\frac{a}{b}\right|\right)$ виконується рівність

$$\ln\frac{a-bx}{a+bx}=\ln(bx-a)-\ln(-a-bx).$$

Тоді

$$y^{(n)}=\left(\ln(bx-a)-\ln(-a-bx)\right)^{(n)}=$$

$$=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(bx-a)^n}\cdot b^n-(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(-a-bx)^n}\cdot(-b)^n=$$

$$=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(a-bx)^n}\cdot(-b)^n-(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(a+bx)^n}\cdot b^n=$$

$$=b^n(n-1)!\cdot\left(-\frac{1}{(a-bx)^n}+\frac{(-1)^n}{(a+bx)^n}\right).$$

В обох випадках маємо одну й ту ж форму похідної. ■

е) ОДЗ: $\frac{1-x}{1+x}>0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in\left(-1,1\right)$.

В межах інтервалу $\left(-1,1\right)$ має місце співвідношення:

$$x\ln\frac{1-x}{1+x}=x\left(\ln(1-x)-\ln(1+x)\right).$$

Знайдемо спочатку першу похідну:

$$y'=\left(x\left(\ln(1-x)-\ln(1+x)\right)\right)'=\ln(1-x)-\ln(1+x)+\frac{-x}{1-x}-\frac{x}{1+x}=$$

$$=\ln(1-x)-\ln(1+x)+\frac{1-x-1}{1-x}-\frac{1+x-1}{1+x}=\ln(1-x)-\ln(1+x)+1-\frac{1}{1-x}-1+\frac{1}{1+x}=$$

$$=\ln(1-x)-\ln(1+x)-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}.$$

Похідна порядку n від заданої функції дорівнює похідній порядку $n-1$ від y', тому зважаючи на формули

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},$$

отримаємо:

$$y^{(n)} = \left(\ln(1-x) - \ln(1+x) - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)^{(n-1)} =$$

$$= (-1)^{n-2}\cdot\frac{(n-2)!}{(1-x)^{n-1}}\cdot(-1)^{n-1} - (-1)^{n-2}\cdot\frac{(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} - \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1-x)^n}\cdot(-1)^n +$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} = (n-2)!\cdot\left(\frac{x+n-2}{(1-x)^n} + \frac{(-1)^{n-1}\cdot(x+n)}{(1+x)^n}\right). \ \blacksquare$$

є) Формулу $\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n\ln x\right) = n!\cdot\left(\ln x + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$ доведемо за індукцією.

Нехай $n=1$. Оскільки

$$\frac{d}{dx}(x\ln x) = \ln x + 1, \quad 1!\cdot\left(\ln x + \sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k}\right) = \ln x + 1,$$

то формула є вірною при $n=1$.

Припускаючи справедливість формули

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n\ln x\right) = n!\cdot\left(\ln x + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right),$$

доведемо формулу

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^{n+1}\ln x\right) = (n+1)!\cdot\left(\ln x + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)$$

У формулі Лейбніца оберемо $u = x,\ v = x^n\ln x$. Складові доданків формули Лейбніца зведемо в таблицю 2.2.

Таблиця 2.2.

k	$n+1-k$	C_{n+1}^k	$u^{(k)}$	$v^{(n+1-k)}$
0	$n+1$	$C_{n+1}^0 = 1$	$u = x$	$v^{(n+1)} = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^n\ln x\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n\ln x\right)\right)$
1	n	$C_{n+1}^1 = n+1$	$u' = 1$	$v^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n\ln x\right)$

Звідси отримаємо:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^{n+1}\ln x\right) = 1\cdot x\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n\ln x\right)\right) + (n+1)\cdot 1\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n\ln x\right).$$

Тепер застосуємо припущення індукції і правила диференціювання:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^{n+1}\ln x\right)=x\cdot\frac{d}{dx}\left(n!\cdot\left(\ln x+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\right)+(n+1)\cdot n!\cdot\left(\ln x+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=$$

$$=n!\cdot x\cdot\frac{1}{x}+(n+1)!\cdot\left(\ln x+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=(n+1)!\cdot\ln x+(n+1)!\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+(n+1)!\cdot\frac{1}{n+1}=$$

$$=(n+1)!\cdot\ln x+(n+1)!\cdot\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}=(n+1)!\cdot\left(\ln x+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right).\ \blacksquare$$

§ 6. Теореми Ролля, Лагранжа, Коші

Приклад 2.22. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$.

Розв'язання. Ця функція є неперервною і диференційовною на $\mathbb{R}$ як добуток неперервних і диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій. Зокрема, вона неперервна на відрізках $[1;2]$ і $[2;3]$ і диференційовна на інтервалах $(1;2)$ і $(2;3)$. Крім того, на кінцях зазначених відрізків набуває рівних значень: $f(1)=f(2)=0$ і $f(2)=f(3)=0$. Всі умови теореми Ролля виконуються, тому дана функція всередині цих відрізків має точки, в яких її похідна дорівнює нулю.

$$\exists\alpha\in(1;2): f'(\alpha)=0 \text{ і } \exists\beta\in(2;3): f'(\beta)=0.$$

Безпосередньо знайдемо такі точки:

$$f'(x)=(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)=3x^2-12x+11;$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-12x+11=0;$$

$$\alpha=2-\frac{\sqrt{3}}{3}\in(1;2);\quad \beta=2+\frac{\sqrt{3}}{3}\in(2;3).\ \blacksquare$$

Приклад 2.23. Функція $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ має нуль у точках $x_1=-1$ і $x_2=1$, але тим не менше $f'(x)\neq 0$ при $-1\leq x\leq 1$. Пояснити уявну суперечність з теоремою Ролля.

Розв'язання. Для того, щоб виконувались висновки теореми, потрібно, щоб виконувались усі без винятку її припущення. Перевіримо, чи є вірним припущення про диференційовність функції на інтервалі (–1;1), зокрема, диференційовність у точці $x_0=0$ цього інтервалу:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{(\Delta x)^2}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}=\infty.$$

Оскільки границя різницевого відношення в точці $x_0=0$ нескінченна, то дана функція не є диференційовною в цій точці.

Отже, припущення про диференційовність функції на інтервалі (-1;1) не виконується, тому теорему Ролля при $-1\leq x\leq 1$ застосовувати не можна, і жодної суперечності з цією теоремою не існує! ■

Приклад 2.24. Нехай

1) функція $f(x)$ визначена і має неперервну похідну $(n-1)$-го порядку $f^{(n-1)}(x)$ на сегменті $[x_0;x_n]$;

2) функція $f(x)$ має похідну n-го порядку $f^{(n)}(x)$ на інтервалі $(x_0;x_n)$;

3) виконується рівність

$$f(x_0)=f(x_1)=...=f(x_n) \quad (x_0<x_1<...<x_n).$$

Довести, що в інтервалі $(x_0;x_n)$ існує, як мінімум, одна точка ξ така, що $f^{(n)}(\xi)=0$.

Доведення. За умовою для кожного $i=1,2,...,n$ функція $f(x)$

1) неперервна на кожному із відрізків $[x_{i-1};x_i]$,

2) диференційовна на кожному інтервалі $(x_{i-1};x_i)$,

3) на кінцях відрізків набуває рівних значень $f(x_{i-1})=f(x_i)$,

тому за теоремою Ролля

$$\forall i=1,2,...,n\,\exists c_{1,i-1}\in(x_{i-1};x_i):\ f'(c_{1,i-1})=0.$$

Функція $f'(x)$ $\forall i_1=1,2,...,n-1$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \text{неперервна на } [c_{1,i_1-1};c_{1,i_1}],\\ 2)\ \text{диференційовна на } (c_{1,i_1-1};c_{1,i_1}),\\ 3)\ f'(c_{1,i_1-1})=f'(c_{1,i_1})=0, \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} \text{за теоремою Ролля}\\ \exists c_{2,i_1-1}\in(c_{1,i_1-1};c_{1,i_1}):\ f''(c_{2,i_1-1})=0. \end{array}$$

Продовжуючи аналогічні міркування, матимемо що функція $f^{(n-2)}(x)$ для $i_{n-2}=1,n-(n-2)$, тобто для $i_{n-2}=1,2$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \text{неперервна на } [c_{n-2,i_{n-2}-1};c_{n-2,i_{n-2}}],\\ 2)\ \text{диференційовна на}\\ (c_{n-2,i_{n-2}-1};c_{n-2,i_{n-2}}),\\ 3)\ f^{(n-2)}(c_{n-2,i_{n-2}-1})=f^{(n-1)}(c_{n-2,i_{n-2}})=0, \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} \text{за теоремою Ролля}\\ \exists c_{n-1,i_{n-2}-1}\in(c_{n-2,i_{n-2}-1};c_{n-2,i_{n-2}}):\\ \\ f^{(n-1)}(c_{n-1,i_{n-2}-1})=0. \end{array}$$

Нарешті, функція $f^{(n-1)}(x)$ за умовою і за доведенням

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \text{неперервна на } [c_{n-1,0};c_{n-1,1}],\\ 2)\ \text{диференційовна на}\\ (c_{n-1,0};c_{n-1,1}),\\ 3)\ f^{(n-1)}(c_{n-1,0})=f^{(n-1)}(c_{n-1,1})=0, \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} \text{за теоремою Ролля}\\ \exists\xi=c_{n,0}\in(c_{n-1,0};c_{n-1,1}):\\ f^{(n)}(\xi)=0. \end{array}$$

Оскільки $(c_{n-1,0};c_{n-1,1})\subset(x_0;x_n)$, то $\xi\in(x_0;x_n)$ і $f^{(n)}(\xi)=0$. ■

Приклад 2.25. Довести, що у випадку, коли всі корені многочлена

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n \quad (a_0\neq 0)$$

з дійсними коефіцієнтами a_k $(k=0,1,2,...,n)$ дійсні, його послідовні похідні $P_n'(x), P_n''(x),..., P_n^{(n-1)}(x)$ також мають лише дійсні корені.

Доведення. Многочлен степеня n має точно n коренів дійсних і комплексних з урахуванням їх кратності. Оскільки припускається, що цей многочлен із дійсними коефіцієнтами має тільки дійсні корені, то їх кількість дорівнює n. Нехай найменший серед них – x_1, а найбільший – x_n.

Нехай усі корені многочлена попарно відмінні. В прикладі 2.24 припускалося, що функція має рівні значення в $n+1$ точці. У даному прикладі таких точок n (корені многочлена). Два перші припущення прикладу 2.24 про неперервність похідної $(n-2)$-го порядку $P_n^{(n-1)}(x)$ на сегменті $[x_1;x_n]$ і існування похідної $(n-1)$-го порядку $P_n^{(n-1)}(x)$ на інтервалі $(x_1;x_n)$ задана функція-многочлен теж задовольняє. Із доведення прикладу 2.24 випливає, що похідні цього многочлена до $(n-1)$-го порядку включно $P_n'(x), P_n''(x),\ldots,P_n^{(n-1)}(x)$ мають лише дійсні корені на інтервалі $(x_1;x_n)$.

У випадку, коли многочлен має кратний корінь, то цей корінь зобов'язаний бути коренем похідної такого многочлена, тобто дійсним. ■

Приклад 2.26. Довести, що у многочлена Лежандра

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\left(x^2-1\right)^n\right\}$$

усі корені дійсні і розташовані в інтервалі $(-1;1)$.

Доведення. Многочлен $\left(x^2-1\right)^n$ має $2n$ коренів на $[-1;1]$: $x_0=x_1=\ldots=x_n=-1$ і $x_{n+1}=x_{n+2}=\ldots=x_{2n}=1$. Тому, згідно з прикладом 2.25, многочлен Лежандра як похідна порядку n від многочлена $\left(x^2-1\right)^n$ степеня $2n$ має лише дійсні корені. Оскільки корені -1 і 1 мають кратність n, то вони не можуть стати коренями похідної порядку n. Тому всі корені многочлена Лежандра лежать в інтервалі $(-1;1)$. ■

Приклад 2.27. Знайти функцію $\theta=\theta(x,\Delta x)$ таку, що

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1),$$

якщо

а) $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$; **б)** $f(x)=\dfrac{1}{x}$; **в)** $f(x)=e^x$.

Розв'язання. До функцій **а)** і **в)** можна застосовувати формулу Лагранжа скінченних приростів в околі будь-якої точки x із $\mathbb{R}$. Для функції **б)** формулу можна застосовувати в таких околах точок $x\neq 0$, які не містять у собі точки 0.

а) Розглянемо $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$:

$$f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0),$$

$$f(x+\Delta x)=a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c,$$

$$f'(x)=2ax+b \Rightarrow f'(x+\theta\Delta x)=2a(x+\theta\Delta x)+b \quad (0<\theta<1).$$

За формулою Лагранжа скінченних приростів будемо мати:

$$a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c-\left(ax^2+bx+c\right)=\left(2a(x+\theta\Delta x)+b\right)\cdot\Delta x,$$

$$2ax\Delta x+a(\Delta x)^2+b\Delta x=2ax\Delta x+2a\theta(\Delta x)^2+b\Delta x,$$

$$\theta=\frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

б) Для функції $f(x)=\dfrac{1}{x}$ за формулою Лагранжа скінченних приростів отримаємо:

$$\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{(x+\theta\Delta x)^2}\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1),$$

$$\theta^2\cdot\Delta x+2\theta\cdot x-x=0,$$

$$\frac{D}{4}=x^2+x\cdot\Delta x=x^2\cdot\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\ge 0 \text{ при } 1+\frac{\Delta x}{x}\ge 0,$$

$$\theta_{1,2}=\frac{-x\pm|x|\sqrt{1+\dfrac{\Delta x}{x}}}{\Delta x}=-\frac{x}{\Delta x}\pm\left|\frac{x}{\Delta x}\right|\sqrt{1+\frac{\Delta x}{x}}, \quad 1+\frac{\Delta x}{x}\ge 0, x\ne 0, \Delta x\ne 0$$

тобто

$$\theta_1=-\frac{x}{\Delta x}-\left|\frac{x}{\Delta x}\right|\sqrt{1+\frac{\Delta x}{x}}, \quad \theta_2=-\frac{x}{\Delta x}+\left|\frac{x}{\Delta x}\right|\sqrt{1+\frac{\Delta x}{x}},$$

$$\text{де } 1+\frac{\Delta x}{x}\ge 0, x\ne 0, \Delta x\ne 0.$$

Оскільки $x\ne 0, \Delta x\ne 0$, то $\dfrac{\Delta x}{x}\ne 0$. Якщо $\dfrac{\Delta x}{x}=-1$, то $\theta_{1,2}=1$, що неможливо, оскільки $0<\theta<1$, тому виникає потреба посилити обмеження:

$$1+\frac{\Delta x}{x}>0, x\ne 0, \Delta x\ne 0 \Leftrightarrow x(x+\Delta x)>0, \Delta x\ne 0.$$

Якщо $\dfrac{\Delta x}{x}>0$, то

✓ $\theta_1=-\dfrac{x}{\Delta x}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{\Delta x}{x}}\right)<0$, що не відповідає обмеженню $0<\theta_1<1$;

✓ $\sqrt{1+\dfrac{\Delta x}{x}}<1+\dfrac{\Delta x}{x}\Rightarrow\theta_2=\dfrac{x}{\Delta x}\left(\sqrt{1+\dfrac{\Delta x}{x}}-1\right)<\dfrac{x}{\Delta x}\cdot\dfrac{\Delta x}{x}=1$ і $\theta_2>0$.

Якщо $-1<\dfrac{\Delta x}{x}<0$, то

✓ $1>\sqrt{1+\dfrac{\Delta x}{x}}>1+\dfrac{\Delta x}{x}\Rightarrow\ \theta_1=-\dfrac{x}{\Delta x}\left(1-\sqrt{1+\dfrac{\Delta x}{x}}\right)\le-\dfrac{x}{\Delta x}\cdot\left(-\dfrac{\Delta x}{x}\right)=1$ і $\theta_1>0$;

✓ $\theta_2=-\underbrace{\dfrac{x}{\Delta x}}_{>1}\underbrace{\left(1+\sqrt{1+\dfrac{x}{\Delta x}}\right)}_{>1}>1$, що не відповідає обмеженню $0<\theta_2<1$.

Отже, нерівність $0<\theta<1$ задовольняє таке $\theta=\theta(x,\Delta x)$, що подане у вигляді $\theta=\dfrac{x}{\Delta x}\left(\sqrt{1+\dfrac{\Delta x}{x}}-1\right)$, де $x(x+\Delta x)>0, \Delta x\neq 0$.■

в) Для функції $f(x)=e^x$ за формулою Лагранжа скінченних приростів отримуємо:

$$e^{x+\Delta x}-e^x=e^{x+\theta\Delta x}\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1),$$

$$e^{\Delta x}-1=e^{\theta\Delta x}\cdot\Delta x,$$

$$\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^{\theta\Delta x}\Rightarrow \ \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}>0\Rightarrow \Delta x\neq 0,$$

$$\theta=\frac{1}{\Delta x}\ln\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

Перевіримо співвідношення $0<\theta<1$. Із прикладу 1.11 відомо, що $e^{\Delta x}>\Delta x+1$ при $\Delta x\neq 0$, тобто

$$\begin{cases}\ln\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}>0 \quad \text{при} \quad \Delta x>0,\\ \ln\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}<0 \quad \text{при} \quad \Delta x<0,\end{cases} \Rightarrow \ \frac{1}{\Delta x}\ln\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}>0 \ \ \forall\Delta x\neq 0.$$

Доведемо нерівність $e^{\Delta x}-1<\Delta x e^{\Delta x}$. Для цього розглянемо функцію $f(\Delta x)=e^{\Delta x}-1-\Delta x e^{\Delta x}$, для якої матимемо (*достатня умова монотонності функції на інтервалі*):

$$f'(\Delta x)=-\Delta x e^{\Delta x},$$

✓ $\Delta x>0\Rightarrow f'(\Delta x)<0\Rightarrow f(\Delta x)\searrow \text{при}\ \Delta x>0\Rightarrow\begin{cases}f(\Delta x)<f(0)\ \text{при}\ \Delta x>0,\\ f(0)=0,\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{\Delta x}-1-\Delta x e^{\Delta x}<0 \ \text{при}\ \Delta x>0,$$

✓ $\Delta x<0\Rightarrow f'(\Delta x)>0\Rightarrow f(\Delta x)\nearrow \text{при}\ \Delta x<0\Rightarrow\begin{cases}f(\Delta x)<f(0)\ \text{при}\ \Delta x<0,\\ f(0)=0,\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{\Delta x}-1-\Delta x e^{\Delta x}<0 \ \text{при}\ \Delta x<0.$$

Із доведеної нерівності отримуємо

$$\begin{cases}\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}<e^{\Delta x} \quad \text{при} \quad \Delta x>0,\\ \dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}>e^{\Delta x} \quad \text{при} \quad \Delta x<0,\end{cases} \Rightarrow \ \frac{1}{\Delta x}\ln\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}<1 \ \ \forall\Delta x\neq 0.$$

Отже, $\theta=\dfrac{1}{\Delta x}\ln\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\in(0;1)$ при $\Delta x\neq 0$. ■

Приклад 2.28. Нехай функція $f(x)$ диференційовна на сегменті $[x_1;x_2]$, причому $x_1\cdot x_2>0$. Довести, що

$$\frac{1}{x_1-x_2}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

де $x_1<\xi<x_2$.

Доведення. Перетворимо ліву частину рівності:

$$\frac{1}{x_1-x_2}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=\frac{x_1 f(x_2)-x_2 f(x_1)}{x_1-x_2}=\frac{\frac{f(x_2)}{x_2}-\frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}.$$

Розглянемо дві допоміжні функції $\varphi(x)=\frac{f(x)}{x}$ і $\psi(x)=\frac{1}{x}$. Вони диференційовні, а тому й неперервні (твердження 1.2) на $[x_1;x_2]$ за умови $x_1\cdot x_2>0$, крім того, $\psi'(x)\neq 0\quad\forall\, x\in[x_1;x_2]$. Тому до них можна застосувати теорему Коші:

$$\exists\xi\in(x_1;x_2):\quad \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{\psi(x_2)-\psi(x_1)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}.$$

Оскільки $\varphi'(\xi)=\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}$, $\psi'(\xi)=\frac{-1}{\xi^2}$, то $\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$.

Отже, отримаємо:

$$\exists\xi\in(x_1;x_2):$$

$$\frac{1}{x_1-x_2}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=\frac{\frac{f(x_2)}{x_2}-\frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}=\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{\psi(x_2)-\psi(x_1)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

що й доводить задану рівність. ■

§ 7 Монотонність функції на інтервалі. Локальний екстремум. Найбільше й найменше значення функції на відрізку

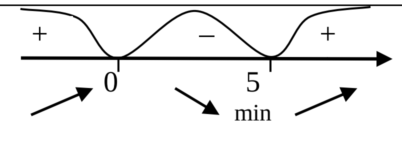
Приклад 2.29. Знайти інтервали монотонності та екстремуми даної функції, користуючись першою похідною: $y=\frac{(x-5)^2}{x^2}$.

Розв'язання. Область визначення цієї функції $x\neq 0$. Знаходимо критичні точки, тобто точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує:

$$y'=\frac{\left((x-5)^2\right)'\cdot x^2-(x-5)^2\cdot\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}=\frac{2x^2(x-5)-2x(x-5)^2}{x^4}=\frac{10(x-5)}{x^3},$$

$$y'=0\Rightarrow\begin{cases} x\neq 0, \\ x-5=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\neq 0, \\ x=5.\end{cases}$$

Визначаємо інтервали монотонності та точки екстремуму функції, використовуючи знак першої похідної (достатня умова монотонності функції на інтервалі та перша достатня умови локального екстремуму):

Знаки y'	
Характерні точки	
Напрямки монотонності, loc extr	
Значення функції в точках loc extr	$\nexists$ 0

Отже, на інтервалі $(-\infty;0)$ і на $(5;+\infty)$ функція зростає;

на інтервалі $(0;5)$ функція спадає;

точка $x=5$ є точкою локального мінімуму. ■

Приклад 2.30. Знайти найбільше та найменше значення функції на зазначеному відрізку:

$$y=\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x,\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

Розв'язання. Будемо діяти згідно зі схемою, наведеною у п. 11 розділу 1, §2. Знайдемо критичні точки функції:

$$y'=\frac{1}{2}(\cos 2x)'+(\sin x)'=\frac{1}{2}(-\sin 2x)\cdot 2+\cos x=\cos x-\sin 2x,$$

$$y'=0,$$

$$\cos x-\sin 2x=0 \quad \Leftrightarrow \cos x-2\cos x\cdot\sin x=0 \quad \Leftrightarrow \cos x\cdot(1-2\sin x)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ 1-2\sin x=0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\, n\in\mathbb{Z},\\ x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\, k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Інтервалу $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ належать тільки точки $x=\frac{\pi}{6}$ і $x=\frac{\pi}{2}$.

Знаходимо значення функції в критичних точках та на кінцях інтервалу:

$$y(0)=\frac{1}{2},\quad y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4},\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Висновок: $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2},\quad \max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$. ■

Приклад 2.31. Визначити найбільше значення добутку m-ого та n-ого степенів ($m>0, n>0$) двох додатних чисел, сума яких дорівнює a.

Розв'язання. Нехай x – одне з таких додатних чисел, тоді інше дорівнює $a-x$. Добуток їх m-го та n-го степенів дорівнюватиме $x^m\cdot(a-x)^n$. Потрібно знайти найбільше значення функції $f(x)=x^m\cdot(a-x)^n$ при $x\in(0;a)$.

Для дослідження цієї функції знайдемо спочатку похідну:

$$f'(x) = mx^{m-1}\cdot(a-x)^n - n(a-x)^{n-1}\cdot x^m = x^{m-1}\cdot(a-x)^{n-1}(ma-mx-nx)\,.$$

Далі знаходимо критичні точки функції:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=a, \\ x=\dfrac{ma}{m+n}. \end{array}\right.$$

В інтервалі $(0,a)$ лежить одна критична точка: $x=\dfrac{ma}{m+n}$.

Нарешті, знайдемо значення функції в критичній точці і граничні значення на кінцях інтервалу:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0,\quad \lim_{x\to a} f(x)=0,$$

$$f\left(\frac{ma}{m+n}\right)=\left(\frac{ma}{m+n}\right)^m\cdot\left(a-\frac{ma}{m+n}\right)^n=\frac{m^m n^n a^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}.$$

Висновок: найбільше значення функції дорівнює $\dfrac{m^m n^n a^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}$. ■

Приклад 2.32. В еліпс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ вписати прямокутник най-більшої площі зі сторонами, що паралельні осям цього еліпса.

Розв’язання. Нехай $2x, 2y$ (одиниць довжини) – довжини сторін прямокутника, тоді точки з координатами $(\pm x, \pm y)$, $(\pm x, \mp y)$ є вершинами цього прямокутника (див. рис. 2.6). Ці точки повинні лежати на еліпсі, а їх координати – задовольняти рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

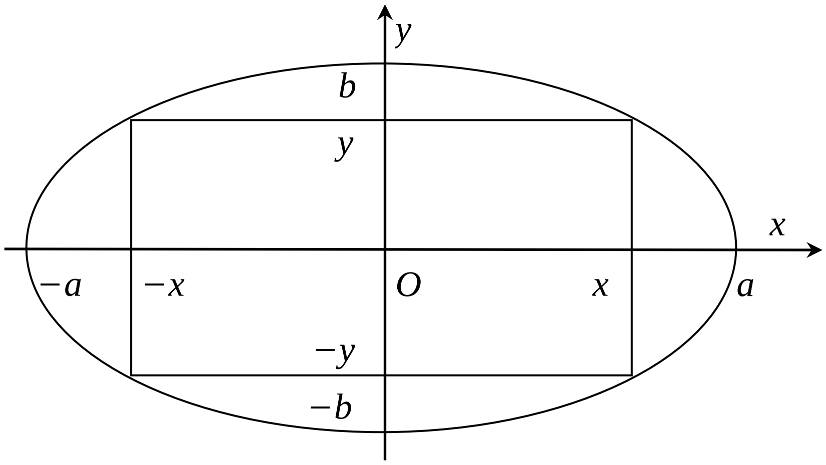


Рис. 3.6.

Звідки $y=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$. Площа побудованого прямокутника дорівнює

$S(x)=4x\,b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Знайдемо значення півдовжини $x\in(0;a)$ однієї із сторін прямокутника, при якому функція $S(x)$ набуває найбільшого значення.

Для цього знайдемо критичні точки цієї функції:

$$S'(x)=4b\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}-\frac{x^2}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)=\frac{4b\left(a^2-2x^2\right)}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}};$$

$$S'(x)=0 \text{ при } x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}};$$

$$\nexists S'(x) \text{ при } x=\pm a.$$

В інтервалі $(0,a)$ лежить одна критична точка: $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$. Тепер знайдемо значення функції в критичній точці і граничні значення на кінцях інтервалу:

$$\lim_{x\to 0}S(x)=0,\quad \lim_{x\to a}S(x)=0,$$

$$S\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\frac{4ab}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2}}=2ab.$$

Отже, найбільше значення функції досягається при $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$. Тоді та із сторін прямокутника, що паралельна великій піввісі еліпса, має довжину $2x=a\sqrt{2}$, а інша – $2y=2b\sqrt{1-\frac{a^2}{2a^2}}=b\sqrt{2}$.

Висновок: довжини сторін шуканого прямокутника дорівнюють $a\sqrt{2}$ і $b\sqrt{2}$. ■

Приклад 2.33. Знайти найбільший об'єм конуса з довжиною твірної l.

Розв'язання. Нехай α – кут між твірною конуса та його висотою. Зобразимо осьовий переріз конуса (див. рис. 2.7). В $\triangle BKS, \angle K=90^o,\ \angle KSB=\alpha$, $SB=l$, тоді радіус основи дорівнюватиме

$$R=KB=l\sin\alpha,$$

а висота конуса

$$h=SK=l\cos\alpha.$$

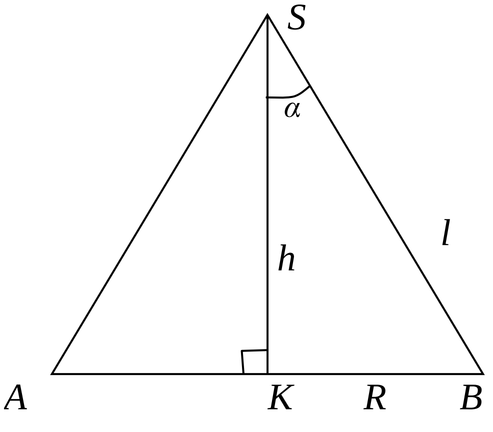


Рис. 2.7.

Тоді об'єм конуса складатиме

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{l^3\pi}{3}\cdot\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha.$$

Для пошуку найбільшого значення об'єму знайдемо найбільше значення функції

$$f(\alpha) = \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$$

на інтервалі $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Для цього знайдемо критичні точки цієї функції:

$$f'(\alpha) = -\sin^3\alpha + 2\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \left(-\text{tg}^{\,2}\alpha + 2\right);$$

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0, \\ \sin\alpha = 0, \\ \text{tg}\,\alpha = \pm\sqrt{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n,\, n \in \mathbb{Z}, \\ \alpha = \pi m,\, m \in \mathbb{Z}, \\ \alpha = \pm\text{arctg}\sqrt{2} + \pi k,\, k \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

$$\nexists f'(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi j,\ j \in \mathbb{Z}.$$

В інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ лежить одна критична точка: $\alpha = \text{arctg}\sqrt{2}$. Знайдемо значення функції в критичній точці і граничні значення на кінцях інтервалу:

$$\lim_{\alpha\to 0} f(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} f(\alpha) = 0,$$

$$f\left(\text{arctg}2\right) = \cos\left(\text{arctg}\sqrt{2}\right) \cdot \sin^2\left(\text{arctg}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\left(\text{arctg}\sqrt{2}\right)}} \cdot \frac{\text{tg}^2\left(\text{arctg}\sqrt{2}\right)}{1 + \text{tg}^2\left(\text{arctg}\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Висновок: найбільше значення об'єму дорівнює

$$V = \frac{l^3\pi}{3} \max_{\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)} f(\alpha) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} l^3. \quad \blacksquare$$

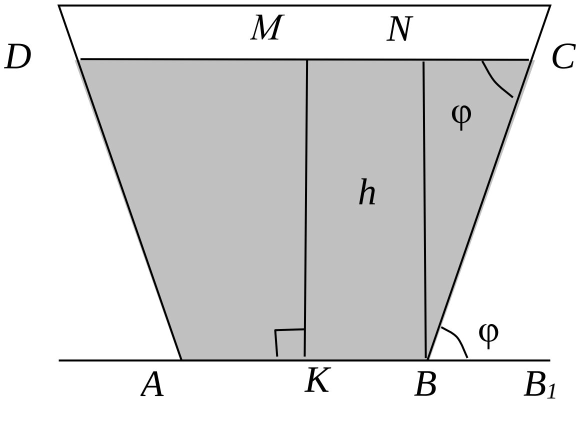


Рис. 3.8.

Приклад 2.34. Поперечний переріз відкритого каналу має форму рівнобічної трапеції. При якому нахилі φ боків «мокрий периметр» перерізу буде найменшим, якщо площа «живого перерізу» води в каналі до-рівнює S, а рівень води дорівнює h.

Розв'язання. На рис. 2.8 зображено поперечний переріз каналу. Нахилу боків відповідає кут $\angle CBB_1 = \varphi$, рівню води – довжина відрізків

$$MK = NB = h\,.$$

В $\triangle BNC,\ \angle N = 90^o,\ \angle NCB = \varphi$, тоді

$$BC = \frac{h}{\sin\varphi},\ NC = h \cdot c\text{tg}\,\varphi\,.$$

Звідси знайдемо «живий переріз» води в каналі:

$$S = \frac{2AB + 2NC}{2} \cdot h =$$
$$= \left(AB + h \cdot \text{ctg}\,\varphi\right) \cdot h,$$

тому

$$AB = \frac{S}{h} - h \cdot \text{ctg}\,\varphi\,.$$

Отже, «мокрий периметр» перерізу складатиме:

$$P = AD + AB + BC = \frac{S}{h} - h \cdot \text{ctg}\,\varphi + \frac{2h}{\sin\varphi}\,.$$

Знайдемо значення кута $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, при якому функція $P(\varphi)$ набуває найменшого значення.

Для цього знайдемо критичні точки цієї функції:

$$P'(\varphi) = \frac{h}{\sin^2\varphi} - \frac{2h\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{h(1 - 2\cos\varphi)}{\sin^2\varphi}\,;$$

$$P'(\varphi) = 0 \text{ при } \varphi = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\nexists P'(\varphi) \text{ при } \varphi = \pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

В інтервалі $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ лежить одна критична точка: $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Значення функції в критичній точці і граничні значення на кінцях інтервалу:

$$\lim_{\varphi \to +0} P(\varphi) = \lim_{\varphi \to +0}\left(\frac{S}{h} - h \cdot \text{ctg}\,\varphi + \frac{2h}{\sin\varphi}\right) = \lim_{\varphi \to +0}\left(\frac{S}{h} + \frac{h(-\cos\varphi + 2)}{\sin\varphi}\right) = +\infty$$

$$\lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2} - 0} P(\varphi) = \frac{S}{h} + 2h,\quad P\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{S}{h} + h\sqrt{3}.$$

Отже, найменше значення «мокрого периметра» досягається для значення кута $\varphi = \frac{\pi}{3}$ нахилу боків каналу. ■

§ 8. Знаходження сум за допомогою похідної

Розглянемо знаходження сум за допомогою похідних. Для цього будемо використовувати відомі формули:

$$x+x^2+...+x^n=\frac{x-x^{n+1}}{1-x}; \tag{2.1}$$

$$\sin x+\sin 2x+...+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}},\ x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}; \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+...+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},\ x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}; \tag{2.3}$$

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot...\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}},\ x\neq 2^n k\pi,\ k\in\mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

Формули для знаходження багатьох сум скінченної кількості одноіменних функцій можна отримати, диференціюючи такі рівності необхідну кількість разів, при цьому добуток (2.4) попередньо логарифмують.

Приклад 2.35. Знайти формулу для суми

$$1+2\ln x+3\ln^2 x+...+n\ln^{n-1}x,\ x>0.$$

Розв'язання. Виберемо в рівності (2.1) $\ln x$ замість x:

$$\ln x+\ln^2 x+...+\ln^n x=\frac{\ln x-\ln^{n+1}x}{1-\ln x}.$$

Знайдемо похідну від обох частин цієї рівності. Після перетворень отримуємо:

$$\frac{1}{x}\left(1+2\ln x+3\ln^2 x+...+n\ln^{n-1}x\right)=\frac{1-(n+1)\ln^n x+n\ln^{n+1}x}{x(1-\ln x)^2}.$$

Звідси знаходимо:

$$1+2\ln x+3\ln^2 x+...+n\ln^{n-1}x=\frac{1-(n+1)\ln^n x+n\ln^{n+1}x}{(1-\ln x)^2}.\quad\blacksquare$$

Приклад 2.36. Знайти суму:

$$\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{16\cos^2\frac{x}{4}}+...+\frac{1}{2^{2n}\cos^2\frac{x}{2^n}}.$$

Розв'язання. Логарифмуємо рівність (2.4) та отримуємо:

$$\ln\cos\frac{x}{2}+\ln\cos\frac{x}{4}+...+\ln\cos\frac{x}{2^n}=\ln\sin x-n\ln 2-\ln\sin\frac{x}{2^n}.$$

Диференціюємо отриману тотожність та знаходимо:

$$-\left(\frac{1}{2}\text{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\text{tg}\frac{x}{4}+...+\frac{1}{2^n}\text{tg}\frac{x}{2^n}\right)=\text{ctg}x-\frac{1}{2^n}\text{ctg}\frac{x}{2^n}.$$

Після повторного диференціювання отримуємо шукану формулу:

$$\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{16\cos^2\frac{x}{4}}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}\cos^2\frac{x}{2^n}}=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{2^{2n}\sin^2\frac{x}{2^n}}.\ \blacksquare$$

§9. Доведення нерівностей

Зауваження 2.1. Зверніть увагу **(!)**, що декілька нерівностей було доведено в теоретичній частині (див. розділ 1, §2, п. 5). Зокрема, там було розглянуто такі класи задач:

I. Доведення нерівностей за допомогою теореми Лагранжа.

II. Доведення нерівностей з використанням монотонності функції.

Приклад 2.37. Довести нерівності

а) $\operatorname{tg} x > x+\frac{x^3}{3}$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$;

б) $(x^\alpha+y^\alpha)^{1/\alpha}>(x^\beta+y^\beta)^{1/\beta}$ при $x>0, y>0, 0<\alpha<\beta$;

в) $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$;

г) $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ при $x>0, y>0, x\neq y, n>1$;

д) $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$ при $x\neq y$.

Розв'язання. Розглянемо *II клас нерівностей, що доводяться з використанням монотонності функцій (а–в).*

а) Для доведення нерівностей $\operatorname{tg} x > x+\frac{x^3}{3}$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$ розглянемо функцію $f(x)=\operatorname{tg} x - x-\frac{x^3}{3}$.

Знаходимо похідні до того порядку n, при якому можна буде визначити знак $f^{(n)}(x)$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$:

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1-x^2,$$

$$f''(x)=2\cos^{-3}x\sin x-2x,$$

$$f'''(x)=6\cos^{-4}x\cdot\sin^2 x+2\cos^{-2}x-2=$$

$$=2\cdot\frac{3\sin^2 x+\cos^2 x-\cos^4 x}{\cos^4 x}=2\cdot\frac{3\sin^2 x+\cos^2 x\cdot\sin^2 x}{\cos^4 x}>0.$$

Отже,

$f'''(x)>0$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow f''(x)\nearrow$ $\Rightarrow$, якщо $x>0$, то $f''(x)>f''(0)$. Оскільки $f''(0)=\left(2\cos^{-3}x\sin x-2x\right)\Big|_{x=0}=0$, а $f''(x)>f''(0)$, то $f''(x)>0$.

Тепер маємо:

$f''(x)>0$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow f'(x)\nearrow$ $\Rightarrow$, якщо $x>0$, то $f'(x)>f'(0)$. Оскільки $f'(0)=\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1-x^2\right)\Big|_{x=0}=0$, а $f'(x)>f'(0)$, то $f'(x)>0$.

Таким чином,

$f'(x)>0$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow f(x)\nearrow$ $\Rightarrow$, якщо $x>0$, то $f(x)>f(0)$. Оскільки $f(0)=\left(\operatorname{tg}x-x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}=0$, а $f(x)>f(0)$, то $f(x)>0$, тобто $\operatorname{tg}x-x-\frac{x^3}{3}>0$, що і треба було довести. ■

б) Перед доведенням нерівності $(x^\alpha+y^\alpha)^{1/\alpha}>(x^\beta+y^\beta)^{1/\beta}$ при $x>0, y>0, 0<\alpha<\beta$ спочатку поділимо обидві частини цієї нерівності на y (така дія коректна, оскільки $y>0$):

$$\left(\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha+1\right)^{1/\alpha}>\left(\left(\frac{x}{y}\right)^\beta+1\right)^{1/\beta}.$$

Остання нерівність еквівалентна заданій, тому будемо доводити останню нерівність. Для цього розглянемо функцію $f(\gamma)=\left(t^\gamma+1\right)^{1/\gamma}$ при $\gamma>0$, де $t>0$ – стала. Щоб знайти похідну, застосуємо метод логарифмічного диференціювання:

$$\ln f(\gamma)=\frac{\ln\left(t^\gamma+1\right)}{\gamma};$$

$$\frac{f'(\gamma)}{f(\gamma)}=\frac{\frac{t^\gamma\ln t}{t^\gamma+1}\gamma-\ln\left(t^\gamma+1\right)}{\gamma^2}=\frac{\gamma t^\gamma\ln t-\left(t^\gamma+1\right)\ln\left(t^\gamma+1\right)}{\gamma^2\left(t^\gamma+1\right)}=\frac{1}{\gamma^2\left(t^\gamma+1\right)}\ln\frac{\left(t^\gamma\right)^{t^\gamma}}{\left(t^\gamma+1\right)^{\left(t^\gamma+1\right)}};$$

$$f'(\gamma)=\left(t^\gamma+1\right)^{1/\gamma}\frac{1}{\gamma^2\left(t^\gamma+1\right)}\ln\frac{\left(t^\gamma\right)^{t^\gamma}}{\left(t^\gamma+1\right)^{\left(t^\gamma+1\right)}}. \qquad (2.5)$$

Знайдемо знак похідної. Очевидно, що перші два множники є додатними при $\gamma>0$, $t>0$. Відкритим є питання про знак третього множника. Оцінимо вираз під знаком логарифма. Для цього введемо заміну $z=t^\gamma>0$ і дві допоміжні функції $h(z)=z^z$ і $g(z)=\frac{z^z}{(z+1)^{z+1}}$ при $z>0$. Для першої із цих функцій

$$h'(z)=\left(z^{z}\right)'=\left(e^{z\ln z}\right)'=z^{z}\cdot(\ln z+1).$$

Знаки $h'(z)$	$-$ $\quad$ $+$
Характерні точки	0 $\quad$ $z=1/e$
Напрямки монотонності, loc extr	↘ loc min ↗
Значення функції в точках loc extr	$\left(1/e\right)^{1/e}$

Також маємо: $\lim\limits_{z\to+0} z^{z}=1$ (див. приклад 2.42 г). У випадку, коли $0<z<1/e$, функція $h(z)=z^{z}$ спадає і тому $\lim\limits_{z\to+0} h(z)>h(z)>h(1/e)$, тобто $1>z^{z}>\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$, окрім того, $(z+1)^{z+1}>1$, отже, здійснюється ланцюг нерівностей:

$$z^{z}<1<(z+1)^{z+1},$$

звідки випливає, що

$$g(z)=\frac{z^{z}}{(z+1)^{z+1}}<1.$$

У випадку, коли $z>1/e$, функція $h(z)=z^{z}$ зростає, тому має місце імплікація

$$\left(1<z<z+1\right)\Rightarrow\left(z^{z}<(z+1)^{z+1}\right),$$

тоді для таких значень z має місце оцінка

$$g(z)=\frac{z^{z}}{(z+1)^{z+1}}<1.$$

Отже, вираз під знаком логарифма в (2.5) менший за 1, тому $f'(\gamma)<0\ \forall\gamma>0\ \Rightarrow f(\gamma)\searrow$ на $(0;+\infty)$ $\Rightarrow$, якщо $0<\alpha<\beta$, то $f(\alpha)>f(\beta)$ $\Rightarrow\left(t^{\alpha}+1\right)^{1/\alpha}>\left(t^{\beta}+1\right)^{1/\beta}$.

Підставляючи $t=\dfrac{x}{y}$ в останню нерівність, отримаємо нерівність, що доводиться. ■

в) Для доведення нерівності $\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x$ при $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ введемо функцію $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ при $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, тоді

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^{2}}=\frac{\cos x(x-\operatorname{tg}x)}{x^{2}}.$$

Розглянемо допоміжну функцію $g(x)=x-tg\,x$, отримаємо

$$g'(x)=1-\frac{1}{\cos^{2}x}=\frac{\cos^{2}x-1}{\cos^{2}x}<0 \text{ при } 0<x<\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ g(x)\searrow \text{ при } 0<x<\frac{\pi}{2},$$

$$\Rightarrow \text{, якщо } 0 < x < \frac{\pi}{2}\text{, то } g(x) < g(0) = 0$$

$$\Rightarrow x - \operatorname{tg} x < 0 \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Оскільки $x - \operatorname{tg} x < 0$, то $f'(x) = \dfrac{\cos x(x - \operatorname{tg} x)}{x^2} < 0$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, тому

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{x} > \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi} \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi} x < \sin x < x \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Нагадаємо, що цю нерівність було доведено в теоретичній частині за допомогою опуклості вгору графіка функції $\sin x$ при $0 < x < \pi / 2$. ■

Розглянемо III клас нерівностей, що доводяться за допомогою властивостей опуклості функції, – приклади (г, д).

г) Для доведення нерівності $\dfrac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$ при $x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1$ розглянемо функцію $f(t) = t^n$ при $t > 0, n > 1$:

$$f'(t) = nt^{n-1},$$

$$f''(t) = n(n-1)t^{n-2} > 0 \text{ при } t > 0, n > 1.$$

Тому $f(t) = t^n$ опукла вниз при $t > 0, n > 1$ (*другий критерій опуклості вниз*). Із означення опуклої вниз функції, зокрема, випливає, що вона задовольняє нерівність

$$\forall x > 0 \forall y > 0 \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Звідки одержимо

$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \text{ при } x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1,$$

що й треба було довести. ■

д) Щоб довести нерівність $\dfrac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$ при $x \neq y$, розглянемо функцію $f(t) = e^t$:

$$f'(t) = e^t, \qquad f''(t) = e^t > 0.$$

Тому $f(t) = e^t$ опукла вниз на $\mathbb{R}$. Звідки отримаємо

$$\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} \text{ на } \mathbb{R} \text{ при } x \neq y,$$

що й треба було довести. ■

§ 10. Доведення тотожностей

Доведення тотожностей за допомогою похідної ґрунтується на означенні сталості функції, згідно з якою, якщо в усіх точках деякого проміжку $f'(x)=0$, то функція $f(x)$ зберігає на ньому стале значення.

Приклад 2.38. Довести тотожність $\operatorname{arctg} x^2+\operatorname{arctg}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$f(x)=\operatorname{arctg} x^2+\operatorname{arctg}\frac{1-x^2}{1+x^2},$$

визначену на $\mathbb{R}$. Знайдемо її похідну для всіх $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{2x}{1+x^4}+\frac{1}{1+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}\cdot\frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2x}{1+x^4}-\frac{4x}{2+2x^4}=0.$$

Оскільки $f'(x)=0$, то $f(x)$ є сталою, $f(x)\equiv C$ для будь-якого $x\in\mathbb{R}$ (*теорема 1.11*). Нехай $x=1$. Отримуємо $\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}$. Звідси маємо $C=\frac{\pi}{4}$, тобто для всіх значень $x\in\mathbb{R}$ виконується тотожність

$$\operatorname{arctg} x^2+\operatorname{arctg}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}. \quad \blacksquare$$

Приклад 2.39. Довести тотожність

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x.$$

Розв'язання. Розглянемо функції

$$f(x)=\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x.$$

Знайдемо її похідну:

$$f'(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{8}-x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}-x\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}+x\right)-$$

$$-\sqrt{2}\cos 2x=\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)-\sqrt{2}\cos 2x=$$

$$=\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\cos 2x=0.$$

Звідси $f(x)=C\ \forall x\in\mathbb{R}$. Оскільки $f(0)=0$, то $f(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$, звідки випливає, що

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x. \quad \blacksquare$$

Приклад 2.40. Довести тотожність

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} x = 1,$$

якщо $x + y + z = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. З додаткової умови знаходимо $z = \frac{\pi}{2} - x - y$. Введемо допоміжну функцію для фіксованого y

$$f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{ctg}(x + y) + \operatorname{ctg}(x + y) \cdot \operatorname{tg} x,$$

яка співпадає з лівою частиною тотожності. Ця функція визначена на множині $A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$. Доведемо, що для будь-яких можливих $x \in A$ та $y \in A$ виконується $f(x) \equiv 1$. Знайдемо $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{\operatorname{tg} y}{\cos^2 x} - \frac{\operatorname{tg} y}{\sin^2(x + y)} - \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2(x + y)} + \frac{\operatorname{ctg}(x + y)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \left(\operatorname{tg} y + \operatorname{ctg}(x + y) \right) - \frac{1}{\sin^2(x + y)} \cdot \left(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y \right) =$$

$$= \frac{1}{\cos x \cos y \sin(x + y)} - \frac{1}{\cos x \cos y \sin(x + y)} = 0.$$

Отже, $f(x) \equiv C_n$ на кожному із проміжків $A_n = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$, $n \in \mathbb{Z}$. Для знаходження сталих C_n оберемо $x_n = \pi n \in A_n$, тоді

$$C_n = f(\pi n) = \operatorname{tg} \pi n \cdot \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{ctg}(\pi n + y) + \operatorname{ctg}(\pi n + y) \cdot \operatorname{tg} \pi n = 1.$$

Тобто $f(x) \equiv 1$ на всій множині визначення. Отже, тотожність виконується. ■

§ 11. Розкриття невизначеностей. Правила Лопіталя

Правила Лопіталя застосовуються для розкриття невизначеностей виду $\left[\frac{0}{0} \right]$ та $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Нагадаємо, що із існування границі відношення похідних випливає існування границі відношення функцій. Тому спочатку бажано відповідну рівність границь записувати під знаком запитання, який після перевірки існування границі відношення похідних перекреслювати.

Приклад 2.41. Дослідити можливість застосування правила Лопіталя для границі $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$.

Розв'язання. Позначимо $f(x) = x - \sin x, \quad g(x) = x + \sin x$, тоді

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \to \infty} tg^2 2x \text{ – не існує,}$$

тому застосовувати правило Лопіталя не можна, однак задана границя існує, оскільки

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}\sin x}{1+\frac{1}{x}\sin x}=\left|\begin{array}{l}x\to\infty\Rightarrow\\ \frac{1}{x}\sin x=[\text{н.м.ф.×обм.=н.м.ф.}]\to 0\end{array}\right|=\frac{1-0}{1+0}=1.\ \blacksquare$$

Приклад 2.42. Обчислити наступні границі:

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(2-x)}{e^{x-1}-1}$; **б)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x\sin x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln x\,(\varepsilon>0)$; **г)** $\lim\limits_{x\to0}x^x$;

д) $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$; **е)** $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$.

Розв'язання.

а) $$\lim_{x\to1}\frac{\ln(2-x)}{e^{x-1}-1}=\left[\frac{0}{0}\right](\text{пр. Лопіталя})\overset{\cancel{?}}{=}\lim_{x\to1}\frac{\left(\ln(2-x)\right)'}{\left(e^{x-1}-1\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{2-x}\cdot(-1)}{e^{x-1}\cdot1}=-1;\ \blacksquare$$

б) $$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x\sin x^2}=\left|\begin{array}{l}x\to0\Rightarrow\\ \sin x^2\sim x^2\end{array}\right|=\lim_{x\to0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right](\text{пр. Лопіталя})\overset{\cancel{?}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{3x^2\underbrace{\sqrt{1-4x^2}}_{\to1}\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\to1}}=2\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{3x^2}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right](\text{пр. Лопіталя})\overset{\cancel{?}}{=}2\lim_{x\to0}\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}-\frac{-8x}{2\sqrt{1-4x^2}}}{6x}=-\lim_{x\to0}\frac{\overbrace{\sqrt{1-4x^2}}^{\to1}-4\overbrace{\sqrt{1-x^2}}^{\to1}}{3\underbrace{\sqrt{1-4x^2}}_{\to1}\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\to1}}=1;\ \blacksquare$$

в) $$\varepsilon>0\Rightarrow\lim_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right](\text{пр. Лопіталя})\overset{\cancel{?}}{=}$$

$$\overset{\cancel{?}}{=}\lim_{x\to+0}\frac{x^{-1}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}}=-\lim_{x\to+0}\frac{x^{\varepsilon}}{\varepsilon}=0;\ \blacksquare$$

г) $\lim\limits_{x\to0}x^x=\lim\limits_{x\to0}e^{x\ln x}$;

покладемо $\varepsilon=1$ у попередньому прикладі, отримаємо $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=0$, тоді для даної границі $\lim\limits_{x\to0}x^x=\lim\limits_{x\to0}e^{x\ln x}=e^0=1$; ■

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x\right)^{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln\left(\operatorname{ctg}x\right)^{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\sin x\cdot\ln\left(\operatorname{ctg}x\right)}=$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\operatorname{ctg}x\right)}{\sin^{-1}x}\right)=\left[\frac{\infty}{\infty}\right](\text{пр. Лопіталя})\overset{\cancel{?}}{=}\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\operatorname{ctg}x}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}}{(-1)\sin^{-2}x\cdot\cos x}\right)=$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{ctg}x\cdot\cos x}\right)=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)=\exp\left(0\right)=1;\quad\blacksquare$$

е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)}{x}\right)=\left[\dfrac{0}{0}\right](\text{пр.Лопіталя})\overset{\cancel{?}}{=}$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\frac{2}{\pi}\arccos x}\cdot\frac{-2}{\pi\sqrt{1-x^2}}}{1}\right)=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}\right)=\exp\left(-\frac{2}{\pi}\right)=e^{-\frac{2}{\pi}}.\ \blacksquare$$

§ 12.Формула Тейлора

Приклад 2.43. Многочлен $p(x)=1+3x+5x^2-2x^3$ розвинути за цілими невід'ємними степенями двочлена $x+1$.

Розв'язання. Формула Тейлора для многочленів має вигляд

$$p(x)=p(x_0)+\frac{p'(x_0)}{1!}\left(x-x_0\right)+\frac{p''(x_0)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\ldots+\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}\left(x-x_0\right)^n.$$

Цей многочлен потрібно розвинути за степенями $x+1$, тому $x_0=-1$. Для даного многочлена маємо

$$\begin{array}{ll}
p(x)=1+3x+5x^2-2x^3, & p(-1)=5;\\
p'(x)=3+10x-6x^2, & p'(-1)=-13;\\
p''(x)=10-12x, & p''(-1)=22;\\
p'''(x)=-12, & p'''(-1)=-12;\\
p^{IV}(x)=p^{V}(x)=...=0. &
\end{array}$$

Звідси отримуємо

$$p(x)=5+\frac{-13}{1!}(x+1)+\frac{22}{2!}(x+1)^2+\frac{-12}{3!}(x+1)^3=5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3.$$

■

Приклад 2.44. Написати розвинення за цілими невід'ємними степенями змінної x до члена вказаного порядку включно для наступних функцій

а) e^{2x-x^2} до члена з x^5;

б) $\ln\dfrac{\sin x}{x}$ до члена з x^6.

Розв'язання. а) *I спосіб*. Оскільки потрібно знайти розвинення за степенями змінної x, то будемо застосовувати формулу Тейлора в точці $x_0=0$, тобто формулу Маклорена із залишковим членом у формі Пеано, що має вигляд:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

Проміжні результати для функції $f(x)=e^{2x-x^2}$ внесемо до таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$f(x)=e^{2x-x^2}$	$f(0)=1$
1	$f'(x)=e^{2x-x^2}(2-2x)=2e^{2x-x^2}(1-x)$	$f'(0)=2$
2	$f''(x)=4e^{2x-x^2}(1-x)^2-2e^{2x-x^2}$	$f''(0)=2$
3	$f'''(x)=8e^{2x-x^2}(1-x)^3-8e^{2x-x^2}(1-x)-4e^{2x-x^2}(1-x)=$ $=8e^{2x-x^2}(1-x)^3-12e^{2x-x^2}(1-x)$	$f'''(0)=-4$
4	$f^{IV}(x)=16e^{2x-x^2}(1-x)^4-24e^{2x-x^2}(1-x)^2-24e^{2x-x^2}(1-x)^2+$ $+12e^{2x-x^2}=16e^{2x-x^2}(1-x)^4-48e^{2x-x^2}(1-x)^2+12e^{2x-x^2}$	$f^{IV}(0)=-20$
5	$f^{V}(x)=32e^{2x-x^2}(1-x)^5-64e^{2x-x^2}(1-x)^3-96e^{2x-x^2}(1-x)^3+$ $+96e^{2x-x^2}(1-x)+24e^{2x-x^2}(1-x)=$ $=32e^{2x-x^2}(1-x)^5-160e^{2x-x^2}(1-x)^3+120e^{2x-x^2}(1-x)$	$f^{V}(0)=-8$

Підставляючи в формулу Маклорена, отримаємо

$$e^{2x-x^2}=1+\frac{2}{1!}x+\frac{2}{2!}x^2+\frac{-4}{3!}x^3+\frac{-20}{4!}x^4+\frac{-8}{5!}x^5+o(x^5)=$$
$$=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5).$$

II спосіб. Застосовуємо табличне розвинення

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+o\left(t^n\right).$$

Для функції $f(x)=e^{2x-x^2}$ маємо $t=2x-x^2$, $n=5$, тому

$$e^{2x-x^2}=1+\frac{2x-x^2}{1!}+\frac{\left(2x-x^2\right)^2}{2!}+\frac{\left(2x-x^2\right)^3}{3!}+\frac{\left(2x-x^2\right)^4}{4!}+\frac{\left(2x-x^2\right)^5}{5!}+o\left(\left(2x-x^2\right)^5\right)$$

.

Маючи на увазі властивості функцій $o(\beta)$, де $\beta(x)$ нескінченно мала функція, отримаємо $o\left(\left(2x-x^2\right)^5\right)=o(x^5)$, а для многочленів $p_n(x)$ степеня $n>5$ сума $p_n(x)+o(x^5)=o(x^5)$. Тому розкриваємо дужки, враховуючи тільки доданки зі степенями, що не перевищують 5. Одержимо:

$$e^{2x-x^2}=$$

$$=1+\left(2x-x^2\right)+\frac{1}{2}\left(4x^2-4x^3+x^4\right)+\frac{1}{6}\left(8x^3-12x^4+6x^5+...\right)+\frac{1}{24}\left(16x^4-32x^5+...\right)+$$

$$+\frac{1}{120}\left(32x^5+...\right)+o\left(x^5\right)=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o\left(x^5\right).\ ■$$

б) Для розвинення функції $\ln\frac{\sin x}{x}$ до члена з x^6 застосуємо другий спосіб, в якому застосовуються розвинення функцій із таблиці розвинень елементарних функцій за формулою Маклорена з залишковим членом у формі Пеано. У даному випадку – це два розвинення

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o\left(x^{2m}\right),$$

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}+o\left(t^n\right).$$

Для заданої функції $2m=8\Leftrightarrow m=4$, тому маємо:

$$\ln\frac{\sin x}{x}=\ln\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o\left(x^8\right)}{x}=\ln\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o\left(x^7\right)\right).$$

В розвиненні $\ln(1+t)$ покладемо $t=-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o\left(x^7\right)$, а найвищу степінь розвинення $\ln(1+t)$ візьмемо $n=3$, щоб після піднесення до цього степеня мати найменший степінь x^6, тоді отримаємо

$$\ln\frac{\sin x}{x}=-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o\left(x^7\right)-\frac{\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o\left(x^7\right)\right)^2}{2}+\frac{\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o\left(x^7\right)\right)^3}{3}-$$

$$-o\left(\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o\left(x^7\right)\right)^3\right)=$$

$$=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o\left(x^7\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{36}-\frac{x^6}{360}+\ldots\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^6}{216}+\ldots\right)-o\left(x^6\right)=$$

$$=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+\underbrace{o\left(x^7\right)+o\left(x^6\right)}_{=o\left(x^6\right)}=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+o\left(x^6\right).\ \blacksquare$$

Приклад 2.45. Застосовуючи таблицю розвинень елементарних функцій за формулою Маклорена з залишковим членом у формі Пеано, знайти такі границі

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x\sin^2 x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{6\sin x-6x+x^3}$.

Розв'язання. а) Спочатку спростимо знаменник, застосовуючи еквівалентне перетворення, а саме: $\sin x\sim x$ при $x\to 0$, отримаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3},$$

тому розвивати функції чисельника потрібно до члена з x^3. Застосуємо розвинення функцій e^x і $\sin x$ до членів з x^3, а саме:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right);$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^4\right)=x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right),$$

одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)-x(1+x)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+x^3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+o(x^3)-x-x^2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{3x^3}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=\frac{1}{3}.$$

При розв'язанні застосовано формулу $\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}=0$, що відповідає означенню «о-малого». ■

б) Спочатку зробимо такі перетворення

$$\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\right)=\left|\begin{matrix} t=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{t} \\ x\to\infty\Rightarrow t\to 0\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}-2\right).$$

Оскільки в знаменнику стоїть t^2, то застосовувати будемо таке розвинення до члена з другим степенем

$$(1+z)^m=1+\frac{m}{1!}z+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+o\left(z^2\right).$$

Для функції $\sqrt{1+t}$ візьмемо в цьому розвиненні $m=\frac{1}{2}, z=t$, а для функції $\sqrt{1-t}$ покладемо $m=\frac{1}{2}, z=-t$, тоді

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}-2\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left(1+\frac{1}{2}t+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)t^2}{2!}+o(t^2)+1-\frac{1}{2}t+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)t^2}{2!}+o(t^2)-2\right)=$$

$$=\left|o(t^2)+o(t^2)=o(t^2)\right|=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left(-\frac{1}{8}t^2-\frac{1}{8}t^2+o(t^2)\right)=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{4}+\frac{o(t^2)}{t^2}\right)=-\frac{1}{4}.\ \blacksquare$$

в) Для обчислення границі $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{6\sin x-6x+x^3}$ зазначеним умовою способом дізнаємося найменший степінь розвинення знаменника за формулою Маклорена, щоб потім до цього степеня розвивати чисельник. Маємо

$$6\sin x-6x+x^3=6\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o\left(x^{2m}\right)\right]-6x+x^3=$$

$$=6x-x^3+\frac{x^5}{20}-\frac{6x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{6x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o\left(x^{2m}\right)-6x+x^3=$$

$$=\frac{x^5}{20}\underbrace{-\frac{6x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{6x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o\left(x^{2m}\right)}_{=0(x^6)}=\frac{x^5}{20}+o(x^6).$$

Чисельник будемо розвивати до x^5, застосовуючи розвинення функцій $(1+t)^m$ для $m=\frac{1}{3}$, $t=-x^2$ і $\sin t$ спочатку для $t=x$, а потім для $t=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^6\right)$:

$$x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}=x\cdot\left[1+\frac{1}{3}(-x^2)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)(-x^2)^2}{2!}+o(x^4)\right]=x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{9}+o(x^5);$$

$$\sin(\sin x)=\sin\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^6\right)\right)=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^6\right)\right)-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^6\right)\right)^3+\frac{1}{5!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^6\right)\right)^5+o\left(x^6\right)=$$

$$=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^6\right)-\frac{1}{6}\left(x^3-\frac{1}{2}x^5+...\right)+\frac{x^5}{120}+o\left(x^6\right)=$$

$$=\left|o\left(x^6\right)+o\left(x^6\right)=o\left(x^6\right)\right|=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+o\left(x^6\right).$$

В результаті отримаємо

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{6\sin x-6x+x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+o\left(x^6\right)-x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{9}+o(x^5)}{\underset{\to0}{\frac{x^5}{20}+o(x^6)}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{19x^5}{90}+o(x^5)}{\frac{x^5}{20}+o(x^6)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{19}{90}+\frac{o(x^5)}{x^5}}{\frac{1}{20}+\underset{\to0}{\frac{o(x^5)}{x^5}}\cdot\underset{\to0}{x}}=\frac{38}{9}.\ \blacksquare$$

§ 13. Побудова графіків функцій за характерними точками

Приклад 2.47. Побудувати графіки таких функцій

а) $y = x^{2/3}e^{-x}$; **б)** $y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2} - x$; **в)** $y = \frac{\sin x}{2+\cos x}$;

г) $y = \frac{x}{2} - \operatorname{arctg} x$; **д)** $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = \frac{\ln t}{t}; \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3; \end{cases}$

є) $\rho = a\sin 3\varphi \ (a > 0)$; **ж)** $\rho = a\frac{\operatorname{th}\varphi}{\varphi\text{-}1}$, де $\varphi > 1 (a > 0)$.

Розв’язання. а) Для функції $y = x^{2/3}e^{-x}$ маємо

1) Область визначення функції: $D(y) = \mathbb{R}$.

2) $y(-x) = x^{2/3}e^{x} \neq \begin{cases} y(x), \\ -y(x), \end{cases} \Rightarrow$ функція ні парна, ні непарна.

3) Функція неперіодична.

4) Функції $g(x) = x^{2/3}$ і $h(x) = e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ є неперервними на $\mathbb{R}$, тому дана функція є неперервною на $\mathbb{R}$ як добуток двох неперервних функцій.

5) Знайдемо асимптоти графіка заданої функції (див. розділ 1, §2, п. 9). Оскільки функція неперервна на $\mathbb{R}$, то її графік не має вертикальних асимптот. Знайдемо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2/3}e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x x^{1/3}} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to+\infty} x^{2/3}e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2/3}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right](\text{пр.Лопіталя})) \overset{\cancel{?}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}}{e^x} =$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x x^{1/3}} = 0,$$

тому $y = 0$ – горизонтальна асимптота на $+\infty$.

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^{2/3}e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^{1/3}} = \left[\frac{e^{+\infty}}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}\right](\text{пр.Лопіталя}) \overset{\cancel{?}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} =$$

$$= -3\lim_{x\to-\infty} x^{2/3}e^{-x} = [\infty\cdot e^{+\infty}] = \infty,$$

тому на $-\infty$ горизонтальних асимптот немає.

6) Для дослідження функції на монотонність і пошуку її точок екстремуму знайдемо першу похідну (*достатня умова монотонності функції на інтервалі та перша достатня умови локального екстремуму*):

$$y' = \frac{2}{3}x^{-1/3}e^{-x} - x^{2/3}e^{-x} = x^{-1/3}e^{-x}\left(\frac{2}{3} - x\right).$$

Знайдемо критичні точки, тобто точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує.

$$y'(x)=0 \Leftrightarrow x=2/3;$$

$$\nexists y'(x) \text{ при } x=0.$$

Знаки y'	$-$ $+$ $-$
Характерні точки	0 $2/3$
Напрямки монотонності, loc extr	↘ min ↗ max ↘
Значення функції в точках loc extr	0 $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{-2/3}\approx 0,39$

7) Для дослідження функції на опуклість і пошуку точок перегину її графіка знайдемо другу похідну (*другий критерій опуклості вниз і достатня умова перегину*):

$$y''=\left(\frac{2}{3}x^{-1/3}e^{-x}-x^{2/3}e^{-x}\right)'=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}x^{-4/3}e^{-x}-\frac{2}{3}x^{-1/3}e^{-x}-\frac{2}{3}x^{-1/3}e^{-x}+x^{2/3}e^{-x}=$$

$$=\frac{e^{-x}}{9x^{4/3}}(-2-12x+9x^2).$$

Знайдемо точки, «підозрілі» на перегин:

$$y''(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{6}}{3};$$

$$\nexists y''(x) \text{ при } x=0.$$

Знаки y''	$+$ $-$ $-$ $+$
Характерні точки	$\frac{2-\sqrt{6}}{3}\approx$ 0 $\frac{2+\sqrt{6}}{3}\approx$
Напрямки опуклості, точки перегину	$\cup$ $\cap$ $\cap$ $\cup$ $\approx -0{,}15$ $\approx 1{,}48$
Ординати точок перегину	$\sqrt[3]{\frac{10-4\sqrt{6}}{9}}\,e^{\frac{2-\sqrt{6}}{3}}\approx 0,34$ $\sqrt[3]{\frac{10+4\sqrt{6}}{9}}\,e^{\frac{2+\sqrt{6}}{3}}\approx 0,30$

8) Точки перетину з осями: $\begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$

точка loc min $x=0$ $(O(0;0))$ має тип, зображений на рис. 1.11 ж,

точка loc max $x=\frac{2}{3}$ $(A\left(\frac{2}{3};\sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{-2/3}\right))$ має тип, зображений на рис. 1.11 а,

точка перегину $B\left(\frac{2-\sqrt{6}}{3};\ \sqrt[3]{\frac{10-4\sqrt{6}}{9}}e^{\frac{2-\sqrt{6}}{3}}\right)$ має тип, зображений на рис. 1.19 е, точка перегину $C\left(\frac{2+\sqrt{6}}{3};\sqrt[3]{\frac{10+4\sqrt{6}}{9}}e^{\frac{2+\sqrt{6}}{3}}\right)$ має тип, зображений на рис. 1.19 д.

Як правило, екстремуми, що відповідають точкам, в яких похідна не існує, є *піковидними*, як у цьому випадку точка $\mathrm{O}(0;0)$.

9) Графік побудовано на рис. 3.9. ■

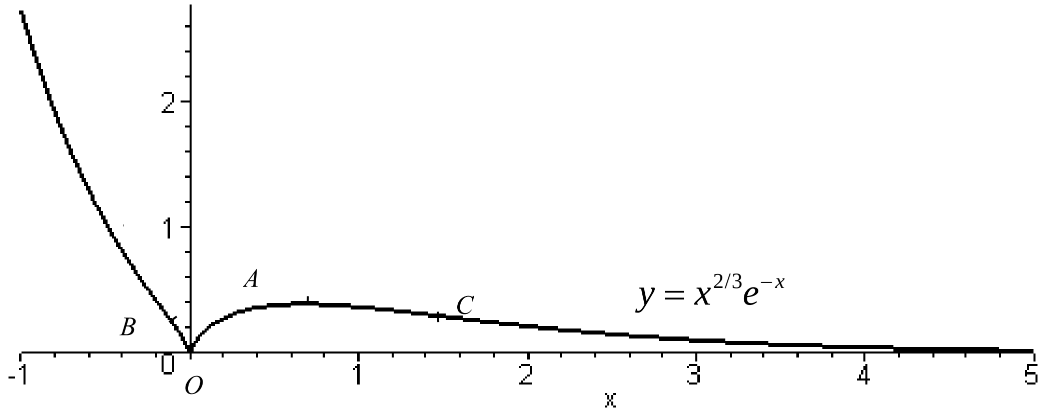


Рис. 3.9.

б) Розглянемо функцію $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-x$.

1) $D(f)=\mathbb{R}$, оскільки

$$-1\le\frac{2x}{1+x^2}\le1\Leftrightarrow-(1+x^2)\le2x\le1+x^2\Leftrightarrow\begin{cases}2x\le1+x^2,\\-(1+x^2)\le2x,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-x)^2\ge0,\\(1+x)^2\ge0,\end{cases}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}.$$

2) $f(-x)=\arcsin\frac{-2x}{1+(-x)^2}-(-x)=-\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-x\right)=-f(-x)\Rightarrow$ функція непарна, тому її графік є симетричним відносно точки O(0,0).

3) Функція неперіодична.

4) Неперервність функції:

– $t=g(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ неперервна на $\mathbb{R}$ як частка двох многочленів зі знаменником, що не дорівнює нулю на $\mathbb{R}$, значення функції $g(x)$ – це $t\in[-1;1]$, як було зазначено в п. 1);

– $h(t)=\arcsin t$ неперервна при $t\in[-1;1]$,

– функція $f_1(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=h(g(x))$ є неперервною на $\mathbb{R}$ як складена функція;

– лінійна функція $f_2(x)=x$ – неперервна.

Висновок: функція $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-x=f_1(x)-f_2(x)$ є неперервною як сума двох неперервних функцій.

5) Оскільки функція неперервна на $\mathbb{R}$, то її графік не має вертикальних асимптот. Знайдемо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\arcsin\overset{\to 0}{\frac{2x}{1+x^2}}}^{\to 0}}{\underset{\to\infty}{x}}-1=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-x-(-x)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=0,$$

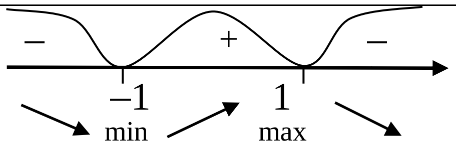
тому $y=-x$ – похила асимптота на $\pm\infty$.

6) Напрямки монотонності й точки екстремуму.

$$y'=\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}-1=$$

$$=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}}-1=\frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}-1=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\text{ при }|x|<1;\\[2mm] -\dfrac{3+x^2}{1+x^2}\text{ при }|x|>1.\end{cases}.$$

Критичні точки: $y'=0\Leftrightarrow x\in\varnothing$; $\quad\quad\nexists y'(x)\Leftrightarrow x=\pm1$.

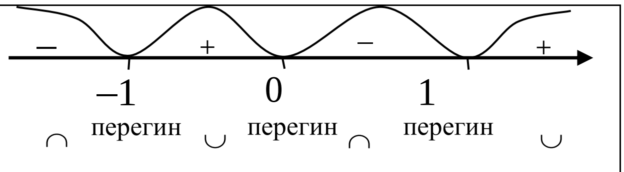
Знаки y'	
Характерні точки	
Напрямки монотонності, loc extr	
Значення функції в точках loc extr	$-\frac{\pi}{2}+1$ $\quad\quad$ $\frac{\pi}{2}-1$

7) Опуклість функції і точки перегину її графіка:

$$y''=\left(\frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}-1\right)'=2\operatorname{sgn}(1-x^2)\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'=2\operatorname{sgn}(1-x^2)\cdot\frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Знайдемо точки, «підозрілі» на перегин:

$$y''=0\Leftrightarrow x=0;\qquad\qquad \nexists y''(x)\Leftrightarrow x=\pm1.$$

Знаки y''	
Характерні точки	
Напрямки опуклості, точки перегину	
Ординати точок перегину	$-\frac{\pi}{2}+1$ $\quad\quad$ 0 $\quad\quad$ $\frac{\pi}{2}-1$

8) Точка перетину з осями: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$; інші точки перетину з віссю абсцис можна знайти лише наближеними методами, а в даному випадку в цьому немає особливої потреби.

Характерні точки:

точка loc min $x=-1$ ($A\left(-1;-\frac{\pi}{2}+1\right)$) має тип, зображений на рис.1.11є,

точка loc max $x=1$ ($B\left(1;\frac{\pi}{2}-1\right)$) має тип, зображений на рис. 1.11 в,

точка перегину $\mathrm{O}(0;0)$ має тип, зображений на рис. 1.19 а.

Точки екстремуму <u>піковидні.</u>

9) Графік зображено на рис. 3.10. ■

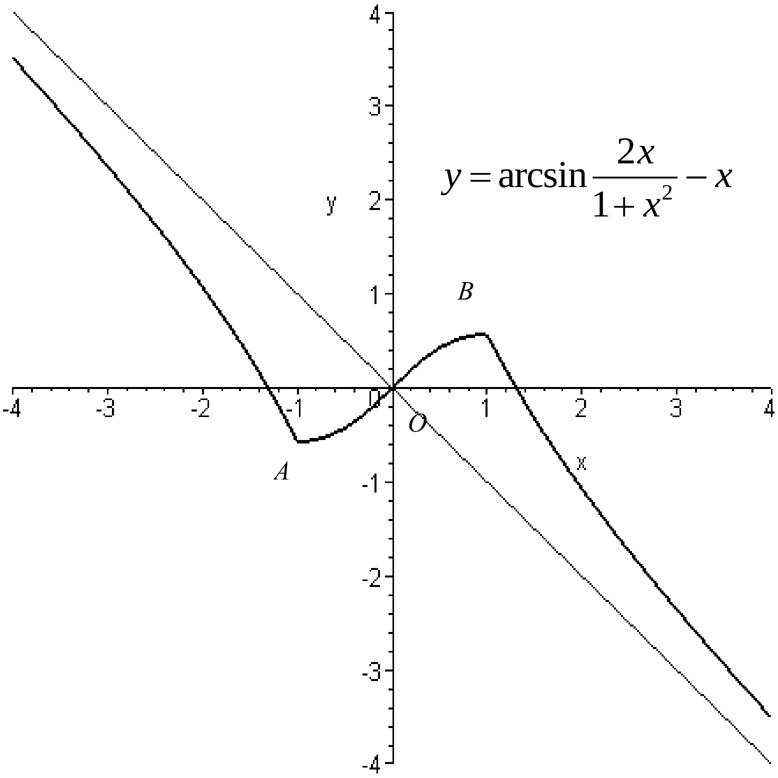


Рис. 3.10.

в) Для функції $y=\frac{\sin x}{2+\cos x}$ маємо

1) $D(y)=\mathbb{R}$.

2) $y(-x)=\frac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)}=-y(x)\Rightarrow$ функція непарна, тому її графік є симетричним відносно точки O(0,0).

3) Функція періодична з періодом 2π.

4) Функції $g(x)=\sin x$ і $h(x)=2+\cos x$ є неперервними на $\mathbb{R}$, тому дана функція є неперервною на $D(y)=\mathbb{R}$ як частка двох неперервних функцій.

5) Оскільки функція неперервна на $\mathbb{R}$, то її графік не має вертикальних асимптот. Графіки періодичних функцій не мають похилих і горизонтальних асимптот.

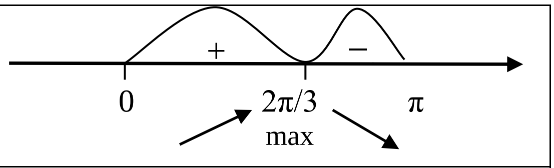
6) Інтервали монотонності й точки екстремуму функції.

$$y'=\left(\frac{\sin x}{2+\cos x}\right)'=\frac{\cos x(2+\cos x)+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}.$$

Критичні точки:

$$y'=0\Leftrightarrow 2\cos x+1=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Знаки похідної достатньо визначати на будь-якому відрізку довжини періоду, а з урахуванням непарності функції, можна обмежитися лише відрізком $[0,\pi]$.

Знаки y'	
Характерні точки	
Напрямки монотонності, loc extr	
Значення функції в точках loc extr	$\sqrt{3}/3\approx 0{,}57$

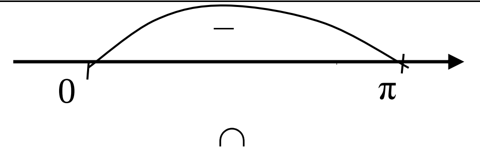
7) Опуклість функції і точки перегину її графіка.

$$y''=\left(\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}\right)'=\frac{-2\sin x(2+\cos x)^2+2(2+\cos x)\sin x(2\cos x+1)}{(2+\cos x)^4}=$$

$$=\frac{2\sin x(2+\cos x)(-1+\cos x)}{(2+\cos x)^4}=\frac{2\sin x(-1+\cos x)}{(2+\cos x)^3}.$$

Знайдемо точки, «підозрілі» на перегин:

$$y''=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos x=1;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\\ x=2\pi m,\end{array}\right.\ n,m\in\mathbb{Z}.$$

Знаки y''	
Характерні точки	
Напрямки опуклості, точки перегину	
Ординати точок перегину	0 0

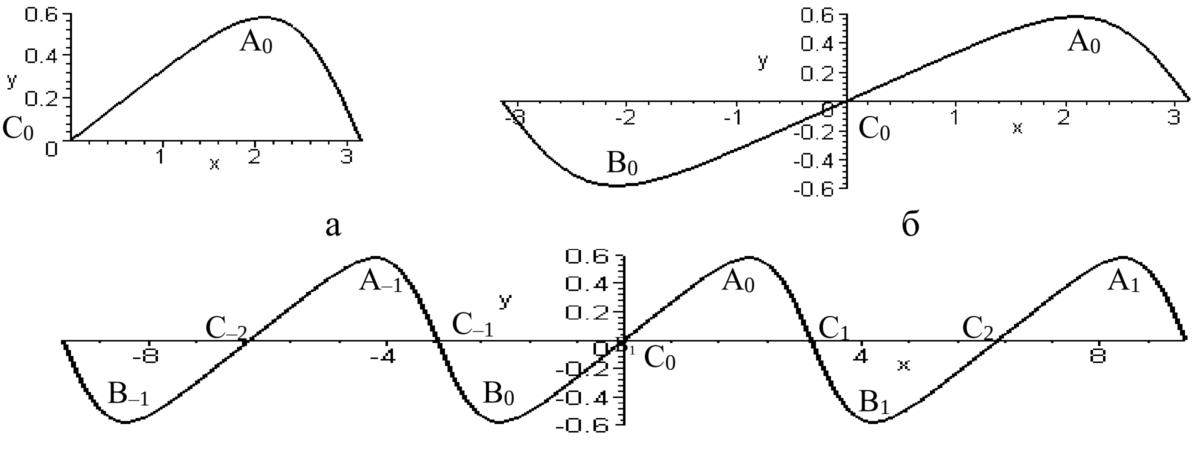
Внаслідок непарності й періодичності функції точки з абсцисами $x=0$ і $x=\pi$ будуть перегинами її графіка.

8) Точки перетину з осями: $\begin{cases}x=\pi n, n\in\mathbb{Z},\\ y=0.\end{cases}$

Точки loc max $x_n^* = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ($A_n\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\sqrt{3}}{3}\right), n \in \mathbb{Z}$) мають тип, зображений на рис. 1.11 а, тоді завдяки непарності $x_n^{**} = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ($B_n\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), n \in \mathbb{Z}$) – точки loc min, які мають тип, зображений на рис. 1.11 д.

Точки перегину $C_{2n}(2\pi n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ мають тип, зображений на рис. 1.19 а, точки перегину $C_{2n+1}(\pi + 2\pi n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ мають тип, зображений на рис. 1.19 д.

9) Графік функції спочатку будуємо на відрізку $[0, \pi]$ (рис. 3.11 а), потім продовжуємо його за непарністю симетрично відносно точки O(0,0) на відрізок $[-\pi, 0]$, отримуючи графік на відрізку $[-\pi, \pi]$ (рис. 3.11 б). Нарешті, продовжуємо отриманий графік за періодом на $\mathbb{R}$. Графік заданої функції побудовано на рис. 3.11 в.



а б

в

Рис. 3.11.

г) Розглянемо функцію $y = \frac{x}{2} - \operatorname{arctg} x$.

1) $D(y) = \mathbb{R}$.

2) $y(-x) = \frac{-x}{2} + \operatorname{arctg} x = -y(x) \Rightarrow$ функція непарна, тому її графік є симетричним відносно точки O(0,0).

3) Функція неперіодична.

4) Дана функція є неперервною на $\mathbb{R}$ як різниця двох неперервних на $\mathbb{R}$ функцій.

5) Графік функції не має вертикальних асимптот.

Похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{\overbrace{\operatorname{arctg}x}^{\to\frac{\pi}{2}}}{\underbrace{x}_{\to+\infty}}\right)=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2}-\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x\right)=-\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2},$$

тому $y=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{2}$ – горизонтальна асимптота на $+\infty$;

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{\overbrace{\operatorname{arctg}x}^{\to-\frac{\pi}{2}}}{\underbrace{x}_{\to-\infty}}\right)=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{2}-\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x\right)=-\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2},$$

тому $y=\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}$ – горизонтальна асимптота на $-\infty$.

6) Інтервали монотонності і точки екстремуму функції.

$$y'=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2-1}{2(1+x^2)}; \qquad y'=0\Leftrightarrow x=\pm1.$$

Знаки y'	+ – +
Характерні точки	-1 $\quad$ 1
Напрямки монотонності, loc extr	↗ max ↘ min ↗
Значення функції в точках loc extr	$-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$

7) Опуклість функції і точки перегину графіка.

$$y''=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x^2}\right)'=\frac{2x}{(1+x^2)^2}; \quad y''=0\Leftrightarrow x=0.$$

Знаки y''	– +
Характерні точки	0
Напрямки опуклості, точки перегину	∩ перегин ∪
Ординати точок перегину	0

8) Точка перетину з осями: $\begin{cases}x=0,\\ y=0;\end{cases}$ інші точки перетину з віссю абсцис шукати не будемо.

Точка $\operatorname{loc}\min\ x=1$ ($A\left(1;\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$) має тип, зображений на рис. 1.11 д, точка $\operatorname{loc}\max\ x=-1$ ($B\left(-1;-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$) має тип, зображений на рис. 1.11 а.

Точка перегину $O(0,0)$ має тип, зображений на рис. 1.19 д.

9) Графік зображено на рис. 3.12. ■

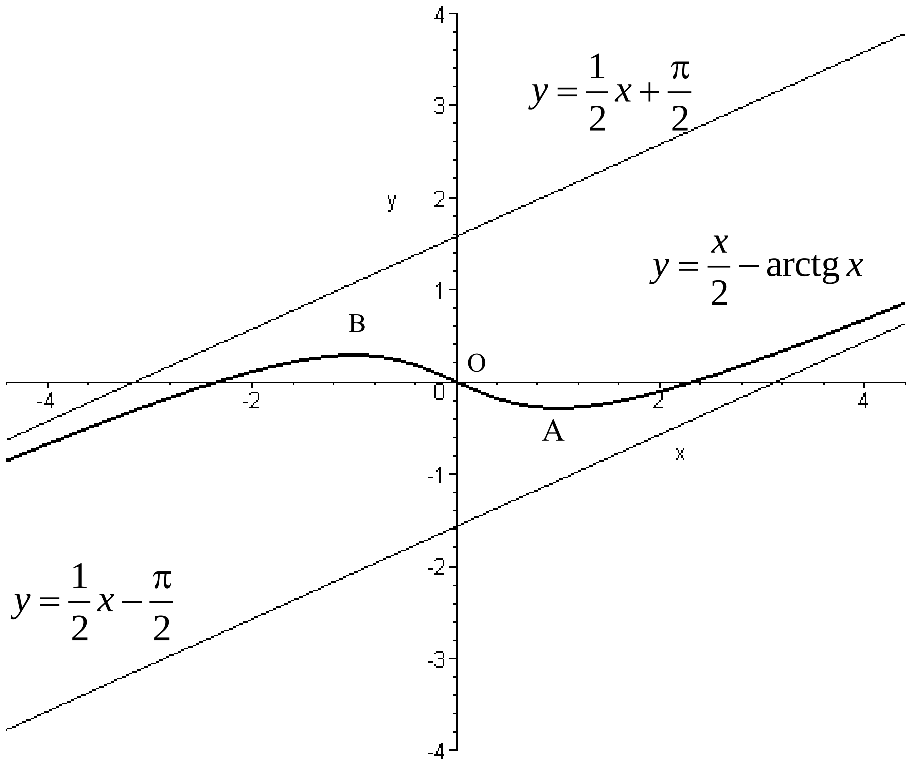


Рис. 3.12.

д) Розглянемо функцію, що задана параметрично: $\begin{cases} x=t\ln t, \\ y=\dfrac{\ln t}{t}. \end{cases}$

1) $D(y)=\{t>0\}$.

2) $$t\to+\infty\Rightarrow\begin{cases} x\to+\infty, \\ \lim\limits_{t\to+\infty}y=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right](\text{пр.Лопіталя})=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1/t}{1}=+0, \end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}y=+0\Rightarrow y=0$ – горизонтальна асимптота на $+\infty$;

$$t\to+0\Rightarrow\begin{cases} \lim\limits_{t\to+0}x=\lim\limits_{t\to+0}t\ln t=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\ln t}{1/t}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right](\text{пр.Лопіталя})=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{1/t}{-1/t^2}=-\lim\limits_{t\to+0}t=-0, \\ \lim\limits_{t\to+0}y=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\ln t}{t}=\left[\dfrac{-\infty}{+0}=-\infty\cdot\infty\right]=-\infty, \end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to-0}y=-\infty$ ($\lim\limits_{y\to-\infty}x=-0$) $\Rightarrow$ $x=0$ –вертикальна асимптота.

3) Інтервали монотонності й точки екстремуму функції.

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\left(\frac{\ln t}{t}\right)'}{(t\ln t)'}=\frac{\frac{\frac{1}{t}\cdot t-\ln t}{t^2}}{\ln t+t\cdot\frac{1}{t}}=\frac{1-\ln t}{t^2(\ln t+1)}.$$

Знайдемо критичні точки, тобто точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує.

$$y'_x=0\Leftrightarrow 1-\ln t=0\Leftrightarrow t=e\Leftrightarrow\begin{cases}x=e\approx 2,72,\\ y=1/e\approx 0,37;\end{cases}$$

$$\nexists y'_x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0,\\ \ln t+1=0;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\notin D(y),\\ t=1/e;\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1/e\approx -0,37,\\ y=-e\approx 2,72.\end{cases}$$

Знаки y'	– + –
Характерні точки	$t=1/e$ $t=e$
Напрямки монотонності, loc extr	↘ min ↗ max ↘
Точка loc extr на координатній площині	$\begin{cases}x=-1/e\\ y=-e\end{cases}$ $\begin{cases}x=e\\ y=1/e\end{cases}$

4) Опуклість функції і точки перегину графіка.

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\left(\frac{1-\ln t}{t^2(\ln t+1)}\right)'}{(t\ln t)'}=\frac{-\frac{1}{t}\cdot t^2(\ln t+1)-(1-\ln t)\left(2t(\ln t+1)+t^2\cdot\frac{1}{t}\right)}{t^4(\ln t+1)^3}=\frac{2(\ln^2 t-2)}{t^3(\ln t+1)^3}.$$

Точки, «підозрілі» на перегин:

$$y''_{xx}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=e^{\sqrt{2}},\\ t=1/e^{\sqrt{2}};\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\approx 5,82,\\ y=\sqrt{2}/e^{\sqrt{2}}\approx 0,34;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\sqrt{2}/e^{\sqrt{2}}\approx -0,34,\\ y=-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\approx -5,82.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\nexists y''_{xx}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0,\\ \ln t+1=0;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\notin D(y),\\ t=1/e;\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1/e\approx -0,37,\\ y=-e\approx 2,72.\end{cases}$$

Знаки y''	– + – +
Характерні точки	0 $t=1/e^{\sqrt{2}}$ $t=1/e$ $t=e^{\sqrt{2}}$
Напрямки опуклості, точки перегину	∩ перегин ∪ перегин ∩ ∩перегин ∪
Точка перегину на координатній площині	$\begin{cases}x=-\sqrt{2}/e^{\sqrt{2}}\\ y=-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1/e\\ y=-e\end{cases}$ $\begin{cases}x=\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\\ y=\sqrt{2}/e^{\sqrt{2}}\end{cases}$

5) Точка перетину з осями: $\left[\begin{aligned} &t \neq 0, \\ &\ln t = 0; \end{aligned}\right. \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$.

6) Графік зображено на рис. 3.13.

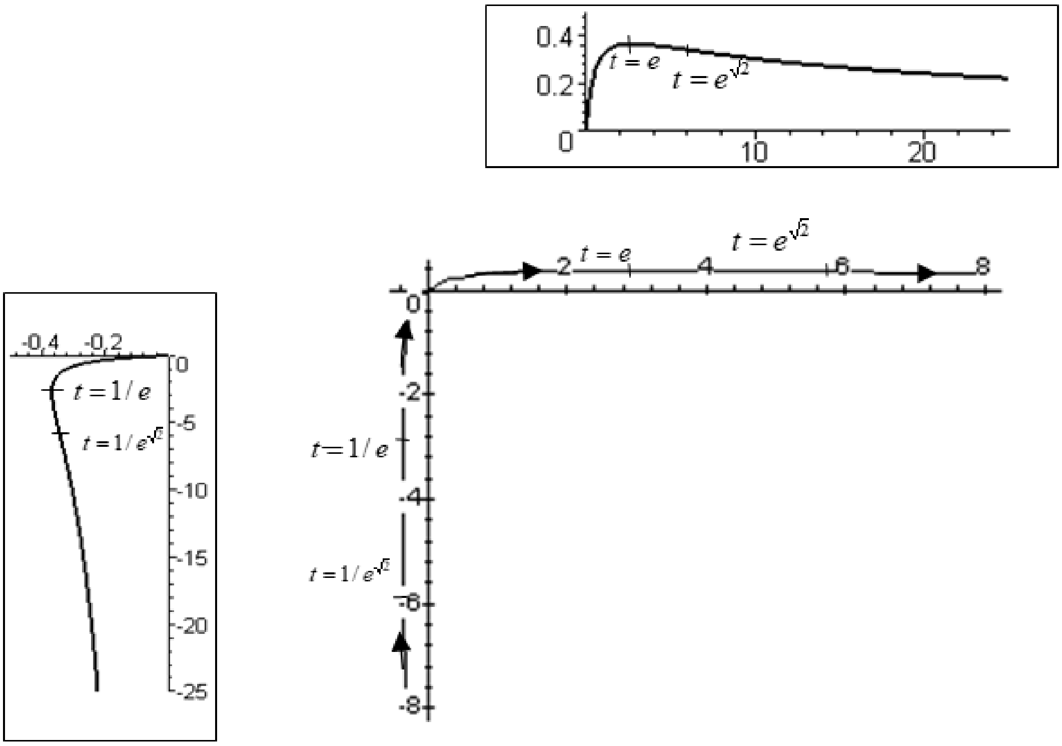


Рис. 3.13.

е) Розглянемо функцію, що задана параметрично: $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$

1) $D(y) = \{t \in \mathbb{R}\}$.

$$2)\ t \to \pm\infty \Rightarrow \begin{cases} x \to -\infty, \\ y \to \pm\infty, \\ \dfrac{y}{x} = \dfrac{3 - t^2}{2 - t} \to \pm\infty; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} y = \infty, \\ \lim\limits_{y \to \pm\infty} x = -\infty, \\ k = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{y}{x} = \infty. \end{cases}$$

Горизонтальних, вертикальних і похилих асимптот немає.

3) Інтервали монотонності і точки екстремуму функції.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3}{2}(1 + t).$$

Критичні точки:

$$y'_x = 0 \Leftrightarrow 1 + t = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ y = -2; \end{cases}$$

$$\nexists y'_x \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Знаки y'	$-$ $\quad$ $+$ $\quad$ $+$
Характерні точки	$t=-1$ $\quad$ $t=1$
Напрямки монотонності, loc extr	↘ min ↗ ↗
Точка loc extr на координатній площині	$\begin{cases} x=-3, \\ y=-2. \end{cases}$

4) Опуклість функції і точки перегину її графіка.

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{3}{2}(1+t)\right)'}{(2t-t^2)'} = \frac{\frac{3}{2}}{2-2t};$$

$$\nexists y''_{xx} \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$$

Знаки y''	$-$
Характерні точки	$t=1$
Напрямки опуклості, точки перегину	$\cup$ перегин $\cap$
Точка перегину на координатній площині	$\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$

5) Точка перетину з осями:

$$x=0 \Leftrightarrow 2t-t^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ y=-2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$y=0 \Leftrightarrow 3t-t^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{3}, \\ t=-\sqrt{3}, \\ t=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2\sqrt{3}-3, \\ y=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2\sqrt{3}-3, \\ y=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

6) Графік зображено на рис. 3.14.

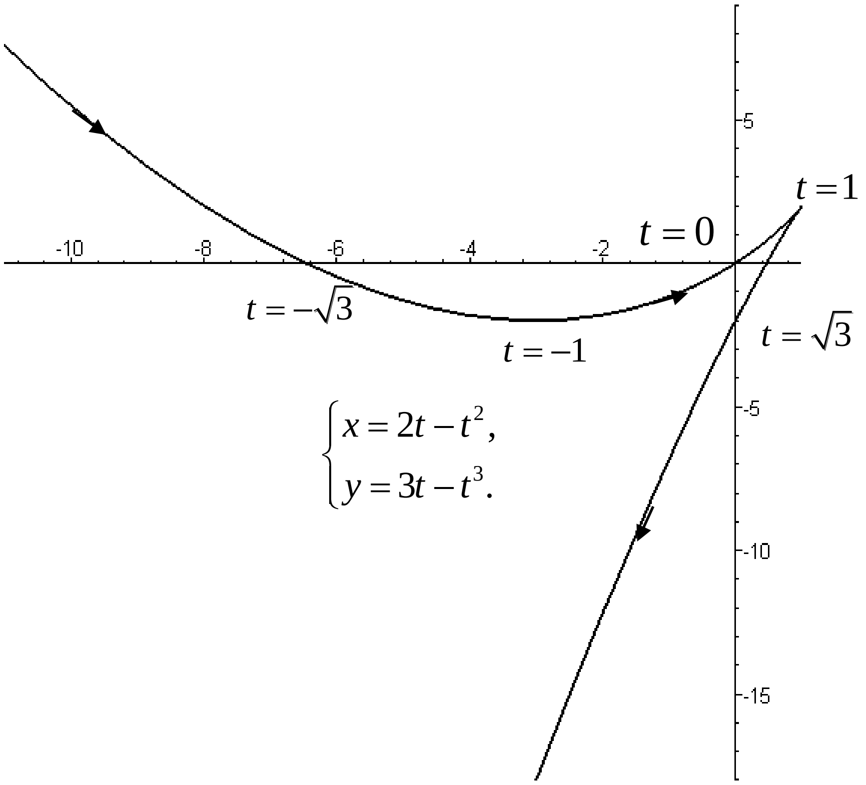


Рис. 3.14.

є) Розглянемо функцію, що задана в полярній системі координат: $\rho = a\sin 3\varphi \ (a>0)$.

1) Область визначення: $\rho \ge 0 \Leftrightarrow \sin 3\varphi \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{2\pi n}{3} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

2) Період: $T = \dfrac{2\pi}{3}$, дослідження будемо проводити з урахуванням області визначення на відрізку: $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

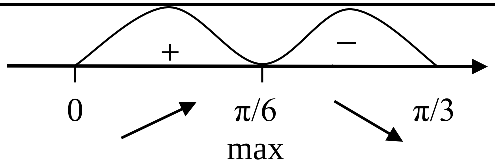
3) Для всіх значень $\varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$ функція приймає скінченні значення, а при $\varphi \to \infty$ границя функції не існує, тому асимптот у графіка функції немає.

4) Інтервали монотонності і точки екстремуму функції.

$$\rho'_\varphi = 3a\cos 3\varphi;$$

$$\rho'_\varphi = 3a\cos 3\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

В межах проміжку, на якому досліджується функція, $\varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$, знаходиться одна критична точка $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

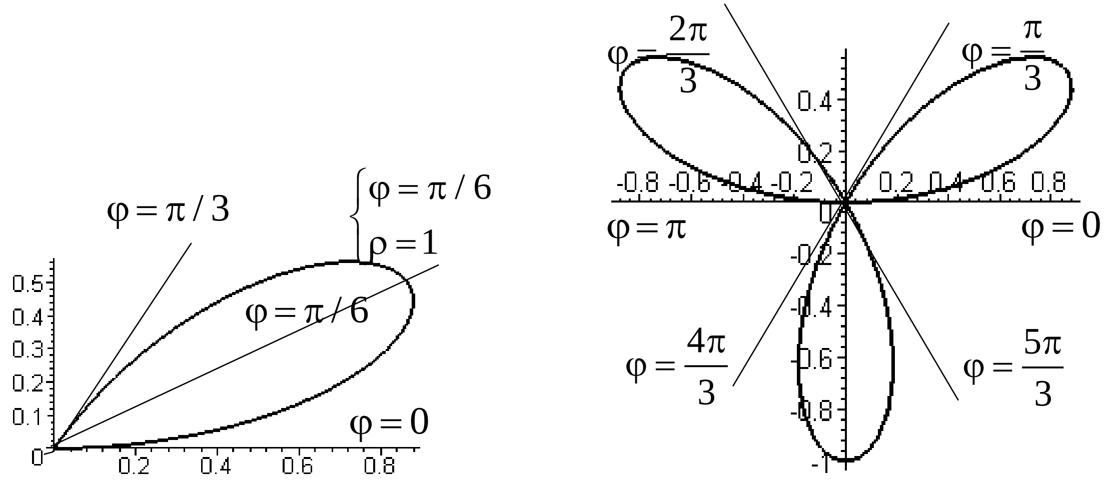
Знаки ρ'_{φ}	
Характерні точки	
Напрямки монотонності, loc extr	
Значення функції в точках loc extr	$\rho = a$

Точка $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ є точкою локального максимуму відносно полярного радіусу, тобто на промені $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ полярний радіус досягає свого найбільшого значення серед усіх значень на променях $\varphi = \varphi_0$, де $\varphi_0 \in \left(\dfrac{\pi}{6} - \delta; \dfrac{\pi}{6} + \delta\right)$ для деякого $\delta > 0$.

6) Значення функції на кінцях відрізка $\varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$:

$$\rho(0) = 0, \ \rho\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

7) Для випадку $a = 1$ графік будуємо спочатку при $\varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$ (див. рис. 3.15 а), а потім продовжуємо за періодом на проміжки $\left[\dfrac{2\pi}{3}; \pi\right]$ і $\left[\dfrac{4\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}\right]$ (рис. 3.15 б). ■



а б

Рис. 3.15.

ж) Розглянемо функцію, що задана в полярній системі координат: $\rho = a\dfrac{\operatorname{th}\varphi}{\varphi\text{-}1}$, де $\varphi > 1 \, (a > 0)$.

1) Область визначення: $\begin{cases} \rho \ge 0, \\ \varphi > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{th}\varphi \ge 0, \\ \varphi > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \ge 0, \\ \varphi > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \varphi > 1.$

2) Функція не є періодичною.

3) Оскільки $\lim\limits_{\varphi\to 1+0}\dfrac{\operatorname{th}\varphi}{\underset{\to 1}{\varphi-1}}=+\infty$, то $\varphi=1$ – асимптота.

Оскільки $\lim\limits_{\varphi\to+\infty}\dfrac{\operatorname{th}\varphi}{\underset{\to+\infty}{\varphi-1}}=0$, то при $\varphi\to\infty$ графік функції буде прямувати до точки $\rho=0$.

4) Інтервали монотонності й точки екстремуму функції.

$$\rho'_\varphi=a\frac{\frac{\varphi-1}{\operatorname{ch}^2\varphi}-\operatorname{th}\varphi}{(\varphi-1)^2}=a\frac{\varphi-1-\operatorname{sh}\varphi\cdot\operatorname{ch}\varphi}{(\varphi-1)^2\operatorname{ch}^2\varphi}=a\frac{\varphi-1-\frac{1}{2}\operatorname{sh}2\varphi}{(\varphi-1)^2\operatorname{ch}^2\varphi}.$$

З'ясуємо знак чисельника. Для цього введемо допоміжну функцію $g(\varphi)=\varphi-1-\frac{1}{2}\operatorname{sh}2\varphi$. Оскільки для неї $g'(\varphi)=1-\operatorname{ch}2\varphi<0$ при $\varphi>1$, то вона при $\varphi>1$ спадає, тому $g(\varphi)<g(1)$, тобто

$$\varphi-1-\frac{1}{2}\operatorname{sh}2\varphi<-\frac{1}{2}\operatorname{sh}2<0.$$

Отже чисельник дробу, що відповідає похідній, є від'ємним при $\varphi>1$, тому дана функція спадає. Це означає, що при збільшені полярного кута φ від 1 до $+\infty$ полярна відстань зменшується від $+\infty$ при $\varphi\to 1+0$ до нуля при $\varphi\to\infty$. Графік функції при $a=1$ зображено на рис. 3.16. ■

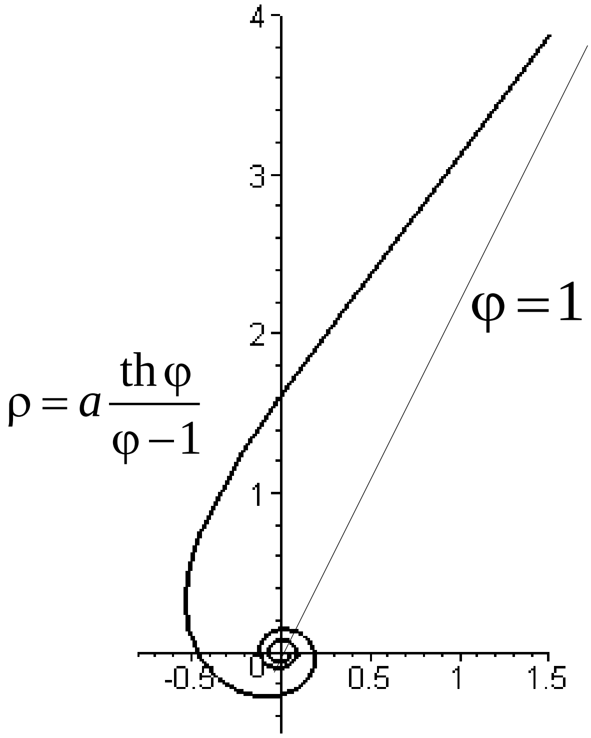


Рис. 3.16.

Розділ 3. ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

§ 1. Варіанти індивідуальних завдань

1. Знайти похідну функції.
2. Знайти за означенням $f'(a)$, (значення a задано) або довести, що похідна не існує.
3. Знайти похідну функції, що задана параметрично.
4. Знайти похідну функції, що задана неявно.
5. Знайти диференціал функції. Якщо задана точка, обчислити диференціал в точці.
6. Знайти похідну n-го порядку.
7. Знайти диференціал вказаного порядку.
8. Довести нерівність за допомогою похідної.
9. Обчислити границі за правилом Лопіталя.
10. Розвинути функцію за формулою Маклорена.
11. Знайти границі за допомогою формули Маклорена.
12. Побудувати графіки функцій.

ВАРІАНТ 1

1. $f(x) = \operatorname{arctg}\left(1 + \left(\cos x\right)^{\sin x}\right)$.	2. $f(x) = (x-2)^2(x-3)(x-4),\ a = 4$.
3. $\begin{cases} x = \ln\sin t/2, \\ y = \ln\sin t \end{cases}\ (0 < t < \pi)$.	4. $5x^2 + 5y^2 - 30x + 10y + 9 = 0;$ $y < -1$.
5. $\ln\left(\sqrt{1+2\sin x} + \sqrt{2\sin x - 1}\right)$.	6. $y = \ln\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+4}$.
7. $y = \arcsin x;\ n = 9;\ x = 0$.	8. $\ln(1+x) > \dfrac{x}{1+x};\ x > 0$.
9. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2}{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}$,	9. б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$,
9. в) $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$,	9. г) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)$,
9. д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$.	10. $\sin(\sin x)$ до x^5.
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh} 2x - 2\operatorname{sh} x}{(e^x - 1 - x)x}$.	12. а) $y = \dfrac{x^5}{\left(x^2-1\right)^2}$,
12. б) $y = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$.	

ВАРІАНТ 2

1. $f(x)=\cos 2^x\cdot\ln\left(1+(\operatorname{arctg}\mathrm{x})^{\sin x}\right).$	2. $f(x)=x^3(x-2)(x-3)...(x-10),\ a=0.$
3. $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}\ (-\infty<t<\infty).$	6. $x^2-4xy+4y^2+3x-4y-7=0;$ $x<2y-1.$
5. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}.$	6. $y=\dfrac{1}{x^2(x-1)}.$
7. $y=\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x;\ n=10;\ x=\pi/6$	8. $\operatorname{arctg} x\le x;\quad x\ge 0.$
9. а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^4+3x^3-4x^2-9x-4}{3x^4+5x^3+3x^2+3x+2},$	9. б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\arcsin x}\right),$
9. в) $\lim\limits_{x\to\pi/2-0}(\pi-2x)^{\cos x},$	9. г) $\lim\limits_{x\to+0}x^2\ln^3\left(\dfrac{1}{x}\right),$
9. д) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg} x}.$	10. $\ln(3\cos x)$ до $x^6.$
11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1+x^2/2}{\operatorname{ch}3x+\cos 3x-2}.$	12. а) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^4$, б) $y=\sqrt[3]{x(3-x)^2}-x.$

ВАРІАНТ 3

1. $f(x)=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot e^{\arcsin\ln\sqrt{3}}.$	2. $f(x)=2^{10}+e^{\operatorname{arctg}x^4},\ a=\pi/4.$
3. $\begin{cases}x=r\sin t+\sin rt,\\ y=r\cos t+\cos rt.\end{cases}$	6. $5xy+8y^2-12x-26y+11=0;\ \ y<2;$ $x_0=11/12.$
5. $\dfrac{x^2 2^x}{x^x};\ x_1=2;\ x_2=1.$	6. $y=\ln\left(1-4x^2\right).$
7. $y=\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}\right)^2;\ n=16;\ x=0.$	8. $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120},\quad x>0.$
9. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x-x+1}{x-x^x},$	9. б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right),$
9. в) $\lim\limits_{x\to\pi/2-0}(\operatorname{tg}x)^{\cos x},$	9. г) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\pi-2\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right),$
9. д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{50}-50x+49}{x^{100}-100^x+99}.$	10. $\ln\dfrac{\sin x}{x}$ до $x^6.$
11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}-2\sqrt[4]{1-x}\right)x}{\operatorname{arctg}x-\arcsin x}.$	12. а) $y=\dfrac{20x^2}{(x-1)^3}$, б) $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}.$

ВАРІАНТ 4

1. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}}\cdot(\operatorname{arctg} x)^{1+x^2}$.	2. $f(x)=x\cdot\sin\left(x^2+\dfrac{\pi}{4}\right), a=0$.
3. $x=\dfrac{1+t^4}{1+2t^2+t^4}, y=\dfrac{2t^2}{1+2t^2+t^4}$	6. $xy+\ln y=1;\ y>0; x_0=0$.
5. $\operatorname{arctg}\dfrac{\ln x}{x};\quad x_1=\dfrac{1}{e};\ x_2=e$.	6. $y=\dfrac{x}{\sqrt{ax+b}}$.
7. $y=\dfrac{7x+1}{(3x-2)^2}; n=10; x=1.$	8. $\cos x\geq 1-\dfrac{x^2}{2}; x\in\mathbb{R}$.
9. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(1-x^3)-3(1-x^2)}{(1-x^3)(1-x^2)}$,	9. б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{7/6}-x^{6/7}\ln^2 x\right)$,
9. в) $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{1}{\ln(\operatorname{sh} x)}}$,	9. г) $\lim\limits_{x\to+0}\sin x\ln(\operatorname{ctg} x)$,
9. д) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln(\operatorname{tg} x)}$.	10. $\ln\dfrac{e^x-1}{x}$ до x^4. 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{\sin x-x}$.
12. а) $y=32x^2(x^2-1)^3$,	12. б) $y=\dfrac{x}{2}-\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$.

ВАРІАНТ 5

1. $f(x)=e^x\cdot\operatorname{arctg}\left(x\cdot\sin\left(x^{\sqrt{x}}\right)\right)$.	2. $f(x)=\dfrac{e^{x^2}}{1+e^x},\ a=0$.
3. $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=r\cos t+\cos rt \end{cases}\quad(-1<t<1)$.	4. $e^y+xy=e; y>0; x_0=0$.
5. x^{x^2}.	6. $y=\left(3x^2+8x+1\right)\ln(x+1)$.
7. $y=arctg\sqrt{x}; n=10; x=1.$	8. $e^x\geq 1+\ln(1+x), x>-1$.
9. а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^x}{x^a-a^a}$,	9. б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\alpha}{1-x^\alpha}-\dfrac{\beta}{1-x^\beta}\right);\ \alpha\cdot\beta\neq 0$,
9. в) $\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\ln x}$,	9. г) $\lim\limits_{x\to+0}(\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$,
9. д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}$.	10. $\ln(4\cos^2 x)$ до x^4.
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x-\arcsin x}{\operatorname{tg} x-\sin x}$.	12. а) $y=\dfrac{x^5-8}{x^4}$, б) $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

ВАРІАНТ 6

1. $f(x)=\sqrt[3]{1+x^2}\cdot\arcsin\left(x^{x+1}\right)$.	2. $f(x)=x\cdot 10^{\sqrt{x}}, a=1$.
3. $x=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$	4. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

5. $5\operatorname{sh}^7\dfrac{x}{35}+7\operatorname{sh}^5\dfrac{x}{35}$.	6. $y=x^2\sin 2x$.	7. $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x}}; n=20; x=0$.
8. $\sin x+\operatorname{tg}x>2x; 0<x<\pi/2$.	9. а) $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$,	
9. б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi}{4x}-\dfrac{\pi}{2x\left(e^{\pi x}+1\right)}\right)$,	9. в) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$,	
9. г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+\sin x}{x+\sin x}$,	9.д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a^{\ln x}-1}{\ln x}$.	10. $\ln(5\cos^3 x)$ до x^4.
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{\sqrt[4]{1+x}-\sqrt{1-x}}$.	12. а) $y=\dfrac{(x-5)^3}{(x-7)^2}$, б) $y=\dfrac{x}{\ln x}$.	

ВАРІАНТ 7

1. $f(x)=\sqrt[4]{1+x^4}\cdot\ln\left(\operatorname{arctg}\left(x^{4^x}\right)\right)$.	2. $f(x)=x(x-1)^{10}(x-2)(x-3)(x-5); a=1$.
3. $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t.\end{cases}$	4. $x^2+y^2-6x+10y-2=0; y>-5; x_0=0$
5. $\dfrac{(2x-1)^2\cdot\sqrt{2+3x}}{(5x+4)^2\cdot\sqrt[3]{1-x}}; x=0$.	6. $y=\dfrac{x}{x^2-4x-12}$.
7. $y=(2x^2+1)\operatorname{sh}^2 x; n=10; x=0$.	8. $1-2\ln x\le 1/x^2;\ x>0$.
9. а) $\lim\limits_{\phi\to\pi/4}\dfrac{\sin^2\phi-0{,}5tg\,\phi}{1+\cos 4\phi}$,	9. б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x(1+x)}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$,
9. в) $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$,	9. г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\operatorname{arctg}x)\ln x$,
9. д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$.	10. e^{3x+x^2} до x^5.
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\cos x-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)-x}$.	12. а) $y=\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x}$, б) $y=\dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.

ВАРІАНТ 8

1. $f(x)=\sqrt{\ln(1+x^2)}\cdot\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^x}{2+\cos^2 x}\right)$.	2. $f(x)=\left(2x^3-3x+\sqrt{x}-1\right)/x; a=1/4$.
3. $\begin{cases}x=1+\sin t\cdot\cos 2t,\\ y=1-\sin 2t\cdot\operatorname{ctg}t.\end{cases}$	4. $y^5+y^2+y-x=0$.
5. $\ln\dfrac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\sin x}$.	6. $y=\ln(x-1)^{2x}$.
7. $y=\sin^2 x; n=10; x=\pi/6$.	8. $e^x\ge e\cdot x;\ x\in\mathbb{R}$.
9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-3x}}$,	9. б) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{\pi}{\operatorname{ctg}x}-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$,

9. в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos ax\right)^{\frac{1}{x^2}}$,	9. г) $\lim\limits_{x\to +0}(-\ln x)^x$,	11, д) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\sqrt[5]{3\operatorname{tg}^2 x-1}}{2\sin^2 x+5\sin x-3}$.
10. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ до x^{13}.	11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\ln\cos x}$.	12. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$, б) $y=(x^2-2)e^{-2x}$.

ВАРІАНТ 9

1. $f(x)=\dfrac{\sin\left(x^{\sqrt{x}}\right)}{\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)}$	2. $f(x)=\lvert\sin x\rvert;\ a_1=\pi;\ a_2=-\pi$.
3. $\begin{cases} x=1-\ln^2 t, \\ y=3e^t. \end{cases}$	4. $\sin\dfrac{x}{y}+\cos\dfrac{y}{x}=1$.
5. $y^2-y=6x^2;\ x_1=1;\ x_2=2$.	6. $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.
7. $y=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x};\ n=10;\ x=0$.	8. $\operatorname{ch} x\ge 1+\dfrac{x^2}{2};\ x\in\mathbb{R}$.
9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin x^2}{x\cos x-\sin x}$,	9. б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{20}-2x+1}{x^{30}-2^x+1}$,
9. в) $\lim\limits_{x\to +0}\left(-\ln x\right)^{2x}$,	9. г) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^a a^x;\ a>0;\ a\ne 1$,
9. д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{\arcsin x-\ln(1+x)}$.	10. $\cos^2(\sin x)$ до x^4.
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos x+\arcsin x-3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)}$.	12. а) $y=\dfrac{1+x^2}{1+(x-2)^2}$, б) $y=\ln\left\lvert\dfrac{1-x}{1+x}\right\rvert+\dfrac{6}{x+1}$.

ВАРІАНТ 10

1. $f(x)=\dfrac{1}{\cos\left(x-\operatorname{arctg}\left(x^{\ln x}\right)\right)}$.	2. $f(x)=\left(x^2+x+1\right)^{3/4};\ a=1$.
3. $\begin{cases} x=a(\ln\operatorname{ctg}(t/2)-\cos t), \\ y=a\sin t. \end{cases}$	4. $x^2-y^2+5x-7y+5=0;\ y>-3{,}5$.
5. $4xy+\dfrac{x}{x+y}=0;\ x_1=1;\ x_2=-\dfrac{1}{4}$.	6. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.
7. $y=\sin^3 x;\ n=15;\ x=\pi/4$.	8. $\sin x\ge\dfrac{2}{\pi}x;\ \ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\operatorname{tg} x}$	9. в) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos(2m+1)x}{\cos(2n+1)x};\ n,m\in\mathbb{N}$.
9. г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(3x^2+3^x\right)^{1/x}$,	д) $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$,	10. $\sqrt[3]{\cos x^3}$ до x^{12}.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}-x\operatorname{ctg} x}{x\sin x}$.	12. а) $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x}-e^{1/x}$,

12. б) $y=\frac{x}{2}+2\operatorname{arctg} x$.

ВАРІАНТ 11

1. $y=\frac{1-e^{x/(x+1)}}{\sin \pi x}$.	2. $f\left(x\right)=\sin x^2,\ X=\left[0;\sqrt{\pi}\right)$.
1. $f(x)=\operatorname{ctg}^2\left(\sin x\cdot\sqrt{\ln\left(1+(e+x)^x\right)}\right)$.	2. $f(x)=\sin(\sin x);\ a=0$.
3. $\begin{cases} x=a(\sin(t/2)+0{,}5\sin t\cos^2 t), \\ y=-\pi/2\cos^3 t. \end{cases}$	4. $(2a-x)y^2=x^2;\ y<0$.
5. $x^4+y^4-8x^2-10y^2+16=0;$ $x_1=1;\ x_2=3.$	6. $y=x\ln\frac{3+x}{3-x}$.
7. $y=\operatorname{arctg} x;\ n=5;\ x=0$.	8. $\operatorname{tg} x<x+\frac{x^3}{3};\ \ 0<x<\frac{\pi}{2}$.
9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\operatorname{tg}3x-6\operatorname{tg}x}{3\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}3x}$,	9. б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x^3-x}-2x}{\sqrt[5]{x^2-1}}$,
9. в) $\lim\limits_{x\to +0}\left(x^x-1\right)\ln x$,	9. г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$,
9. д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x^2}$.	10. $\cos(\sin x)$ до x^4.
11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\ln(1+x)-x\right)x}{\operatorname{sh}2x-2\operatorname{sh}x}$.	12. а) $y=\frac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$, б) $y=\sin x-\ln\sin x$.

ВАРІАНТ 12

1. $f(x)=(e\cdot x)^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(1+x^2)}}$.	2. $f(x)=\sin^2 x\cdot\sin x^2;\ a=0$.
3. $\begin{cases} x=a/3\,(2\cos t+\cos 2t), \\ y=a/3\,(2\sin t-\sin 2t). \end{cases}$	4. $\operatorname{arctg}\left(y/x\right)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.
5. $x=(t-1)^2(t-2);\ y=(t-1)^2(t-3);$ $t_1=4;\ \ t_2=0.$	6. $y=\frac{3-2x^2}{2x^2+3x-2}$.
7. $y=\ln\frac{3+2x}{3-2x};\ n=10;\ x=0$.	8. $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x;\ \ x>0$.
9. а) $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\frac{x-a}{a}\cdot\operatorname{ctg}\,(x-a)$,	9. б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$,
9. в) $\lim\limits_{x\to +0}x^{\sin x}$,	9. г) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg}x/x)^{1/x^2}$,
9. д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin(\sin x)-\sin^2 x}{x^6}$.	10. $\operatorname{tg} x$ до x^5.
11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arccos x-\cos x}{\sin x-\arcsin x}$.	12. а) $y=\frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$, б) $y=\sqrt[4]{x^4-4x^3}$.

ВАРІАНТ 13

1. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(1+(\cos x)^{\sin x}\right)$	2. $f(x)=(x-2)^2(x-3)(x-4),$ $a=4$
3. $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(-\infty<t<\infty)$	6. $5xy+8y^2-12x-26y+11=0;\ y<2;$ $x_0=11/12$
5. $\dfrac{x^2 2^x}{x^x};\ x_1=2;\ x_2=1$	6. $y=\arcsin x$
7. $y=e^{-x^2};n=5;x=0.$	8. $\sin x+\operatorname{tg} x>2x;\ 0<x<\pi/2$
9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\operatorname{tg}3x-6\operatorname{tg}x}{3\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}3x}$	9. б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x(1+x)}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$
9.в) $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\dfrac{x-a}{a}\cdot\operatorname{ctg}(x-a)$	9.г) $\lim\limits_{x\to +0}x^{1/\ln(e^x-1)}$
9.д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos x+\arcsin x-3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)}$	10. $\cos^2(\sin x)$ до x^4
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos x+\arcsin x-3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)}$	12. а) $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x}-e^{1/x}$ б) $y=\dfrac{x}{2}+2\operatorname{arctg}x$

§ 2. Приклад виконання індивідуального завдання

Приклад 3.1. Знайти похідну функції $y=\sin(\ln x)\cdot(\operatorname{arctg}4x)^{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

Розв'язання. Нехай $u=\sin(\ln x), v=(\operatorname{arctg}4x)^{\sqrt[3]{1+x^2}}$, $y=u\cdot v$,

$$y'=u'v+uv'.$$

Знайдемо u' та v'.

$$u'=\frac{\cos(\ln x)}{x};$$

$$\ln v=\sqrt[3]{1+x^2}\cdot\ln(\operatorname{arctg}4x);$$

$$(\ln v)'=\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x\cdot\ln(\operatorname{arctg}4x)+\sqrt[3]{1+x^2}\cdot\frac{4}{\left(1+16x^2\right)\cdot\operatorname{arctg}4x}=\frac{v'}{v}.$$

З останньої рівності знаходимо:

$$v'=(\operatorname{arctg}4x)^{\sqrt[3]{1+x^2}}\left[\frac{2x\cdot\ln(\operatorname{arctg}4x)}{3\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}}+\frac{4\sqrt[3]{1+x^2}}{\left(1+16x^2\right)\cdot\operatorname{arctg}4x}\right].$$

Остаточно отримуємо:

$$y' = \left(\operatorname{arctg} 4x\right)^{\sqrt[3]{1+x^2}} \left[\frac{\cos\left(\ln x\right)}{x} + \frac{2x \cdot \sin\left(\ln x\right) \cdot \ln\left(\operatorname{arctg} 4x\right)}{3\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}} + \frac{4\sin\left(\ln x\right) \cdot \sqrt[3]{1+x^2}}{\left(1+16x^2\right) \cdot \operatorname{arctg} 4x} \right]. \blacksquare$$

Приклад 3.2. Знайти за означенням $f'(a)$ для заданого a, якщо $f(x) = (x-5)^2 (x-6)(x-7)(x-8)$, $a = 7$.

Розв'язання. За означенням похідної маємо:

$$f'(7) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(7+\Delta x) - f(7)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 (1+\Delta x)\Delta x(\Delta x - 1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2+\Delta x)^2 (1+\Delta x)(\Delta x - 1) = 4 \cdot 1 \cdot (-1) = -4. \blacksquare$$

Приклад 3.3. Довести, що існують такі значення a та b, що функція

$$y = \begin{cases} 2^x, \, x \le 0; \\ x^2 + ax + b, \, x > 0. \end{cases}$$

є диференційовною на всій числовій прямій.

Розв'язання. Задана функція $y(x)$ є диференційовною на проміжках $(-\infty; 0)$, де $y'(x) = 2^x \cdot \ln 2$, та $(0; \infty)$, де $y'(x) = 2x + a$.

Визначимо, якими повинні бути a та b, щоб $y(x)$ була диференційовною при $x = 0$. З диференційовності $y(x)$ у даній точці випливає її неперервність при $x = 0$ (твердження 1.2), тобто виконана рівність

$$\lim_{x \to 0+} y(x) = \lim_{x \to 0-} y(x) = y(0).$$

Звідси отримуємо, що

$$\lim_{x \to 0-} 2^x = \lim_{x \to 0+} \left(x^2 + ax + b\right) = 2^0 = 1,$$

тому $b = 1$.

Знайдемо ліву та праву похідні функції $y(x)$ при $x = 0$:

$$y'_+(0) = (2x + a)\big|_{x=0} = a, \quad y'_-(0) = \left(2^x \cdot \ln 2\big|\right)_{x=0} = \ln 2.$$

Оскільки функція $y(x)$ є диференційовною при $x = 0$, то, згідно з твердженням 1.1 і теоремою 1.5, $y'_+(0) = y'_-(0)$ і $a = \ln 2$.

Отже, при $a = \ln 2$, $b = 1$ функція $y(x)$ є диференційовною на всій числовій прямій. ■

Приклад 3.4. Знайти похідну функції, що задана параметрично:

$$\begin{cases} x = 2 \ln \operatorname{ctg} t, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t. \end{cases}$$

Розв'язання. Використаємо формулу для знаходження похідної функції, що задана в параметричній формі (див. розділ 1, §1, п. 12):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Отримаємо:

$$x'_t=\frac{2}{\operatorname{ctg}t}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)=-\frac{4}{\sin 2t},\qquad y'_t=\frac{1}{\cos^2 t}-\frac{1}{\sin^2 t}=-\frac{4\cos 2t}{\sin^2 2t}.$$

Підставивши у вираз для $\frac{dy}{dx}$, знаходимо:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=-\frac{4\cos 2t}{\sin^2 2t}\cdot\left(-\frac{\sin 2t}{4}\right)=\operatorname{ctg}2t.\quad \blacksquare$$

Приклад 3.5. Знайти похідну функції $f(x,y)=0$, заданої неявно, у точці M_0, якщо $f(x,y)=x^3+5x^2y+y^2-2x^2+y-6,\quad M_0(1;1)$.

Розв'язання. Застосуємо правило диференціювання функції, що задана неявно (див. розділ 1, §1, п. 13). Продиференціюємо рівність,

$$x^3+5x^2y+y^2-2x^2+y-6=0,$$

вважаючи y функцією від x. Отримуємо:

$$3x^2+10xy+5x^2y'+2yy'-4x+y'=0.$$

Звідси

$$\left(5x^2+2y+1\right)y'=4x-3x^2-10xy;\qquad y'=\frac{4x-3x^2-10xy}{5x^2+2y+1}.$$

У точці M_0 маємо $y'(1)=\frac{4\cdot1-3\cdot1^2-10\cdot1\cdot1}{5\cdot1^2+2\cdot1+1}=-\frac{9}{8}$. ■

Приклад 3.6. Знайти диференціал функції $f(x)$, якщо $f(x)=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{x}{1-x^4}$.

Розв'язання. Областю визначення функції є проміжок $x\in(-1;1)$.

Оскільки для x з області визначення функції виконується рівність $\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}=\ln\left(1-x^2\right)-\ln\left(1+x^2\right)$, то при диференціюванні отримуємо:

$$f'(x)=-\frac{2x}{1-x^2}-\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1-x^4+4x^4}{\left(1-x^4\right)^2}=\frac{4x^5+3x^4-4x+1}{\left(1-x^4\right)^2}.$$

Зважаючи на результати п. 5 розділу 1, §1, отримаємо диференціал функції $f(x)$:

$$df(x)=f'(x)dx=\frac{4x^5+3x^4-4x+1}{\left(1-x^4\right)^2}dx.\quad \blacksquare$$

Приклад 3.7. Знайти похідну функції $y = y(x)$ вказаного порядку n, якщо

$$y = \left(1 + x^2\right)\operatorname{arctg} x, \ n = 4.$$

Розв'язання. Застосовуючи означення вищих похідних, отримаємо:

$$y' = 2x \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{1 + x^2}{1 + x^2} = 2x \cdot \operatorname{arctg} x + 1, \quad y'' = 2\operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1 + x^2},$$

$$y''' = \frac{2}{1 + x^2} + 2 \cdot \frac{\left(1 + x^2\right) - 2x^2}{\left(1 + x^2\right)^2} = \frac{4}{\left(1 + x^2\right)^2} = 4 \cdot \left(1 + x^2\right)^{-2},$$

$$y^{(4)} = 4 \cdot (-2) \cdot \left(1 + x^2\right)^{-3} \cdot 2x = -\frac{16x}{\left(1 + x^2\right)^3}. \quad \blacksquare$$

Приклад 3.8. Знайти n-у похідну функції $y = e^{2x}\left(3x^2 - 4\right)$.

Розв'язання. Використаємо формулу Лейбніца

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{(k)} \cdot v^{(n-k)}.$$

Позначимо $v = e^{2x}$, $u = 3x^2 - 4$, тоді $v^{(m)} = 2^m \cdot e^{2x}, m = 0,1,...,n.$ Для функції u маємо $u' = 6x,\ u'' = 6,\ u''' = u^{(4)} = ... = u^{(n)} = 0, n \geq 3$. Отримані результати зведемо в таблицю 4.1.

Таблиця 4.1.

k	$n-k$	C_n^k	$u^{(k)}$	$v^{(n-k)}$
0	n	$C_n^0 = 1$	$u = 3x^2 - 4$	$v^{(n)} = 2^n e^{2x}$
1	$n-1$	$C_n^1 = n$	$u' = 6x$	$v^{(n-1)} = 2^{n-1} e^{2x}$
2	$n-2$	$C_n^2 = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$	$u'' = 6$	$v^{(n-2)} = 2^{n-2} e^{2x}$

За формулою Лейбніца маємо:

$$y^{(n)} = C_n^0 \cdot u \cdot v^{(n)} + C_n^1 \cdot u' \cdot v^{(n-1)} + C_n^2 \cdot u'' \cdot v^{(n-2)} = 2^n \cdot e^{2x}\left(3x^2 - 4\right) +$$

$$+ n \cdot 2^{n-1} \cdot e^{2x} \cdot 6x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2^{n-2} \cdot e^{2x} \cdot 6 = 2^n \cdot e^{2x} \cdot \left(3x^2 + 3nx + \frac{3n(n-1)}{4} - 4\right). \quad \blacksquare$$

Приклад 3.9. Знайти диференціал функції $y(x)$ вказаного порядку у точці x_0, якщо $y(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$, $n = 9, x_0 = 1{,}5$.

Розв'язання. Подамо $y(x)$ у вигляді комбінації елементарних дробів:

$$y(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

Оскільки (див. таблицю похідних вищих порядків)

$$\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{(n)}\cdot n!}{(x-2)^{n+1}};\qquad \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{(n)}\cdot n!}{(x-1)^{n+1}},$$

то для n-ої похідної функції $y(x)$ маємо:

$$y^{(n)}(x)=(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right);$$

$$y^{(n)}(1{,}5)=y^{(9)}(1{,}5)=-9!\left(2^{10}-2^{10}\right)=0.$$

Звідси для диференціала 9-го порядку отримуємо:

$$d^9y(1{,}5)=y^{(9)}(1{,}5)\cdot dx^9=0.\ \blacksquare$$

Приклад 3.10. За допомогою похідної отримати формулу для суми

$$\sin x+3\sin 3x+...+(2n-1)\sin(2n-1)x,\ x\neq k\pi.$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо таку суму:

$$S(x)=\cos x+\cos 3x+...+\cos(2n-1)x=:$$

$$=\frac{2\sin x\cdot(\cos x+\cos 3x+...+\cos(2n-1)x)}{2\sin x}=$$

$$=\frac{\sin 2x+\sin 4x-\sin 2x+...+\sin 2nx-\sin(2n-2)x}{2\sin x}=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$$

Шукана сума може бути отримана диференціюванням $S(x)$:

$$S_1(x)=\sin x+3\sin 3x+...+(2n-1)\sin(2n-1)x=-S'(x)=$$

$$=-\left(\frac{\sin 2nx}{2\sin x}\right)'=\frac{-2n\cos 2nx\cdot\sin x+\sin 2nx\cdot\cos x}{2\sin^2 x}.\ \blacksquare$$

Приклад 3.11. Довести за допомогою похідної нерівність:

$$2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x},\quad x>1.$$

Розв'язання. $2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+\frac{1}{x}-3>0$. Розглянемо допоміжну функцію $f(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{x}-3$. Диференціюємо її та отримуємо: $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}$.

Оскільки при $x>1$ виконуються нерівності $\sqrt{x}<x^2$, $\frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{1}{x^2}$., то $f'(x)>0$ при цих значеннях x. Таким чином, згідно з достатньою умовою монотонності функції на інтервалі, функція $f(x)$ монотонно зростає на проміжку $(1;+\infty)$, тому на цьому проміжку $f(x)>f(1)\Rightarrow 2\sqrt{x}+\frac{1}{x}-3>0,\ x\in(1;+\infty)$. Звідси випливає нерівність, яку потрібно було довести. ■

Приклад 3.12. Використовуючи похідну, довести тотожність:

$$\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{3}{4}.$$

Розв'язання. Розглянемо допоміжну функцію

$$f\left(x\right)=\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right).$$

Тоді

$$f'\left(x\right)=-2\cos x\cdot\sin x-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\sin x\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=-\sin 2x-\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+$$

$$+\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=0\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

Оскільки $f'\left(x\right)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$, то, за ознакою сталості функції (теорема 2.11), $f\left(x\right)=C\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. Знайдемо сталу C:

$$f\left(0\right)=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

Таким чином, вихідна тотожність виконується $\forall x\in\mathbb{R}$. ■

Приклад 3.13. Обчислити границі за допомогою похідної:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-3x^3+x^2+x+2}{2x^4-x^3-2x^2-10x+4}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{\cos x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$; **г)** $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)$; **д)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\ln\left(x+1\right)}$.

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-3x^3+x^2+x+2}{2x^4-x^3-2x^2-10x+4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$(пр. Лопіталя)$\overset{\cancel{?}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^3-9x^2+2x+1}{8x^3-3x^2-4x-10}=\dfrac{1}{34}$.

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{\cos x}\right)=\left[\infty-\infty\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{\cos x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$(пр. Лопіталя)$\overset{\cancel{?}}{=}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{-\sin x}\right)=0.$$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\left[\infty^0\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}$.

Знайдемо границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right](\text{пр.Лопіталя})\overset{\cancel{?}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Звідси отримуємо

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=e^0=1.$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\left[\dfrac{0}{0}\right](\text{пр.Лопіталя})\overset{\cancel{?}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\frac{1}{x^2}\cdot 2^{\frac{1}{x}}\cdot\ln 2}{-\frac{1}{x^2}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}\cdot\ln 2=\ln 2.$$

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\ln(x+1)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right](\text{пр.Лопіталя})\overset{\cancel{?}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\frac{1}{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x(x+1)=+\infty.$ ■

Приклад 3.140. Розвинути функцію $y(x)$ за формулою Маклорена до x^4, якщо $y(x)=\ln(1+\sin x)$.

Розв'язання. Використовуючи розвинення за формулою Маклорена

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+o(t^4),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4),$$

знаходимо:

$$\ln(1+\sin x)=\ln\left(1+\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)\right)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^3-\frac{1}{4}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^4+$$

$$+o(x^4)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}+o(x^4).\ ■$$

Приклад 3.15. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\operatorname{tg}^4 x}$ за допомогою формули Маклорена.

Розв'язання. Подамо чисельник та знаменник дробу за допомогою формули Маклорена до x^4:

$$\operatorname{tg}^4 x=(x+o(x))^4=x^4+o(x^4);$$

$$1-\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\cos x=1-\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}x^4+o\left(x^4\right)\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)\right)=\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right).$$

Підставляємо ці вирази у границю та отримуємо:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\operatorname{tg}^4 x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)}{x^4+o\left(x^4\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}+\frac{o\left(x^4\right)}{x^4}}{1+\frac{o\left(x^4\right)}{x^4}}=\frac{1}{3}.\quad\blacksquare$$

Приклад 3.16. Побудувати графіки функцій:

а) $y=\frac{x^2+4}{x}$, **б)** $y=x^3e^{-x}$.

Розв'язання.

1) Область визначення функції: $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty;)$.

2) $y(-x)=\frac{(-x)^2+4}{-x}=-\frac{x^2+4}{x}=-y(x)$, тому функція є непарною.

3) Функція неперіодична.

4) $\lim\limits_{x\to0-}\frac{x^2+4}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0+}\frac{x^2+4}{x}=+\infty$, тому точка $x=0$ є точкою розриву другого роду.

5) Оскільки $\lim\limits_{x\to0\pm}y(x)=\pm\infty$, то пряма $x=0$ (вісь Oy) є вертикальною асимптотою графіка даної функції; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y(x)=\pm\infty$, тому горизонтальні асимптоти відсутні. Шукаємо похилі асимптоти у вигляді $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{x^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}=0.$$

Пряма $y=x$ є похилою асимптотою.

6) Точки перетину з координатними осями відсутні, оскільки $y\neq0$, а точка $x=0\notin D(y)$. При $x<0$ $y(x)<0$, при $x>0$ $y(x)>0$.

7) Дослідимо $y(x)$ на монотонність та знайдемо точки екстремуму. Знаходимо похідну $y'(x)$:

$$y'(x)=\left(\frac{x^2+4}{x}\right)'=\frac{2x^2-x^2-4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}.$$

Знаходимо критичні точки: $y' = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$.

На проміжках $(-\infty;-2)$ та $(2;+\infty)$ $y' > 0$, тому тут функція зростає, на $(-2;0)$ і на $(0;2)$, $y' < 0$, функція спадає. Точка $x = 0 \notin D(y)$,

$x = -2$ – точка локального максимуму, $y(-2) = -4$, $A(-2;-4)$,

$x = 2$ – локального мінімуму, $y(2) = 4$, $B(-2;-4)$.

Знаки y'	+		−		−		+
Характерні точки		-2		0		2	
Напрямки монотонності, loc extr	↗	max	↘		↘	min	↗
Значення функції в точках loc extr		–4		∄		4	

8) Визначимо характер опуклості функції та точки перегину її графіка. Для цього знайдемо другу похідну:

$$y'' = (y')' = \left(\frac{x^2 - 4}{x^2} \right)' = \left(1 - \frac{4}{x^2} \right)' = \frac{8}{x^3}.$$

$y'' \neq 0$, тому точки перегину графіка функції відсутні. Друга похідна $y''(x) < 0$ на проміжку $(-\infty;0)$, тому тут функція опукла вгору, $y''(x) > 0$ на інтервалі $(0;+\infty)$, тому на цьому проміжку функція є опуклою вниз.

Знаки y''	−		+
Характерні точки		0	
Напрямки опуклості, точка перегину	∩		∪
Ордината точки перегину		∄	

9) На основі виконаного дослідження будуємо графік функції (див. рис.4.1). ■

б) $y = x^3 e^{-x}$.

1) Область визначення функції: $D(y) = \mathbb{R}$.

2) $y(-x) = -x^3 e^x, y(-x) \neq y(x) \wedge y(-x) \neq -y(x)$, тому функція ні парна, ні непарна.

3) Функція неперіодична.

4) Функція є неперервною на всій числовій прямій.

5) Оскільки $y(x)$ неперервна на всій числовій прямій, то вертикальні асимптоти відсутні;

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 e^{-x} = 0$, тому $y = 0$ – горизонтальна асимптота при $x \to +\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 e^{-x} = -\infty$, тому при $x \to -\infty$ горизонтальних асимптот немає;

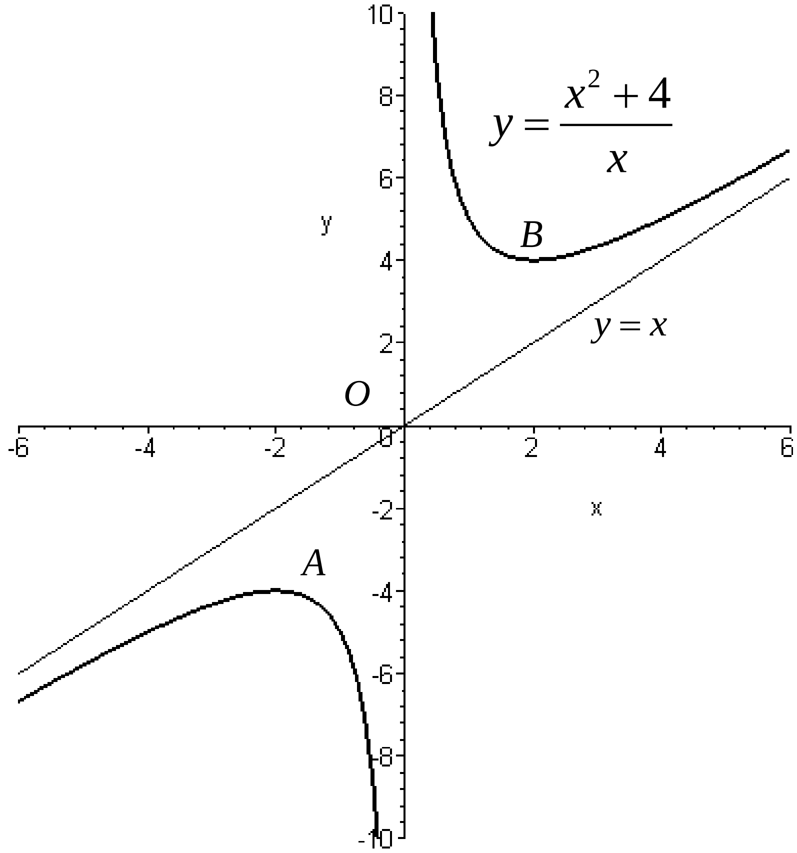


Рис. 4.1.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^{-x}=+\infty$, звідси випливає, що похилі асимптоти у графіка даної функції відсутні.

6) При $x=0$ $y=0$, графік функції проходить через початок координат.

7) Дослідимо функцію на монотонність.

$$y'=3x^2e^{-x}-x^3e^{-x}=x^2e^{-x}(3-x),$$

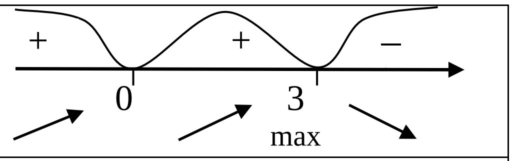
$$y'=0\Rightarrow x_1=0;x_2=3.$$

На проміжку $(-\infty;3)$ похідна додатна, тут функція зростає;

на $(3;+\infty)$ похідна від'ємна, на цьому проміжку функція спадає.

Точка $x=3$ є точкою максимуму, $y_{\max}=y(3)=\dfrac{27}{e^3}\approx1,344$, $A\left(3;\dfrac{27}{e^3}\right)$.

Точка $x=0$ не є точкою екстремуму, оскільки при переході через неї похідна не змінює знак.

Знаки y'	
Характерні точки	
Напрямки монотонності, loc extr	
Значення функції в точках loc extr	$\dfrac{27}{e^3}\approx1,344$

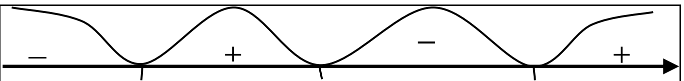
8) Визначимо тип опуклості функції.

$$y''=\left(y'\right)'=2xe^{-x}\left(3-x\right)-x^2e^{-x}\left(3-x\right)-x^2e^{-x}=xe^{-x}\left(x^2-6x+6\right)$$

$$y''=0\Rightarrow x_1=0\wedge x^2-6x+6=0,\ x_{2,3}=3\pm\sqrt{3}.$$

На $\left(-\infty;0\right)$ і на $\left(3-\sqrt{3};3+\sqrt{3}\right)$ $y''<0$, тут функція опукла вгору.

На $\left(0;3-\sqrt{3}\right)$ і на $\left(3+\sqrt{3};+\infty\right)$ $y''>0$, тому на цих проміжках функція опукла вниз. Точки з абсцисами x_1, x_2, x_3 є точками перегину, $y\left(0\right)=0, O(0;0)$; $y\left(3-\sqrt{3}\right)\approx 0{,}574, C\left(3-\sqrt{3};0{,}574\right)$; $y\left(3+\sqrt{3}\right)\approx 0{,}933, D\left(3+\sqrt{3};0{,}933\right)$.

Знаки y''	 – + – +
Характерні точки	$x_1=0$ $x_2=3-\sqrt{3}$ $x_3=3+\sqrt{3}$
Напрямки опуклості, точки перегину	∩ перегин ∪ перегин ∩ перегин ∪
Ординати точок перегину	0 ≈0,574 ≈0,933

9) На основі виконаного дослідження будуємо графік, наведений на рис. 4.2. ■

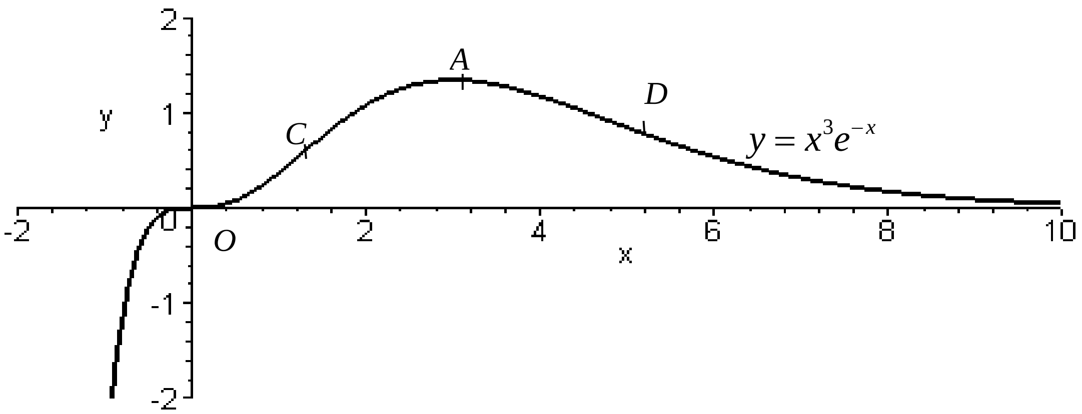


Рис. 4.2.

Розділ 4. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

§ 1. Теоретичні питання

1. Поняття похідної функції в точці, односторонніх похідних. Необхідні й достатні умови існування похідної функції в точці.
2. Геометричний, механічний та економічний зміст похідної функції в точці.
3. Вивести похідні від функцій $a^x; \sin x; \cos x; tgx; ctgx$ за означенням.
4. Твердження про неперервність функції в точці, в якій вона має похідну. Арифметичні операції над похідними.
5. Теорема про похідну складеної функції.
6. Теорема про похідну оберненої функції.
7. Знаходження похідних від функцій $x^\alpha (x > 0, \alpha \in \mathbb{R})$, a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ з використанням теорем про арифметичні операції над похід-ними і про похідну від складеної функції.
8. Знаходження похідних від функцій $\log_a x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$ з використанням теорем про арифметичні операції над похідними і про похідну від оберненої функції .
9. Логарифмічне диференціювання. Приклади.
10. Диференційованість та диференціал функції в точці. Означення. Критерій диференційованості функції в точці. Геометричний зміст диференціала.
11. Використання диференціала для наближених обчислень. Інваріантність форми першого диференціала. Таблиця диференціалів.
12. Похідні вищих порядків. Означення, приклади. Таблиця похідних вищих порядків.
13. Формула Лейбніца.
14. Диференціали вищих порядків. Неінваріантність форми диференціалів вищих порядків.
15. Диференціювання функцій, що задані параметрично, неявно. Приклади.
16. Означення монотонної функції в точці. Поняття локального екстремуму. Достатня умова монотонності функції в точці.
17. Означення локального екстремуму. Теорема Ферма та її геометричний зміст.
18. Теореми Ролля, Лагранжа і Коші та їх геометричний зміст.
19. Наслідки з теореми Лагранжа. Теорема про сталість функції, що має на інтервалі похідну, яка дорівнює нулю, та її геометричний зміст. Критерій нестрогої монотонності функції на інтервалі.
20. Доведення нерівностей за допомогою похідної. Приклади. Зв'язок між середнім арифметичним і середнім геометричним.
21. Перше правило Лопіталя (загальна теорема).
22. Перше правило Лопіталя у випадку, коли $x \to a + 0, x \to a - 0, x \to \infty$.
23. Друге правило Лопіталя.
24. Перша і друга достатні умови екстремуму функції в точці.

25. Опуклі функції: означення, перша геометрична інтерпретація. Еквівалентний запис умови опуклості.
26. Критерій опуклості вниз і наслідок з нього.
27. Друга геометрична інтерпретація опуклості.
28. Точки перегину: означення, необхідна умова перегину, достатня умова перегину.
29. Асимптоти графіка функції (вертикальні, горизонтальні, похилі). Формули для обчислення параметрів похилої асимптоти.
30. Схема дослідження функції за допомогою похідної та побудова графіків. Приклад.
31. Пошук найбільшого і найменшого значень функції на відрізку. Приклад.
32. Формула Тейлора для многочленів.
33. Формула Тейлора для довільної функції з залишковим членом у формі Пеано.
34. Приклади розвинення функцій за формулою Тейлора з залишковим членом у формі Пеано.
35. Довести твердження: якщо функцію можна наблизити деяким многочленом степеня, не вищого за n, з точністю $o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$ при $x\to x_0$, то цей многочлен є многочленом Тейлора.
36. Запис формули Тейлора через диференціали.
37. Залишковий член формули Тейлора у формах Лагранжа та Коші. Приклади застосування залишкового члена.
38. Третя достатня умова локального екстремуму.

§ 2. Задачі для самоперевірки практичних навичок

4.1. Знайти похідні функцій за означенням:

а) $y=2x^2-4$; б) $y=\dfrac{1}{x+1}$; в) $y=x^3$;
г) $y=\sqrt{x+2}$; д) $y=\sqrt[3]{x-1}$; е) $y=\operatorname{arctg}x$;
є) $y=\operatorname{arcctg}2x$; ж) $y=\arcsin 2x$; з) $y=\arccos x$.

4.2. Знайти за означенням похідну функції в точці x_0, або довести, що похідної не існує.

а) $y=x^2\sin\left(x-2\right)$, $x_0=2$: б) $y=e^{x^2}$, $x_0=1$;
в) $y=x^3(x-1)^2(x+1)$, $x_0=1$; г) $y=(x+1)\sin x^2$, $x_0=0$;
д) $y=x\cdot 2^{\sqrt{x}}$, $x_0=4$; е) $y=|\cos x|$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$;
є) $y=\cos^2 x\cdot\cos x^2$, $x_0=0$; ж) $y=\cos(\cos x)$, $x_0=0$.

4.3.–4.41. Знайти похідні функцій.

4.3. $y=x^2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **4.4.** $y=\left(x^2-3x+2\right)\sin x$.

4.4. $y=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}}$. **4.6.** $y=7^x\cdot x^7$. **4.7.** $y=\left(x^2+1\right)^{10}$.

4.8. $y=\sin^5 x-3\sin^2 x$. **4.9.** $y=e^{\operatorname{tg} x}$. **4.10.** $y=\sqrt{\ln x}$.

4.11. $y=5^{2x-\sqrt{x}}$. **4.12.** $y=\left(x^2+4\right)^{\operatorname{tg} x}$. **4.13.** $y=x^2\sin^2 x+\dfrac{\sqrt{\cos x}}{\ln x}$.

4.14. $y=\sin^3 5x\cdot\cos^2\dfrac{x}{3}$. **4.14.** $y=\dfrac{x^5}{8\left(1-x^2\right)^4}$. **4.16.** $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$.

4.17. $y=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **4.18.** $y=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$. **4.19.** $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}$.

4.20. $y=\sqrt{\cos x}\cdot a^{\sqrt{\cos x}}$. **4.21.** $y=-\dfrac{1}{2\sin^2 x}+\ln\operatorname{tg} x$.

4.22. $y=3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sin^3 ax}{\cos^3 bx}$. **4.23.** $y=3b^2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{b-x}}-(3b+2x)\sqrt{bx-x^2}$.

4.24. $y=2^{\arcsin 3x}+\left(1-\arccos 3x\right)^2$. **4.24.** $y=\ln\arcsin x+\dfrac{1}{2}\ln^2 x+\arcsin\ln x$.

4.26. $y=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x-1}{x+1}$. **4.27.** $y=\dfrac{3}{4}\ln\dfrac{x^2+1}{x^2-1}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

4.28. $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$. **4.29.** $y=\sin\left(\sin\left(\sin x\right)\right)$. **4.30.** $y=\ln\left(\ln^2\left(\ln^3 x\right)\right)$.

4.31. $y=x+x^x+x^{x^x}$. **4.32.** $x^{\sin x}+\left(\sin x\right)^x$. **4.33.** $y=\sqrt[x]{x}$.

4.34. $y=\left(\sin x\right)^{\frac{1}{x}}$. **4.34.** $y=\left(\sin x\right)^{\cos x}+\left(\cos x\right)^{\sin x}$.

4.36. $y=x^{x^a}+x^{a^x}+a^{x^x}$. **4.37.** $y=\dfrac{\ln^x x}{x^{\ln x}}$. **4.38.** $y=\left(\dfrac{\arcsin\left(\sin^2 x\right)}{\arccos\left(\cos^2 x\right)}\right)^{arctg^2 x}$.

4.39. $y=\left(\arccos x\right)^2\left(\ln^2\left(\arccos x\right)-\ln\left(\arccos x\right)+0{,}5\right)$.

4.40. $y=\dfrac{e^{-x^2}\arcsin\left(e^{-x^2}\right)}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}+\dfrac{1}{2}\ln\left(1-e^{-2x^2}\right)$.

4.41. а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$; б) $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ $(\varphi(x)\neq 0,\ \psi(x)>0)$,

де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ диференційовні функції;

в) $y=f(x^2)$; г) $y=f\left(\sin^2 x\right)+f\left(\cos^2 x\right)$,

де $f(u)$ – диференційовна функція.

4.42. Знайти логарифмічну похідну від функції y, якщо

а) $y=x\cdot\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; б) $y=\dfrac{x^2}{1-x}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$;

в) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}\cdot(x-a_2)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{\alpha_n}$; г) $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$.

4.43. Визначити області існування обернених функцій $x=x(y)$ та знайти їх похідні, якщо

а) $y=x^5+\log_2 x$; б) $y=x^3+2^x$; в) $y=\text{ch}\,x$; г) $y=\text{cth}\,x$.

4.44 Виділити однозначні неперервні гілки обернених функцій $x=x(y)$, знайти її похідні, побудувати графіки, якщо

а) $y=2x^2+x^4$; б) $y=2e^{-x}-e^{-2x}$.

4.44. Знайти похідні функцій, якщо

а) $y=\left|(x-1)^2(x+1)^3\right|$; б) $y=\arccos\dfrac{1}{|x|}$;

в) $y=[x]\cdot\sin^2(\pi x)$, де $[x]$ – ціла частина числа x.

4.46. Знайти похідні й побудувати графіки функцій та їх похідних:

а) $y=|x|\cdot x$; б) $y=\log_2|x|$;

в) $y=\begin{cases}1-x & \text{при} -\infty<x<1;\\ (1-x)(2-x) & \text{при } 1\le< x\le 2;\\ -(2-x) & \text{при } 2<x<+\infty;\end{cases}$

г) $y=\begin{cases}(x-a)^2(x-b)^2 & \text{при } a\le x\le b;\\ 0 & \text{поза сегментом } [a,b];\end{cases}$

д) $y=\begin{cases}x & \text{при } x<0;\\ \ln(1+x) & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$

4.47. Знайти $f'(a)$, якщо

$$f(x)=(x-a)\varphi(x),$$

де функція $\varphi(x)$ – неперервна в точці a.

4.48. Показати, що функція

$$f(x)=|x-a|\cdot\varphi(x),$$

де $\varphi(x)$ – неперервна функція в точці a і $\varphi(a)\neq 0$, не має похідної в точці a. Знайти односторонні похідні $f'_-(a)$ і $f'_+(a)$.

4.49. Дослідити функцію

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, \text{ якщо } x\in\mathbb{Q},\\ 0, \quad \text{якщо } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

на диференційованість.

4.50. Нехай

$$f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ якщо } x\le x_0;\\ ax+b, \text{ якщо } x>x_0.\end{cases}$$

Як слід підібрати коефіцієнти a і b, щоб функція $f(x)$ була неперервною й диференційовною в точці $x=x_0$?

4.51. Нехай

$$F(x)=\begin{cases} f(x), \text{ якщо } x\le x_0; \\ ax+b, \text{ якщо } x>x_0, \end{cases}$$

де $f(x)$ диференційовна зліва при $x=x_0$. При якому наборі коефіцієнтів a і b функція $F(x)$ буде неперервною і диференційовною в точці x_0?

4.52. Дослідити на диференційованість функції:

а) $y=\left|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\right|$; б) $y=|\cos x|$;

в) $y=\left|\pi^2-x^2\right|\cdot\sin^2 x$; г) $y=\arcsin(\cos x)$;

д) $y=\begin{cases} \dfrac{1}{4}(x-1)(x+1)^2 & \text{при } |x|\le 1; \\ |x|-1 & \text{при } |x|>1. \end{cases}$

4.53. Для функції $f(x)$ визначити ліву похідну $f'_-(x)$ і праву похідну $f'_+(x)$, якщо

а) $f(x)=\left[x-\dfrac{1}{2}\right]\cdot\cos(\pi x)$, де $[x]$ – ціла частина числа x;

б) $f(x)=x\cdot\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|$; в) $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$; г) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \text{ при } x\ne 0; \\ 0 \quad \text{при x=0.} \end{cases}$

4.54.. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right| & \text{при } x\ne 0; \\ 0 & \text{при } x=0 \end{cases}$$

має точки недиференційовності в будь-якому околі точки $x=0$, але диференційовна в цій точці.

4.54. Знайти диференціали функцій для довільних аргументу і приросту:

а) $y=x\ln x-x$; б) $y=e^{-x^2}$; в) $y=\dfrac{x}{a}\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$.

4.56. Знайти

а) $d\left(xe^x\right)$; б) $d\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$; в) $d\left(\ln\left(1-x^2\right)\right)$; г) $d\left(\arccos\dfrac{1}{|x|}\right)$;

д) $d(uvw)$; е) $d\left(\dfrac{u}{v^2}\right)$; є) $d\left(\ln\sqrt{u^2+v^2}\right)$;

ж) $\dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$; з) $\dfrac{d}{d(x^3)}\left(x^3-2x^6-x^9\right)$; і) $\dfrac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)}$,

де $u=u(x)$, $v=v(x)$, $w=w(x)$ диференційовні функції, x – незалежна змінна.

4.57. Для функції $y = 2x^2 - x$ обчислити приріст функції і диференціал при $x = 1$, $\Delta x = 0,01$.

4.58. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $\sqrt{16,5}$; б) $\sqrt[3]{9}$; в) $\sqrt[4]{80}$; г) $\sqrt[7]{129}$;

д) $e^{0,1}$; е) $\operatorname{arctg} 0,9$; є) $\sin 31^\circ$; ж) $\lg 11$.

4.59. Написати рівняння дотичної та нормалі до кривої

а) $y = \dfrac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ в точці з абсцисою $x = 2a$;

б) $\begin{cases} x = \dfrac{2t + t^2}{1 + t^3}; \\ y = \dfrac{2t - t^2}{1 + t^3} \end{cases}$ в точках $t = 0, t = 1, t = \infty$;

в) $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ (цисоїда) в точці $M(x_0, y_0)$;

г) $x^2(x + y) = a^2(x - y)$ в точці $M(0; 0)$.

4.60. Знайти кути, під якими перетинаються лінії

а) $y = \dfrac{x+1}{x+2}$ і $y = \dfrac{x^2 + 4x + 81}{16}$; б) $x^2 + y^2 - 4x = 1$ і $x^2 + y^2 + 2y = 9$;

в) $x^2 = 4ay$ і $y = \dfrac{8a^3}{4a^2 + x^2}$.

4.61. Показати, що для будь-якої точки $M(x_0, y_0)$ рівнобічної гіперболи $x^2 - y^2 = a^2$ відрізок нормалі від точки M до точки перетину з віссю абсцис дорівнює полярному радіусу точки M.

4.62. Показати, що ордината будь-якої точки лінії $2x^2y^2 - x^4 = c$ ($c -$ стала) є середня пропорційна між абсцисою і різницею абсциси й піднормалі, що проведена до лінії в тій же точці.

4.63. Показати, що лінія $y = e^{kx} \sin mx$ дотикається до кожної з ліній $y = e^{kx}$, $y = -e^{kx}$ у всіх спільних з ними точках.

4.64. В точках перетину прямої $x - y + 1$ і параболи $y = x^2 - 4x + 5$ проведено нормалі до параболи. Знайти площу трикутника, що утворено нормалями і хордою, що сполучає вказані точки перетину.

4.64. Знайти похідні другого порядку для функцій:

а) $y = e^x \cos x$; б) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$; в) $y = 2^{x^2}$; г) $y = x^x$;

д) $y = \left(x^2 + 1\right) \operatorname{arctg}\left(x^2 + 1\right)$; е) $y = \ln u(x)$; є $y = \ln \dfrac{u}{v}$; ж) $y = u^v$,

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ двічі диференційовні функції, x – незалежна змінна.

4.66. Знайти похідні $y'_x. y''_{x^2}, y'''_{x^3}$, якщо $f(x)$ – тричі диференційовна функція:

а) $y = f(x^2)$; б) $y = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; в) $y = f(e^x)$; г) $y = f(\ln x)$.

4.67. Знайти d^2y, якщо

а) $y = x^x$; б) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$; в) $y = a^u$; г) $y = u^m v^n$ $(m\,\text{і}\,n - \text{сталі})$,

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ двічі диференційовні функції, x – незалежна змінна.

4.68 Знайти похідні y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} від функцій, що задані параметрично:

а) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = \dfrac{1}{t}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1}, \\ y = \dfrac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = bt\sin t \end{cases}$; е) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1-t^2); \end{cases}$ є) $\begin{cases} x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$

4.69 Знайти похідні y'_x, y''_{xx} від функцій, що задані в неявному вигляді:

а) $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = 3$; б) $x^3 + y^3 = 3axy$; в) $x^y = y^x$;

г) $y^2\cos x = a^2\sin 3x$; д) $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$; е) $xe^y - y^2 = 0$;

є) $x^2 y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$; ж) $x\sin y - \cos y + \cos 2y = 0$;

з) $\sin(xy) = y$; і) $y\sin x - \cos(x-y)$.

4.70. Знайти диференціал указаного порядку:

а) $y = x^7$, d^7y; б) $y = x\sin 5x$, $d^{10}y$; в) $y = \sin x \cdot \operatorname{sh} x$, d^7y.

4.71. Знайти похідну вказаного порядку:

а) $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$, $y^{(6)}$, $y^{(7)}$;

б) $y = \sqrt{x}$, $y^{(10)}$; в) $y = \dfrac{e^x}{x}$, $y^{(10)}$; г) $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$, $y^{(n)}$;

д) $y = \dfrac{2x+3}{x-5}$, $y^{(n)}$; е) $y = \sin^2 x$, $y^{(n)}$; є) $y = x^3\sin 3x$, $y^{(50)}$;

ж) $y = \dfrac{e^x}{x}$, $y^{(n)}$; з) $y = e^x\sin x$, $y^{(n)}$; і) $y = \dfrac{x^3+1}{x^2-3x+2}$, $y^{(n)}$;

к) $y = (x^3+2x+5)e^{3x}$, $y^{(n)}$; л) $y = \ln\left(x^2-3x+2\right)$, $y^{(n)}$;

м) $y = \ln\dfrac{x^2-9}{x^2-3x+2}$, $y^{(n)}$; н) $y = x\ln\left(x^2-9\right)$, $y^{(n)}$;

о) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}}$, $y^{(n)}$;   п) $y=\left(x^2-3x+2\right)\ln(x-1)$, $y^{(n)}$.

4.72. Перевірити здійсненність теореми Ролля для функції $y=4^{\sin x}$ на відрізку $[0,\pi]$.

4.73. Функція $y=|x|$ приймає рівні значення на кінцях відрізка $[-a;a]$. Упевнитися в тому, що похідна від цієї функції ніде на цьому відрізку не обертається в нуль. Пояснити уявну суперечність з теоремою Ролля.

4.74. Не обчислюючи похідну функції

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4),$$

з'ясувати, скільки дійсних коренів має рівняння $f'(x)=0$, і вказати інтервали, в яких вони лежать.

4.74. Написати формулу Лагранжа для функцій

а) $y=\sin 3x$ на відрізку $[x_1;x_2]$;   б) $y=x(1-\ln x)$ на відрізку $[a;b]$;

в) $y=\arcsin 2x$ на відрізку $[x_0;x_0+\Delta x]$.

4.76. Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції, користуючись першою похідною:

а) $y=\dfrac{1}{\ln(x^4+4x^2+10)}$; б) $y=x^2\cdot\sqrt{x^2+1}$;   в) $y=\dfrac{1+2x}{\sqrt{3x^2+4}}$;

г) $y=x^3-3x^2+3x+2$; д) $y=x-\ln\left(1+x\right)$; е) $y=x^2e^{-x}$.

4.77. Знайти найбільше й найменше значення функції на заданому відрізку:

а) $y=x^3-3x^2+6x-2,\quad [-1;1]$;   б) $y=\sqrt{100-x^2},\quad [-6;8]$;

в) $y=\sin x-x,\quad \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$;   г) $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2},\quad [0;1]$;

д) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x},\quad [0;1]$.

4.78. Число 36 розкласти на два такі множники, щоб сума їх квадратів була найменшою.

4.79. Потрібно виготовити ящик з кришкою, об'єм якого дорівнює 72 см^3, причому сторони основи повинні відноситись як 1:2. Які повинні бути розміри всіх сторін, щоб повна поверхня була найменшою?

4.80. Відкритий чан має форму циліндра. При заданому об'ємі V якими повинні бути радіус основи та висота циліндра, щоб його поверхня була найменшою.

4.81. Знайти висоту конуса найбільшого об'єму, який можна вписати в кулю радіусу R.

4.82. Знайти висоту прямого кругового конуса найменшого об'єму, який описано навколо кулі радіусу R.

4.83. Знайти кут при вершині осьового перерізу конуса найменшої бічної поверхні, який описано навколо даної кулі.

4.84. Через дану точку $P(1;4)$ провести пряму так, щоб сума довжин додатних відрізків, що відтинаються нею на координатних осях, була найменшою.

4.84. На еліпсі $2x^2+y^2=18$ задано дві точки $A(1;4)$ і $B(3,0)$. Знайти на цьому еліпсі третю точку C таку, щоб площа трикутника ABC була найбільшою.

4.86. Знайти формули для сум:

а) $2x+4x^3+6x^5+...+2nx^{2n-1}$; б) $1+2\cdot 2^x+3\cdot 2^{2x}+...+n\cdot 2^{(n-1)x}$;

в) $1+2\cdot\sin x+3\cdot\sin^2 x+...+n\cdot\sin^{n-1}x$; г) $1+2x^2+3x^4+..+nx^{2n-2}$;

д) $2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+..+n(n-1)x^{n-2}$;

е) $2x+5x^4+8x^7+...+(3n-1)x^{3n-2}$;

є) $\sin 2x+2\sin 4x+...+n\sin(2nx),\ x\neq k\pi$;

ж) $\operatorname{ch}2x+2\operatorname{ch}4x+...+n\operatorname{ch}(2nx),\ x\neq 0$;

з) $\sin 2x+2^2\sin 4x+...+n^2\sin(2n)x,\ x\neq k\pi$;

і) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+...+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n},\ x\neq 2^n k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

4.87. Довести нерівності:

а) $\frac{a-b}{a}\leq\ln\frac{a}{b}\leq\frac{a-b}{b},\ 0<b<a$;

б) $\frac{a-b}{\cos^2 b}\leq\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}\mathrm{b}\leq\frac{a-b}{\cos^2 a},\ 0<b<a<\frac{\pi}{2}$;

в) $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$ при $b<a$, $n>1$ і $na^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<nb^{n-1}(a-b)$ при $b<a$, $n<1$;

г) $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1},\quad x>1$; д) $2x\cdot\operatorname{arctg}x\geq\ln(1+x^2)$;

е) $\ln(1+x)>\frac{\operatorname{arctg}x}{x+1},\quad x>0$; є) $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x,\ x>0$;

ж) $1+2\ln x\leq x^2,\ x>0$; з) $\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120},\quad x>0$;

і) $\sin x+\operatorname{tg}x>2x+\frac{x^3}{3},\quad 0<x<\pi/2$;

к) $\operatorname{ch}x\leq 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$; л) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1},\ x>0$;

м) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2},\ x>0,\ y>0$;

н) $2\operatorname{arctg}\frac{x+y}{2}<\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y,\ x>0,\ y>0.$

4.88. Довести тотожності:

а) $2\operatorname{arctg} x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x$, $|x| \ge 1$;

б) $3\arccos x - \arccos\left(3x - 4x^3\right) = \pi$, $|x| \le \dfrac{1}{2}$;

4.89. Довести тригонометричні тотожності:

а) $\operatorname{cosec} x + \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x/2)$; б) $\cos 4x - \sin 4x \cdot \operatorname{ctg} 2x = -1$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg} x - \sec x}{\cos x - \operatorname{ctg} x} = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$; г) $\dfrac{1 - 2\sin^2 x}{1 - \sin 4x} = \dfrac{1 + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} 2x}$.

4.90–4.114. Обчислити границі, використовуючи правила Лопіталя.

4.90. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$. **4.91.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$. **4.92.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$.

4.93. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{1 - \cos x}$. **4.94.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2 x - 2\operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$. **4.94.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 - \cos x\right)\operatorname{ctg} x$.

4.96. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin^2 x}$. **4.97.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\operatorname{sh} x}\right)$. **4.98.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

4.99. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2 + 1}{e^x}$. **4.100.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 - \cos x\right)\operatorname{ctg} x$.

4.101. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$. **4.102.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(1 - x\right)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$. **4.103.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-1/x^2}}{x^{100}}$.

4.104. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$. **4.104.** $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^x - 1}$. **4. 106.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{x^x} - 1\right)$.

4. 107. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. **4. 108.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(2 - x\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$. **4. 109.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{tg} x\right)^{\operatorname{tg} 2x}$.

4. 110. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x\right)^{\sin x}$. **4.111.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$. **4.112.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{\sin x}\right)$.

4.113. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}}$. **4.114.** $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{3}{4 + \ln x}}$. **4.114.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

4.116. Дослідити можливість застосування правила Лопіталя для границі $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1 + x + \sin x \cos x}{\left(x + \sin x \cos x\right) e^{\sin x}}$.

4.117. Написати розвинення многочлена $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ за степенями двочлена $(x - 4)$.

4.118. $f(x)$ – многочлен четвертого степеня. Знаючи, що $f(2) = -2,\ f'(2) = 0,\ f''(2) = 2,\ f'''(2) = -12,\ f^{IV}(2) = 24$, обчислити $f(-1),\ f'(0),\ f''(1)$.

4.119. Написати розвинення функції $f(x)=x^x$ за цілими невід’ємними степенями двочлена $x-1$ до члена з $\left(x-1\right)^3$.

4.120. Написати розвинення за цілими невід’ємними степенями змінної x до членів указаного порядку включно наступних функцій:

а) $f\left(x\right)=\sin^2 x$ до x^{2n}; б) $f\left(x\right)=\sin^3 x$ до x^{2n+1};

в) $f\left(x\right)=x\sin x$ до x^{2n}; г) $f(x)=x^3\sin 3x$ до x^{2n};

д) $f\left(x\right)=\sqrt{1-2x}$ до x^n; е) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$ до x^n;

є) $f(x)=\dfrac{1}{x\left(1-x\right)}$ до x^n; ж) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-5}$ до x^n;

з) $y=x\ln\left(1-x^2\right)$ до x^{2n+1}; і) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}}$ до x^n;

к) $f\left(x\right)=\dfrac{x}{e^x-1}$ до x^4; л) $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\ln(1-x)}$ до x^4;

м) $f\left(x\right)=\ln\cos x$ до x^6; н) $f\left(x\right)=\sin\left(\sin x\right)$ до x^3;

о) $f\left(x\right)=\operatorname{tg} x$ до x^5.

4.121. Використовуючи формулу Маклорена, обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-0,5x^2}}{x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$ $(a>0)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{ctg} x\right)$; д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$;

е) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)\cdot e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right]$; є) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

4.122. Використовуючи формулу Тейлора, наближено обчислити з точністю 0,0001:

а) $\sqrt{16,5}$; б) $\sqrt[3]{9}$; в) $\sqrt[4]{80}$; г) $\sqrt[7]{129}$;

д) e; е) $\cos 9^o$; є) $\sin 18^\circ$; ж) $\lg 1,1$.

4.123–4.124. Знайти проміжки опуклості, вгнутості та точки перегину графіка функції.

4.123. $y=x^3-5x^2+3x-5$. **4.124.** $y=\ln\left(1+x^2\right)$. **4.124.** $y=\operatorname{arctg} x-x$.

4.126–4.128. Знайти асимптоти графіків функцій.

4.126. $y=\dfrac{1}{\left(x-2\right)^2}$. **4.127.** $y=e^{\frac{1}{x}}$. **4.128.** $y=\dfrac{2x^2+x+3}{x+6}$.

4.129. Дослідити функції та побудувати їхні графіки:

а) $y=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$ б) $y=x+\frac{1}{x}$;

в) $y=\frac{x^4}{\left(1+x\right)^3}$; г) $y=\frac{x}{1+x^2}$; д) $y=\frac{e^x}{1+x}$;

е) $y=x^2e^{-x}$; є) $y=\frac{\ln x}{x}$; ж) $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

з) $y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$; і) $y=\frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$; к) $y=x+\operatorname{arctg} x$;

л) $y=x\cdot\operatorname{arctg} x$; м) $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$; н) $y=x-\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

о) $y=x^x$; п) $y=(1+x)^{1/x}$.

4.130. Побудувати криві, що задані в параметричній формі:

а) $\begin{cases} x=t+e^{-t}, \\ y=2t+e^{-2t} \end{cases}$. б) $\begin{cases} x=\frac{t^2}{1-t^2}, \\ y=\frac{1}{1+t^2} \end{cases}$.

4.131. Побудувати графіки функцій, що задані в полярній системі координат (ρ,φ) $(\rho\geq 0)$:

а) $\rho=a\sin 2\varphi$ (лемніската); б) $\rho=a+b\cos\varphi$;

в) $\rho=a(1+\cos\varphi)$ (кардіоїда)

Частина 2. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Розділ 5. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

§ 1. Первісна функції та невизначений інтеграл

1. Поняття первісної функції

В механіці ставиться задача: відтворити функцію шляху $S=S(t)$ матеріальної точки на деякому проміжку часу $[t_0,T]$, якщо є відомою функція модуля її миттєвої швидкості $v=v(t)=S'(t)$ на цьому проміжку.

Іншими словами, потрібно відтворити функцію за відомою її похідною.

Нехай множина X є інтервалом (a,b), півінтервалом $[a,b)$ або $(a,b]$, променем $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$ чи $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$ або числовою прямою $(-\infty,+\infty)$.

☝ 🗀**Означення 5.1.** Функцію $F(x)$ називають *первісною функції* $f(x)$ *на множині* X, якщо функція $F(x)$ диференційовна на X і виконується співвідношення $F'(x)=f(x)$.

Приклад 5.1. Наведемо приклади первісних деяких функцій.

1) Функція $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ на $(-1{,}1)$ є первісною для $f(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, оскільки $F'(x)=f(x)$.

2) Функція $F(x)=\cos x$ на $(-\infty,+\infty)$ є первісною для функції $f(x)=-\sin x$, оскільки $F'(x)=f(x)$.

Зауваження 5.1. Якщо $F(x)$ деяка первісна для $f(x)$ на $(a,b]$, а $G(x)=F(x)+C,\quad C=const$, то

$$G'(x)=\left(F(x)+C\right)'=F'(x)=f(x).$$

Отже, $G(x)$ також є первісною для $f(x)$ на $(a,b]$.

☝ **Теорема 5.1.** Якщо дві функції $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – первісні функції $f(x)$ на множині X, то $F_1(x)=F_2(x)+C$ на X, де $C=const$.

Доведення. Маємо:

1) $F_1(x)$ – первісна для $f(x)$, тому (за означенням первісної) $F_1(x)$ – диференційовна на X;

2) аналогічно $F_2(x)$ – диференційовна на X;

3) за умовою і за означенням первісної $F_1'(x)=F_2'(x)=f(x)$ на X.

Отже, за наслідком із теореми про сталість диференційовної на множині X функції, що має на цій множині нульову похідну (*теорема 1.11*), ми отримаємо, що $F_1(x)=F_2(x)+C$, де $C=const$. ■

Наслідок 5.1. Якщо $F(x)$ деяка первісна для $f(x)$ на $(a,b]$, то будь-яку іншу первісну $\Phi(x)$ можна подати у вигляді: $\Phi(x)=F(x)+C$, де $C=const$.

☝ 🗁**Означення 5.2.** Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ на множині X називають *невизначеним інтегралом функції* $f(x)$ *на множині* X і позначають

$$\int f(x)dx.$$

Символ «$\int$» читають як «інтеграл». Функцію $f(x)$ називають *підінтегральною*, а вираз $f(x)dx$ – підінтегральним виразом. Якщо $F(x)$ – одна первісних $f(x)$ на X, то

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Останнє співвідношення слід розуміти як рівність між двома множинами функцій.

Приклад 5.2. Наведемо приклади деяких невизначених інтегралів.

Із прикладу 5.1 випливає:

1) $\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sqrt{1-x^2}+C$ на $(-1;1)$, оскільки для $f(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ первісною є функція $F(x)=\sqrt{1-x^2}$.

2) $\int(-\sin x)dx=\cos x+C$ на $(-\infty;\infty)$, оскільки для $f(x)=-\sin x$ первісною є функція $F(x)=\cos x$.

☝ Основні властивості невизначеного інтеграла

$$1^0\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

$$\left.\begin{array}{l}2^0\ d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx\\ 3^0\quad \int dF(x)=F(x)+C\end{array}\right\}$$

(символ інтеграла і символ диференціала взаємно знищуються, якщо символ інтеграла стоїть перед символом диференціала і навпаки).

$$\left.\begin{array}{l}4^0\ \int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx\\ 5^0\ \int[\alpha f(x)]dx=\alpha\int f(x)dx\end{array}\right\}$$

– властивості лінійності.

Властивість 4^0 має місце в припущенні про існування первісних для функцій $f(x)$ і $g(x)$ на множині X, а в 5^0 – для функції $f(x)$ на X. За таких припущень існує первісна для функцій у лівих частинах цих властивостей.

Рівності у формулах властивостей лінійності є множинними рівностями. Оскільки $\int f(x)dx-$ це сукупність усіх первісних функції на множині X, що мають вигляд $F(x)+C_1$, а $\int g(x)dx-$ сукупність усіх первісних функції $g(x)$ (на тій же множині X) вигляду $G(x)+C_2$, то права частина власти-вості 4^0 являє собою множину функцій вигляду $F(x)\pm G(x)+C_1\pm C_2$. Права частина властивості 5^0 – це множина всіх функцій вигляду $\alpha\big(F(x)+C\big)$. Кожен із елементів множин у обох частинах рівностей 4^0 і 5^0 визначений із точністю до сталої, отже, й ці рівності мають місце з точністю до сталої.

Доведення. Нехай $F(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$ на X.

1^o Із означення первісної отримаємо:

$$\Big(\int f(x)dx\Big)' = \big(F(x)+C\big)' = f(x).$$

2^o Зауважимо спочатку, що має місце формула, яка є наслідком означення первісної та формули диференціала функції:

$$f(x)dx = F'(x)dx = dF(x). \tag{5.1}$$

Із означення невизначеного інтеграла маємо:

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

тоді з урахуванням (5.1) одержуємо:

$$d\Big(\int f(x)dx\Big) = d[F(x)+C] = \big(F'(x)+C'\big)dx = f(x)dx.$$

3^o Безпосередньо з формули (5.1) отримаємо:

$$\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x)+C.$$

4^o Оскільки

$$\big(F(x)\pm G(x)\big)' = F'(x)\pm G'(x) = f(x)\pm g(x),$$

то $F(x)\pm G(x)$ – первісна для $f(x)\pm g(x)$ на X, тому рівність

$$\int\big(f(x)\pm g(x)\big)dx = F(x)\pm G(x)+C = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

є вірною з точністю до сталої.

Властивість 5^o доведіть самостійно✍!■

Таблиця інтегралів

1) $\int 0\cdot dx = C,\ x\in\mathbb{R};$	2) $\int 1\cdot dx = x+C,\ x\in\mathbb{R}\ x\in\mathbb{R};$
3) $\forall\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\ \int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ x\in(0;+\infty);$	
$\forall n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}\ \int x^{n}dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ x\in\mathbb{R};$	
$\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}\ \int x^{n}dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$ на кожному з проміжків $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$;	
4) $\int\dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$ на кожному з проміжків $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$;	
5) $\forall a>0, a\neq 1\ \int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a}+C,\ x\in\mathbb{R};$	6) $\int e^{x}dx = e^{x}+C,\ x\in\mathbb{R};$
7) $\int\cos x\,dx = \sin x + C,\ x\in\mathbb{R};$	8) $\int\sin x\,dx = -\cos x + C,\ x\in\mathbb{R};$

9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ на кожному з проміжків $(-\pi/2+\pi n; \pi/2+\pi n),\ n\in\mathbb{Z}$;	
10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ на кожному з проміжків $(\pi n; \pi+\pi n),\ n\in\mathbb{Z}$;	
11) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C,\ x\in\mathbb{R}$;	12) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C,\ x\in\mathbb{R}$;
13) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,\ x\in\mathbb{R}$;	
14) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$ на кожному з проміжків $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$;	
15) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases},\ x\in\mathbb{R}$;	16) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases},\ x\in(-1;1)$;
17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm 1}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm 1}\right\rvert + C$, для знака мінус на кожному з проміжків $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$, а для знака плюс $x\in\mathbb{R}$;	
18) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$ на кожному з проміжків $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$, $(1;+\infty)$.	

Доведення. Похідна від правих частин, тобто первісних, повинна дорівнювати підінтегральній функції. Основна частина інтегралів цієї таблиці отримана як наслідок із таблиці похідних.

Розглянемо, як одержуються лише деякі з наведених у таблиці інтегралів:

4) $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{|x|}\cdot\operatorname{sgn} x = \frac{1}{x}$ на кожному з проміжків $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$;

17) $$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm 1}\right|\right)' = \frac{\operatorname{sgn}\left(x+\sqrt{x^2\pm 1}\right)}{\left|x+\sqrt{x^2\pm 1}\right|}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2\pm 1}}\cdot 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm 1}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2\pm 1}}{\sqrt{x^2\pm 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2\pm 1}}$$

(для знака мінус на кожному з проміжків $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$, а для знака плюс $x\in\mathbb{R}$);

18) $$\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}\cdot\operatorname{sgn}\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1-x^2}$$

(на кожному з проміжків $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$, $(1;+\infty)$.). ■

Зауваження 5.2. Мають місце формули:

$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ (ареа-синус) $x = \operatorname{sh} y$,	$\operatorname{arch} x = \pm\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad \lvert x\rvert \geq 1$ (ареа-косинус) $x = \operatorname{ch} y$,
$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad \lvert x\rvert < 1$ (ареа-тангенс) $x = \operatorname{th} y$,	$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, \quad \lvert x\rvert > 1$ (ареа-котангенс) $x = \operatorname{cth} y$.

Доведення. Розглянемо першу з наведених формул:

$$\operatorname{arsh} x = y \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{sh} y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \Rightarrow \quad e^y - e^{-y} - 2x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$e^{2y} - 1 - 2xe^y = 0 \ \|\text{заміна: } z = e^y > 0\| \Rightarrow \ z^2 - 1 - 2xz = 0 \ \ \|\frac{D}{4} = x^2 + 1\| \Rightarrow$$

$$z_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2+1} = e^y \ \ \| z_1 = x - \sqrt{x^2+1} < 0 \text{ – зайвий корінь}\| \quad \Rightarrow$$

$$z_2 = e^y = x + \sqrt{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Інші формули вивести самостійно ✍!. ■

Зауваження 5.3.

1) Далі буде доведено, що невизначений інтеграл від неперервної функції існує.

2) Відомо, що всі похідні від елементарних функцій є елементарними функціями, однак первісні не від всіх елементарних функцій будуть елементарними функціями, тобто інтегрування не завжди можна провести в елементарних функціях.

☝	До *інтегралів, що «не беруться» в елементарних функціях,* належать
	1) *інтеграл Пуассона* (інтеграл помилок) $\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ $(x \in \mathbb{R})$, що використовується в теорії ймовірностей, у статистичній фізиці, теорії теплопровідності й дифузії, 2) *інтеграли Френеля* $\int \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx$, $\int \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx$ $(x \in \mathbb{R})$, що використо-вуються в оптиці, 3) *інтегральний логарифм* $\int \frac{dx}{\ln x}$ ($x \in (0;+\infty)$), 4) *інтегральні косинус і синус* $\int \frac{\cos x}{x}dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$ (на кожному з проміжків $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$)

2. Основні методи інтегрування

До основних методів інтегрування належать:

1) метод заміни (підстановки);
2) метод інтегрування частинами.

2.1. Інтегрування підстановкою

☝ **Теорема 5.2** *(інтегрування підстановкою).* Якщо функція t визначена й диференційовна на множині X і має множину визн $T = \phi(X)$, а для функції $g(t)$ на множині T існує первісна $G(t)$, тобто

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

тоді на X функція $g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ має первісну, що дорівнює $G(\phi(t))$, тобто

$$\boxed{\int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + C}$$

Доведення. Оскільки $\int g(t)dt = G(t) + C$ на множині T, то на цій множині $G_t'(t) = g(t)$. Тому при обчисленні похідної від складеної функції, зважаючи на те, що функція $t = \phi(x)$ диференційовна на множині X, отримаємо на X:

$$\left(G\left[\varphi\left(x\right)\right]\right)' = G_t'\left[\varphi\left(x\right)\right]\varphi'\left(x\right) = g\left[\varphi\left(x\right)\right]\varphi'\left(x\right).$$

Отже, за означенням невизначеного інтеграла, матимемо на множині X:

$$G\left[\varphi\left(x\right)\right]dx = \int g\left[\varphi\left(x\right)\right]\varphi'\left(x\right)dx. \quad \blacksquare$$

Якщо потрібно знайти інтеграл $\int f(x)dx$ на множині X, а функцію $f(x)$ можна подати у вигляді $f(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ та, крім того, інтеграл $\int g(t)dt$ на $T = \phi(X)$ обчислюється нескладно, тоді під знаком інтеграла роблять заміну $t = \phi(x)$ і застосовують зазначену формулу. Іноді зручно при обчисленні інтеграла функцію $\varphi(x)$ внести під знак диференціала, представивши підінтегральний вираз на X у вигляді $f(x)dx = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = g(\varphi(x)) \cdot d(\varphi(x))$. Після цього стає зрозумілішою заміна $t = \phi(x)$, а саме:

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x)) \cdot d(\varphi(x)) = \left\| t = \varphi(x) \right\| = \int g(t) \cdot dt = G(t) + C = G(\varphi(x)) + C.$$

Приклад 5.3.

1) $$\int \frac{\text{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x} = \left\| \begin{array}{l} t = \text{arctg}\sqrt{x}, \\ dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \dfrac{dx}{1+x} \end{array} \right\| = 2\int t\,dt = t^2 + C =$$

$$= \text{arctg}^2\sqrt{x} + C, \ x \in (0;+\infty).$$

2) $$\int \frac{dx}{x\ln x} = \left\| \begin{array}{c} t = \ln x, \\ x = e^t, \\ dx = e^t dt \end{array} \right\| = \int \frac{e^t dt}{e^t \cdot t} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C, \ x \in (0;+\infty).$$

Або, інакше:

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \left\| d(\ln x) = \frac{dx}{x} \right\| = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C \ \ (x \in (0;+\infty)).$$

У такому випадку говорять про внесення функції $\ln x$ під диференціал. Ця дія еквівалентна заміні $t = \ln x$, зазначеній вище.

Внесенням під диференціал функції x^2 можна обчислити наступний інтеграл.

3) $\displaystyle\int\frac{xdx}{1+x^4}=\int\frac{\frac{1}{2}d\left(x^2\right)}{1+\left(x^2\right)^2}dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+C,\ x\in\mathbb{R}.$

Має місце формула

$$\boxed{\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C}$$

Доведення. $\displaystyle\int f(ax+b)dx=\left\|\begin{matrix}t=ax+b,\\ x=\frac{1}{a}(t-b),\\ dx=\frac{1}{a}dt\end{matrix}\right\|=\int f(t)\frac{1}{a}dt=\frac{1}{a}\int f(t)dt=$

$$=\frac{1}{a}F(t)+C=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.\ ■$$

Приклад 5.4. Нехай $a>0$.

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)+C=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C,\ x\in\mathbb{R}.$

2) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\frac{1}{a}\cdot a\cdot\arcsin\frac{x}{a}+C=\arcsin\frac{x}{a}+C,\ x\in(-a;a).$

3) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2\pm1}}=\frac{1}{a}\cdot a\cdot\ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2\pm1}\right|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|-$

$\displaystyle-\ln|a|+C=\left\|\begin{matrix}\text{Позначення:}\\ c=C-\ln|a|\end{matrix}\right\|=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+c$ (для знака мінус на кожному з проміжків $(-\infty;-a)$, $(a;+\infty)$), а для знака плюс $x\in\mathbb{R}$.

4) $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a^2}\cdot a\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{a}}\right|+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$ (на кожно-му з проміжків $(-\infty;-a)$, $(-a;a)$, $(a;+\infty)$).

$$\textbf{5)}\ \int\sqrt{a^2-x^2}dx=\left\|\begin{array}{l} x=a\sin t,\quad \dfrac{x}{a}=\sin t,\quad -a\le x\le a,\quad dx=a\cos t\,dt,\\ t=\arcsin\dfrac{x}{a},\quad -\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2},\\ \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{\cos^2 t}=a\cos t \end{array}\right\|=$$

$$=\int a\cos t\cdot a\cos tdt=a^2\int\cos^2 tdt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\left\|\begin{array}{l} t=\arcsin\dfrac{x}{a},\\ \sin 2t=2\sin t\cos t=2\cdot\dfrac{x}{a}\cdot\dfrac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2} \end{array}\right\|=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{a^2}x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C\ \ (x\in[-a;a]).$$

$$\textbf{6)}\ \int\sqrt{x^2+a^2}dx=\left\|\begin{array}{l} x=a\,\mathrm{sh}\,t,\quad \dfrac{x}{a}=\mathrm{sh}\,t,\quad dx=a\,\mathrm{ch}\,t\,dt,\\ t=\mathrm{arsh}\dfrac{x}{a}=\ln\left(\dfrac{x}{a}+\sqrt{\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+1}\right)=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|-\ln|a|,\\ \sqrt{x^2+a^2}=a\,\mathrm{ch}\,t \end{array}\right\|=$$

$$=\int a\,\mathrm{ch}\,t\cdot a\,\mathrm{ch}\,tdt=a^2\int\mathrm{ch}^2 tdt=\frac{a^2}{2}\int(1+\mathrm{ch}\,2t)dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2t\right)+C=\left\|\begin{array}{l} t=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|-\ln|a|,\\ \sin 2t=2\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t=2\cdot\dfrac{x}{a}\cdot\dfrac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2} \end{array}\right\|=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|-\ln|a|+\frac{1}{a^2}x\sqrt{x^2+a^2}\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+C_1\ \left(C_1=C-\frac{a^2}{2}\ln|a|,\ x\in\mathbb{R}\right).$$

Інтеграл $\int\sqrt{x^2-a^2}dx$ за допомогою заміни $x=a\,\mathrm{ch}\,t$ для $x\ge a$ або заміни $x=-a\,\mathrm{ch}\,t$ для $x\le -a$ і Зауваження 5.2 обчислити самостійно ✍. ■

Розширена таблиця основних інтегралів. Нехай $a > 0$

№ пп	$\int f(x)dx = F(x) + C$	№ пп	$\int f(x)dx = F(x) + C$
1.	$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$ $x \in (0;+\infty)$,		$\forall n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $x \in \mathbb{R}$,
	$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ на кожному з проміжків $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$,	2.	$\int \frac{dx}{x-a} = \ln\|x-a\| + C$ на кожному з проміжків $(-\infty;a)$, $(a;+\infty)$,
3.	$\int e^x dx = e^x + C$, $x \in \mathbb{R}$,	4.	$\forall a > 0, a \neq 1$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, x \in \mathbb{R}$,
5.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$, $x \in \mathbb{R}$,	6.	$\int \cos x dx = \sin x + C$, $x \in \mathbb{R}$,
7.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$,	8.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ на кожному з проміжків $(\pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$,
9.	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$, $x \in \mathbb{R}$,	10.	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$, $x \in \mathbb{R}$,
11.	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$, $x \in \mathbb{R}$,	12.	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$ на кожному з проміжків $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$,
13.	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C, \end{cases}$ $x \in \mathbb{R}$	14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a} + C, \\ -\arccos\frac{x}{a} + C, \end{cases}$ $x \in (-1;1)$,
15.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$ на кожному з проміжків $(-\infty;a)$, $(a;+\infty)$,	16.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$ (для знака мінус на кожному з проміжків $(-\infty;a)$, $(a;+\infty)$, а для знака плюс $x \in \mathbb{R}$),
17.	$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$, $x \in [-a;a]$,		
18.	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$ (для знака мінус на кожному з проміжків $(-\infty;-a]$, $[a;+\infty)$, а для знака плюс $x \in \mathbb{R}$).		

2.2. Інтегрування частинами

☝ **Теорема 5.3** *(інтегрування частинами).* Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні на X, тоді

1) із існування на X первісної функції $v(x)\,u'(x)$ випливає існування первісної функції $u(x)\,v'(x)$ на цій множині,

2) має місце формула

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx$$

або рівносильна їй –

$$\boxed{\int u(x)d(v(x)) = u(x)v(x) - \int v(x)d(u(x))}$$

Доведення. Оскільки функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні на X, то мають місце формули

$$d(uv) = vdu + udv \quad \Leftrightarrow \quad udv = d(uv) - vdu.$$

Проінтегруємо обидві частини останньої рівності:

$$\int udv = \int \left(d(uv) - vdu\right).$$

За умовою, існує первісна функції $v(x)\,u'(x)$ на множині , тому існує інтеграл

$$\int v(x)\,u'(x)\,dx = \int v(x)\,d\left(u(x)\right).$$

Із властивості 3^0 випливає, що X

$$\int d(uv) = uv + C\,.$$

Отже, після застосування властивості 4^o отримаємо

$$\underset{\exists}{\int udv} \overset{4^0}{\underset{\Leftarrow}{=}} \underset{(\exists}{\int d(uv)} \underset{\wedge}{-} \underset{\exists)}{\int vdu} \overset{3^0}{=} uv - \int vdu \;.$$

Той факт, що $\exists\int udv$, означає існування первісної функції $u(x)\,v'(x)$. Теорему повністю доведено. ■

☝ Основні класи функцій, що інтегруються частинами

Клас	Види інтегралів	Перша функція-множник	Друга функція-множник під інтегралом	Заміни	Зауваження
А.	$\int P_n(x)\,f(x)dx$ та інтеграли, що зводяться до них	$P_n(x)$ – много-член, $\deg P_n = n$[1]	$f(x) = \begin{bmatrix} \sin(bx), \\ \cos(bx), \\ e^{bx},\, a^{bx}, \\ \dfrac{1}{\cos^2(bx)}, \\ \dfrac{1}{\sin^2(bx)}, \\ \text{і т.п.} \end{bmatrix}$	$u = P_n(x),$ $dv = f(x)dx.$	Формула інтегрува н-ня частинам и застосо-вується n разів

---

[1] Позначення $\deg P(x)$ – це степінь многочлена $P(x)$.

Клас	Види інтегралів	Перша функція-множник	Друга функція-множник під інтегралом	Заміни	Зауваження
Б	$\int g(x)P_n[\varphi(x)]dx$ або $\int g(x)\,\varphi[f(x)]dx$ та інтеграли, що зводяться до них	$g(x)$ – дробово-лінійна функція, зокрема много-член	$\varphi(x)=\begin{bmatrix}\arcsin(bx),\\ \arccos(bx),\\ \mathrm{arctg}(bx),\\ \mathrm{arcctg}(bx),\\ \ln(bx),.\end{bmatrix}$ $P_n(x)-$ много-член, $\deg P_n=n$	$u=P_n\,[\varphi(x)]$, $dv=g(x)dx$, відповідно $u=\varphi[f(x)]$, $dv=g(x)dx$ (або методом підстановки $t=\phi(x)$, відповідно $t=\varphi[f(x)]$)	У першому випадку інтегрувати частинами n разів
В.	$\int e^{ax}\cos bxdx,$ $\int e^{ax}\sin bxdx$ та інтеграли, що зводяться до них			Двічі $u=e^{ax}$, $dv=\cos bx\,dx$ $(dv=\sin bx\,dx)$ або двічі $u=\cos bx$ $(u=\sin bx)$, $dv=e^{ax}dx$	Двічі інтегрувати частинами. Див. приклад 5.5, 3)

Приклад 5.5.

1) Обчислимо інтеграл, що належать до класу А:

$$\int(2x^2+4)\sin^2 xdx=\int(x^2+2)(1-\cos 2x)dx=\frac{x^3}{3}+2x-\int(x^2+2)\cos 2xdx=$$

$$=\left\|\begin{array}{ll} u=x^2+2, & du=2xdx,\\ dv=\cos 2xdx, & v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{array}\right\|=\frac{x^3}{3}+2x-\left[\frac{1}{2}\left(x^2+2\right)\sin 2x-\int x\sin 2xdx\right]=$$

$$=\left\|\begin{array}{ll} u=x, & du=dx,\\ dv=\sin 2xdx, & v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{array}\right\|=\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{2}\left(x^2+2\right)\sin 2x+\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x+\right.$$

$$\left.-\left(-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx\right)\right)=\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{2}\left(x^2+2\right)\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

2) Обчислимо інтеграл із класу Б:

$$\int x\cdot\mathrm{arctg}^2xdx=\left\|\begin{array}{ll} u=\mathrm{arctg}^2x, & du=\frac{2\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}\,dx,\\ dv=x\,dx, & v=x^2/2\end{array}\right\|=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}^2x-\int x^2\frac{\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}dx=0$$

$$=\left\|\begin{array}{ll} u=\operatorname{arctg} x, & du=\dfrac{dx}{1+x^2}, \\ dv=\dfrac{x^2}{1+x^2}dx, & v=\displaystyle\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=x-\operatorname{arctg} x \end{array}\right\|=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}^2x-\left(\operatorname{arctg} x\left(x-\operatorname{arctg} x\right)-\int\frac{x}{1+x^2}dx+\int\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}^2x-x\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}^2x+\int\frac{1/2d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}-\int\operatorname{arctg} x\,d\left(\operatorname{arctg} x\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}^2x-x\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}^2x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{\operatorname{arctg}^2x}{2}+C=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}^2x-x\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$$

3) Позначимо $A=\int e^{ax}\cos bxdx$. Цей інтеграл потрібно двічі інтегрувати частинами, кожен раз уводячи споріднені заміни, тобто або кожен раз експоненційну функцію позначати через $u(x)$, а тригонометричну, помножену на dx, через $dv(x)$, або навпаки:

$$A=\int e^{ax}\cos bxdx=\left\|\begin{array}{ll} u=e^{ax}, & du=ae^{ax}dx, \\ dv=\cos bxdx, & v=\dfrac{1}{b}\sin bx \end{array}\right\|=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx=$$

$$=\left\|\begin{array}{ll} u=e^{ax}, & du=ae^{ax}dx, \\ dv=\sin bxdx, & v=-\dfrac{1}{b}\cos bx \end{array}\right\|=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-$$

$$-\frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx\right)=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}A.$$

Маємо: $A=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}A$, звідки одержимо

$$\boxed{A=\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(b\sin bx+a\cos bx\right)+C}$$

Аналогічно можна отримати (вивести самостійно ✍!)

$$\boxed{\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx-b\cos bx\right)+C}$$

4) Інші випадки

$$I=\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\left\|\begin{array}{ll} u=\sqrt{x^2\pm a^2}, & du=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}, \\ dv=dx, & v=x \end{array}\right\|=x\sqrt{x^2\pm a^2}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=$$

$$=x\sqrt{x^2\pm a^2}-\int\frac{\left(x^2\pm a^2\mp a^2\right)dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=x\sqrt{x^2\pm a^2}-\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx\pm a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=$$

$$=x\sqrt{x^2\pm a^2}-I\pm a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad I=x\sqrt{x^2\pm a^2}-I\pm a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad I=\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C.$$

$$\boxed{\textbf{Інтеграл типу } K_\lambda=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^\lambda}\textbf{, } \lambda\in\mathbb{N}}$$

$$K_\lambda=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^\lambda}=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^\lambda}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\left(a^2+x^2-x^2\right)dx}{\left(x^2+a^2\right)^\lambda}=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{\lambda-1}}-\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^\lambda}\right]=\frac{1}{a^2}\left[K_{\lambda-1}-\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^\lambda}\right]=$$

$$=\left\|\begin{array}{ll} u=x, & du=dx, \\ dv=\dfrac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^\lambda}, & v=\displaystyle\int\frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^\lambda}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+a^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^\lambda}= \\ \multicolumn{2}{l}{=\left\|t=x^2+a^2\right\|=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{dt}{t^\lambda}=\frac{1}{2}\int t^{-\lambda}dt=\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+a^2\right)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}=\frac{1}{2(1-\lambda)}\cdot\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{\lambda-1}}} \end{array}\right\|=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[K_{\lambda-1}-\left(\frac{x}{2(1-\lambda)\left(x^2+a^2\right)^{\lambda-1}}-\frac{1}{2(1-\lambda)}\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{\lambda-1}}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[K_{\lambda-1}-\frac{x}{2(1-\lambda)\left(x^2+a^2\right)^{\lambda-1}}+\frac{1}{2(1-\lambda)}K_{\lambda-1}\right].$$

Отже, отримано рекурентну формулу

$$\boxed{\begin{gathered} K_\lambda = \frac{1}{a^2}\left[\frac{2\lambda-3}{2(\lambda-1)}K_{\lambda-1} + \frac{x}{2(\lambda-1)\left(x^2+a^2\right)^{\lambda-1}}\right], \\ \text{де } K_1 = \int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,\ \lambda\in\mathbb{N} \end{gathered}}$$

3. Інтегрування раціональних функцій

Із курсу алгебри відомо, що будь-який многочлен із дійсними коефіцієнтами можна єдиним чином подати у вигляді добутку незвідних над полем дійсних чисел многочленів.

До *незвідних над полем дійсних чисел многочленів* належать многочлени вигляду

$$x-a, \text{ або } x^2+px+q, \text{ де } D=p^2-4q<0.$$

Тобто, якщо $\deg P(x)=n$, то

$$P(x)=A(x-a_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_s)^{\alpha_s}(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_rx+q_r)^{\lambda_r},$$

де

$$(a_i\neq a_j \ \wedge\ x^2+p_ix+q_i\not\equiv x^2+p_jx+q_j)\quad \forall i\neq j,$$

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_s+2(\lambda_1+\ldots+\lambda_r)=n.$$

Причому, якщо множник має вигляд $(x-a_i)^{\alpha_i}$, то корінь a_i многочлена $P(x)$ має кратність α_i.

Розглянемо многочлен x^2+px+q, де $D=p^2-4q<0$. Встановимо властивості комплексних коренів цього многочлена і зв’язок між його коефіцієнтами й дійсною та уявною частинами коренів. Ці властивості нам знадобляться для доведенні леми 5.2.

Корені многочлена x^2+px+q, де $D=p^2-4q<0$ задовольняють співвідношення:

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{D}}{2}=\frac{-p\pm i\sqrt{4q-p}}{2}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&\operatorname{Re}x_1=\operatorname{Re}x_2=-\frac{p}{2},\\ &\operatorname{Im}x_1=-\operatorname{Im}x_2=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow(a=x_1\Rightarrow x_2=\bar{a}).$$

Отже, незвідний многочлен другого степеня має комплексно спряжені корені a і $\bar{a}$. Якщо відомі комплексно спряжені корені, то за ними можна встановити многочлен другого степеня:

$$a=u+iv\quad(\bar{a}=u-iv),$$

$$u=-\frac{p}{2}\Rightarrow\underline{p=-2u},$$

$$v=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\Rightarrow v=\frac{\sqrt{4q-4u^2}}{2}\Rightarrow v=\sqrt{q-u^2}\Rightarrow\underline{q=u^2+v^2}.$$

🗀**Означення 5.3.** Раціональним дробом називають функцію, що подається дробом, у чисельнику й знаменнику якого стоять многочлени, тобто

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени.

Якщо раціональний дріб має степінь чисельника меншу за степінь знаменника, то такий дріб називають *правильним*, у протилежному випадку – *неправильним*, тобто

$$\deg P(x)<\deg Q(x)\ \Rightarrow R(x)\text{ – правильний,}$$
$$\deg P(x)\ge\deg Q(x)\ \Rightarrow R(x)\text{ – неправильний.}$$

Неправильний дріб можна записати у вигляді суми многочлену й правильного дробу, а саме:

$$R(x)=S(x)+\frac{P(x)}{Q(x)},\text{ де }\deg P(x)<\deg Q(x).$$

Таке перетворення називають *виділенням цілої частини*.

До *простих раціональних дробів* відносяться раціональні дроби вигляду

$$\boxed{\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}\text{ і }\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}},\ \alpha,\lambda\in\mathbb{N}}$$

Тут тричлен у знаменнику другого дробу незвідний, тобто його дискримінант від'ємний.

Лема 5.1. Якщо $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб і $Q(x)$ має корінь $a\in\mathbb{R}$ кратності n, тобто

$$Q(x)=(x-a)^n\varphi(x),\text{ де }\varphi(a)\ne 0,$$

тоді

$$\exists\psi(x)\text{ – многочлен}\wedge\exists k\in\mathbb{N}:\left(k\le n\ \wedge\ \frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{\psi(x)}{(x-a)^{n-k}\varphi(x)}\right),$$

де $A=\frac{P(a)}{\varphi(a)}$, а дріб $\frac{\psi(x)}{(x-a)^{n-k}\varphi(x)}$ є правильним.

Доведення. Розглянемо

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{A}{(x-a)^n}=\frac{P(x)}{(x-a)^n\varphi(x)}-\frac{A}{(x-a)^n}=\frac{P(x)-A\cdot\varphi(x)}{(x-a)^n\cdot\varphi(x)}.$$

Дослідимо чисельник $P(x)-A\varphi(x)$:

$$\left(P(x)-A\varphi(x)\right)\Big|_{x=a}=\left(P(x)-\frac{P(a)}{\varphi(a)}\cdot\varphi(x)\right)\Bigg|_{x=a}=P(a)-\frac{P(a)}{\varphi(a)}\cdot\varphi(a)=0.$$

Висновок: $P(x)-A\varphi(x)$ – многочлен, що має корінь a деякої кратності k, крім того, $1\le k\le n$. Тоді

$$\exists\psi(x)\text{ – многочлен}: P(x)-A\varphi(x)=(x-a)^k\psi(x),$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{A}{(x-a)^n}=\frac{(x-a)^k\psi(x)}{(x-a)^n\varphi(x)}=\frac{\psi(x)}{(x-a)^{n-k}\varphi(x)}.$$

Дріб $\dfrac{\psi(x)}{(x-a)^{n-k}\varphi(x)}$ є правильним, оскільки його отримано після скорочення дробу $\dfrac{P(x)-A\cdot\varphi(x)}{Q(x)}$, для якого

$$\left.\begin{array}{l}\deg\varphi(x)<\deg Q(x),\\ \deg P(x)<\deg Q(x),\end{array}\right\}\Rightarrow \deg(P(x)-A\varphi(x))<\deg Q(x).\blacksquare$$

Лема 5.2. Якщо $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб і $Q(x)$ має комплексно спряжені корені a і $\bar{a}$, де $a=u+iv$, кратності *n,* тобто

$Q(x)=(x^2+px+q)^n\varphi(x)$, де $p=-2u, q=u^2+v^2, \varphi(a)\neq 0, \varphi(\bar{a})\neq 0$,

тоді

$\exists\psi(x)$ – многочлен $\wedge\exists k\in\mathbb{N}$:

$$\left(k\le n\wedge\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}+\frac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{n-k}\varphi(x)}\right),$$

де *M* і *N* – деякі дійсні числа, а дріб $\dfrac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{n-k}\varphi(x)}$ – правильний.

Доведення. Розглянемо

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}=\frac{P(x)-(Mx+N)\cdot\varphi(x)}{(x^2+px+q)^n\varphi(x)}.$$

Знайдемо M і N такі, щоб $P(a)-(Ma+N)\varphi(a)=0$. Оскільки $a=u+iv$, то

$$P(a)-(Mu+iMv+N)\varphi(a)=0,$$

$$Mu+iMv+N=\frac{P(a)}{\varphi(a)}.$$

Оскільки $\dfrac{P(a)}{\varphi(a)}=\operatorname{Re}\dfrac{P(a)}{\varphi(a)}+i\operatorname{Im}\dfrac{P(a)}{\varphi(a)}$, прирівняємо дійсні та уявні частини в останній рівності:

$$\left.\begin{array}{ll}\operatorname{Re}: & Mu+N=\operatorname{Re}\dfrac{P(a)}{\varphi(a)},\\[2ex] \operatorname{Im}: & Mv=\operatorname{Im}\dfrac{P(a)}{\varphi(a)}.\end{array}\right\}$$

Розв’язуємо отриману систему, маємо:

$$\begin{cases}M=\dfrac{1}{v}\operatorname{Im}\dfrac{P(a)}{\varphi(a)},\\[2ex] N=\operatorname{Re}\dfrac{P(a)}{\varphi(a)}-\dfrac{u}{v}\operatorname{Im}\dfrac{P(a)}{\varphi(a)}.\end{cases}$$

Висновок: $P(x)-(Mx+N)\varphi(x)$ – многочлен, у якого a і $\bar{a}$ виступають як корені деякої кратності *k.* Тому

$\exists\psi(x)$ – многочлен:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}=\frac{(x^2+px+q)^k\psi(x)}{(x^2+px+q)^n\varphi(x)}=\frac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{n-k}\varphi(x)}.$$

Доведення того, що дріб $\dfrac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{n-k}\varphi(x)}$ є правильним, здійснюється аналогічно доведенню в лемі 5.1. (Довести самостійно ✍!) ■

Почерговим застосуванням двох наведених лем доводиться наступна теорема.

☝ **Теорема 5.4.** Будь-який правильний раціональний дріб можна єдиним чином розкласти на суму простих раціональних дробів, тобто

$$\frac{P(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}+\ldots+\frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{\left(x-a_1\right)^{\alpha_1}}+\ldots+\frac{A_1^{(s)}}{x-a_s}+\ldots+\frac{A_{\alpha_s}^{(s)}}{\left(x-a_1\right)^{\alpha_s}}+$$

$$+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{M_{\lambda_1}^{(1)}x+N_{\lambda_1}^{(1)}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\lambda_1}}+\ldots+$$

$$+\frac{M_1^{(r)}x+N_1^{(r)}}{x^2+p_rx+q_r}+\ldots+\frac{M_{\lambda_r}^{(r)}x+N_{\lambda_r}^{(r)}}{\left(x^2+p_rx+q_r\right)^{\lambda_r}}, \tag{5.2}$$

де $n<m$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_s+2(\lambda_1+\ldots+\lambda_r)=m$.

Якщо дріб неправильний, то попередньо виділяють у ньому цілу частину.

Для того, щоб записати правильний раціональний дріб у вигляді суми простих дробів, діють таким *алгоритмом*:

Крок 1. Знаменник дробу розкладають на незвідні (над полем дійсних чисел) множники.

Крок 2. Дріб формально розкладають в суму простих дробів за формулою (5.2). При цьому записують у чисельниках усіх дробів невизначені коефіцієнти, для отримання значень яких використовують **метод невизначених коефіцієнтів**. Цей метод полягає в тому, що:

1) суму простих дробів розкладу зводять до спільного знаменника;

2) розглядаючи чисельники заданого й отриманого дробів, прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях змінної x;

3) одержують систему лінійних рівнянь, розв’язуючи яку, знаходять значення невизначених коефіцієнтів.

Прийом викреслювання. Застосуємо *лему 5.1* до правильного раціонального дробу $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого $Q(x)$ має корінь $a\in\mathbb{R}$ кратності n, тобто

$$Q(x)=(x-a)^n\varphi(x),\ \text{де}\ \varphi(a)\neq 0.$$

Згідно з *лемою 5.1*, цей дріб можна представити у вигляді

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{\psi(x)}{(x-a)^{n-k}\varphi(x)},$$

де $A = \frac{P(a)}{\varphi(a)}$, $1 \le k \le n$. Саме той факт, що $A = \frac{P(a)}{\varphi(a)}$, дозволяє отримати *прийом викреслювання* для обчислення невизначених коефіцієнтів. *Сутність цього прийому така*: коефіцієнт *A* визначається викреслюванням у знаменнику дробу $\frac{P(x)}{(x-a)^n \varphi(x)}$ незвідного множника $(x-a)^n$ і підстановкою в отриманий дріб замість x значення *a*.

Розглянемо *найпростіший випадок,* коли знаменник розкладається на незвідні множники вигляду

$$Q(x) = \alpha(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n),$$

а, відповідно, правильний раціональний дріб – на прості дроби вигляду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n}.$$

У цьому випадку всі коефіцієнти A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ почергово знаходяться викреслюванням у знаменнику дробу

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)}$$

відповідного незвідного множника $(x-a_i)$ й підстановкою в той вираз, що залишився:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-a_n)},$$

значення кореня a_i:

$$A_i = \frac{P(a_i)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\cdot\ldots\cdot(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdot\ldots\cdot(a_i-a_n)}.$$

☝ **Твердження 5.1.** Кожен із простих раціональних дробів інтегрується в елементарних функціях.

Доведення. Розглянемо прості раціональні дроби $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$ і $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}$ у випадках, коли $\alpha = 1, \alpha > 1, \lambda = 1, \lambda > 1$ і покажемо в кожному з випадків інтегровність дробів у елементарних функціях.

1) $\int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln|x-a| + C$.

2) $\int \frac{A}{(x-a)^\alpha} dx = A \cdot \frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \frac{A}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}} + C, \quad \alpha > 1$.

Розглянемо інтеграл $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda} dx$. Зробимо спочатку перетворення

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda} dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2}}{(x^2+px+q)^\lambda} dx =$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{\lambda}}dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{\lambda}}.$$

Перший із отриманих інтегралів знаходиться занесенням під диференціал, а другий – виділенням повного квадрату:

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}dx=\frac{M}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^{\lambda}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q\right]^{\lambda}}.$$

Відповідь буде залежати від λ.

3) Якщо $\lambda=1$, то

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

4) Якщо $\lambda\neq1$, то

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}dx=\frac{M}{2(\lambda-1)(x^2+px+q)^{\lambda-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q\right]^{\lambda}}.$$

Інтеграл в правій частині є інтегралом типу $K_{\lambda}=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{\lambda}}$ (див. п. 2.2 цього параграфу), де $t=x+\frac{p}{2}$, $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}=\sqrt{\frac{-D}{4}}$, який інтегрується в елементарних функціях. ■

Наслідком із останніх теореми і твердження є Теорема 5.5.

☝ **Теорема 5.5.** Будь-яка раціональна функція інтегрується в елементарних функціях.

Далі ми будемо намагатися під знаком інтеграла зробити таку заміну, що зводить цей інтеграл до інтеграла від раціональної функції. Тоді, з урахуванням зазначеної теореми, можна буде стверджувати, що відповідна функція інтегрується в елементарних функціях.

Приклад 5.6. Обчислити інтеграл

$$\int\frac{xdx}{\left(x^2+4x+5\right)\left(x-1\right)^2}.$$

Підінтегральний дріб є правильним, розкладемо його в суму простих:

$$\frac{x}{\left(x^2+4x+5\right)\left(x-1\right)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{\left(x-1\right)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4x+5}=$$

$$=\frac{A(x-1)\left(x^2+4x+5\right)+B\left(x^2+4x+5\right)+(Cx+D)\left(x^2-2x+1\right)}{\left(x^2+4x+5\right)\left(x-1\right)^2}.$$

Коефіцієнти обчислюємо методом невизначених коефіцієнтів, тобто прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x в чисельниках першого й останнього дробу:

$$\begin{array}{c|c} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & 3A+B-2C+D=0, \\ x^1 & A+4B+C-2D=1, \\ x^0 & -5A+5B+D=0; \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=1/25, \\ B=1/10, \\ C=-1/25, \\ D=-3/10. \end{cases}$$

Таким чином, отримаємо

$$I=\int\left(\frac{1}{25(x-1)}+\frac{1}{10\left(x-1\right)^2}-\frac{1}{50}\cdot\frac{2x+15}{x^2+4x+5}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{25}\ln|x-1|-\frac{1}{10(x-1)}-\frac{1}{50}\int\frac{(2x+4)+11}{x^2+4x+5}dx=$$

$$=\frac{1}{25}\ln|x-1|-\frac{1}{10(x-1)}-\frac{1}{50}\int\frac{d(x^2+4x+5)}{x^2+4x+5}-\frac{11}{50}\int\frac{dx}{(x+2)^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{10(x-1)}+\frac{1}{50}\ln(x-1)^2-\frac{1}{50}\ln\left(x^2+4x+5\right)-\frac{11}{50}\operatorname{arctg}(x+2)+C=$$

$$=-\frac{1}{10(x-1)}+\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+4x+5}-\frac{11}{50}\operatorname{arctg}(x+2)+C.$$

4. Поняття про раціональну функцію двох змінних

Означення 5.4. *Многочленом степеня* n *від двох аргументів* x *та* y називаюь функцію вигляду:

$$P_n\left(x,y\right)=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{02}y^2+a_{11}xy+...+$$
$$+\underbrace{a_{n0}x^n+a_{(n-1)1}x^{n-1}y+...+a_{0n}y^n}_{n+1\text{ членів}},$$

де остання підкреслена група доданків містить хоча б один ненульовий коефіцієнт.

Означення 5.5. *Раціональною функцією двох аргументів* x *та* y називають функцію вигляду:

$$R\left(x,y\right)=\frac{P_n\left(x,y\right)}{Q_m\left(x,y\right)},$$

де $P_n\left(x,y\right),Q_m\left(x,y\right)$ – многочлени від x,y степенів n,m відповідно.

Твердження 5.2. Якщо $R\left(x,y\right)$ – раціональна функція двох аргументів $x,y,$ а функції $R_1\left(t\right),R_2\left(t\right),R_3\left(t\right)$ – раціональні функції змінної t, то $R\left(R_1\left(t\right),R_2\left(t\right)\right)\cdot R_3\left(t\right)$ є раціональною функцією змінної t.

Дійсно, це твердження випливає з того, що сума, різниця, добуток, частка раціональних дробів є раціональним дробом. ■

5. Інтегрування деяких тригонометричних функцій універсальною тригонометричною підстановкою

Розглянемо інтеграл $\boxed{\int R(\sin x, \cos x)dx}$

Наша мета – підібрати заміну, яка дозволяє звести цей інтеграл до інтеграла від раціональної функції.

Розглянемо *універсальну тригонометричну підстановку*:

$$\boxed{☝\ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi)}$$

Тоді

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = 2\cdot\frac{1}{1+t^2}dt,$$

$$\int R(\sin x, \cos x)dt = \int R\left(\underbrace{\frac{2t}{1+t^2}}_{R_1(t)}, \underbrace{\frac{1-t^2}{1+t^2}}_{R_2(t)}\right)\cdot\underbrace{\frac{2}{1+t^2}}_{R_3(t)}dt = \int R\big(R_1(t), R_2(t)\big)\cdot R_3(t)dt.$$

Застосовуючи *Твердження 5.2*, отримаємо, що підінтегральний вираз є раціональною функцією, яка інтегрується в елементарних функціях (*за теоремою 5.5*).

Приклад 5.7. Обчислимо інтеграл:

$$\int\frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \left\|\begin{matrix} t = tg\,\frac{x}{2}, \\ -\pi < x < \pi \end{matrix}\right\| = \int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{2\cdot\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \int\frac{2dt}{4t - 1 + t^2 + 5 + 5t^2} =$$

$$= \int\frac{2dt}{6t^2 + 4t + 4} = \int\frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{\underline{t^2 + \frac{2t}{3} + \frac{1}{9}} - \frac{1}{9} + \frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{9}}\right)^2} = \frac{3}{3\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\left(t + \frac{1}{3}\right)\cdot 3}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C.$$

6. Інтегрування дробово-лінійних ірраціональностей

🗀**Означення 5.6.** *Дробово-лінійною ірраціональністю* називають функцію вигляду $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+h}}$, де $a,b,c,h\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, $ah-bc\neq 0$.

Інтеграл $\boxed{\int R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+h}}\right)dx}$ зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою заміни

$$☝\ \boxed{t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}}$$

Із заміни отримаємо

$$t^n=\frac{ax+b}{cx+h};\quad x\left(a-ct^n\right)=ht^n-b;\quad x=\frac{b-ht^n}{ct^n-a};$$

$$dx=\frac{-hnt^{n-1}(ct^n-a)-cnt^{n-1}(b-ht^n)}{(ct^n-a)^2}dt=\frac{nt^{n-1}(ah-bc)}{(ct^n-a)^2}dt.$$

Отже,

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}\right)dx=\int R\left(\underbrace{\frac{b-ht^n}{ct^n-a}}_{R_1(t)},\ \underset{R_2(t)}{t}\right)\cdot\underbrace{\frac{nt^{n-1}(ah-bc)}{(ct^n-a)^2}}_{R_3(t)}dt.$$

Застосовуючи *Твердження 5.2*, отримаємо, що підінтегральний вираз є раціональною функцією, яка інтегрується в елементарних функціях (*за теоремою 5.5*).

Приклад 5.8. Обчислимо інтеграл:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=\int\frac{1}{(x+1)(x-1)}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx=\left\|\begin{matrix}t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}, & dx=\dfrac{-6t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2},\\ x=\dfrac{1+t^3}{t^3-1} & \end{matrix}\right\|=$$

$$=\int\frac{t}{\left(\dfrac{1+t^3}{t^3-1}+1\right)\left(\dfrac{1+t^3}{t^3-1}-1\right)}\cdot\frac{-6t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2}=-\frac{3}{2}\int dt=-\frac{3}{2}t+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

7. Інтегрування квадратичних ірраціональностей підстановками Ейлера

🗀**Означення 5.7.** *Квадратичною ірраціональністю* називають функцію вигляду $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Універсальними підстановками, що зводять інтеграли типу $\boxed{\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx}$ до інтегралів від раціональних функцій, є підстановки

Ейлера. Розглянемо їх.

Випадок I: тричлен ax^2+bx+c має один кратний корінь. Тоді $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a\left(x-x_0\right)^2}=\sqrt{a}\cdot\left|x-x_0\right|$ не є ірраціональністю, тому функція $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ є раціональною.

Випадок II: $\underline{D<0\wedge a>0}$. Тоді $ax^2+bx+c>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Якщо $\left(D<0\wedge a<0\right)\Rightarrow ax^2+bx+c<0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\nexists\sqrt{ax^2+bx+c}\in\mathbb{R}$.

Нехай $\underline{D<0\wedge a>0}$, тоді

$\boxed{t=\sqrt{ax^2+bx+c}\pm x\sqrt{a}}$ – *перша підстановка Ейлера.*

Знак «+» або «–» обирається, виходячи зі зручності, що випливає із умови конкретної задачі. Із заміни отримаємо:

$$t\mp x\sqrt{a}=\sqrt{ax^2+bx+c},$$

$$t^2\mp 2tx\sqrt{a}+x^2a=x^2a+bx+c,\quad x\left(b\pm 2t\sqrt{a}\right)=t^2-c,$$

$$x=\frac{t^2-c}{b\pm 2t\sqrt{a}};$$

$$dx=\frac{2t\left(b\pm 2t\sqrt{a}\right)\mp 2\sqrt{a}\left(t^2-c\right)}{\left(b\pm 2\sqrt{a}t\right)^2}dt=\frac{\pm 2\sqrt{a}t^2+2bt\pm 2c\sqrt{a}}{\left(b\pm 2\sqrt{a}t\right)^2}dt;$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\mp\frac{t^2-c}{b\pm 2\sqrt{a}t}\sqrt{a}=\frac{\pm\sqrt{a}t^2+bt\pm c\sqrt{a}}{b\pm 2t\sqrt{a}}.$$

Отже,

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=$$

$$=\int R\left(\underbrace{\frac{t^2-c}{b\pm 2t\sqrt{a}}}_{R_1},\underbrace{\frac{\pm t^2\sqrt{a}+bt\pm c\sqrt{a}}{b\pm 2t\sqrt{a}}}_{R_2}\right)\cdot\underbrace{\frac{2\left(\pm t^2\sqrt{a}+bt\pm c\sqrt{a}\right)}{\left(b\pm 2t\sqrt{a}\right)^2}}_{R_3}dt.$$

Застосовуючи *Твердження 5.2,* отримаємо, що підінтегральний вираз є раціональною функцією, яка інтегрується в елементарних функціях.

У випадку II, враховуючи, що $\underline{\left(D<0\wedge a>0\right)\Leftrightarrow\left(D<0\wedge c>0\right)}$ (доведіть це ✍!), можна зробити іншу заміну:

$\boxed{t=\sqrt{ax^2+bx+c}\ \pm\sqrt{c}}$ – *друга підстановка Ейлера.*

Доведіть самостійно ✍, що ця заміна зводить цей інтеграл до інтеграла від раціональної функції.

Випадок III: $D>0,\ x_1,x_2-\text{корені}$, тобто

$$ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right).$$

Тоді

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}=\left|x-x_1\right|\sqrt{\frac{a\left(x-x_2\right)}{x-x_1}}\ ,$$

а підінтегральна функція

$$R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)=R\left(x,\left|x-x_1\right|\sqrt{\frac{a\left(x-x_2\right)}{x-x_1}}\right)=R_1\left(x,\sqrt{\frac{a\left(x-x_2\right)}{x-x_1}}\right)$$

містить дробово-лінійну ірраціональність. Тому заміною, яка зводить цей інтеграл до інтеграла від раціональної функції, буде

$$t=\sqrt{\frac{a\left(x-x_2\right)}{x-x_1}}.$$

Вона еквівалентна:

$\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c}=t\left(x-x_1\right)}$ – *третя підстановка Ейлера.*

Зауважимо, що остання заміна дає:

$$x=\frac{ax_2-t^2x_1}{a-t^2},\qquad dx=\frac{2ta\left(x_2-x_1\right)}{\left(a-t^2\right)^2}dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\left(\frac{ax_2-t^2x_1}{a-t^2}-x_1\right)=\frac{at\left(x_2-x_1\right)}{a-t^2},$$

$$\int R\left(\frac{ax_2-t^2x_1}{a-t^2},\frac{at\left(x_2-x_1\right)}{a-t^2}\right)\cdot\frac{2at\left(x_2-x_1\right)}{\left(a-t^2\right)^2}dt\,.$$

☝ *Висновок:*

Інтегрування квадратичних ірраціональностей $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

здійснюється *підстановками Ейлера*, які у цьому випадку є універсальними.

Перша підстановка Ейлера: $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm x\sqrt{a}+t$, якщо $a>0$;

друга підстановка Ейлера: $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}+xt$, якщо $c>0$;

третя підстановка Ейлера: $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)$.

Приклад 5.9. Обчислимо інтеграл:

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\left\|\begin{array}{ll}\multicolumn{2}{c}{D<0\Rightarrow\sqrt{x^2+x+1}+x=t,}\\ x^2+x+1=x^2+t^2-2xt, & x=\dfrac{t^2-1}{1+2t},\\ dx=\dfrac{2t\left(1+2t\right)-2\left(t^2-1\right)}{\left(1+2t\right)^2}dt=\dfrac{2t^2+2t+2}{\left(1+2t\right)^2}dt & \end{array}\right\|=$$

$$=\int\frac{2t^2+2t+2}{t\left(1+2t\right)^2}dt=2\int\frac{t^2+t+1}{t\left(1+2t\right)^2}dt=2\int\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{1+2t}+\frac{C}{\left(1+2t\right)^2}\right)dt=\left\|\begin{matrix}A=1,\\ B=-\dfrac{3}{2},\\ C=-\dfrac{3}{2}\end{matrix}\right\|=$$

$$=2\int\frac{dt}{t}+2\int\frac{-\frac{3}{2}dt}{1+2t}+2\int\frac{-\frac{3}{2}dt}{\left(1+2t\right)^2}=2\ln\left|t\right|-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left|1+2t\right|-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-1\right)\cdot\frac{1}{1+2t}+C=$$

$$=2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}+x\right|-\frac{3}{2}\ln\left|1+2\sqrt{x^2+x+1}+2x\right|+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+2\sqrt{x^2+x+1}+2x}+C.$$

8. Інтегрування квадратичних ірраціональностей іншими методами. Підстановка Абеля

При інтегруванні квадратичних ірраціональностей заміни Ейлера є універсальними. Однак недоліком цих замін у окремих випадках є громіздкість раціональних функцій, до яких вони зводять підінтегральну функцію. Тому виникає потреба у вивченні інших методів інтегрування квадратичних ірраціональностей.

Уведемо позначення: $y=ax^2+bx+c,\ Y=\sqrt{y}$, тоді

$$R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)=R\left(x,Y\right).$$

Спочатку покажемо, як звести інтегрування цієї функції до інтегралів типів I, II та III. Це здійснюється за таким алгоритмом:

<u>Крок 1</u>. Всі вирази вигляду Y^2 під знаком функції $R\left(x,Y\right)$ замінимо на відповідний тричлен ax^2+bx+c, тоді функція $R\left(x,y\right)$ набуде вигляду

$$R\left(x,y\right)=\frac{P_1\left(x\right)+P_2\left(x\right)\sqrt{y}}{P_3\left(x\right)+P_4\left(x\right)\sqrt{y}}.$$

<u>Крок 2</u>. Помножимо чисельник та знаменник на $P_3\left(x\right)-P_4\left(x\right)\sqrt{y}$. Після цієї дії замінимо знову $Y^2=y$ на ax^2+bx+c. Це призведе до того, що функція $R\left(x,Y\right)$ перетвориться на суму

$$R\left(x,Y\right)=\underset{\substack{\text{інтегрується}\\ \text{в елементарних}\\ \text{функціях}}}{R_1\left(x\right)}+R_2\left(x\right)\sqrt{y}.$$

Поставимо питання: як далі інтегрувати $R_2\left(x\right)\sqrt{y}$ без замін Ейлера?

<u>Крок 3</u>. Робимо перетворення:

$$R_2\left(x\right)\sqrt{y}=R_2\left(x\right)\frac{y}{\sqrt{y}}=\underbrace{R_2\left(x\right)y}_{R^*\left(x\right)}\frac{1}{\sqrt{y}}=R^*\left(x\right)\frac{1}{\sqrt{y}}.$$

<u>Крок 3.1.</u> Якщо дріб $R^*(x)-$ неправильний, то виділимо цілу частину, отримаємо:

$$R^*(x)=\underset{\substack{\text{многочлен}\\ \text{степені } n}}{P(x)}+\underbrace{R^{**}(x)}_{\substack{\text{правильний}\\ \text{дріб}}},$$

$$\frac{R^*(x)}{\sqrt{y}}=\frac{P(x)}{\sqrt{y}}+\frac{R^{**}(x)}{\sqrt{y}}.$$

<u>Крок 3.2.</u> Якщо дріб $R^*(x)-$правильний, тоді переходимо до наступного кроку.

<u>Крок 4</u>. Правильний дріб $R^*(x)$ або $R^{**}(x)$ розкладаємо на прості дроби $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$ і $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}$. Тоді функція $\frac{R^{**}(x)}{\sqrt{y}}$ перетвориться на лінійну комбінацію функцій

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k\cdot\sqrt{y}} \text{ і } \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^\lambda\cdot\sqrt{y}}.$$

Після реалізації зазначеного алгоритму інтегрування функції $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ звелося до інтегрування раціонального дробу і лінійної комбінації інтегралів таких трьох типів:

інтеграл типу I: $\int\frac{P(x)}{\sqrt{y}}dx$*, де* $\deg P(x)=n$,

інтеграл типу II: $\int\frac{A}{(x-\alpha)^k\cdot\sqrt{y}}dx,\ k\in\mathbb{N};$

інтеграл типу III: $\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+pq+q\right)^\lambda\cdot\sqrt{y}}dx,\ \lambda\in\mathbb{N}.$

Подальшою **метою** буде доведення того, що:

1) інтеграл типу I знаходиться поданням його сумою

$$\int\frac{P(x)}{\sqrt{y}}dx=Q(x)\sqrt{y}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{y}},$$

де $Q(x)-$ многочлен з невизначеними коефіцієнтами такий, що $\deg Q(x)=n-1$, а $\lambda-$ невизначений коефіцієнт;

2) інтеграл типу II знаходиться за допомогою заміни $t=\frac{1}{x-\alpha}$;

3) інтеграл типу III знаходиться за допомогою заміни Абеля та інших.

8.1. *Інтеграл типу* I: $\boxed{I_1=\int\frac{P(x)}{\sqrt{y}}\ dx\text{, де }\deg P(x)=n}$

Спочатку розглянемо інтеграл $V_m=\int\frac{x^m dx}{\sqrt{y}}$ і знайдемо рекурентну формулу щодо його обчислення.

Якщо $m=0$, то

$$V_0=\int\frac{x^0 dx}{\sqrt{y}}=\int\frac{dx}{\sqrt{y}}=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Цей інтеграл знаходиться таким чином. Виділимо повний квадрат у квадратному тричлені ax^2+bx+c:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\underline{x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right).$$

При інтегруванні V_0 можливі такі чотири випадки.

Випадок 1

$$\left.\begin{array}{l}D>0,\\ a>0,\end{array}\right\}\Rightarrow ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right|+C.$$

Випадок 2

$$\left.\begin{array}{l}D<0,\\ a>0,\end{array}\right\}\Rightarrow ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-D}}{2a}\right)^2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right|+C.$$

Випадок 3

$\left.\begin{array}{l}D<0,\\ a<0,\end{array}\right\}\Rightarrow ax^2+bx+c<0\ \forall x\in\mathbb{R}$ – цей випадок не входить до множини визначення квадратичної ірраціональності, тому є неможливим.

Випадок 4

$$\left.\begin{array}{l}D>0,\\ a<0,\end{array}\right\}\Rightarrow ax^2+bx+c=-a\left(\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2 - \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{\left(x + \frac{b}{2a}\right) 2a}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C .$$

Нехай тепер $m \geq 1$. Мета: довести, що інтеграл V_m $(m \in \mathbb{N})$ можна послідовно звести до інтеграла V_0.

По-перше, розглянемо похідну від виразу $x^{m-1}\sqrt{y}$:

$$\left(x^{m-1}\sqrt{y}\right)' = (m-1)x^{m-2}\sqrt{y} + x^{m-1}\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} y' =$$

$$= (m-1)x^{m-2}\sqrt{y} + x^{m-1}\frac{1}{2\sqrt{y}}(2ax + b) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[2(m-1)x^{m-2}\left(ax^2 + bx + c\right) + x^{m-1}(2ax + b)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[x^m(2am - 2a + 2a) + x^{m-1}(2mb - 2b + b) + x^{m-2}(2mc - 2c)\right] =$$

$$= \frac{ma}{\sqrt{y}}x^m + \frac{\left(m - \frac{1}{2}\right)b}{\sqrt{y}}x^{m-1} + \frac{(m-1)c}{\sqrt{y}}x^{m-2},$$

тобто

$$\left(x^{m-1}\sqrt{y}\right)' = \frac{ma}{\sqrt{y}}x^m + \frac{\left(m - \frac{1}{2}\right)b}{\sqrt{y}}x^{m-1} + \frac{(m-1)c}{\sqrt{y}}x^{m-2}.$$

По-друге, проінтегруємо останнє співвідношення, пам'ятаючи, що $V_m = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{y}}$:

$$x^{m-1}\sqrt{y} = maV_m + \left(m - \frac{1}{2}\right)b \cdot V_{m-1} + (m-1)c \cdot V_{m-2}. \qquad (5.3)$$

Нехай $m = 1$, тоді із співвідношення (5.3) отримаємо

$$\sqrt{y} = aV_1 + \frac{bV_0}{2},$$

тобто

$$V_1 = \frac{\sqrt{y}}{a} - \frac{b}{2a}V_0 . \qquad (5.4)$$

Якщо в співвідношенні (5.3) покласти $m = 2$, то одержимо:

$$x\sqrt{y}=2aV_2+\frac{3b}{2}V_1+cV_0,$$

$$2aV_2=x\sqrt{y}-\frac{3b}{2}\frac{\sqrt{y}}{a}+\frac{3b}{2}\frac{b}{2a}V_0+cV_0,$$

$$V_2=\sqrt{y}\left(\frac{x}{2a}-\frac{3b}{4a^2}\right)+V_0\left(\frac{3b^2}{8a^2}+\frac{c}{2a}\right),$$

$$V_2=\sqrt{y}\left(\alpha x+\beta\right)+\lambda V_0, \tag{5.5}$$

де α і β – коефіцієнти, що залежать від a,b,c (випишіть цю залежність ✍**!).**

Покажемо за допомогою принципу математичної індукції, що V_m виражається через V_0 за формулою

$$V_m=\sqrt{y}P_{m-1}\left(x\right)+\lambda_m V_0. \tag{5.6}$$

Рівності (5.4) і (5.5) підтверджують здійсненність (5.6) при $m=1$ і $m=2$ відповідно.

Припустимо, що рівність (5.6) є вірною для усіх m від 1 до n, тоді із (5.3) маємо

$$V_{n+1}=\frac{1}{(n+1)a}\left(x^n\sqrt{y}-\left(n+\frac{1}{2}\right)b\cdot V_n+nc\cdot V_{n-1}\right)\overset{(5.6)}{=}$$

$$=\frac{1}{(n+1)a}\left(x^n\sqrt{y}-\left(n+\frac{1}{2}\right)b\cdot\left(\sqrt{y}P_{n-1}\left(x\right)+\lambda_n V_0\right)+nc\cdot\left(\sqrt{y}P_{n-2}\left(x\right)+\lambda_{n-1}V_0\right)\right)=$$

$$=\sqrt{y}\cdot\underbrace{\frac{1}{(n+1)a}\left(x^n-\left(n+\frac{1}{2}\right)b\cdot P_{n-1}\left(x\right)+nc\cdot P_{n-2}\left(x\right)\right)}_{P_n^*(x)}+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{(n+1)a}\left(nc\cdot\lambda_{n-1}-\left(n+\frac{1}{2}\right)b\cdot\lambda_n\right)}_{\lambda_n^*}\cdot V_0=\sqrt{y}\cdot P_n^*\left(x\right)+\lambda_n^*\cdot V_0.$$

Отже, оскільки інтеграл $\int\frac{P\left(x\right)}{\sqrt{y}}dx$ є лінійною комбінацією інтегралів $V_0,V_1,...,V_n$, то завдяки (5.6) цей інтеграл можна представити у вигляді:

$$☝\ \boxed{\int\frac{P\left(x\right)}{\sqrt{y}}dx=Q\left(x\right)\sqrt{y}+\lambda\underbrace{\int\frac{dx}{\sqrt{y}}}_{V_0}}. \tag{5.7}$$

Тут $\begin{cases}\deg P\left(x\right)=n,\\ \deg Q\left(x\right)=n-1.\end{cases}$

Як визначити коефіцієнти многочлена $Q\left(x\right)$ і значення λ? Для цього спочатку формально інтеграл $\int\frac{P\left(x\right)}{\sqrt{y}}dx$ подають у вигляді (5.7), де многочлен

$Q(x)$ записують із невизначеними коефіцієнтами, так само й коефіцієнт λ вважають невизначеним. Ці невизначені коефіцієнти знаходять за наступним алгоритмом:

1) диференціюють обидві частини (5.7):

$$\frac{P(x)}{\sqrt{y}}=Q'(x)\sqrt{y}+Q(x)\frac{1}{2\sqrt{y}}(2ax+b)+\lambda\frac{1}{\sqrt{y}};$$

2) потім обидві частини отриманої рівності помножують на $\sqrt{y}=\sqrt{ax^2+bx+c}$:

$$P(x)=Q'(x)\cdot\underbrace{y}_{ax^2+bx+c}+\frac{1}{2}Q(x)(2ax+b)+\lambda; \qquad (5.8)$$

3) застосовують метод невизначених коефіцієнтів для пошуку невизначених коефіцієнтів.

Чи буде відповідна система відносно шуканих коефіцієнтів мати єдиний розв'язок? Для відповіді на це питання обчислимо степені обох частин рівності (5.8):

$$\deg P(x)=n;$$

$$\left.\begin{aligned}&\deg Q'(x)=n-2,\\&\deg y=2,\end{aligned}\right\}\Rightarrow \deg Q'(x)y=n;$$

$$\left.\begin{aligned}&\deg Q(x)=n-1,\\&\deg(2ax+b)=1,\end{aligned}\right\}\Rightarrow \deg Q(x)(2ax+b)=n.$$

Отже, обидві частини мають степінь n, тому кількість рівнянь відносно коефіцієнтів при однакових степенях дорівнює $n+1$. Кількість невідомих (невизначених коефіцієнтів) дорівнює $n+1$, де n – це кількість невизначених коефіцієнтів у многочлена $Q(x)$ і ще одне невідоме – це коефіцієнт λ.

Таким чином, інтеграл типу I знаходиться поданням його сумою

$$\int\frac{P(x)}{\sqrt{y}}dx=Q(x)\sqrt{y}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{y}},$$

де $Q(x)-$ *многочлен з невизначеними коефіцієнтами такий, що* $\deg Q(x)=n-1$, *а* $\lambda-$ *невизначений коефіцієнт.*

8.2. *Інтеграл типу* II:

$$\boxed{I_2=\int\frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{y}},\ k\in\mathbb{N}}$$

Припустимо, що $x>\alpha$. Зробимо заміну: ☝ $\boxed{t=\frac{1}{x-\alpha}>0}$. Після чого отримаємо:

$$x=\frac{1+\alpha t}{t}\Rightarrow dx=\frac{-dt}{t^2};$$

$$ax^2+bx+c=\frac{a\left(1+2\alpha t+(\alpha t)^2\right)}{t^2}+\frac{b+\alpha bt}{t}+c=$$

$$=\frac{1}{t^2}\left(t^2\left(a\alpha^2+b\alpha+c\right)+t\left(2a\alpha+b\right)+a\right),\quad t>0;$$

$$I_2=\int\frac{dx}{(x-\alpha)^k\cdot\sqrt{y}}=-\int\frac{t^k\cdot t\cdot dt}{t^2\cdot\sqrt{t^2\left(a\alpha^2+b\alpha+c\right)+t\left(2a\alpha+b\right)+a}}=$$

$$=-\int\frac{t^{k-1}\cdot dt}{\sqrt{t^2\left(a\alpha^2+b\alpha+c\right)+t\left(2\alpha a+b\right)+a}}.$$

Можливі такі випадки:

Випадок 1. Якщо число α не є коренем тричлена ax^2+xb+c, тоді приходимо до інтеграла типу I.

Випадок 2. Число $\alpha-$ корінь тричлена ax^2+xb+c, тоді ($\beta=2\alpha a+b$)

$$I_2=-\int\frac{t^{k-1}dt}{\sqrt{t\beta+a}}=-\int t^{k-1}\underbrace{\sqrt{\frac{1}{\beta t+a}}}_{\text{дробово-лінійна ірраціональність}}dt.$$

Дробово-лінійна ірраціональність в цьому випадку інтегрується підстановкою $z=\sqrt{\frac{1}{\beta t+a}}$.

Отже, інтеграл типу II знаходиться за допомогою заміни $t=\frac{1}{x-\alpha}$.

8.3. *Інтеграл типу* III: $\boxed{I_3=\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda}\sqrt{y}}dx,\ \lambda\in\mathbb{N}}$

Випадок III.1*:* $\boxed{x^2+px+q=ax^2+bx+c=y.\ D=p^2-4q<0}$

У цьому випадку з точністю до сталої

$$I_3=\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}}dx.$$

Представимо чисельник сумою:

$$Mx+N=\frac{M}{2}(2x+p)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right),$$

тоді

$$I_3=\frac{M}{2}\underbrace{\int\frac{(2x+p)dx}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}}}_{I_{3,1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\underbrace{\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}}}_{I_{3,2}}.$$

Обчислимо перший із інтегралів:

$$I_{3,1} = \int \frac{d\left(x^2 + px + q\right)}{\left(x^2 + px + q\right)^{\lambda + \frac{1}{2}}} = \left\| t = x^2 + px + q \right\| =$$

$$= \int \frac{dt}{t^{\lambda + \frac{1}{2}}} = -\frac{t^{-\lambda + \frac{1}{2}}}{\lambda - \frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x^2 + px + q\right)^{\lambda - \frac{1}{2}}} + C.$$

Другий інтеграл $I_{3,2}$ обчислимо за допомогою

заміни Абеля ☝ $\boxed{t = \left(\sqrt{y}\right)' = \left(\sqrt{x^2 + px + q}\right)' = \frac{2x + p}{2\sqrt{y}}} \Rightarrow$

1) $2t\sqrt{y} = 2x + p,$

$$2dx = 2dt\sqrt{y} + 2t\left(\sqrt{y}\right)' dx \Rightarrow dx = \sqrt{y}dt + t^2 dx,$$

$$dx\left(1 - t^2\right) = \sqrt{y}dt,$$

$$\frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{dt}{1 - t^2}; \tag{5.9}$$

2) $2t\sqrt{y} = 2x + p,$

$$4t^2 y = 4x^2 + 4px + p^2. \tag{5.10}$$

Рівність $y = x^2 + px + q$ помножимо на 4 й віднімемо від неї (5.10):

$$-\left.\begin{array}{l} 4y = 4x^2 + 4px + 4q, \\ \underline{4t^2 y = 4x^2 + 4px + p^2,} \end{array}\right\}$$

$$-4t^2 y + 4y = -p^2 + 4q.$$

$$4y\left(1 - t^2\right) = -p^2 + 4q = -D,$$

$$y = \frac{-D}{4} \cdot \frac{1}{(1 - t^2)},$$

$$y^\lambda = \left(\frac{-D}{4}\right)^\lambda \cdot \frac{1}{\left(1 - t^2\right)^\lambda}. \tag{5.11}$$

Підставимо (5.9) і (5.11) в $I_{3.2}$:

$$I_{3,2} = \int \frac{dx}{\left(x^2 + px + q\right)^{\lambda + \frac{1}{2}}} = \int \frac{\left(1 - t^2\right)^\lambda dt}{\left(1 - t^2\right)\left(\frac{-D}{4}\right)^\lambda} = \left(\frac{4}{-D}\right)^\lambda \int \left(1 - t^2\right)^{\lambda - 1} dt,$$

$$\lambda \in \mathbb{N}. \tag{5.12}$$

Підінтегральна функція є многочленом. Тому *доведено інтегровність $I_{3.2}$ в елементарних функціях, а разом із цим і інтегровність у елементарних функціях інтеграла типу III у випадку* III.1.

<u>*Випадок* III.2:</u> $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\underbrace{\frac{b}{a}}_{p'}x+\underbrace{\frac{c}{a}}_{q'}\right)=a\left(x^2+p'x+q'\right)$ і

$$\boxed{x^2+px+q\not\equiv x^2+p'x+q'}$$

Можливі такі два випадки:

III.2.1) $p\neq p'$,

III.2.2) $p=p'$.

Розглянемо <u>III.2.1) $p\neq p'$</u>.

Мета: привести інтеграл III до вигляду $\int\frac{P(t)}{\left(t^2+\gamma\right)^{\lambda}\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt$. Для цього зробимо заміну $x=\frac{\mu t+\nu}{t+1}$, так підібравши коефіцієнти, щоб після підстановки її в обидва квадратні тричлени, коефіцієнти при t стали дорівнювати нулю. Зробимо відповідну підстановку:

$$x^2+px+q=\left(\frac{\mu t+\nu}{t+1}\right)^2+p\frac{\mu t+\nu}{t+1}+q=$$

$$=\frac{t^2\left(\mu^2+p\mu+q\right)+t\left(2\mu\nu+p\mu+p\nu+2q\right)+\left(\nu^2+p\nu+q\right)}{\left(t+1\right)^2}.$$

Для другого тричлена $x^2+p'x+q'$ підстановка дасть аналогічний результат. Коефіцієнти при t повинні дорівнювати нулю, тобто

$$\begin{cases}2\mu\nu+p\left(\mu+\nu\right)+2q=0,\\ 2\mu\nu+p'\left(\mu+\nu\right)+2q'=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mu\nu=\dfrac{p'q-q'p}{p-p'},\\ \mu+\nu=-2\dfrac{q-q'}{p-p'};\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\mu,\nu$ – за теоремою Вієта є коренями рівняння

$$\left(p-p'\right)u^2+2\left(q-q'\right)u+\left(p'q-q'p\right)=0.$$

Якщо $D>0$, то існує розв'язок цього рівняння. Доведемо, що $D>0$:

$$D=4\left(q-q'\right)^2-4\left(p'q-q'p\right)\left(p-p'\right)\overset{?}{>}0,$$

$$D=4\left(q^2-2qq'+q'^2-pp'q+p^2q'+p'^2q-pp'q'\right)=$$

$$=\left(2q+2q'-pp'\right)^2-\left(pp'\right)^2-16qq'+4p'^2q+4p^2q'=$$

$$=\left(2\left(q+q'\right)-pp'\right)^2+p'^2\left(4q-p^2\right)-4q'\left(4q-p^2\right)=$$

$$=\left(2\left(q+q'\right)-pp'\right)^2-\left(4q-p^2\right)\left(4q'-p'^2\right).$$

Для завершення доведення покажемо, що

$$\left(2\left(q+q'\right)-pp'\right)^2>\left(4q-p^2\right)\left(4q'-p'^2\right). \quad (5.13)$$

1) Оскільки x^2+px+q незвідний, то $4q-p^2>0 \Rightarrow 4q>p^2 \Rightarrow q>0$.

2) Оскільки $x^2+p'x+q'$ незвідний, то $4q'-p'^2>0 \Rightarrow 4q'>p'^2 \Rightarrow q'>0$.

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\oplus}{4q'} > \underset{\oplus}{p'^2}, \\ \underset{\oplus}{4q} > \underset{\oplus}{p^2}, \end{array}\right\} \Rightarrow \text{//перемножимо//} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16qq' > \left(pp'\right)^2. \tag{5.14}$$

За нерівністю Коші

$$q+q' \geq 2\sqrt{qq'}. \tag{5.15}$$

Із (5.14) і (5.15) отримаємо:

$$2\left(q+q'\right) \geq 4\sqrt{qq'} > \left|pp'\right| \Rightarrow 2\left(q+q'\right) > pp'.$$

Остання нерівність і нерівності (5.14) і (5.15) дають змогу зробити першу з наступних оцінок ланцюга оцінювань:

$$\left(2\left(q+q'\right)-pp'\right)^2 \geq \left(4\sqrt{qq'}-pp'\right)^2 = 16qq' - 8\sqrt{qq'}\,pp' + \left(pp'\right)^2 =$$

$$= \left(4q-p^2\right)\left(4q'-p'^2\right) + 4qp'^2 + 4q'p^2 - 8pp'\sqrt{qq'} =$$

$$= \left(4q-p^2\right)\left(4q'-p'^2\right) + \underbrace{\left(2p'\sqrt{q}-2p\sqrt{q'}\right)^2}_{\geq 0} \geq \left(4q-p^2\right)\left(4q'-p'^2\right).$$

1) Якщо $q \neq q' \Rightarrow q+q' > 2\sqrt{qq'} \Rightarrow$ перший знак «$\geq$» стане «>».

2) Якщо $q = q' \Rightarrow$ перший знак «$\geq$» тим же і залишиться, а другий стане «>», оскільки, за припущенням $p \neq p'$.

Отже, $\left(2\left(q+q'\right)-pp'\right)^2 > \left(4q-p^2\right)\left(4q'-p'^2\right)$, що й відповідає нерівності (5.13).

Висновок: можна знайти такі μ, ν, для яких інтеграл III зводиться до інтеграла вигляду $\int \frac{P(t)}{\left(t^2+\gamma\right)^\lambda \sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt$ у випадку $p \neq p'$.

Розглянемо <u>III.2.2) $p = p'$</u>. Зробимо заміну: $x = t - \frac{p}{2}$, тоді

$$x^2+px+q = t^2 - tp + \frac{p^2}{4} + pt - \frac{p^2}{2} + q = t^2 - \frac{p^2}{4} + q,$$

$$x^2+p'x+q' = t^2 - \frac{p^2}{4} + q'.$$

Це зводить інтеграл III.2 до інтеграла вигляду $\int \frac{P(t)}{\left(t^2+\gamma\right)^\lambda \sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt$ у випадку $p = p'$.

Тепер розглянемо методи інтегрування інтеграла вигляду

$$\boxed{\int \frac{P(t)}{\left(t^2+\gamma\right)^{\lambda}\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt,\ \lambda\in\mathbb{N}}$$

Правильний раціональний дріб $\frac{P(t)}{\left(t^2+\gamma\right)^{\lambda}}$ розкладаємо на прості, після чого доведеться обчислити інтеграл вигляду $\int \frac{At+B}{\left(t^2+\gamma\right)^{k}\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt,\ k\in\mathbb{N}$:

$$\int \frac{At+B}{\left(t^2+\gamma\right)^{k}\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt=\frac{A}{\alpha}\underbrace{\int \frac{\alpha t\,dt}{\left(t^2+\gamma\right)^{k}\sqrt{\alpha t^2+\beta}}}_{I_{3,3}}+B\underbrace{\int \frac{dt}{\left(t^2+\gamma\right)^{k}\sqrt{\alpha t^2+\beta}}}_{I_{3,4}}.$$

1) $$I_{3,3}=\int \frac{\alpha t\,dt}{\left(t^2+\gamma\right)^{k}\sqrt{\alpha t^2+\beta}}=\left\|\begin{array}{ll} u=\sqrt{\alpha t^2+\beta}, & u^2=\alpha t^2+\beta, \\ t=\sqrt{\dfrac{u^2-\beta}{\alpha}}, & 2udu=2\alpha t\,dt, \\ & \alpha tdt=udu \end{array}\right\|=$$

$$=\int \frac{udu}{\left(\frac{1}{\alpha}u^2-\frac{\beta}{\alpha}+\gamma\right)^{k}u}=\int \frac{du}{\left(\frac{1}{\alpha}u^2-\frac{\beta}{\alpha}+\gamma\right)^{k}}$$ – раціональна функція.

2) $$I_{3,4}=\int \frac{dt}{\left(t^2+\gamma\right)^{k}\sqrt{\alpha t^2+\beta}}=$$

$$=\left\|\begin{array}{ll} \underline{\text{Заміна Абеля}} & \\ u=\left(\sqrt{\alpha t^2+\beta}\right)'=\dfrac{2\alpha t}{2\sqrt{\alpha t^2+\beta}}=\dfrac{\alpha t}{\sqrt{\alpha t^2+\beta}}, & \\ u\sqrt{\alpha t^2+\beta}=\alpha t, & u^2\left(\alpha t^2+\beta\right)=\alpha^2t^2, \\ du\sqrt{\alpha t^2+\beta}+u\cdot udt=\alpha dt, & t^2=\dfrac{u^2\beta}{\left(\alpha^2-u^2\alpha\right)}, \\ \dfrac{dt}{\sqrt{\alpha t^2+\beta}}=\dfrac{du}{\alpha-u^2}, & t^2+\gamma=\dfrac{u^2\beta+\gamma\alpha^2-\gamma\alpha u^2}{\alpha\left(\alpha-u^2\right)} \end{array}\right\|=$$

$$=\int \frac{\left(\alpha^k\left(\alpha-u^2\right)^k\right)du}{\left(\alpha-u^2\right)\left(\left(\beta-\alpha\gamma\right)u^2+\alpha^2\gamma\right)^k}=\int \frac{\alpha^k\left(\alpha-u^2\right)^{k-1}du}{\left(\left(\beta-\alpha\gamma\right)u^2+\alpha^2\gamma\right)^k}.$$

Підінтегральна функція є раціональною, яка інтегрується в елементарних функціях (*за теоремою 5.5*).

Отже, інтеграл типу III знаходиться за допомогою зазначених вище методів.

Зробимо **висновок** щодо інтеграла випадку III.

Інтеграл типу III. $\boxed{I_3=\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda}\sqrt{y}}dx,\ \lambda\in\mathbb{N}}$

Випадок III.1*:* $x^2+px+q=ax^2+bx+c=y$, $D=p^2-4q<0$.

$$I_3=\frac{M}{2}\underbrace{\int\frac{(2x+p)dx}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}}}_{I_{3,1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\underbrace{\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}}}_{I_{3,2}}:$$

$$I_{3.1}=-\frac{1}{\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x^2+px+q\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}+C;$$

$$I_{3,2}=\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}}=\left\|\begin{array}{l}\text{Заміна Абеля:}\\ t=\left(\sqrt{y}\right)'=\left(\sqrt{x^2+px+q}\right)'=\dfrac{2x+p}{2\sqrt{y}}\end{array}\right\|=$$

$$=\int\frac{\left(1-t^2\right)^{\lambda}dt}{\left(1-t^2\right)\left(\frac{-D}{4}\right)^{\lambda}}=\left(\frac{4}{-D}\right)^{\lambda}\int\left(1-t^2\right)^{\lambda-1}dt,\quad\lambda\in\mathbb{N}.$$

Випадок III. 2*:* $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\underset{p'}{\frac{b}{a}}x+\underset{q'}{\frac{c}{a}}\right)=a\left(x^2+p'x+q'\right)$ і

$x^2+px+q\not\equiv x^2+p'x+q'$ розпадається на такі два випадки.

III.2.1) $p\neq p'$ Тут вводиться заміна $x=\frac{\mu t+\nu}{t+1}$ з таким підбором коефіцієнтів, щоб після підстановки її в обидва квадратних тричлени, коефіцієнти при t обернулися в нуль. Після цього інтегрування зводиться до інтеграла вигляду $\int\frac{P(t)}{\left(t^2+\gamma\right)^{\lambda}\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt$.

III.2.2) $p=p'$ Заміна $x=t-\frac{p}{2}$ зводить інтеграл III.2 до інтеграла вигляду $\int\frac{P(t)}{\left(t^2+\gamma\right)^{\lambda}\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt$.

Інтеграл вигляду $\boxed{\int\frac{P(t)}{\left(t^2+\gamma\right)^{\lambda}\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt,\ \lambda\in\mathbb{N}}$

Правильний раціональний дріб $\frac{P(t)}{\left(t^2+\gamma\right)^{\lambda}}$ розкладаємо на прості. Інтегрування зводиться до інтегралів такого вигляду

$$\int \frac{At+B}{\left(t^2+\gamma\right)^k\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt=\frac{A}{\alpha}\underbrace{\int \frac{\alpha t\,dt}{\left(t^2+\gamma\right)^k\sqrt{\alpha t^2+\beta}}}_{I_{3,3}}+B\underbrace{\int \frac{dt}{\left(t^2+\gamma\right)^k\sqrt{\alpha t^2+\beta}}}_{I_{3,4}}:$$

$$I_{3,3}=\int \frac{\alpha tdt}{\left(t^2+\gamma\right)^k\sqrt{\alpha t^2+\beta}}=\left\|\text{Заміна } u=\sqrt{\alpha t^2+\beta}\right\|;$$

$$I_{3,4}=\int \frac{dt}{\left(t^2+\gamma\right)^k\sqrt{\alpha t^2+\beta}}=\left\|\begin{array}{l}\text{Заміна Абеля}\\ u=\left(\sqrt{\alpha t^2+\beta}\right)'=\frac{\alpha t}{\sqrt{\alpha t^2+\beta}}\end{array}\right\|.$$

Тепер проілюструємо методи обчислення інтегралів типу I, II і III, що містять квадратичну ірраціональність, на прикладах.

Приклад 5.10

1.10.1. *Інтеграл типу* I. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

Представимо цей інтеграл у вигляді суми

$$\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=(Ax+B)\sqrt{x^2+2x+2}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Продиференціюємо останню рівність:

$$\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}=A\sqrt{x^2+2x+2}+(Ax+B)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}},$$

помножимо обидві частини на $\sqrt{x^2+2x+2}$:

$$x^2-x+1=A\left(x^2+2x+2\right)+(Ax+B)(x+1)+\lambda,$$

застосуємо метод невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 2A=1,\\ x^1 & 2A+A+B=-1,\\ x^0 & 2A+B+\lambda=1; \end{array}\Rightarrow\begin{cases} A=\frac{1}{2},\\ B=-1-\frac{3}{2}=\frac{-5}{2},\\ \lambda=1-1+\frac{5}{2}=\frac{5}{2}. \end{cases}$$

Звідки отримаємо

$$\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C.$$

1.10.2. *Інтеграл типу* II. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}.$$

Цей інтеграл обчислимо за допомогою заміни $t=\dfrac{1}{x-1}$:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}} = \left\| \begin{array}{l} t=\dfrac{1}{x-1}>0, \quad x=\dfrac{1}{t}+1>1, \quad dx=-\dfrac{1}{t^2}dt, \\ \sqrt{x^2-2x-1}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{t}+1\right)^2-2\left(\dfrac{1}{t}+1\right)-1}=\dfrac{\sqrt{1-2t^2}}{t} \end{array} \right\| =$$

$$=\int \frac{t^3\cdot\left(\dfrac{-1}{t^2}\right)dt\cdot t}{\sqrt{1-2t^2}}=-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{1-2t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{-2t^2dt}{\sqrt{1-2t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{-2t^2+1-1}{\sqrt{1-2t^2}}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{1-2t^2}-\frac{1}{\sqrt{1-2t^2}}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{1-\left(t\sqrt{2}\right)^2}dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-\left(t\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{t\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-2t^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{t\sqrt{2}}{1}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{t\sqrt{2}}{1}+C=\frac{t}{4}\sqrt{1-2t^2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}t+C=$$

$$=\frac{1}{4(x-1)}\sqrt{1-\frac{2}{(x-1)^2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x-1}+C=\frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{4(x-1)^2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x-1}+C.$$

1.10.3 *Інтеграл типу* III. *Випадок* III.1. Обчислити інтеграл

$$\int\frac{dx}{\left(2x^2-x+2\right)^{\frac{7}{2}}}.$$

Застосуємо формулу (5.12), яка була отримана за допомогою заміни Абеля:

$$\int\frac{dx}{\left(2x^2-x+2\right)^{\frac{7}{2}}}=\frac{1}{2^{\frac{7}{2}}}\int\frac{dx}{\left(x^2-\dfrac{x}{2}+1\right)^3\sqrt{x^2-\dfrac{x}{2}+1}}=$$

$$=\left\| \begin{array}{l} \lambda=3, \quad p=-\dfrac{1}{2}, \quad q=1, \quad D=\dfrac{1}{4}-4=-\dfrac{15}{4}. \\ \text{Заміна Абеля:} \quad t=\left(\sqrt{x^2-\dfrac{x}{2}+1}\right)'=\dfrac{2x-\dfrac{1}{2}}{2\sqrt{x^2-\dfrac{x}{2}+1}} \end{array} \right\|=$$

$$=\left\|\frac{1}{2^{\frac{7}{2}}}\left(\frac{4}{-D}\right)^{\lambda}\int\left(1-t^2\right)^{\lambda-1}dt\right\|=\frac{1}{2^{\frac{7}{2}}}\left(\frac{4\cdot 4}{15}\right)^{3}\int\left(1-t^2\right)^{2}dt=\frac{2^{12}}{2^{\frac{7}{2}}\cdot 15^3}\int\left(1-2t^2+t^4\right)dt=$$

$$=\frac{2^9}{\sqrt{2}\cdot 15^3}\left(t-2\cdot\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)+C=$$

$$=\frac{2^9}{\sqrt{2}\cdot 15^3}\left(\frac{x-0,25}{\sqrt{x^2-0,5x+1}}-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{x-0,25}{\sqrt{x^2-0,5x+1}}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{x-0,25}{\sqrt{x^2-0,5x+1}}\right)^5\right)+C.$$

1.10.4. *Інтеграл типу* III. *Випадок* III.2. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{x+3}{\left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^2+x+1}}dx$.

Заміна: $x=\frac{\mu t+\nu}{t+1}\Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2\pm x+1=\left(\frac{\mu t+\nu}{t+1}\right)^2\pm\left(\frac{\mu t+\nu}{t+1}\right)+1=$$

$$=\frac{t^2\left(\mu^2\pm\mu^2+1\right)+t\left(2\mu\nu\pm\mu\pm\nu+2\right)+\left(\nu^2\pm\nu+1\right)}{\left(t+1\right)^2}.$$

Прирівнюємо до нуля коефіцієнти при t:

$$\begin{cases}2\mu\nu+\mu+\nu+2=0,\\ 2\mu\nu-\mu-\nu+2=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\left(\mu+\nu\right)=0,\\ 4\mu\nu+4=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mu=-\nu,\\ \mu^2=1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mu=\pm 1\\ \nu=\mp 1\end{cases}.$$

Нехай $\mu=1,\nu=-1$, тоді

$$x=\frac{t-1}{t+1}\Rightarrow dx=\frac{2dt}{\left(t+1\right)^2},$$

$$x^2+x+1=\frac{3t^2+1}{\left(t+1\right)^2},\quad x^2-x+1=\frac{t^2+3}{\left(t+1\right)^2};$$

$$I=\int\frac{\left(\frac{t-1}{t+1}+3\right)\frac{2}{\left(t+1\right)^2}}{\frac{t^2+3}{\left(t+1\right)^2}\sqrt{\frac{3t^2+1}{\left(t+1\right)^2}}}dt=2\int\frac{4t+2}{\left(t^2+3\right)\sqrt{3t^2+1}}dt=$$

$$=8\cdot\underbrace{\int\frac{t\,dt}{\left(t^2+3\right)\sqrt{3t^2+1}}}_{1^{\times}\left(\text{заміна}\left[u=\sqrt{t^2+3}\right]\right)}+4\cdot\underbrace{\int\frac{dt}{\left(t^2+3\right)\sqrt{3t^2+1}}}_{2^{\times}\left(\text{заміна}\left[u=\left(\sqrt{t^2+3}\right)'=\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}\right]\right)}=$$

$$=\sqrt{8}\cdot\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}\cdot|1-x|}+\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2}\cdot(1+x)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{2}\cdot(1+x)}\right|+C.$$

Детальніше зупинимось на обчисленні двох виділених інтегралів:

$$1^{\times})\ \int\frac{t\,dt}{\left(t^2+3\right)\sqrt{3t^2+1}}=\left\|\begin{array}{l} u=\sqrt{3t^2+1},\\ u^2=3t^2+1,\\ u\,du=3tdt,\\ t^2=\dfrac{1}{3}\left(u^2-1\right)\end{array}\right\|=\int\frac{u\,du}{u\left(u^2+8\right)}=\int\frac{du}{u^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{2\sqrt{2}}+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3t^2+1}{8}}+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2+1}{8}}+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}\cdot|1-x|}+C.$$

$$2^{\times})\ \int\frac{dt}{\left(t^2+3\right)\sqrt{3t^2+1}}=$$

$$=\left\|\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{u=\left(\sqrt{3t^2+1}\right)'=\dfrac{3t}{\sqrt{3t^2+1}}-\text{заміна Абеля},}\\ 3t=u\sqrt{3t^2+1}, & u\sqrt{3t^2+1}=3t,\\ du\sqrt{3t^2+1}+u\cdot udt=3dt, & 3u^2t^2+u^2=9t^2,\\ dt\left(3-u^2\right)=du\sqrt{3t^2+1}, & t^2=\dfrac{u^2}{3\left(3-u^2\right)},\\ \dfrac{dt}{\sqrt{3t^2+1}}=\dfrac{du}{3-u^2}, & t^2+3=\dfrac{27-8u^2}{3\left(3-u^2\right)}\end{array}\right\|=$$

$$=\int\frac{3du\left(3-u^2\right)}{\left(3-u^2\right)\left(27-8u^2\right)}=\int\frac{3du}{27-8u^2}=\int\frac{3du}{\left(3\sqrt{3}\right)^2-\left(2\sqrt{2}u\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}u}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}u}\right|+C=\left\|u=\frac{3t}{\sqrt{3t^2+1}},\ t=\frac{1+x}{1-x}\right\|=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2}\cdot(1+x)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{2}\cdot(1+x)}\right|+C.$$

9. Інтегрування біноміальних диференціалів

Біноміальними називають *диференціали* вигляду $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, де $m,n,p\in\mathbb{Q},\quad a,b\in\mathbb{R}$. Розглянемо інтеграл від біноміального диференціала:

$$\boxed{\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx}$$

Випадок перший: $p\in\mathbb{Z}$. Найменший спільний знаменник дробів m,n позначимо через λ, тобто $m=\frac{\alpha}{\lambda};\quad n=\frac{\beta}{\lambda}$. Заміна: $t=\sqrt[\lambda]{x}$ приводить до

$$x^m=t^\alpha,\quad x^n=t^\beta,$$

$$x=t^\lambda\Rightarrow dx=\lambda t^{\lambda-1}dt.$$

Звідси

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\int t^\alpha\left(a+bt^\beta\right)^p\lambda t^{\lambda-1}dt\quad(\alpha,\beta,p,\lambda\in\mathbb{Z}).$$

Отже, $\boxed{\text{заміна}\quad t=\sqrt[\lambda]{x}}$ зводить біноміальний диференціал в цьому випадку до інтеграла від раціональної функції.

Перед тим, як перейти до розгляду наступних випадків, зробимо допоміжну заміну $z=x^n$. Тоді

$$x^m=z^{\frac{m}{n}},\quad x=\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}},\quad dx=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz,$$

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\int z^{\frac{m}{n}}\left(a+bz\right)^p\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz=\frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1}\left(a+bz\right)^p dz=$$

$$=\left\|q=\frac{m+1}{n}-1\right\|=\frac{1}{n}\int z^q\left(a+bz\right)^p dz.$$

Можливі два випадки $\left|\begin{array}{l}\to p+q\in\mathbb{Z},\\ \to q\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$

Випадок другий: $q\in\mathbb{Z}$. Нехай $\nu-$знаменник дробу p, тобто $p=\frac{\alpha}{\nu},\quad\alpha\in\mathbb{Z}$. Тоді

$$\int\left(a+bz\right)^p z^q dz=\int\sqrt[\nu]{\left(a+bz\right)^\alpha}z^q dz=\int R\left(z,\sqrt[\nu]{a+bz}\right)dz.$$

Підінтегральна функція містить дробово-лінійну ірраціональність, тому $\boxed{\text{заміна } t=\sqrt[\nu]{a+bz}}$ зводить цей інтеграл до інтеграла від раціональної функції.

Випадок третій: $p+q\in\mathbb{Z}$. Нехай $\nu-$знаменник дробу p, тобто $p=\frac{\alpha}{\nu},\quad\alpha\in\mathbb{Z}$. Тому підінтегральна функція має вигляд

$$(a+bz)^p z^q = \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+q} = \sqrt[\nu]{\left(\frac{a+bz}{z}\right)^{\alpha}} z^{p+q} = R\left(z, \sqrt[\nu]{\frac{a+bz}{z}}\right),$$

і вона містить дробово-лінійну ірраціональність, тому заміна $t=\sqrt[\nu]{\dfrac{a+bz}{z}}$, або те саме $\boxed{t=\sqrt[\nu]{az^{-1}+b}}$ зводить цей інтеграл до інтеграла від раціональної функції.

Зауваження 5.4. Ще *І. Ньютону* було відомо, яким чином звести інтеграл від біноміального диференціала до інтеграла від раціональної функції, але не було відомо, що тільки в зазначених трьох випадках можливо здійснити таке зведення. Цей факт довів *П.Л.Чебишев* в середині 19 ст.

☝ *Підсумок*: інтегрування біноміального диференціала за допомогою замін І. Ньютона–П.Л. Чебишева:

випадок перший:	$\underline{\underline{p\in\mathbb{Z}}}$, λ – спільний знаменник дробів m,n, тоді	заміна $t=\sqrt[\lambda]{x}$
випадок другий:	$q\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{m+1}{n}-1\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}}}$, ν – знаменник дробу p, тоді заміни $z=x^n$ і $t=\sqrt[\nu]{a+bz}$, тобто	$t=\sqrt[\nu]{a+bx^n}$
випадок третій:	$p+q\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \left(\frac{m+1}{n}+p-1\right)\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}}}$, ν – знаменник дробу p, тоді заміни $z=x^n$ і $t=\sqrt[\nu]{az^{-1}+b}$, тобто	$t=\sqrt[\nu]{ax^{-n}+b}$

Приклад 5.11. Обчислити інтеграл

$$I=\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}=\int x^{-3}\left(1+x^{-1}\right)^{\frac{-1}{5}}dx.$$

Маємо:

$$\left.\begin{array}{l} m=-3, n=-1, \\ p=-\dfrac{1}{5}, \\ a=1, b=1, \end{array}\right\} \Rightarrow p\notin\mathbb{Z},\ \frac{m+1}{n}=\frac{-3+1}{-1}=2\in\mathbb{Z}\Rightarrow$$

випадок другий, $\nu=5$. Зробимо заміну: $t=\sqrt[5]{1+x^{-1}}$. Отримаємо:

$$t^5=1+x^{-1},$$

$$x=\frac{1}{t^5-1}\Rightarrow dx=\frac{-5t^4}{\left(t^5-1\right)^2}dt,$$

$$I=\int\left(t^5-1\right)^3\frac{1}{t}\frac{-5t^4}{\left(t^5-1\right)^2}dt=-5\int t^3\left(t^5-1\right)dt=-5\frac{t^9}{9}+5\frac{t^4}{4}+C=$$

$$=-\frac{5}{9}\sqrt[5]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^9}+\frac{5}{4}\sqrt[5]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4}+C.$$

10. Інтегрування деяких тригонометричних функцій без використання універсальної тригонометричної підстановки

Розглянемо $R(\sin x,\cos x)$. Позначимо $u=\sin x; v=\cos x$, тоді будемо розглядати $R(u,v)$.

Спочатку зробимо деякі зауваження і допоміжні викладки. Нехай $R(-u,v)=R(u,v)$, тобто функція $R(u,v)$ є парною відносно змінної u. У цьому випадку

$$R(u,v)=R_1\left(u^2,v\right),$$

тобто $R(u,v)$ містить лише парні степені u.

Якщо $R(-u,v)=-R(u,v)$ (тобто функція є непарною відносно u), тоді розглянемо $\frac{R(u,v)}{u}$ і отримаємо:

$$\frac{R(-u,v)}{-u}=\frac{R(u,v)}{u}.$$

Тобто, функція $\frac{R(u,v)}{u}$ є парною за змінною u. Тому

$$\frac{R(u,v)}{u}=R_1\left(u^2,v\right)\Rightarrow R(u,v)=uR_1\left(u^2,v\right).$$

Тепер перейдемо до безпосередніх викладок.

Випадок перший: $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ – функція непарна відносно $\sin x$, тоді з попередніх міркувань маємо:

$$R(\sin x,\cos x)dx=R_1\left(\sin^2 x,\cos x\right)\sin x dx=-R_1\left(\underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x},\cos x\right)d\left(\cos x\right)=$$

$$=-R_1\left(1-\cos^2 x,\cos x\right)d\left(\cos x\right).$$

Отже, заміна $t=\cos x$ зводить цей інтеграл до інтеграла від раціональної функції.

Випадок другий: $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ є аналогічним першому, тому заміна $t=\sin x$ буде зводити цей інтеграл до інтеграла від раціональної функції.

Випадок третій: $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, тобто $R(-u,-v)=R(u,v)$. Зробимо перетворення

$$R(u,v)=R\left(\frac{u}{v}v,v\right)=R^*\left(\frac{u}{v},v\right).$$

Оскільки $R(-u,-v)=R(u,v)$, отримаємо

$$R^*\left(\frac{u}{v},v\right)=R^*\left(\frac{-u}{-v},-v\right)=R^*\left(\frac{u}{v},-v\right),$$

Отже, функція $R^*\left(\frac{u}{v},v\right)$ є парною за другою змінною, тому

$$R^*\left(\frac{u}{v},v\right)=R_1^*\left(\frac{u}{v},v^2\right)=R_1^*\left(\frac{\sin x}{\cos x},\cos^2 x\right)=R_1^*\left(\operatorname{tg}x,\ \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right).$$

Під знаком інтеграла $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ введемо заміну $t=tg\ x$ і отримаємо

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R_1^*\left(\operatorname{tg}x,\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)dx=$$

$$=\left\|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg}x, \\ dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)dx=\left(1+t^2\right)dx, \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \end{array}\right\|=\int R_1^*\left(\underset{R_{1,1}}{t}\ ,\underset{R_{1,2}}{\frac{1}{1+t^2}}\right)\underset{R_{1,3}}{\frac{1}{1+t^2}}dt\,.$$

Підінтегральна функція, згідно з *твердженням 5.2*, є раціональною. Отже, заміна $t=\operatorname{tg}x$ у третьому випадку зводить заданий інтеграл до інтеграла від раціональної функції.

☝ *Висновок.* У випадках, коли підінтегральна функція є раціональною функцією відносно $\sin x$ і $\cos x$, доцільно використовувати такі заміни:

Випадок перший: $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ $\Rightarrow$ заміна $t=\cos x$.
Випадок другий: $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ $\Rightarrow$ заміна $t=\sin x$.
***Випадок третій*:** $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ $\Rightarrow$ заміна $t=\operatorname{tg}x$

Приклад 5.12. Підінтегральна функція в інтегралі $\int\frac{\sin^3 xdx}{2\cos x+\sin^2 x+2}$ є непарною відносно синуса, тому зручно застосовувати першу з наведених замін

$$I=\int\frac{\sin^2 x\sin xdx}{2\cos x+\sin^2 x+2}=\left\|\begin{array}{l} t=\cos x. \\ dt=-\sin x\,dx, \\ \sin^2 x=1-\cos^2 x= \\ \quad =1-t^2 \end{array}\right\|=\int\frac{-(1-t^2)dt}{2t+(1-t^2)+2}=$$

$$=\int\frac{(t^2-1)dt}{-t^2+2t+3}=-\int\frac{(t-1)(t+1)}{(t+1)(t-3)}dt=-\int\frac{t-1}{t-3}dt=-\int\frac{(t-3)+2}{t-3}dt=$$

$$=-\int\left(1+\frac{2}{t-3}\right)dt=-t-2\ln|t-3|+C=-\cos x-2\ln(\cos x-3)+C\,.$$

Інтеграл вигляду $\boxed{\int\sin^{\nu}x\cos^{\mu}xdx,\ \textbf{де}\ \mu,\nu\in Q,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}$

Уведемо заміну $z=\sin^2 x$, тоді

$$\sin x=z^{\frac{1}{2}};\quad \cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-z}=(1-z)^{\frac{1}{2}},$$

$$x=\arcsin\left(z^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$dx=\frac{1}{2\sqrt{z}\sqrt{1-z}}dz=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz,$$

звідки

$$\int\sin^{\nu}x\cos^{\mu}xdx=\int z^{\frac{\nu}{2}}(1-z)^{\frac{\mu}{2}}\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz=\frac{1}{2}\int z^{\frac{\nu-1}{2}}(1-z)^{\frac{\mu-1}{2}}dz\,.$$

Отже, якщо $\frac{\nu-1}{2}\in\mathbb{Q}\wedge\frac{\mu-1}{2}\in\mathbb{Q}$, тоді заданий інтеграл зведено до біноміального диференціала:

$$p=\frac{\mu-1}{2};n=1;m=\frac{\nu-1}{2};q=\frac{m+1}{n}-1=\frac{\frac{\nu-1}{2}+1}{1}-1=\frac{\nu-1}{2}\Rightarrow$$

$$q=\frac{\nu-1}{2};\ p+q=\frac{\mu+\nu}{2}-1.$$

Таким чином, інтеграл $\int\sin^{\nu}x\cos^{\mu}xdx,$ де $\mu,\nu\in\mathbb{Q},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

☝ зводиться до інтеграла від раціональної функції, якщо

I. $p=\frac{\mu-1}{2}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\mu-$ *непарне*,

II. $q=\frac{\nu-1}{2}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\nu-$ *непарне*,

III. $p+q=\frac{\mu+\nu}{2}-1\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\mu+\nu-$ *парне*.

Зазначене відповідає загальному випадку. Зупинимося на окремих випадках, що зустрічаються найчастіше.

$$\mu,\nu\in\mathbb{Z}\left|\begin{array}{l}\to\text{а)}\ \mu\vee\nu-\text{непарне,}\\ \to\text{б)}\ \mu\wedge\nu-\text{парні,}\\ \to\text{в)}\ \mu,\nu\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}-\text{парні.}\end{array}\right.$$

а) $\underline{\mu\vee\nu-\text{непарне}}$.

Якщо $\mu=2n+1$ – непарне, тоді робиться заміна $t=\cos x$, оскільки

$$\int \sin^{2n+1} x \cos^{\mu} x dx = \int \sin^{2n} x \cos^{\mu} x \underbrace{\sin x dx}_{-d(\cos x)} = -\int \left(\sin^2 x\right)^n \cos^{\mu} x d(\cos x) =$$

$$= -\int \left(1-\cos^2 x\right)^n \cos^{\mu} x d(\cos x) = \|t=\cos x\| = -\int \left(1-t^2\right)^n t^{\mu} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $\nu -$ непарне, аналогічно, робиться заміна $t = \sin x$.

б) Якщо $\underline{\mu \wedge \nu - \text{парні}}$, тоді підінтегральна функція є раціональною функцією двох змінних $u = \sin x, v = \cos x$, яка задовольняє рівність

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).$$

Це відповідає випадку третьому для інтеграла $\int R(\sin x, \cos x) dx$. Тобто робимо заміну $t = \operatorname{tg} x$.

в) Випадок в) є частковим підвипадком б). Однак інтегрування тут можна здійснювати в інший спосіб.

Якщо $\mu, \nu \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} - \text{парні}$, то $\mu = 2n,\ \nu = 2m,\ n, m \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Застосовуємо формули:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}. \qquad (5.16)$$

Якщо $\mu \geq \nu$, то

$$\sin^{2n} x \cos^{2m} x = \left(\sin x \cos x\right)^{2m} \left(\sin x\right)^{2(n-m)} = \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^{2m} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^{n-m}.$$

Якщо $\nu > \mu$, то $\sin^{2n} x \cos^{2m} x = \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^{2n} \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^{m-n}$. Після розкрит-тя дужок отримаємо вираз вигляду:

$$\sum_{\nu', \mu'} C_{\nu', \mu'} \sin^{\nu'} 2x \cos^{\mu'} 2x, \qquad (5.17)$$

де $\nu' + \mu' \leq n + m = \frac{\nu + \mu}{2}$. Тобто після такої дії степінь знизилась удвічі. Потім доданки суми (5.17) інтегруються так:

1) якщо показник степені однієї з тригонометричних функцій непарний, то інтегрують, як у випадку а), внесенням під диференціал, результатом чого є інтегрування многочлена;

2) якщо обидва показника степеня парні, то інтегруємо за допомогою формул (5.16), в результаті чого степінь знижується ще вдвічі.

За потреби описані дії повторюємо.

Приклад 5.13. Обчислити такі інтеграли.

1.13.1. $\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx = \int \sqrt{\sin x} (1-\sin^2 x) d(\sin x) = \|t = \sin x\| =$

$$= \int t^{\frac{1}{2}} \left(1-t^2\right) dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7} t^{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{3} \sin x \sqrt{\sin x} - \frac{2}{7} \sin^3 x \sqrt{\sin x} + C.$$

1.13.2. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$.

Тут $\left.\begin{matrix}\nu=-4,\\ \mu=-2,\end{matrix}\right\}\Rightarrow t=\operatorname{tg}x$, тому

$$\int\frac{1}{\sin^4 x}\cdot\frac{dx}{\underbrace{\cos^2 x}_{d(\operatorname{tg}x)}}=\int\frac{d(\operatorname{tg}x)}{\sin^4 x}=\left\|\begin{matrix}\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\dfrac{1}{1+tg^2x}=\dfrac{\operatorname{tg}^2x}{1+tg^2x},\\ \sin^4 x=\dfrac{\operatorname{tg}^4x}{\left(1+tg^2x\right)^2}=\dfrac{t^4}{\left(1+t^2\right)^2}\end{matrix}\right\|=$$

$$=\int\frac{\left(1+t^2\right)^2dt}{(t)^4}=\int\frac{1+2t^2+t^4}{t^4}dt=\int\frac{dt}{t^4}+2\int\frac{dt}{t^2}+\int dt=$$

$$=-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^{-3}x+2\cdot(-1)\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}x}+\operatorname{tg}x+C=\operatorname{tg}x-\frac{2}{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3x}+C.$$

1.13.3. $\int\sin^2 x\cos^4 xdx=\int\left(\sin x\cos x\right)^2\cos^2 xdx=$

$$=\int\frac{1}{4}(\sin 2x)^2\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2xdx+\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{1}{2}(1-\cos 4x)dx+\frac{1}{8}\int\frac{1}{2}\sin^2 2x\cdot d\left(\underbrace{\sin 2x}_{=t}\right)=\frac{1}{16}\int dx-\frac{1}{16}\int\cos 4xdx+$$

$$+\frac{1}{16}\int t^2dt=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

11. Інтегрування деяких гіперболічних функцій

Розглянемо функції вигляду $R(\operatorname{sh}x,\operatorname{ch}x)$, $\operatorname{sh}^{\nu}x\cdot\operatorname{ch}^{\mu}x$, де $\mu,\nu\in\mathbb{Q}$, $x>0$. Інтегрування таких функцій здійснюється за допомогою тих же правил, що і для звичайних тригонометричних функцій.

1) У випадку $\int R(\operatorname{sh}x,\operatorname{ch}x)dx$ універсальними є заміни $t=\operatorname{th}\frac{x}{2}$ або $t=e^x$, тоді для першої заміни матимемо $dx=\frac{2dt}{1-t^2}$, $\operatorname{sh}x=\frac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$, а для другої – $dx=\frac{dt}{t}$, $\operatorname{sh}x=\frac{t^2-1}{t}$, $\operatorname{ch}x=\frac{t^2+1}{t}$. Зауважимо, що застосування другої із запропонованих замін приводить до многочленів нижчого степеня, ніж першої, тобто друга заміна може бути більш зручною для обчислення інтеграла.

2) У загальному випадку $\int\operatorname{sh}^{\nu}x\cdot\operatorname{ch}^{\mu}xdx$, де $\mu,\nu\in\mathbb{Q}$, $x>0$ робимо заміну $z=\operatorname{sh}^2x$, звідки

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1\Rightarrow\operatorname{ch}x=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2x}=\sqrt{1+z}=(1+z)^{\frac{1}{2}},\quad \operatorname{sh}x=z^{\frac{1}{2}},$$

$$dz=2\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}xdx=2z^{\frac{1}{2}}(1+z)^{\frac{1}{2}}dx\Rightarrow dx=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-\frac{1}{2}}dz,$$

$$\int \mathrm{sh}^{\nu} x \cdot \mathrm{ch}^{\mu} x dx = \frac{1}{2}\int z^{\frac{\nu-1}{2}}(1+z)^{\frac{\mu-1}{2}} dz$$

Тому (див. попередній пункт) заданий інтеграл можна звести до інтеграла від раціональної функції лише у трьох випадках:

- ν – непарне,
- μ – непарне,
- $\nu+\mu$ – парне

за допомогою замін, аналогічних тригонометричним.

§ 2. Визначений інтеграл

1. Один підхід до задачі про площу

Означення 5.8. Нехай функція $y=f(x)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[a,b]$. Плоску фігуру D, що обмежена на декартовій площині графіком функції $y=f(x)$, віссю абсцис, відрізками прямих $x=a$, $x=b$, називають *криволінійною трапецією* (рис. 5.1).

Поки що будемо спиратися на інтуїтивне розуміння площі криволінійної трапеції. Математично обґрунтоване поняття площі буде надано в §3 п. 1 цього розділу.

Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ точками

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$$

Побудуємо прямокутники з основами на відрізках розбиття $[x_{k-1},x_k]$ і висотою $f(x_{k-1})$ для всіх $k=\overline{1,n}$. Об'єднання таких прямокутників утворює східчасту фігуру (рис. 5..2).

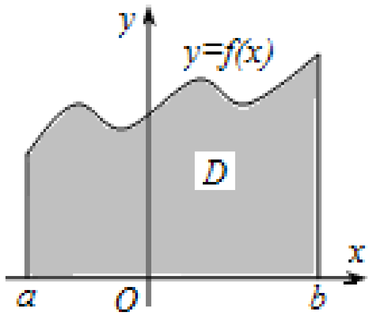


Рис. 5..1.

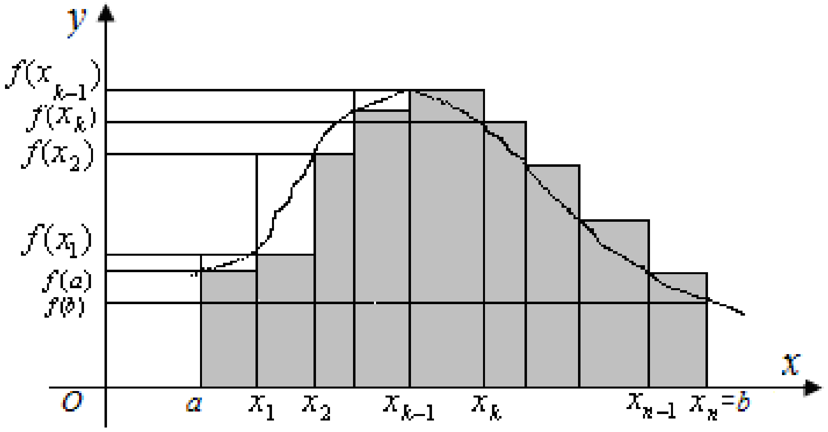


Рис. 5..2.

Якщо довжини усіх відрізків розбиття дуже малі, то площа східчастої фігури стає дуже близькою до площі криволінійної трапеції D, тобто

$$S(D)\approx\sum_{k=1}^{n} f\left(x_{k-1}\right)\left(x_k-x_{k-1}\right).$$

Далі буде доведено, що похибка цієї наближеної рівності не перебільшує будь-якого заданого наперед числа, якщо усі одночасно відрізки розбиття вибирати достатньо малими. Також буде доведено, що при прямуванні всіх довжин відрізків розбиття до нуля, границя суми в правій частині дорівнюватиме так званому визначеному інтеграла Рімана $\int_a^b f(x)dx$. Звідки буде зроблено висновок про виконання такої рівності

$$S(D)=\int_a^b f(x)dx.$$

Оскільки визначений інтеграл Рімана є границею сум площ прямокутників, із яких утворюється східчаста фігура, то знак інтеграла « $\int$ » зобов'язаний своєму походженню від знака «S», що відповідає першій літері латинського слова «Summa».

2. Означення й умови існування визначеного інтеграла

Введемо поняття визначеного інтеграла. Нехай функція $f(x)$ задана на $[a,b]$, розглянемо *розбиття* відрізка $[a,b]$ скінченною кількістю точок

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_{k-1}<x_k<...<x_{n-1}<x_n=b,$$

позначимо розбиття $R=\{x_k\}$. Оберемо довільним чином точки $\alpha_k\in[x_{k-1},x_k],\ k=\overline{1,n}$, назвемо їх *проміжними точками* і позначимо через $P=\{\alpha_k\}$ множину проміжних точок.

Інтегральною сумою Рімана функції $f(x)$ *на відрізку*$[a,b]$, *яка відповідає розбиттю* R *та вибору проміжних точок* P, називають суму вигляду

$$\sigma=\sigma(f,R,P)=\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k,$$

тут $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$. Введемо величину $d=\max\limits_{k=\overline{1,n}}\left(x_k-x_{k-1}\right)$, яку називають *діаметром розбиття*.

Геометричний зміст інтегральної суми Рімана $\sigma=\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$ **для невід'ємної неперервної на** $[a,b]$ **функції** $f(x)$**.** Значення $f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$ відповідає площі прямокутника, що є складовою східчастої фігури, зображеної на рис. 5..3. Значення площі усієї східчастої фігури дорівнює значенню інтегральної суми $\sigma=\sigma(f,P,R)$.

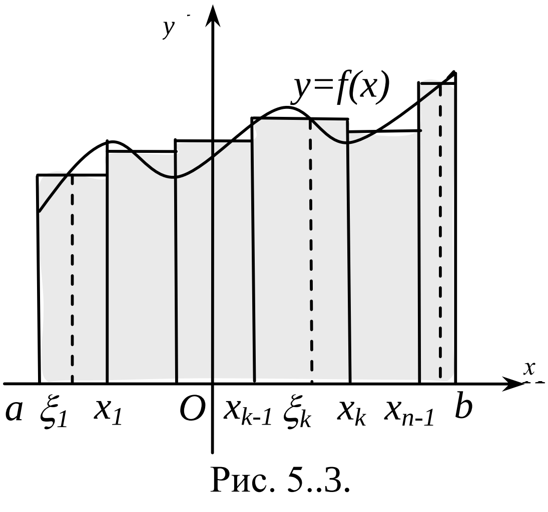


Рис. 5..3.

☝ 🗀**Означення 5.9** *(мовою* $\varepsilon-\delta$*).* Число I називають *границею інтегральних сум* $\sigma(f,R,P)$ *при* $d\to 0$ і позначають $I=\lim\limits_{d\to 0}\sigma(f,R,P)$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ можна знайти таке число $\delta > 0$, що для будь-якого розбиття $R = \{x_k\}$ відрізка $[a,b]$ з умовою $d < \delta$ незалежно від вибору проміжних точок $P = \{\alpha_k\}$ виконується нерівність $|I - \sigma(f,R,P)| < \varepsilon$. Тобто

$$I = \lim_{d \to 0} \sigma(f,R,P) \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall \, R = \{x_k\} \, \forall \, P = \{\alpha_k\} \quad d < \delta \Rightarrow |I - \sigma(f,R,P)| < \varepsilon ,$$

Якщо таке число I існує, то функцію $f(x)$ називають *інтегровною заРіма-ном* на відрізку $[a,b]$, а значення границі I – *визначеним інтегралом Рімана.*

Позначення: $I = \int\limits_a^b f(x)dx$. Число a називають нижньою межею інтегрування, а b – верхньою.

Введемо поняття інтегровної функції та інтеграла Рімана на мові послідовностей. Кожному натуральному номеру $n \in \mathbb{N}$ поставимо у відповідність розбиття R_n відрізка $[a,b]$ на n частин і множину P_n проміжних точок, що йому відповідає. Таким чином утвориться послідовність розбиттів $\{R_n\}$, а разом із нею й послідовність діаметрів $\{d_n\}$ і проміжних точок $\{P_n\}$. Їм буде відповідати послідовність інтегральних сум $\sigma_n = \sigma_n(f, R_n, P_n)$.

🗁**Означення 5.10** *(мовою послідовностей)***.** Якщо для будь-якої послідовності розбиттів $\{R_n\}$ і для будь-якого вибору послідовності проміжних точок $\{P_n\}$ із того, що послідовність діаметрів розбиттів $\{d_n\}$ прямує до нуля, випливає, що послідовність інтегральних сум прямує до числа I, яке не залежить ні від $\{R_n\}$, ні від $\{P_n\}$, тобто

$$\forall \{R_n\} \forall \{P_n\} \quad d_n \to 0 \Rightarrow \sigma_n \to I ,$$

то функцію $f(x)$ називають *інтегровною за Ріманом* на відрізку $[a,b]$, а значення I – *визначеним інтегралом Рімана*.

Позначення x змінної під знаком інтеграла можна замінити на будь-яке інше, тобто виконується рівність:

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(u)du .$$

Приклад 5.14. Дослідити функції на інтегровність. У разі їх інтегровності обчислити визначений інтеграл.

1) $f(x) = C = const$.

Нехай $\{x_k\}$– розбиття відрізка $[a,b]$, а $\{\alpha_k\}$ – проміжні точки цього розбиття, тоді інтегральна сума має вигляд

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} C\Delta x_k = C\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = C(b-a) .$$

Тоді $\lim\limits_{d \to 0} \sigma = C(b-a) \Rightarrow f(x) = const$ – інтегровна на $[a,b]$, а $\int\limits_a^b Cdx = C(b-a)$.

2) Розглянемо функцію Діріхле $D(x)=\begin{cases} 1, x\in\mathbb{Q} \\ 0, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$. Доведемо, що вона неінтегровна на будь-якому відрізку $[a,b]$.

Нехай $R=\{x_k\}$ – розбиття відрізка $[a,b]$,

$$\{\alpha_k'\}:\alpha_k'\in\mathbb{Q}\bigcap[x_{k-1},x_k],$$
$$\{\alpha_k''\}:\alpha_k''\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\bigcap[x_{k-1},x_k],$$

тоді

$$\sigma'=\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_k')\cdot\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=b-a>0\Rightarrow\lim_{d\to0}\sigma'=b-a,$$
$$\sigma''=\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_k'')\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}0\cdot\Delta x_k=0\Rightarrow\lim_{d\to0}\sigma''=0.$$

Отже, границя інтегральних сум залежить від вибору проміжних точок, тому функція Діріхле неінтегровна за Ріманом.

☝ **Твердження 5.3** (*необхідна умова інтегровності функції на відрізку*). Якщо функція інтегровна на відрізку $[a,b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Доведення. Припустимо супротивне: функція $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$, однак не є обмеженою. Розглянемо $\{x_k\}$ – довільне розбиття $[a,b]$. В розбитті оберемо відрізок, на якому вона необмежена,

$\Rightarrow\exists k_0\in\{1,...,n\}$: $f(x)$ – необмежена на $[x_{k_0-1},x_{k_0}]$.

Позначимо $\sigma_1=\sum\limits_{k\neq k_0}f(\alpha_k)\Delta x_k$, тоді

$$\forall M>0\ \exists\alpha_{k_0}\in[x_{k_0-1},x_{k_0}]:\quad \left|f(\alpha_{k_0})\right|\geq\frac{|\sigma_1|+M}{\Delta x_{k_0}}.$$

Таким чином, можна зробити таку оцінку інтегральної суми

$$|\sigma(f,R,P)|=\left|\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_k)\Delta x_k\right|=\left|\sum_{k\neq k_0}f(\alpha_k)\Delta x_k+f(\alpha_{k_0})\cdot\Delta x_{k_0}\right|=\left|\sigma_1+f(\alpha_{k_0})\cdot\Delta x_{k_0}\right|\geq$$
$$\geq\left|f(\alpha_{k_0})\right|\cdot\Delta x_{k_0}-|\sigma_1|\geq\frac{|\sigma_1|+M}{\Delta x_{k_0}}\cdot\Delta x_{k_0}-|\sigma_1|=M.$$

Отже,

$$\forall M>0\ \exists\ P:\ \sigma(f,R,P)>M,$$

тобто $\nexists\lim\limits_{d\to0}\sigma(f,R,P)<\infty\Rightarrow\nexists\int\limits_a^b f(x)dx$ і $f(x)-$не інтегровна на $[a,b]$. Отримано суперечність з умовою. Теорему доведено. ■

3. Верхня та нижня інтегральні суми Дарбу

☝ 🗀**Означення 5.11.** Нехай $f(x)$ – обмежена функція, визначена на $[a,b]$ та на відрізку $[a,b]$ задано розбиття:

$$R=\{a=x_0<x_1<x_2<...<x_{k-1}<x_k<...<x_{n-1}<x_n=b\}.$$

Введемо позначення:

$$m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x); \qquad M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f(x).$$

Суми вигляду

$$\underline{S} = \underline{S}(f,R) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k; \qquad \overline{S} = \overline{S}(f,R) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$$

називають відповідно *нижньою й верхньою інтегральними сумами Дарбу*.

☝ **Геометричний зміст верхніх і нижніх сум Дарбу.**

Нижня інтегральна сума Дарбу для невід’ємної неперервної на $[a,b]$ функції $f(x)$ – це площа східчастої фігури, що вписана в криволінійну трапецію, а верхня інтегральна сума – це площа східчастої фігури, що описана навколо неї (рис. 5..4).

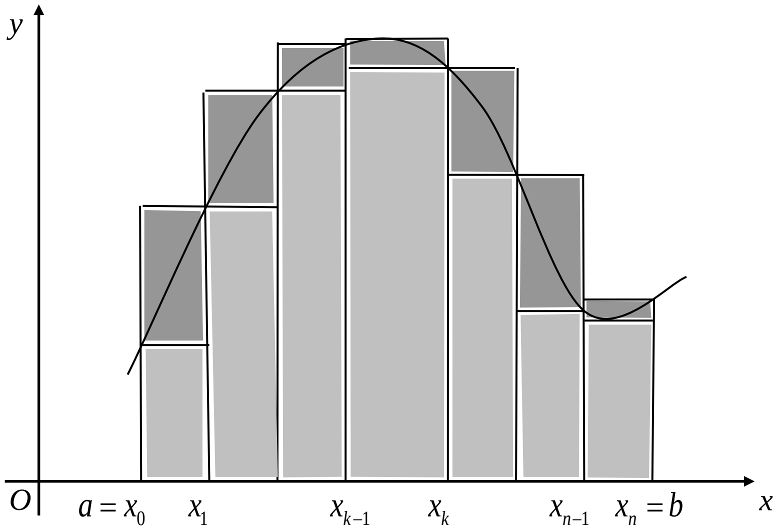


Рис. 5..4.

Зафіксуємо розбиття $R = \{x_k\}$. Оскільки

$$m_k \le f(x) \le M_k \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_h],$$

то для довільних проміжних точок $P = \{\alpha_k\}$, $\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1,n}$ виконується умова $m_k \le f(\alpha_k) \le M_k \;\; \forall k = \overline{1,n}$, тому має місце наступна нерівність для інтегральних сум $\sigma = \sigma(f,R,P) = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k$:

$$\boxed{☝\ \underline{S}(f,R) \le \sigma(f,R,P) \le \overline{S}(f,R) \quad \forall P.} \qquad (5.18)$$

Розглянемо нижню суму Дарбу $\underline{S}(f,R)$ неперервної на $[a,b]$ функції $f(x)$. Ця функція неперервна на кожному відрізку розбиття, тому, за *другою теоремою Вейєрштрасса* [**2**, с.161],

$$\forall k \in \{1,2,\ldots,n\}\, \exists \alpha'_k \in [x_{k-1}, x_k] : m_k = f(\alpha'_k).$$

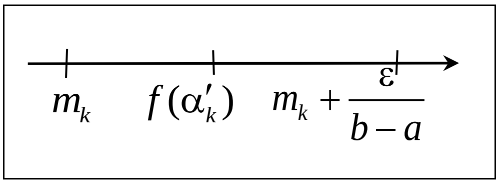
Тоді $\underline{S}(f,R) = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha'_k)\Delta x_k = \sigma(f,R,\{\alpha'_k\})$. Тобто існує такий набір проміжних точок $\{\alpha'_k\}$, що інтегральна сума, яка йому відповідає, дорівнює заданій нижній сумі Дарбу. Аналогічний результат можна отримати для верхньої суми.

Висновок: для неперервної функції на $[a,b]$ як верхня, так і нижня інтегральні суми Дарбу збігаються з однією з інтегральних сум Рімана.

Нехай функція $f(x)$ не є неперервною на $[a,b]$. За означенням точної нижньої межі,

$$m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x) \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\,\alpha'_k \in [x_{k-1}, x_k]:$$

$$m_k \le f(\alpha'_k) \le m_k + \frac{\varepsilon}{b-a}.$$



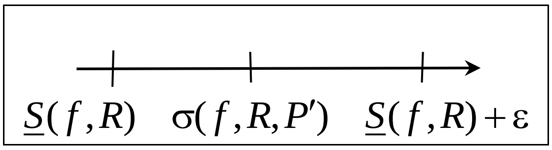
Помножимо останню нерівність на Δx_k та підсумуємо всі нерівності за k від 1 до n, тоді отримаємо

$$\underline{S}(f,R) \le \sigma(f,R,P') \le \underline{S}(f,R) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \Delta x_k \Rightarrow \underline{S}(f,R) \le \sigma(f,R,P') \le \underline{S}(f,R) + \varepsilon.$$

Отже,

$$\forall\varepsilon > 0\ \forall R\ \exists P' = \{\alpha'_k\}:$$

$$\underline{S}(f,R) \le \sigma(f,R,P') \le \underline{S}(f,R) + \varepsilon.$$



За означенням точної нижньої межі, отримане означає, що $\underline{S}(f,R) = \inf\limits_{P} \sigma(f,R,P)$. Аналогічно для верхньої суми $\overline{S}(f,R) = \sup\limits_{P} \sigma(f,R,P)$

Висновок: для фіксованого розбиття $R = \{x_k\}$

1) значення суми Дарбу можна з будь-якою точністю наблизити деякою інтегральною сумою Рімана;

2) $\boxed{\underline{S}(f,R) = \inf\limits_{P} \sigma(f,R,P),\ \overline{S}(f,R) = \sup\limits_{P} \sigma(f,R,P)}$; (5.19)

Властивості інтегральних сум Дарбу

Властивість 1. Для $\sigma = \sigma(f,R,P) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k$ виконується

$$\boxed{\underline{S}(f,R) = \inf_{P} \sigma(f,R,P) \le \sigma(f,R,P) \le \sup_{P} \sigma(f,R,P) = \overline{S}(f,R) \quad \forall R}$$

Доведення. Ця властивість є безпосереднім наслідком отриманих вище формул (5.18) і (5.19). ■

Властивість 2. Додавання до точок розбиття додаткових точок приводить до того, що нижня сума Дарбу не зменшується, а верхня – не збільшується.

Доведення. Без обмеження загальності міркувань можна розглянути лише одну додаткову точку розбиття.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Нехай } R = \{x_k\} - \text{розбиття,} \\ x' - \text{додаткова точка,}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{нове розбиття} \\ \{x_k\} \cup \{x'\} = \{x'_k\}.\end{array}$$

Позначимо через k_0 той номер відрізка розбиття, в який потрапила додаткова точка x', тобто $x_{k_0-1} < x' < x_{k_0}$ (див. рис.1.5), тоді

$$\underline{S}' = \underline{S}(f,R') = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x'_k = \sum_{k<k_0} m_k \cdot (x_k - x_{k-1}) +$$

$$+m'_{k_0} \cdot (x' - x_{k_0-1}) + m''_{k_0} \cdot (x_{k_0} - x') + \sum_{k>k_0} m_k \cdot (x_k - x_{k-1}),$$

де $m'_{k_0} = \inf\limits_{[x_{k_0-1},x']} f(x), \quad m''_{k_0} = \inf\limits_{[x',x_{k_0}]} f(x)$. Тоді

$$m'_{k_0} = \inf_{[x_{k_0-1},x']} f(x) \ge \inf_{[x_{k_0-1},x_{k_0}]} f(x) = m_{k_0},$$

$$m''_{k_0} = \inf_{[x',x_{k_0}]} f(x) \ge \inf_{[x_{k_0-1},x_{k_0}]} f(x) = m_{k_0},$$

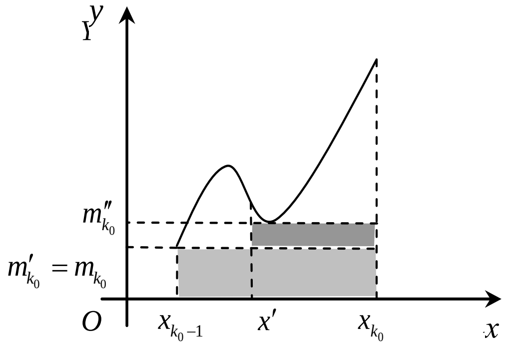


Рис. 5..5.

$$\underline{S}' \ge \sum_{k\ne k_0} m_k \cdot (x_k - x_{k-1}) + \underbrace{m_{k_0} \cdot (x' - x_{k_0-1}) + m_{k_0} \cdot (x_{k_0} - x')}_{=m_{k_0}\cdot(x_{k_0}-x_{k_0-1})} = \sum_{k=1} m_k \cdot \Delta x_k = \underline{S}.$$

Для верхньої суми доведення аналогічне. ■

Якщо розбиття R_1 утворюється із розбиття R додаванням до нього додаткових точок, то говорять, що розбиття R_1 є *подрібненням* розбиття R.

Властивість 3. Будь-яка нижня інтегральна сума Дарбу не більше за верхню інтегральну суму, навіть для різних розбиттів:

$$\underline{S}_1 = \underline{S}(f,R_1) \le \overline{S_2} = \overline{S}(f,R_2) \quad \forall R_1 = \{x_k^{(1)}\},\, R_2 = \{x_i^{(2)}\}.$$

Доведення. Введемо до розгляду розбиття $R_3 = R_1 \bigcup R_2$ і інтегральні суми Дарбу, що йому відповідають: $\underline{S}_3$ *і* $\overline{S}_3$. Розбиття R_3 є подрібненням як розбиття R_1, так і розбиття R_2, тому згідно з *властивістю 2* і нерівністю (5.19), маємо

$$\underline{S}_1 \le \underline{S}_3 \le \overline{S}_3 \le \overline{S_2}\,. \;■$$

Наслідок 5.2. Множина $\{\underline{S} = \underline{S}(f,R)\}_R$ обмежена зверху, а множина $\{\overline{S} = \overline{S}(f,R)\}_R$ обмежена знизу.

Дійсно, згідно з *властивістю 3*, множина $\{\underline{S} = \underline{S}(f,R)\}_R$ обмежена зверху будь-якою фіксованою верхньою сумою Дарбу, а множина $\{\overline{S} = \overline{S}(f,R)\}_R$ обмежена знизу будь-якою фіксованою нижньою сумою. ■

Наслідок 5.3. $\boxed{\begin{array}{l} \exists \sup\limits_{R}\{\underline{S}(f,R)\} = I_* - \textit{нижній інтеграл Дарбу,} \\ \exists \inf\limits_{R}\{\overline{S}(f,R)\} = I^* - \textit{верхній інтеграл Дарбу.} \end{array}}$

Властивість 4. $\underline{S} = \underline{S}(f,R_1) \le I_* \le I^* \le \overline{S} = \overline{S}(f,R_2) \quad \forall R_1, R_2$.

Доведення. Нерівності $\underline{S} \le I_*$ *і* $I^* \le \overline{S}$ випливають із *наслідку 5.3*. Доведемо, що $I_* \le I^*$.

Як зазначалося в *наслідку 5.2*, множина верхніх сум $\{\overline{S} = \overline{S}(f,R)\}_R$ обмежена знизу будь-якою нижньою інтегральною сумою Дарбу $\underline{S}$, тому $\underline{S}$ є нижньою межею множини $\{\overline{S}=\overline{S}(f,R)\}_R$. Оскільки $\inf\limits_R\{\overline{S}(f,R)\}$ – найбільша серед нижніх меж, то

$$\inf_R\{\overline{S}(f,R)\}\ge \underline{S} \;\Rightarrow\; I^*\ge \underline{S}.$$

Отже,

$$\underline{S}\le I^* \quad \forall \underline{S}\in\{\underline{S}=\underline{S}(f,R)\}_R.$$

Звідси випливає, що

$$\sup_R\{\underline{S}(f,R)\}\le I^* \;\Rightarrow\; I_*\le I^*.$$

Всі нерівності властивості доведено. ■

Властивість 5.

Нехай $M=\sup\limits_{x\in[a;b]} f(x),\ m=\inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$;
$R=\{x_k\}$ – розбиття відрізка $[a;b]$ з діаметром d;
розбиття $R'=\{x'_k\}$ отримано з розбиття R доданням l точок,
$\overline{S}=\overline{S}(f,R)$, $\underline{S}=\underline{S}(f,R)$,
$\overline{S}'=\overline{S}(f,R')$, $\underline{S}'=\underline{S}(f,R')$;

$$\Rightarrow\quad \begin{aligned}&\underline{S}'-\underline{S}\le (M-m)\,l\,d;\\ &\overline{S}-\overline{S}'\le (M-m)\,l\,d.\end{aligned}$$

Доведення. Нехай спочатку розбиття R' відрізняється від розбиття R лише однією додатковою точкою x', що потрапляє всередину k_0-го відрізка розбиття R. Застосовуємо ті самі позначення, що й при доведенні властивості 2:

$$m'_{k_0}=\inf_{[x_{k_0-1},x']} f(x),\ m''_{k_0}=\inf_{[x',x_{k_0}]} f(x),\ \inf_{[x_{k_0-1},x_{k_0}]} f(x)=m_{k_0}.$$

Отримаємо:

$$\underline{S}=\sum_{k\ne k_0} m_k\cdot(x_k-x_{k-1})+m_{k_0}\cdot\left(x_{k_0}-x_{k_0-1}\right);$$

$$\underline{S}'=\sum_{k\ne k_0} m_k\cdot(x_k-x_{k-1})+m'_{k_0}\cdot\left(x'-x_{k_0-1}\right)+m''_{k_0}\cdot\left(x_{k_0}-x'\right);$$

$$\underline{S}'-\underline{S}=\left[m'_{k_0}\cdot\left(x'-x_{k_0-1}\right)+m''_{k_0}\cdot\left(x_{k_0}-x'\right)\right]-m_{k_0}\cdot\left(x_{k_0}-x_{k_0-1}\right)\le$$

$$\le\left[M\cdot\left(x'-x_{k_0-1}\right)+M\cdot\left(x_{k_0}-x'\right)\right]-m\cdot\left(x_{k_0}-x_{k_0-1}\right)=(M-m)\cdot\left(x_{k_0}-x_{k_0-1}\right)\le(M-m)\cdot d.$$

Якщо додаткових точок розбиття буде l, тоді $\underline{S}'-\underline{S}\le (M-m)\,l\,d$.

Доведення нерівності для верхніх сум здійснюється аналогічно. ■

4. Критерії Дарбу інтегровності функцій за Ріманом

В класичних підручниках із математичного аналізу немає поділу різних формулювань критерію Дарбу за назвами чи номерами. Тут ми введемо нумерацію цих формулювань, щоб надалі зручно було на них посилатися.

Основна лема Дарбу. Верхній інтеграл Дарбу обмеженої на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ дорівнює границі верхніх сум Дарбу при прямуванні до нуля діаметра розбиття $\mathrm{I}^* = \lim\limits_{d\to 0}\overline{S}(R)$, тобто

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall R:\quad d < \delta \Rightarrow \left|\overline{S}(R) - \mathrm{I}^*\right| < \varepsilon.$$

Аналогічно для нижнього інтеграла: $\mathrm{I}_* = \lim\limits_{d\to 0}\underline{S}(R)$.

Доведення здійснимо для верхнього інтеграла. Якщо функція $f(x) = c = const$ на відрізку $[a;b]$, то $\overline{S}(R) = c\cdot(b-a) = \mathrm{I}^*$ $\forall R$. Тому $\lim\limits_{d\to 0}\overline{S}(R) = \mathrm{I}^* = c\cdot(b-a)$. Нехай на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ не є сталою і $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x),\ m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$.

Оскільки $\mathrm{I}^* = \inf\limits_{R}\{\overline{S}(R)\}$, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists R^* = \{x_k^*\}_{k=0}^{l}:\quad \mathrm{I}^* \le \overline{S}(R^*) < \mathrm{I}^* + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нехай $R = \{x_k\}$ – довільне розбиття відрізка $[a;b]$ з діаметром $d < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2l(M-m)}$.

Розглянемо розбиття $R' = \{x_k'\} = R \cup R^*$, яке утворюється з точок розбиття R і не більш ніж із l додаткових точок розбиття R^*. За *властивістю 5 сум Дарбу*,

$$\overline{S}(R) - \overline{S}(R') \le (M-m)\cdot l\cdot d < \frac{\varepsilon}{2}.$$

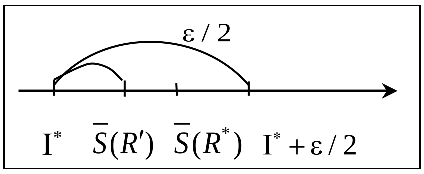
Маємо:

а) $\mathrm{I}^* = \inf\limits_{R}\{\overline{S}(R)\} \Rightarrow \mathrm{I}^* \le \overline{S}(R')$;

б) розбиття R' є подрібненням розбиття R^* $\Rightarrow$ $\overline{S}(R') \le \overline{S}(R^*)$ (*властивість 2 сум Дарбу*);

в) $\mathrm{I}^* \le \overline{S}(R^*) < \mathrm{I}^* + \dfrac{\varepsilon}{2}$;

$\Rightarrow$



і $\overline{S}(R') - \mathrm{I}^* < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Оскільки $\overline{S}(R') - \mathrm{I}^* < \dfrac{\varepsilon}{2}$ і $\overline{S}(R) - \overline{S}(R') < \dfrac{\varepsilon}{2}$, то

$$\left|\overline{S}(R) - \mathrm{I}^*\right| \le \left|\overline{S}(R) - \overline{S}(R')\right| + \left|\overline{S}(R') - \mathrm{I}^*\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже,

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ при } \delta = \frac{\varepsilon}{2l(M-m)} \text{ отримано: } \forall R:\quad d < \delta \Rightarrow \left|\overline{S}(R) - \mathrm{I}^*\right| < \varepsilon.\ ■$$

☝ **Теорема 5.6** *(перший критерій Дарбу інтегровності функції)***.** Для того, щоб обмежена функція $f(x)$ була інтегровною на $[a,b]$, необхідно і достатньо, щоб $\lim\limits_{d\to 0}\left(\overline{S}(f,R) - \underline{S}(f,R)\right) = 0$. Тобто

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:\forall R:\;\; d<\delta\Rightarrow\overline{S}(f,R)-\underline{S}(f,R)<\varepsilon.$$

Доведення. *Необхідність.* $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow\exists\,\mathrm{I}\in\mathbb{R}:\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:\forall R\;\forall P:\; d<\delta\Rightarrow|\mathrm{I}-\sigma(f,R,P)|<\varepsilon.$$

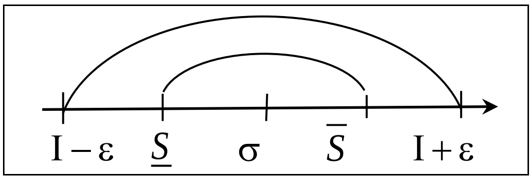
Зафіксуємо розбиття R з діаметром $d<\delta$, тоді матимемо

$$\mathrm{I}-\varepsilon<\sigma(f,R,P)<\mathrm{I}+\varepsilon\;\;\forall P.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Із (5.19) } \underline{S}=\inf\limits_{P}\sigma(f,R,P),\\ \mathrm{I}-\varepsilon<\sigma=\sigma(f,R,P),\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \mathrm{I}-\varepsilon\le\underline{S}.$$

Аналогічно $\overline{S}\le\mathrm{I}+\varepsilon$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Із (5.18) } \underline{S}\le\sigma\le\overline{S},\\ \mathrm{I}-\varepsilon\le\underline{S},\;\;\overline{S}\le\mathrm{I}+\varepsilon,\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \mathrm{I}-\varepsilon\le\underline{S}\le\sigma\le\overline{S}\le I+\varepsilon.$$



Тому $\forall\varepsilon>0\,\forall R:\; d<\delta\Rightarrow\overline{S}-\underline{S}\le2\varepsilon$.

Це означає, що $\lim\limits_{d\to0}(\overline{S}-\underline{S})=0$.

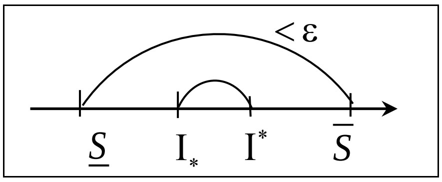
Достатність.

$$\lim_{d\to0}(\overline{S}-\underline{S})=0\Leftrightarrow\quad\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:\forall R:\;\; d<\delta\Rightarrow\overline{S}(f,R)-\underline{S}(f,R)<\varepsilon.$$

Зафіксуємо розбиття R з діаметром $d<\delta$, позначимо

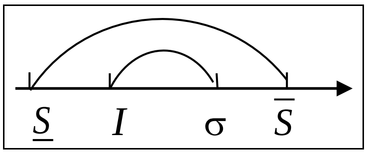
$$\overline{S}=\overline{S}(f,R),\quad \underline{S}=\underline{S}(f,R).$$

За *властивістю 4*



$\underline{S}\le\mathrm{I}_*\le\mathrm{I}^*\le\overline{S}$,

тому $\forall\varepsilon>0\;\;\mathrm{I}^*-\mathrm{I}_*<\varepsilon$. Звідки $\mathrm{I}^*=\mathrm{I}_*=\mathrm{I}$.



$$\left.\begin{array}{l}\overline{S}-\underline{S}<\varepsilon,\\ \underline{S}\le\mathrm{I}\le\overline{S}\;\text{(із}\\ \text{доведення),}\\ \underline{S}\le\sigma\le\overline{S}\quad\forall P\\ (\textit{властивість 1}),\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \begin{array}{l}|\mathrm{I}-\sigma|<\overline{S}-\underline{S}<\varepsilon\\ \forall\varepsilon>0\,\forall P.\end{array}$$

Отже, внаслідок довільності розбиття R, за означенням 5.8, $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$. ■

Теорема 5.7 *(другий критерій Дарбу інтегровності функції на* $[a,b]$*).* Обмежена функція $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$ тоді й лише тоді, коли $\mathrm{I}_*=\mathrm{I}^*$.

Унаслідок основної леми Дарбу, другий критерій є іншою формою запису першого критерію Дарбу інтегровності функції. Пояснимо це.

За першим критерієм:

$$f(x)-\ \text{інтегровна на } [a,b]\;\Leftrightarrow\;\lim_{d\to0}\left(\overline{S}(f,R)-\underline{S}(f,R)\right)=0.$$

За основною лемою Дарбу, для обмеженої на $[a,b]$ функції $f(x)$ виконуються умови:

$$\exists \lim_{d\to 0} \overline{S}(R) = \mathrm{I}^* \ \wedge \ \exists \lim_{d\to 0} \underline{S}(R) = \mathrm{I}_*.$$

Із зазначеного випливає:

$$f(x) - \text{ інтегровна на } [a,b] \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ 0 = \lim_{d\to 0}\left(\overline{S}(f,R) - \underline{S}(f,R)\right) \underset{(\exists \quad\ \wedge \quad\ \exists)}{=} \lim_{d\to 0}\overline{S}(f,R) - \lim_{d\to 0}\underline{S}(f,R) = \mathrm{I}^* - \mathrm{I}_* = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathrm{I}_* = \mathrm{I}^*.$$

Твердження 5.4 *(перший модифікований критерій Дарбу інтігровності функції)***.** Для того, щоб обмежена функція $f(x)$ була інтегровною на $[a,b]$, необхідно і достатньо, щоб

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists R^* : \ \ \overline{S}(f,R^*) - \underline{S}(f,R^*) < \varepsilon .$$

Доведення. *Необхідність.* Оскільки $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$, то, за першим критерієм Дарбу

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall R: \ \ d < \delta \Rightarrow \overline{S}(f,R) - \underline{S}(f,R) < \varepsilon .$$

Оскільки нерівність $\overline{S}(f,R) - \underline{S}(f,R) < \varepsilon$ виконується для будь-якого розбиття з діаметром, меншим за δ, то за шукане R^* можна обрати будь-яке з них, звідки матимемо: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists R^* : \ \ \overline{S}(f,R^*) - \underline{S}(f,R^*) < \varepsilon$.

Достатність. Нехай виконується висловлювання

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists R^* : \ \ \overline{S}(f,R^*) - \underline{S}(f,R^*) < \varepsilon .$$

Позначимо $\overline{S} = \overline{S}(f,R^*), \quad \underline{S} = \underline{S}(f,R^*)$. За *властивістю 4,*

$$\underline{S} \le \mathrm{I}_* \le \mathrm{I}^* \le \overline{S},$$

тому $\forall \varepsilon > 0 \ \ \mathrm{I}^* - \mathrm{I}_* < \varepsilon$. Звідки $\mathrm{I}^* = \mathrm{I}_*$. Отже, за другим критерієм Дарбу, $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$. ■

☝ 🗀**Означення 5.12**. Нехай $M = \sup\limits_A f(x), \quad m = \inf\limits_A f(x)$. *Коливанням функції на множині A* називають величину $\omega_A(f) = M - m$.

Через ω_k позначимо коливання функції на k-ому відрізку розбиття.

Теорема 5.8 *(третій критерій Дарбу інтегровності функції на* $[a,b]$*).* Обмежена функція $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$ тоді й лише тоді, коли $\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k \Delta x_k = 0$, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall R: \ \ d < \delta \Rightarrow \ \ \sum_{k=1}^{n}\omega_k \Delta x_k < \varepsilon .$$

Доведення. Оскільки

$$\overline{S} - \underline{S} = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\omega_k \Delta x_k$$

і $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, що рівносильно (за першим критерієм Дарбу) співвідношенню $\lim\limits_{d\to 0}(\overline{S}-\underline{S})=0$, то інтегровність функції $f(x)$ на $[a,b]$ еквівалентна здійсненню рівності:

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=0. \ ■$$

Твердження 5.4 *(третій модифікований критерій Дарбу інтегровності функції).* Для того, щоб обмежена функція $f(x)$ була інтегровною на $[a,b]$, необхідно і достатньо, щоб

$$\forall\varepsilon>0\,\exists R^*:\ \ \sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon.$$

Доведення здійснюється аналогічно доведенню третього критерію Дарбу як наслідок першого модифікованого критерію Дарбу. ■

5. Класи інтегровних за Ріманом функцій

✍ **Теорема 5.9.** Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку.

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то вона рівномірно неперервна на $[a,b]$ (*теорема Кантора* [**2**, с. 163]), тоді

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:\forall R=\{x_k\}_{k=1}^{n}\ d<\delta\Rightarrow\omega_k<\frac{\varepsilon}{b-a}\forall k=\overline{1,n}.$$

Звідки

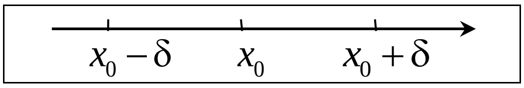
$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k=\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon\Rightarrow\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (за третім критерієм Дарбу) функція інтегровна на $[a,b]$. ■

🗁**Означення 5.13.** Будемо казати, що точка x покривається інтервалом (α,β), якщо $x\in(\alpha,\beta)$.

Наприклад, точка x_0 покривається своїм δ-околом:

$x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$.



Теорема 5.10. Якщо множина точок розриву обмеженої функції така, що $\forall\varepsilon>0$ всі точки цієї множини покриваються скінченною кількістю інтервалів сумарної довжини, меншої за ε, то така функція є інтегровною на відрізку $[a,b]$.

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon>0$. Позначимо $M=\sup\limits_{[a,b]}f(x)$, $m=\inf\limits_{[a,b]}f(x)$. Позначимо через A множину усіх точок розриву функції $f(x)$. Покриємо усі точки цієї множини скінченною кількістю інтервалів $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k=1}^{n}$ таких, що

$$\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)<\frac{\varepsilon}{2(M-m)} \quad\wedge\quad A\subset\bigcup_{k=1}^{n}(\alpha_k,\beta_k).$$

Множина $[a,b]\setminus\bigcup_{k=1}^{n}(\alpha_k,\beta_k)$ є об'єднанням скінченної кількості N відрізків, які назвемо *залишковими відрізками*. На кожному з них функція буде неперервною. Тому до кожного з цих залишкових відрізків застосуємо теорему Кантора. Отримаємо:

$$\forall i=\overline{1,N}\quad \exists\delta_i>0:\forall R_i=\left\{x_k^{(i)}\right\}_k \quad d<\delta_i\Rightarrow\omega_k^{(i)}<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,\forall k.$$

Нехай $\delta=\min\limits_{i=1,N}\delta_i$, тоді здійснимо розбиття кожного із залишкових відрізків з діаметрами $d<\delta$ і коливання функції на кожному із відрізків розбиття залишкової множини буде таким, що $\omega_j<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\forall j$.

Розглянемо $\bigcup_{k=1}^{n}(\alpha_k,\beta_k)$. Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що інтервали $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k=1}^{n}$ взаємно не перетинаються. Включимо до об'єднання $\bigcup_{k=1}^{n}(\alpha_k,\beta_k)$ кінці інтервалів $\{\alpha_k,\beta_k\}_{k=1}^{n}$, отримаємо скінченну кількість відрізків, що взаємно не перетинаються. Розіб'ємо кожен із них довільним чином на відрізки з діаметром $d<\delta$.

Подамо вираз $\sum\limits_i\omega_i\Delta x_i$ у вигляді суми

$$\sum_i\omega_i\Delta x_i=\sum{}^{*}\omega_i\Delta x_i+\sum{}^{**}\omega_i\Delta x_i,$$

де

$\sum{}^{*}\omega_i\Delta x_i$ – сума, що відповідає залишковим відрізкам,

$\sum{}^{**}\omega_i\Delta x_i$ – сума , що відповідає відрізкам покриття множини A.

За побудовою

$$\sum{}^{*}\omega_i\Delta x_i<\sum{}^{*}\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\Delta x_i=\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum{}^{*}\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a)=\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum{}^{**}\omega_i\Delta x_i<\sum{}^{**}(M-m)\Delta x_i\le(M-m)\cdot\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)<(M-m)\cdot\frac{\varepsilon}{2(M-m)}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, $\forall\varepsilon>0$ знайдено таке $\delta>0$, що для побудованого розбиття з діаметром $d<\delta$ виконується

$$\sum_i\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Тому, за третім модифікованим критерієм Дарбу, розглянута функція інтегровна на $[a,b]$. ■

☝ **Теорема 5.11.** Якщо обмежена функція $f(x)$ є кусково-неперервною на $[a,b]$, то вона інтегровна на $[a,b]$.

Доведення. Кусково-неперервна на відрізку функція $f(x)$ має скінченну кількість точок розриву на $[a,b]$. Нехай їх N штук. Кожну точку розриву покриємо інтервалом (α_k,β_k) довжини $\frac{\varepsilon}{2N}$. Тоді

$$\sum_k(\alpha_k,\beta_k)\le N\cdot\frac{\varepsilon}{2N}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

отже, за *теоремою 5.10*, функція інтегровна. ■

Приклад 5.15. Дослідити функцію $f(x)=[x]$ (графік зображено на рис. 5..6) на інтегровність на відрізку $[a,b]$ (тут $[x]-$ ціла частина дійсного числа x, тобто найбільше ціле число, що не перевищує x).

Якщо $[b]-[a]\neq 0$, то точками розриву цієї функції на відрізку $[a,b]$ є точки

$$x_1=[a]+1, x_2=[a]+2,\dots,x_{[b]-[a]}=[b].$$

Якщо $[b]-[a]=0$, то на відрізку $[a,b]$ функція не має точок розриву. Отже, ця функція є кусково-неперервною на $[a,b]$, тому, *за теоремою 5.11*, – інтегровною.

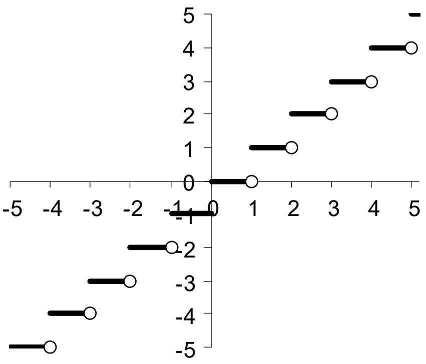


Рис. 5..6.

☝ **Теорема 5.12.** Якщо обмежена функція є нестрого монотонною на $[a,b]$, то вона інтегровна на $[a,b]$.

Доведення. Нехай $M=\sup\limits_{[a.b]}f(x)$, $m=\inf\limits_{[a.b]}f(x)$, тоді можливі два випадки.

Випадок перший: $M=m$, тоді $f(x)=const$, і це відповідає найпростішій інтегровній на $[a,b]$ функції.

Випадок другий: $M\neq m$ і $f(x)$ не спадає на $[a,b]$, тоді $M=f(b),\quad m=f(a)$, крім того, на кожному відрізку розбиття $M_k=f(x_k),\quad m_k=f(x_{k-1})$.

Розглянемо розбиття з діаметром $d<\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, тоді

$$\overline{S}-\underline{S}=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))\underbrace{\Delta x_k}_{<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}}<$$

$$<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot[f(x_1)-f(x_0)+$$
$$+f(x_2)-f(x_1)+f(x_3)-f(x_2)+\ldots+f(x_n)-f(x_{n-1})]=\varepsilon.$$

Отже, $\lim\limits_{d\to 0}(\overline{S}-\underline{S})=0$, тому, за першим критерієм Дарбу, інтегровність доведено. ■

Приклад 5.16 *функції, інтегровної на* $[a,b]$, *що має нескінченну множину точок розриву.*

Розглянемо функцію $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right), x\neq 0,\\ 0, x=0\end{cases}$ на $[0,1]$.

1) Точки розриву функції:

$$\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{x}=0,\\ x\in[0,1],\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{n},\quad n\in\mathbb{N},\\ x\neq 0.\end{array}\right. .$$

Отримали зчисленну множину точок розриву $A=\left\{0,\dfrac{1}{n},n\in\mathbb{N}\right\}$.

Доведемо, що A задовольняє умови теореми 5.10. Оскільки $\lim\limits_{n}\dfrac{1}{n}=0$, то

$$\forall\varepsilon>0\,\exists n_0\in N:\forall n\geq n_0\quad \frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Отже, має місце включення: $\left(\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}\cup\{0\}\right)\subset\left(-\dfrac{\varepsilon}{4};\dfrac{\varepsilon}{4}\right)$ (див. також рис.1.7).

Тепер кожну точку множини $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{n_0-1}$ покриваємо інтервалом довжини, меншої за $\dfrac{\varepsilon}{2(n_0-1)}$. Тоді загальна довжина побудованих інтервалів у кількості n_0 штук (враховуючи перший окіл), буде меншою за $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

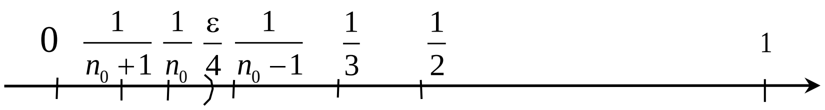


Рис. 5..7.

2) Оскільки $\forall x\in[0,1]\ -1\leq f(x)\leq 1$, то функція обмежена на відрізку $[0,1]$.

Отже, функція інтегровна на [0;1] і має нескінченну множину точок розриву.

6. Множина лебеґової і жорданової міри нуль. Критерій інтегровності Лебеґа

☝ 🗀**Означення 5.14.** Множина *A має лебеґову міру нуль,* якщо всі її точки можна покрити не більш ніж зчисленною кількістю інтервалів з сумою довжин, меншою за ε, тобто

$$\mu A=0 \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\,\varepsilon>0\,\exists\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k\in\Im}:\ \bigcup_{k\in\Im}(\alpha_k,\beta_k)\supset A\wedge\sum_{k\in\Im}(\beta_k-\alpha_k)<\varepsilon\,.$$

Тут μ – міра Лебеґа. У випадку, коли $\Im=\{1,2,...,n\}$ – скінченна індексна множина, то сума довжин інтервалів дорівнює

$$\sum_{k\in\Im}(\beta_k-\alpha_k)=\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)<\varepsilon\,,$$

а у випадку, коли $\Im$ – зчисленна індексна множина, то сума $\sum\limits_{k\in\Im}(\beta_k-\alpha_k)$ не залежить від нумерації елементів множини $\Im$, тому можна вважати, що $\Im=\mathbb{N}$ і

$$\sum_{k\in\Im}(\beta_k-\alpha_k)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}(\beta_k-\alpha_k)<\varepsilon\,.$$

Означення 5.15. Множина A має *жорданову міру нуль,* якщо всі її точки можна покрити скінченною кількістю інтервалів із сумою довжин, меншою за ε, тобто

$$\eta\, A=0 \overset{def}{\Leftrightarrow}\ \forall\,\varepsilon>0\,\exists\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k=1}^{n}:\ \bigcup_{k=1}^{n}(\alpha_k,\beta_k)\supset A\wedge\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)<\varepsilon\,.$$

Тут η – міра Жордана.

Із означень випливає, що будь-яка множина жорданової міри нуль має лебеґову міру нуль, тобто

$$\boxed{\eta\, A=0\Rightarrow\mu\, A=0}$$

Теорему 5.10 можна переформулювати в термінах міри Жордана.

Теорема 5.10а. Якщо обмежена на $[a,b]$ функція $f(x)$ має на цьому відрізку множину A точок розриву жорданової міри нуль, то така функція інтегровна на $[a,b]$.

Приклад 5.17

5.17.1. Будь-яка скінченна множина має нульову міру Жордана, а тому й Лебеґа. Цей факт доводиться так, як це було зроблено в доведенні теореми 5.11.

5.17.2. Множина $\text{A}=\left\{0,\dfrac{1}{n},n\in\mathbb{N}\right\}$ має нульову міру Жордана, а тому і Лебеґа. Це доводиться так, як у прикладі 5.16.

5.17.3. Доведемо, що будь-яка зчисленна множина має лебеґову міру нуль. Оскільки множина є зчисленною, то перенумеруємо її елементи: $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. Покриємо кожну точку r_n окремо інтервалом (α_n,β_n) довжини, меншої за $\dfrac{\varepsilon}{2^n}$.

Тоді $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{N}(\beta_k-\alpha_k)<\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon\cdot\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\varepsilon\,.$

5.17.4. Розглянемо для ознайомлення **множину Кантора**. Її будують в такий спосіб. Відрізок $[0;1]$ ділимо на три рівні частини й відкидаємо точки середнього інтервалу $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. Ті відрізки, що залишилися, ділимо кожний на три рівні частини і з кожного відкидаємо середній інтервал, тобто відкидаємо точки інтервалів $\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)$ і $\left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)$. Потім знову ті відрізки, що залишилися, ділимо на 3 частини й відкидаємо середні інтервали, тобто $\left(\frac{1}{27};\frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27};\frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27};\frac{20}{27}\right)$, $\left(\frac{25}{27};\frac{26}{27}\right)$. Процес продовжуємо до нескінченності. Об'єднання усіх відкинутих інтервалів задає *відкриту канторову* множину G:

$$G=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)\bigcup\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)\bigcup\left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)\bigcup\left(\frac{1}{27};\frac{2}{27}\right)\bigcup\left(\frac{7}{27};\frac{8}{27}\right)\bigcup\left(\frac{19}{27};\frac{20}{27}\right)\bigcup$$
$$\bigcup\left(\frac{25}{27};\frac{26}{27}\right)\bigcup\ldots,$$

а множина F, що в результаті залишилася – *замкнену канторову множину:* $F=[0;1]\setminus G$ (рис. 5..8).

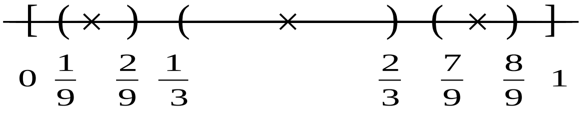


Рис. 5..8.

В курсі «Функціональний аналіз» буде доведено, що замкнена канторова множина F має лебеґову міру нуль (див., наприклад, [[1], с. 24-26].

Будемо говорити, що деяка властивість виконується *майже скрізь на множині* $M\subset\mathbb{R}$, якщо вона має місце у всіх точках M, окрім множини точок із M, яка має лебеґову міру нуль.

Мають місце логічні висловлювання:

$$\eta\, A=0\Rightarrow\mu\, A=0,$$
$$\mu\, A=0\not\Rightarrow\eta\, A=0.$$

Дамо пояснення останньому на прикладі.

5.17.5. Розглянемо множину $\mathbb{Q}\bigcap[0;1]$. Ця множина є зчисленною, тому $\mu\left(\mathbb{Q}\bigcap[0;1]\right)=0$. Доведемо, що множина $\mathbb{Q}\bigcap[0;1]$ не має жорданової міри нуль.

Припустимо супротивне:

$$\eta A=0\Rightarrow\forall\,\varepsilon>0\,\exists\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k=1}^{n}:\ \bigcup_{k=1}^{n}(\alpha_k,\beta_k)\supset A\wedge\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)<\varepsilon.$$

---

[1] Федак І.В. Елементи теорії міри та інтеграла Лебега: навчальний посібник (Рекомендовано МОН України як навчальний посібник для студентів напрямів підготовки "математика" вищих навчальних закладів. Івано-Франківськ: Сімик, 2011. 168с.URL: https://cutt.ly/2wjKPLqB

Довжина відрізка [0;1] дорівнює 1, тому можна знайти відрізок $[c,d]$, що лежить усередині доповнення до побудованого покриття, тобто

$$\exists [c,d]\subset[0,1]\setminus\bigcup_{k=1}^{n}(\alpha_k,\beta_k):\quad d-c\neq 0.$$

За *лемою про наближення дійсних чисел раціональними* [**2**, с. 151], між будь-якими двома дійсними числами лежить хоча б одне раціональне число, тобто

$$\exists q\in(c,d)\bigcap\mathbb{Q}.$$

Отримане означає, що точка q залишилася не покритою інтервалами $\{(\alpha_k,\beta_k)\}$. Отримана суперечність доводить той факт, що ця множина не має жорданової міри нуль.

Зауважимо, що будь-яка зчисленна і скінченна множини мають Лебеґову міру нуль, але не будь-яка зчисленна множина має жорданову міру нуль, тобто

A – скінченна $\Rightarrow$ $\eta A=0\Rightarrow\mu A=0$,
A – зчисленна $\Rightarrow\mu A=0$, а з приводу рівності $\eta A=0$ нічого не можна стверджувати

☝ **Теорема 5.13** (*критерій Лебеґа інтегровності функції*). Для того, щоб функція $f(x)$ була інтегровною за Ріманом на $[a,b]$, необхідно й достатньо, щоб:

1) функція $f(x)$ була обмеженою на $[a,b]$;

2) множина A точок її розриву на $[a,b]$ мала лебеґову міру нуль, тобто $\mu A=0$.

Доведення див., наприклад, за попереднім посиланням, с. 83-84.

☝ **<u>ВИСНОВОК</u>. Класи інтегровних за Ріманом на $[a,b]$ функцій:**

1) неперервні,
2) обмежені монотонні,
3) обмежені, що мають множину A точок розриву, яка є:
    а) скінченною,
    б) зчисленною,
    в) іншого типу, коли $\eta A=0$ або $\mu A=0$

7. Властивості інтеграла Рімана

7.1. Група властивостей, що виражаються рівностями. Адитивність інтеграла Рімана ☝

Розглянемо функцію $f(x)$, визначену в точці a скінченним значенням. Будемо за означенням вважати, що інтеграл Рімана від такої функції, взятий у межах від точки a до точки a, дорівнює нулю, тобто

$$\int_a^a f(x)dx=0.$$

Цю властивість слід вважати домовленістю.

1° Якщо $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$, тоді:

1) вона інтегровна *на орієнтованому відрізку* $[b,a]$,

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2° *Властивість лінійності інтеграла*:

якщо $f(x)$ і $g(x)$– інтегровні на $[a,b]$, тоді:

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha f(x) + \beta g(x)$ – інтегровна на $[a,b]$,

2) $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$.

3° Якщо $f(x)$ і $g(x)$– інтегровні на $[a,b]$, тоді $f(x)\cdot g(x)$ – інтегровна на відрізку $[a,b]$.

4° Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, то вона інтегровна на будь-якому відрізку, що міститься в $[a,b]$.

5° Якщо $f(x)$ – інтегровна на $[a,c]$ і на $[c,b]$, де $a < c < b$, то

1) $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$,

2) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (*властивість адитивності інтеграла*).

Доведення властивостей

Доведення властивості 1°. За означенням відрізка $[a,b]$ повинна виконуватися нерівність $a \le b$. Визначимо орієнтований відрізок:

$$[b,a] \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R} : b \ge x \ge a\}.$$

Розглянемо розбиття орієнтованого відрізка:

$$b = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_{k-1} > x_k > \ldots > x_{n-1} > x_n = a,$$

тоді інтегральна сума, що відповідає йому, має вигляд:

$$\sigma_{[b,a]} = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)(x_k - x_{k-1}) = \left\| \text{тут } x_{k-1} \ge \alpha_k \ge x_k \right\| = -\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= -\sigma_{[a,b]} - \text{інтегральна сума для } f(x) \text{ на } [a,b] \text{ з розбиттям}$$

$$a = x_n < x_{n-1} < \ldots < x_k < x_{k-1} < \ldots < x_2 < x_1 < x_0 = b \Rightarrow$$

1) $\underset{\exists}{\underbrace{\lim_{d\to 0} \sigma_{[b,a]}}} \overset{}{\underset{\Leftarrow}{=}} -\underset{\exists}{\underbrace{\lim_{d\to 0} \sigma_{[a,b]}}} \Rightarrow f(x)$ – інтегровна на $[b,a]$,

2) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$. ■

Доведення властивості 2°. Розглянемо довільне розбиття $R = \{x_k\}$ відрізка $[a,b]$ і довільний набір проміжних точок $P = \{c_k\}$, пов'язаних з ним. Тоді

$$\sigma_{\alpha f + \beta g} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f(c_k) + \beta g(c_k))\Delta x_k =$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k + \beta \sum_{k=1}^{n} g(c_k)\Delta x_k = \alpha \sigma_f + \beta \sigma_g \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{d\to 0}(\alpha\sigma_f+\beta\sigma_g)=\alpha\lim_{d\to 0}\sigma_f+\beta\lim_{d\to 0}\sigma_g \quad \Rightarrow$$

$$\exists \qquad \Leftarrow \quad (\exists \quad \wedge \quad \exists)$$

1) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R} \quad \alpha f(x)+\beta g(x)-$ інтегровна на $[a,b]$,

2) $\int\limits_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int\limits_a^b f(x)dx+\beta\int\limits_a^b g(x)dx$. ■

Зауваження 5.5. Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, а $g(x)$ задана й обмежена на $[a,b]$, причому $f(x)$ і $g(x)$ відрізняються лише в точках скінченної множини, тоді $g(x)$ інтегровна на $[a,b]$ і

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Доведення. Розглянемо функцію $h(x)=f(x)-g(x)$ на відрізку $[a,b]$. Оскільки функція $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, то вона обмежена на $[a,b]$. Функція $g(x)$ задана й обмежена на $[a,b]$ за умовою. Отже, $h(x)$ обмежена на відрізку$[a,b]$ й у всіх точках цього відрізка, окрім скінченної кількості, дорівнює нулю. Внаслідок *теореми 5.11*, функція $h(x)$ інтегровна й

$$\int\limits_a^b h(x)\,dx=0.$$

Застосовуючи *властивість лінійності визначеного інтеграла*, одержимо:

$$\underset{\exists}{\int\limits_a^b g(x)\,dx}=\int\limits_a^b\big(f(x)-h(x)\big)dx\underset{\Leftarrow}{=}\int\limits_a^b f(x)\,dx\underset{(\exists\quad\wedge\quad\exists)}{-}\int\limits_a^b h(x)\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx.\ ■$$

Доведення властивості 3$^{\mathrm{o}}$ проведемо у два етапи.

Етап 1. Розглянемо інтегровну на $[a,b]$ функцію $h(x)$. Доведемо, що $h^2(x)-$ інтегровна на $[a,b]$. Для цього введемо позначення:

$H=\sup\limits_{[a,b]}h(x)$, $H_k=\sup\limits_{[x_{k-1},x_k]}h(x)$; $\quad h_k=\inf\limits_{[x_{k-1},x_k]}h(x)$, $\alpha_k,\beta_k\in[x_{k-1},x_k]$,

$\omega_k(h),\ \omega_k(h^2)-$коливання функцій $h(x)$ і $h^2(x)$ на k-му відрізку розбиття.

Має місце нерівність:

$$\left|h^2(\alpha_k)-h^2(\beta_k)\right|=\left|h(\alpha_k)-h(\beta_k)\right|\cdot\left|h(\alpha_k)+h(\beta_k)\right|\le$$

$$\le\left|h(\alpha_k)-h(\beta_k)\right|\cdot\left(\left|h(\alpha_k)\right|+\left|h(\beta_k)\right|\right)\le$$

$$\le 2H\cdot\left|h(\alpha_k)-h(\beta_k)\right|\le 2H\cdot\sup_{\alpha_k,\beta_k\in[x_{k-1},x_k]}\left|h(\alpha_k)-h(\beta_k)\right|=2H\cdot\omega_k(h).$$

Звідки $\omega_k(h^2)\le 2H\cdot\omega_k(h).$ Тоді

$$0\le\sum_{k=1}^n\omega_k(h^2)\cdot\Delta x_k\le 2H\cdot\sum_{k=1}^n\omega_k(h)\cdot\Delta x_k.$$

$$\searrow \qquad \Downarrow \qquad \swarrow \quad d\to 0$$

$$0$$

Тому, за третім критерієм Дарбу, $h^2(x)-$ інтегровна на $[a,b]$.

Етап 2. Оскільки $f(x)$ і $g(x)$ – інтегровні на $[a,b]$, то

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{4}\underbrace{\left[\underbrace{\underbrace{\Big(\underbrace{f(x)}_{\text{інт.}}+\underbrace{g(x)}_{\text{інт.}}\Big)^2}_{\text{інт.}\ \ (2^o)}}_{\text{інт.}\ \ (\text{етап 1})}-\underbrace{\underbrace{\Big(\underbrace{f(x)}_{\text{інт.}}-\underbrace{g(x)}_{\text{інт.}}\Big)^2}_{\text{інт.}\ \ (2^o)}}_{\text{інт.}\ \ (\text{етап 1})}\right]}_{\text{інт.}\ \ (2^o)}.\ \blacksquare$$

Доведення властивості 4°. Функція інтегровна на $[a,b]$ $\Rightarrow$ (за першим критерієм Дарбу)

$$\lim_{d\to0}(\overline{S}_{[a,b]}-\underline{S}_{[a,b]})=0\Rightarrow\forall\varepsilon>0\,\exists\,\delta>0:\forall\,R:\quad d<\delta\Rightarrow\overline{S}_{[a,b]}-\underline{S}_{[a,b]}<\varepsilon. \tag{5.23}$$

Розглянемо відрізок $[c,d]\subset[a,b]$, який лежить усередині відрізка $[a,b]$. Нехай R^* – довільне розбиття відрізка $[c,d]$ з діаметром, меншим за те δ, що знайдено в (5.23). Позначимо через R' те розбиття $[a,b]$, яке містить в собі R^* і має діаметр, менший за δ. Інтегральні суми, що відповідають R', будемо помічати штрихом. Матимемо:

1) внаслідок (5.23) $d(R')<\delta\Rightarrow\overline{S'}_{[a,b]}-\underline{S'}_{[a,b]}<\varepsilon$,

2) $\overline{S'}_{[a,b]}-\underline{S'}_{[a,b]}=\underbrace{\sum_{[a,c]}(M_k'-m_k')\Delta x_k}_{\geq0}+\sum_{[c,d]}(M_k'-m_k')\Delta x_k+$

$$+\underbrace{\sum_{[d,b]}(M_k'-m_k')\Delta x_k}_{\geq0}<\varepsilon\Rightarrow\sum_{[c,d]}(M_k'-m_k')\Delta x_k<\varepsilon\ \Rightarrow\ \overline{S}_{[c,d]}-\underline{S}_{[c,d]}<\varepsilon\ .$$

Отже, отримано: $\forall\varepsilon>0\,\exists\,\delta>0:\forall\,R^*:\quad d(R^*)<\delta\Rightarrow\overline{S}_{[c,d]}-\underline{S}_{[c,d]}<\varepsilon$

$\Rightarrow\lim\limits_{d\to0}(\overline{S}_{[c,d]}-\underline{S}_{[c,d]})=0\quad\Rightarrow\ f(x)$ – інтегровна на $[c,d]$ за першим критерієм Дарбу. ■

Доведення властивості 5°. Доведемо спочатку першу частину властивості.

1. Розглянемо довільне розбиття $R[a;b]$ відрізка $[a,b]$. Згідно з *властивістю 2 сум Дарбу*, додавання до точок розбиття додаткових точок призводить до того, що нижня сума Дарбу не зменшується. Тому нижня сума $\underline{S}(R[a;b])$ для довільного розбиття $R[a;b]$ і нижня сума $\underline{S}(R[a;b]\cup\{c\})$ для розбиття $R[a;b]\cup\{c\}$, що містить точку c, пов'язані нерівністю

$$\underline{S}(R[a;b])\leq\underline{S}(R[a;b]\cup\{c\}).$$

Позначимо через $\underline{S}\big((R[a;b]\cup\{c\})\cap[a;c]\big)$ суму тих доданків із $\underline{S}(R[a;b]\cup\{c\})$, що відповідають відрізкам із $[a;c]$, а через $\underline{S}\big((R[a;b]\cup\{c\})\cap[c;b]\big)$ тих, що відповідають $[c;b]$. Тоді

$$\underline{S}(R[a;b]\cup\{c\})=\underline{S}\big((R[a;b]\cup\{c\})\cap[a;c]\big)+\underline{S}\big((R[a;b]\cup\{c\})\cap[c;b]\big).$$

Із зазначеного вище й означення нижніх інтегралів Дарбу $I_*([a;c]) = \sup\limits_R\{\underline{S}(R[a;c])\}$ і $I_*([c;b]) = \sup\limits_R\{\underline{S}(R[c;b])\}$, матимемо:

$$\underline{S}\big(R[a;b]\big) \le \underline{S}\Big(\big(R[a;b]\cup\{c\}\big)\cap[a;c]\Big) + \underline{S}\Big(\big(R[a;b]\cup\{c\}\big)\cap[c;b]\Big) \le$$
$$\le I_*([a;c]) + I_*([c;b])$$

Через довільність вибору розбиття $R[a;b]$ відрізка $[a,b]$ із останньої нерівності й означення нижнього інтеграла Дарбу $I_*([a;b])$ на відрізку$[a,b]$ отримаємо:

$$I_*([a;b]) \le I_*([a;c]) + I_*([c;b]).$$

2. Тепер розглянемо довільні розбиття $R[a;c]$ і $R[c;b]$ відрізків $[a;c]$ і $[c;b]$ відповідно, тоді

$$\underline{S}\big(R[a;c]\big) + \underline{S}\big(R[c;b]\big) = \underline{S}\big(R[a;b]\cup\{c\}\big) \le I_*([a;b]).$$

Унаслідок довільності вибору розбиттів $R[a;c]$ і $R[c;b]$, одержимо:

$$I_*([a;c]) + I_*([c;b]) \le I_*([a;b]).$$

3. Із нерівностей, отриманих в пунктах 1 і 2 , маємо:

$$I_*([a;c]) + I_*([c;b]) = I_*([a;b]).$$

Аналогічну рівність можна довести для верхніх сум Дарбу. А саме:

$$I^*([a;c]) + I^*([c;b]) = I^*([a;b]).$$

4. Оскільки функція інтегровна на кожному з відрізків $[a;c]$ і $[c;b]$, то, згідно з *другим критерієм Дарбу інтегровності функції* (Теорема 5.7), нижній і верхній інтеграли на цих відрізках рівні, отже,

$$I_*([a;b]) = I_*([a;c]) + I_*([c;b]) = I^*([a;c]) + I^*([c;b]) = I^*([a;b]).$$

Рівність $I_*([a;b]) = I^*([a;b])$ доводить інтегровність функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Першу частину властивості доведено.

Доведемо тепер другу частину властивості.

5. Згідно з першим критерієм Дарбу, з інтегровності функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ випливає, що $\lim\limits_{d\to 0}\Big[\overline{S}\big(R[a;b]\big) - \underline{S}\big(R[a;b]\big)\Big] = 0$. Окрім іншого, при доведенні достатності теореми 5.6 отримано: якщо для обмеженої функції має місце зазначена гранична рівність, тоді виконується співвідношення

$$I_*([a;b]) = I^*([a;b]) = \int_a^b f(x)dx.$$

Оскільки (за умовою) функція $f(x)$ інтегровна на відрізках $[a;c]$ і $[c;b]$, то на цих відрізках мають місце аналогічні рівності:

$$I_*([a;c]) = I^*([a;c]) = \int_a^c f(x)\,dx, \quad I_*([c;b]) = I^*([c;b]) = \int_c^b f(x)\,dx.$$

6. Зі співвідношень пунктів 4 і 5 матимемо:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Властивість доведено повністю. ■

Зауваження 5.6. Властивість адитивності

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

виконується також у випадку, коли $c \notin (a,b)$ у припущенні про існування інтеграла за найширшим відрізком.

Дійсно, у випадку інтегровності функції $f(x)$ на найширшому відрізку, за *властивістю 5^o*, вона буде інтегровною на інших двох відрізках. Нехай найширшим буде відрізок $[a,c]$. Застосовуючи *властивість 5^o* адитивності інтеграла та *властивість 1^o* про інтеграл вздовж орієнтовного відрізка, матимемо:

$$\int_a^c f(x)dx \overset{5^o}{=} \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \overset{1^o}{=} \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad \blacksquare$$

7.2. Група властивостей, що виражаються нерівностями. Теореми про середнє значення ☝

6^o $\left.\begin{array}{l} f(x) - \text{інтегровна на} [a,b], \\ f(x) \ge 0 \; \forall \, x \in [a,b], \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0.$

7^o $\left.\begin{array}{l} f(x) \wedge g(x) - \text{інтегровні на} [a,b], \\ f(x) \le g(x) \; \forall \; x \in [a,b], \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$

8^o $\left.\begin{array}{l} f(x) - \text{інтегровна на} [a,b], \\ m \le f(x) \le M, \end{array}\right\} \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$

9^o *Теорема про середнє значення*:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - \text{інтегровна на} [a,b], \\ m = \inf\limits_{[a,b]} f(x), \quad M = \sup\limits_{[a,b]} f(x), \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \, \beta \in [m,M] : \int_a^b f(x)\,dx = \beta(b-a).$$

10^o *Теорема про середнє значення у випадку неперервності підінтегральної функції:*

$f(x)$ – неперервна на $[a,b]$

$$\Rightarrow \exists \, c \in \; [a,b] : \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

🗁**Означення 5.16.** *Середнім значення* інтегровної на $[a,b]$ функції $f(x)$ називають y

значення величини $\beta = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

Геометричний зміст теореми про середнє.

Якщо $f(x)$ невід'ємна і неперервна на $[a,b]$, тоді існує така точка c відрізка $[a,b]$, що площа криволінійної трапеції дорівнюватиме площі прямокутни x зі сторонами довжини $f(c)$ і $b-a$ (рис. 5..9).

11°
$$\left.\begin{array}{l} f(x)\wedge g(x)-\text{інтегровні на}[a,b],\\ g(x)\ge 0\ \ \forall\, x\in[a,b],\\ m=\inf\limits_{[a,b]} f(x),\quad M=\sup\limits_{[a,b]} f(x), \end{array}\right\}\Rightarrow m\int_a^b g(x)\,dx\le\int_a^b f(x)\,g(x)dx\le M\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

12° *Узагальнена теорема про середнє значення:*

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\wedge g(x)-\text{інтегровні на}[a,b],\\ g(x)\ \text{не змінює знак на}\ [a,b],\\ m=\inf\limits_{[a,b]} f(x),\quad M=\sup\limits_{[a,b]} f(x), \end{array}\right\}\Rightarrow \exists\beta\in[m,M]:\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\beta\int_a^b g(x)\,dx.$$

13° *Узагальнена теорема про середнє значення у випадку неперервності однієї з підінтегральних функцій*:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)-\text{неперервна на}[a,b],\\ g(x)-\text{інтегровна на}[a,b],\\ g(x)\ \text{не змінює знак на}\ [a,b], \end{array}\right\}\Rightarrow \exists\, c\in[a,b]:\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)\,dx\ .$$

Зауважимо, що у формулюваннях властивостей 11°–13°, дуже важливим є припущення про сталість знака функції $g(x)$ на $[a,b]$.

14° *Друга теорема про середнє значення*:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)-\text{інтегровна на}[a,b],\\ g(x)\ \text{монотонна на}[a,b], \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, c\in[a,b]:\int_a^b f(x)g(x)\,dx=g(a)\cdot\int_a^c f(x)\,dx+g(b)\cdot\int_c^b f(x)\,dx.$$

15° Якщо $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$, тоді

1) $|f(x)|$ – інтегровна на $[a,b]$,

2) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b |f(x)|\,dx\,.$

Зауваження 5.7. Із інтегровності функції $|f(x)|$ на $[a,b]$ не завжди випливає інтегровність на $[a,b]$ *(навести приклад самостійно ✍!).*

Доведення властивостей

6° Оскільки $f(x)\ge 0\ \forall x\in[a,b]$, то $\sigma=\sum\limits_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k\ge 0$ і внаслідок інтегровності функції на $[a,b]$

$$\exists\lim_{d\to 0}\sigma=\int_a^b f(x)dx\ge 0\,.\ \blacksquare$$

7° $f(x)\wedge g(x)-$інтегровні на$[a,b]\ \overset{2^o}{\Rightarrow}\ \varphi(x)=g(x)-f(x)$ інтегровна на $[a,b]$.

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x)=g(x)-f(x)\ge 0\ \ \forall\, x\in[a,b],\\ \varphi(x)-\text{інтегровна на}[a,b], \end{array}\right\}\ \overset{6^o}{\Rightarrow}\ \int_a^b\varphi(x)dx\ge 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0\,. \ ■$$

8° Застосуємо 7°:

$$\left.\begin{matrix} f(x) - \text{інтегровна на}\,[a,b], \\ m \le f(x) \le M \ \forall\, x \in [a,b], \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx, \\ m\int_a^b dx = m(b-a), \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)\,. \ ■$$

9° Застосуємо 8°:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad \Leftrightarrow m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M.$$

Нехай $\beta = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \Rightarrow \begin{cases} 1)\ m \le \beta \le M, \\ 2)\int_a^b f(x)dx = \beta(b-a). \end{cases}$ ■

10° Оскільки $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, то, за *другою теоремою Вейєрштрасса* [**2**, с. 161],

$$m = \inf_{[a,b]} f(x) = \min_{[a,b]} f(x)\,; \quad M = \sup_{[a,b]} f(x) = \max_{[a,b]} f(x)\,.$$

Оскільки $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, то, за *теоремою 5.9,* $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$. Застосуємо 9°:

$$\int_a^b f(x)dx = \beta(b-a)\,, \tag{5.28}$$

тут $\beta \in [m,M] = \left[\min_{[a,b]} f(x)\,; \max_{[a,b]} f(x)\right]$. За *теоремою Коші*, неперервна на $[a,b]$ функція набуває усіх своїх проміжних значень [**2**, с. 159]:

$$\exists\, c \in [a,b] : \beta = f(c)\,;$$

підставимо в (5.28), отримаємо

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)\,. \ ■$$

11° Із *властивості 3°* випливає, що внаслідок інтегровності на $[a,b]$ функцій $f(x)$ і $g(x)$, інтегровною на $[a,b]$ буде функція $f(x)\cdot g(x)$. Оскільки

$$\left.\begin{matrix} m \le f(x) \le M \quad \forall\, x \in [a,b], \\ g(x) \ge 0 \quad \forall\, x \in [a,b], \end{matrix}\right\} \Rightarrow m\,g(x) \le f(x)\,g(x) \le M\,g(x)\ \forall\, x \in [a,b],$$

то, застосувавши 7°, одержимо:

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx\ .\ \blacksquare$$

Якщо в тих же припущеннях про інтегровність функцій $f(x)$ і $g(x)$ і про обмеженість функції $f(x)$ припустити недодатність функції $g(x)$ на $[a,b]$, то матиме місце така оцінка інтеграла :

$$M\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le m\int_a^b g(x)dx\ .$$

(Доведіть це самостійно ✍!

12

12° Розглянемо випадок, коли функція $g(x)$ невід’ємна в усіх точках відрізка $[a;b]$. Виконуються всі припущення попередньої властивості і *властивості 6°*, тому

$$\forall\, x\in[a,b]\ \ g(x)\ge 0 \overset{6^{o}}{\Rightarrow} \int_a^b g(x)dx \ge 0 \overset{11^{o}}{\Rightarrow}\quad m\le \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}}_{=\beta} \le M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \int_a^b f(x)g(x)dx = \beta\int_a^b g(x)dx\,.$$

У випадку недодатності функції $g(x)$ на $[a,b]$ має місце оцінка інтеграла, виписана після доведення властивості 11°, тоді

$$\left.\begin{array}{l} \int_a^b g(x)dx \ge 0 \text{ (властивість } 6^{o}\text{);} \\ \\ M\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le m\int_a^b g(x)dx \end{array}\right\} \Rightarrow m\le \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}}_{=\beta} \le M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \int_a^b f(x)g(x)dx = \beta\int_a^b g(x)dx\,.\ \ \blacksquare$$

13° Доведення здійснюється аналогічно 10° із застосуванням 12°. Довести самостійно ✍. ■

14° Доведення другої теореми про середнє *вивчити самостійно* ✍ ([1, с. 67-69]). ■

15° Скористаємося інтегровністю $f(x)$ на $[a,b]$ і третім критерієм Дарбу:

---

[1] Курченко О.О. Інтегральне числення функцій однієї змінної: навч. посібник. Київ, 2016.140 с. URL: https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2018/03/INTEGR_2016_M.pdf

$$\left.\begin{array}{l} |f(x')-f(x'')|\ge \big||f(x')|-|f(x'')|\big|,\\ \omega_k^f=\sup\limits_{x',x''\in[x_{k-1},x_k]}|f(x')-f(x'')|,\\ \omega_k^{|f|}=\sup\limits_{x',x''\in[x_{k-1},x_k]}\big||f(x')|-|f(x'')|\big|,\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \omega_k^f\ge\omega_k^{|f|}$$

$$\Rightarrow\quad 0\le\sum_{k=1}^{n}\omega_k^{f}\cdot\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\omega_k^{|f|}\cdot\Delta x_k.$$

$$\begin{array}{ccccc} \searrow & & \Downarrow & & \swarrow \quad d\to 0\\ & & 0 & & \end{array}$$

Звідки й випливає інтегровність $|f(x)|$ на $[a,b]$.

Тепер перевіримо нерівність $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$. Нехай $\sigma_f,\sigma_{|f|}$ – інтегральні суми функцій $f(x)$ і $|f(x)|$ на відрізку $[a,b]$, тоді

$$|\sigma_f|=\left|\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_k)\cdot\Delta x_k\right|\le\sum_{k=1}^{n}|f(\alpha_k)|\cdot\Delta x_k=\sigma_{|f|},$$

а після граничного переходу при $d\to 0$ отримаємо потрібну нерівність. ■

8. Визначений інтеграл як функція верхньої межі

Розглянемо інтегровну на відрізку $[a,b]$ функцію $f(x)$. Маємо:

$$a\le x\le b\Rightarrow f(x)-\text{інтегровна на }[a,x]\Rightarrow\exists\int_a^x f(t)dt.$$

$$\forall\, x\in[a,b]\xrightarrow{\Phi}\int_a^x f(t)dt-\text{значення єдине }\forall\, x;\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\text{побудовано функцію на }[a,b]:\ \Phi(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

Властивості функції $\Phi(x)$

Властивість 1

$f(x)$ – інтегровна на $[a,b]\Rightarrow\Phi(x)$ – неперервна на $[a,b]$.

Властивість 2

$f(x)$ – неперервна на $[a,b]\Rightarrow\exists\,\Phi'(x)$ в будь-якій точці $x\in[a,b]$, до того ж $\Phi'(x)=f(x)\ \ \forall x\in[a,b]$.

Доведення властивості 1. Нехай $x\in[a,b]\wedge h+x\in[a,b]$, тоді

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt;\ \Phi(x+h)=\int_a^{x+h}f(t)dt;$$

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=\int_a^{x+h}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt.$$

За теоремою про середнє (див. *властивість 9^o*), $\exists\beta_{x,h}$ таке, що лежить поміж точною нижньою і верхньою межею функції $f(x)$ на відрізку, що сполучає точки x і $x+h$, для якого є вірною рівність

$$\int\limits_{x}^{x+h} f(t)dt=\beta_{x,h}\cdot(x+h-x)=\beta_{x,h}\cdot h.$$

Тоді

$$\lim_{h\to0}\big(\Phi(x+h)-\Phi(x)\big)=\lim_{h\to0}\left(\underset{\text{обм.}}{\beta_{x,h}}\cdot\underset{\text{н.м.}}{h}\right)=0.$$

Отже, $\Phi(x)$ – неперервна в точці $x\in[a,b]$. ■

Доведення властивості 2. Скористаємося теоремою про середнє у випадку неперервності підінтегральної функції (див. *властивість 10^o*): $\exists c_{x,h}$ таке, що лежить поміж x і $x+h$, для якого

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=\int\limits_{x}^{x+h} f(t)dt=f(c_{x,h})\cdot h.$$

Тоді

$$\lim_{h\to0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(c_{x,h})\cdot h}{h}=\lim_{h\to0}f(c_{x,h})=\left\|\begin{array}{c} f(x)-\text{непер. в т. } x \\ x\leqslant c_{x,h}\leqslant x+h \\ \searrow \quad \Downarrow \quad \swarrow \\ {\scriptstyle h\to0} \\ x \end{array}\right\|=f(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\exists\lim_{h\to0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\Phi'(x)=f(x).\ ■$$

☝ **Наслідок 5.4.** Функція $\Phi(x)=\int\limits_{a}^{x} f(t)dt$ є однією з первісних неперервної на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$.

☝ **Наслідок 5.5.** Неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ має первісну.

9. Основна теорема інтегрального числення. Формули заміни змінної та інтегрування частинами під знаком визначеного інтеграла

☝ **Теорема 5.14** (*основна теорема інтегрального числення, формула Ньютона-Лейбніца).* Якщо $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, а $F(x)$ – одна з її первісних, то має місце формула

$$\boxed{\int\limits_{a}^{b} f(t)dt=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b}$$

Доведення. Нехай $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, тоді, згідно з *наслідком* 5.4, функція $\Phi(x)$ – одна з первісних $f(x)$ на $[a,b]$. Якщо $F(x)$– інша первісна, то $\exists C\in\mathbb{R}$: $F(x)=\Phi(x)+C$. Знайдемо значення сталої C:

$$\left.\begin{array}{l} F(a)=\Phi(a)+C, \\ \Phi(a)=\int\limits_a^a f(t)dt=0, \end{array}\right\} \Rightarrow F(a)=0+C \Rightarrow C=F(a) \Rightarrow F(x)=\Phi(x)+F(a).$$

Отже,

$$F(b)=\Phi(b)+F(a) \Rightarrow \Phi(b)=F(b)-F(a),$$

й оскільки $\Phi(b)=\int\limits_a^b f(t)dt$, то

$$\int\limits_a^b f(t)dt=F(b)-F(a). \quad \blacksquare$$

Для неперервної функції $f(x)$ на $[a,b]$, за теоремою про середнє, формулою Ньютона-Лейбніца і *властивістю 1 функції* $\Phi(x)$, маємо:

$$\begin{array}{ccc} \int\limits_a^b f(x)dx & = f(c)\cdot(b-a), & \text{де } a<c<b; \\ \| & \| & \\ F(b)-F(a) & = F'(c)\cdot(b-a). & \end{array}$$

Остання формула є формулою Лагранжа в диференціальному численні. Таким чином, установлено *зв'язок між теоремою про середнє в інтегральному численні й формулою Лагранжа – в диференціальному.*

✍ **Теорема 5.15** *(заміна змінної під знаком визначеного інтеграла).*

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - \text{неперервна на} [a,b]; \\ x=\varphi(t) - \text{неперервно диференційовна на } [\alpha,\beta]; \\ \varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b, \\ \varphi[\alpha,\beta]=[a,b] \text{ (образ відрізка } [\alpha,\beta] \text{ співпадає з відрізком } [a,b]); \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}$$

Доведення: $f(x)$ – неперервна на $[a,b] \Rightarrow$

1) $\exists \int\limits_a^b f(x)\,dx$;

2) $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ – одна з первісних $f(x)$ на $[a,b]$ (*Наслідок 5.4*).

Застосовуємо формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Позначимо через Y образ відрізка $[a,b]$ під дією функції $f(x)$, тобто $Y=f[a,b]$. Перевіримо можливість застосування до функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ формули Ньютона-Лейбніца:

$\varphi(t)$ – неперервно диференційовна на $[\alpha,\beta] \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \varphi'(t) \text{ – неперервна на } [\alpha,\beta], \\ f(x) \text{ – неперервна на } [a,b], \\ \left|\overline{\underline{[\alpha,\beta]\xrightarrow{\varphi}[a,b]\xrightarrow{f}Y}}\right| \end{array}\right\} \Rightarrow f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) \text{ – неперервна на } [\alpha,\beta] \Rightarrow$$

до функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ можна застосовувати формулу Ньютона-Лейбніца. Оскільки ця функція неперервна на $[\alpha,\beta]$, то вона на цьому відрізку має первісну, позначимо її $\Psi(t)$, тоді

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Psi(\beta) - \Psi(\alpha).$$

Встановимо зв’язок між первісними $\Psi(t)$ і $\Phi(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi'(x) = f(x) \Rightarrow (\Phi(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t), \\ \Psi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t), \end{array}\right\} \Rightarrow (\Phi(\varphi(t)))' = \Psi'(t) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Psi(t) = \Phi(\varphi(t)) + C.$$

Отже,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Psi(\beta) - \Psi(\alpha) = \Phi(\varphi(\beta)) + C - \Phi(\varphi(\alpha)) - C =$$

$$= \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x)\,dx.. \blacksquare$$

Приклад 5.18. Обчислимо такий визначений інтеграл за допомогою формули заміни змінної:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \left\| \begin{array}{l} x=\sin t,\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|, \\ dx = \cos t\,dt;\ x=-1 \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{2},\ \ x=1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right\| =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cdot\cos t\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\cdot\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}.$$

✍ **Теорема 5.16** *(формула інтегрування частинами під знаком визначеного інтеграла).* Якщо $u(x)$ і $v(x)$ – неперервно диференційовні на $[a,b]$, тоді виконуються формула:

$$\boxed{\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)}$$

Доведення. Оскільки $u(x)$ – диференційовна на $[a,b]$, то $u(x)$ неперервна на $[a,b]$, окрім того, $v'(x)$ неперервна на $[a,b]$ і $dv(x) = v'(x)dx$, тому, за *теоремою 5.9,*

$$\exists \int_a^b u(x)\cdot dv(x) = \int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx\ .$$

Аналогічно доводиться, що

$$\exists \int_a^b v(x) \cdot du(x) = \int_a^b v(x) \cdot u'(x)dx \ .$$

Крім того, обидві функції $u(x) \cdot v'(x)$ і $v(x) \cdot u'(x)$ мають первісні на $[a,b]$ (*Наслідок 5.5*). Нехай $\varphi(x) = \int v(x)\, du(x)$. Оскільки виконується формула інтегрування частинами для невизначеного інтеграла

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x),$$

то з урахуванням позначення маємо:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \varphi(x)$$

є первісною функції $u(x)v'(x)$.

Застосовуємо формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = \big(u(x)v(x) - \varphi(x)\big)\Big|_a^b = u(x)v(x)\Big|_a^b - \varphi(x)\Big|_a^b = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)\ . \ \blacksquare$$

Приклад 5.19 . Обчислити інтеграл $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \ \left(n \in \mathbb{N}\right)$.

Застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \left\| \begin{matrix} u = \sin^{n-1} x; \quad du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx; \\ dv = \sin x dx; \ \ v = -\cos x \end{matrix} \right\| =$$

$$= (-\cos x) \cdot \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\cos^2 x \sin^{n-2} x dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)\sin^{n-2} x dx =$$

$$= (n-1)\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx}_{I_{n-2}} - (n-1)\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.}_{I_n}$$

Звідки

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n;$$

$$n \cdot I_n = (n-1)I_{n-2};$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2};$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}; \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1\ .$$

Тоді

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \frac{2k-5}{2k-4} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}\,;$$

$$I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot 1.$$

Тут ми застосували означення подвійних факторіалів:

$$(2k-1)!!\overset{def}{=}1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1),\quad (2k)!!\overset{def}{=}2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2k).$$

тобто $n!!-$ це добуток натуральних чисел, що не перевищують n та однієї парності з ним. Наприклад $7!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot 7=105$, а $8!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot 8=384$.

Отже, отримано формулу:

☝

$$\boxed{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot D_n,\quad D_n=\begin{cases}1, & n-\text{непарне},\\ \frac{\pi}{2}, & n-\text{парне},\end{cases}\qquad n\in\mathbb{N}}$$

Виведемо формулу Валліса[1]. Задля цього проінтегруємо нерівність

$$\sin^{2k+1}x\le\sin^{2k}x\le\sin^{2k-1}x$$

в межах від 0 до $\frac{\pi}{2}$: $I_{2k+1}\le I_{2k}\le I_{2k-1}$. Підставляючи значення інтегралів, отримаємо:

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\le\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\le\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}.$$

Помножимо обидві частини останньої нерівності на $\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}$, одержимо:

$$\underbrace{\frac{\left[(2k)!!\right]^2}{\left[(2k-1)!!\right]^2(2k+1)}}_{a_n}\le\frac{\pi}{2}\le\underbrace{\frac{\left[(2k)!!\right]^2}{\left[(2k-1)!!\right]^2\cdot 2k}}_{b_n}.$$

Доведемо, що відстань між правою і лівою частинами останньої нерівності є нескінченно малою послідовністю. Введемо позначення:

$$a_n=\frac{\left[(2k)!!\right]^2}{\left[(2k-1)!!\right]^2(2k+1)};\quad b_n=\frac{\left[(2k)!!\right]^2}{\left[(2k-1)!!\right]^2\cdot 2k},$$

тоді

$$\lim_n(b_n-a_n)=\lim_n\frac{\left[(2k)!!\right]^2}{\left[(2k-1)!!\right]^2}\cdot\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}\right)=\lim_n\underbrace{\frac{\left[(2k)!!\right]^2}{\left[(2k-1)!!\right]^2(2k+1)}}_{\substack{a_n\\ \underset{\text{обм.}}{0\le a_n\le\frac{\pi}{2}}}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2k}}_{\text{н.м.п.}}=0.$$

Тому $\lim\limits_n a_n=\lim\limits_n b_n=\frac{\pi}{2}$. Враховуючи позначення, одержимо:

$$\boxed{\lim_n\frac{\left[(2k)!!\right]^2}{\left[(2k-1)!!\right]^2}\cdot\frac{1}{(2k+1)}=\frac{\pi}{2}-\textit{формула Валліса}}$$

Формула Валліса має історичне значення як перша формула обчислення ірраціонального числа π через границю послідовності раціональних чисел. Цю

---

[1] **Валліс (Уолліс) Джон** (23.11.1616 – 28.10.1703) – англійський математик, один із засновників і перших членів Лондонського королівського товариства. Професор геометрії Оксфордського університету. Валліс – перший англійський математик, який почав займатися аналізом нескінченно малих. Його головна робота «Арифметика нескінченних» (1656) мала важливе місце в передісторії інтегрального числення.

формулу також застосовують в математичних дослідженнях, зокрема при виведенні формули Стірлінга[1].

10. Інтегрування парних і непарних функцій

На практиці іноді потрібно буває проінтегрувати парну або непарну функцію в симетричних межах інтегрування. Саме такий випадок буде розглянуто нижче. Доведемо таке: якщо функція $f(x)-$ інтегровна на $[-a;a]$, то

$$f(x)-\text{парна}\Rightarrow\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx,$$

$$f(x)-\text{непарна}\Rightarrow\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$$

Нехай задана функція – парна. Оскільки $f(x)-$ інтегровна на $[-a;a]$, то границя її інтегральних сум не залежить від способу розбиття та вибору проміжних точок. Розглянемо розбиття, що містить точку 0, а точки розбиття, розташовані справа й зліва від точки 0, симетричні відносно неї; тобто

$$-a=x_0<x_1<...<x_m=0<x_{m+1}<...<x_{2m}=a;\quad -x_k=x_{2m-k}\ \ (k=\overline{0,m}).$$

За проміжні точки оберемо середини відрізків розбиття, тобто $\alpha_j=\frac{1}{2}\left(x_j+x_{j-1}\right)$ $(j=\overline{1,2m})$. Тоді $-\alpha_k=\alpha_{2m-k+1}$, а для парної функції $f(\alpha_k)=f(\alpha_{2m-k+1})$ $(k=\overline{1,m})$. В результаті одержимо інтегральну суму, для якої

$$\sigma_{[-a;a]}=\sum_{k=1}^{m}f\left(\alpha_k\right)\left(x_k-x_{k-1}\right)+\sum_{k=1}^{m}f\left(\alpha_{2m-k+1}\right)\left(x_{2m-(k-1)}-x_{2m-k}\right)=$$

$$=2\sum_{k=1}^{m}f\left(\alpha_{2m-k+1}\right)\left(x_{2m-k+1}-x_{2m-k}\right)=2\sigma_{[0;a]}.$$

Оскільки функція $f(x)-$ інтегровна на $[-a;a]$, то, за *властивістю 4^o визначеного інтеграла*, ця функція інтегровна на $[0;a]$. Тому після граничного переходу при діаметрі розбиття, що прямує до нуля, отримаємо:

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\lim_{d\to 0}\sigma_{[-a;a]}=\lim_{d\to 0}2\sigma_{[0;a]}=2\int_{0}^{a}f(x)dx.$$

Відповідне співвідношення для інтеграла від непарної функції виводиться аналогічно.

---

[1] Див с. 128-130 у посібнику: Д'яченко Н.М., Красікова І.В., Панасенко Є.В. Математичний аналіз – ІІ: Числові та функціональні ряди: навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра освітньопрофесійних програм «Математика», «Середня освіта (Математика)». Запоріжжя: ЗНУ, 2017. –244 с.

§3. Застосування визначених інтегралів

1. Обчислення довжин ліній за допомогою інтегралів

Розглянемо на декартовій площині множину точок $M(x,y)$, координати яких задовольняють рівнянням

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in\left[t_0,T\right], \tag{5.29}$$

де функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервні на відрізку $\left[t_0,T\right]$. Кажуть, що таким чином утворюється *плоска крива*. Аргумент t функцій із (5.29) називають параметром.

🗁 **Означення 5.17.** Множину точок $\{M\}$ на декартовій площині, координати яких задовольняють рівнянням (5.29), називають *плоскою простою кривою* L, якщо кожній точці $M(x,y)$ із цієї множини відповідає єдине значення параметра $t\in\left[t_0,T\right]$. Тобто

$$\forall M\left(x,y\right)\in\{M\}\ \exists! t\in\left[t_0,T\right]:\ x=\varphi(t), y=\psi(t).$$

Те саме можна сформулювати в інший спосіб. Множину точок $\{M\}$ на декартовій площині, які задаються рівняннями (5.29), називають *плоскою простою кривою* L, якщо двом різним значенням параметра $t_1,t_2\in[t_0,T]$ відповідають дві різні точки площини $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$, координати яких задовольняють рівнянням (5.29). Тобто

$$\forall t_1,t_2\in(t_0,T) \quad t_1\neq t_2 \Rightarrow M_1(\varphi(t_1),\psi(t_1))\neq M_2(\varphi(t_2),\psi(t_2)).$$

При цьому кажуть, що «рівняння (5.29) визначають плоску просту криву» або «плоска проста крива є параметризованою рівняннями (5.29)». Зауважимо, що одна й та сама крива може бути параметризованою різними способами, тобто різними рівняннями типу (5.29).

Із означення випливає, що проста плоска крива не може мати самоперетинів.

🗁 **Означення 5.18.** Криву називають *простою зімкненою*, якщо двом значенням параметра $t=t_0$ і $t=T$ відповідає одна і та сама точка площини, а всім іншим різним значенням параметра $t_1,t_2\in(t_0,T)$ відповідають дві різні точки площини $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$, координати яких задовольняють рівнянням (5.29).

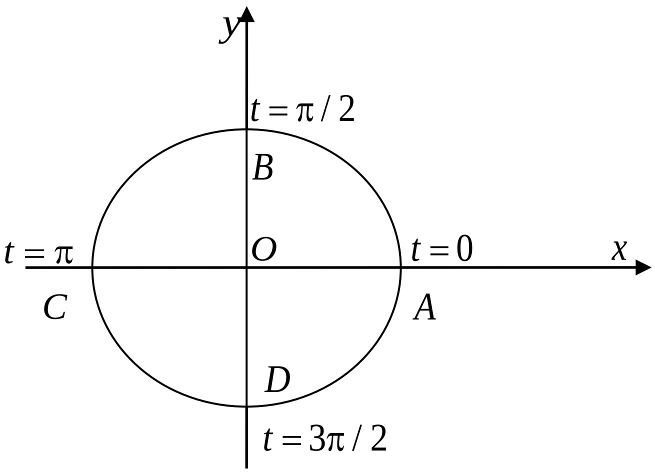


Рис. 1.10.

Приклад 5.20. Розглянемо множину точок площини, які задаються рівняннями

$$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases} \quad t\in\left[0,2\pi\right]. \tag{5.30}$$

Систему (5.30) можна замінити

еквівалентним рівнянням:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

яке визначає коло з центром в точці O(0,0) радіуса 1.

Крива L (коло), параметризована рівняннями (5.30), не є простою, оскільки точці *A* відповідають два різні значення параметра (див. рис. 5.10).

Якщо розглянути криву ABC, то параметризація

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$

задає просту криву ABC. Аналогічно крива CDA з параметризацією

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \qquad t \in [\pi, 2\pi]$$

визначає просту криву (дугу). Таким чином, коло L розбито на дві прості плоскі криві. Крива, параметризована рівняннями (5.30), є простою зімкненою.

Позначимо через $\{t\}$ множину, що може бути однією з чотирьох таких множин:

$$\{t\} = \left| \begin{array}{l} [t_0, T], \\ (-\infty; +\infty), \\ (-\infty; a], \\ [a, +\infty). \end{array} \right.$$

🗁 **Означення 5.19.** Нехай крива L визначається рівняннями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ на $\{t\}$, причому множину $\{t\}$ можна подати у вигляді скінченного об’єднання відрізків $\{t\} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [t_{i-1}, t_i]$, що не мають спільних внутрішніх точок, на кожному з яких крива, що задається цими рівняннями, є простою, то кажуть, що крива *є параметризовною*.

Задамо *відношення упорядкування на параметризовній кривій*. Будемо казати, що точка M_1 *передує* точці M_2 (позначення: $M_1 \prec M_2$) на простій кривій L, якщо відповідні значення параметрів t_1 і t_2, що задають точки M_1 і M_2, пов’язані нерівністю $t_1 < t_2$.

Якщо на кривій L задано відношення упорядкування, то кажуть, що на цій кривій задано *напрям оббігу кривої*. Пояснімо це.

Нехай рівняння

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, T]$$

визначають криву L. Якщо крива є параметризовною, то:

1) спочатку розіб’ємо множину $\{t\}$ на відрізки, що взаємно не перетинаються і на яких крива є простою;

2) потім упорядкуємо значення параметра в порядку його зростання;

3) завдяки заданому на ній відношенню порядку отримаємо:

$$\begin{array}{ccccccccccc} t_0 & < & t_1 < \ldots < t_{i-1} & < & t_i < \ldots < t_{n-1} & < t_n = T \\ \updownarrow & & \updownarrow \qquad\quad \updownarrow & & \updownarrow \qquad\quad \updownarrow & \updownarrow \\ M_0 & \prec & M_1 \prec \ldots \prec M_{i-1} & \prec & M_i \prec \ldots \prec M_{n-1} & \prec M_n \end{array}$$

утворення порядку (тут $M_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i))$).

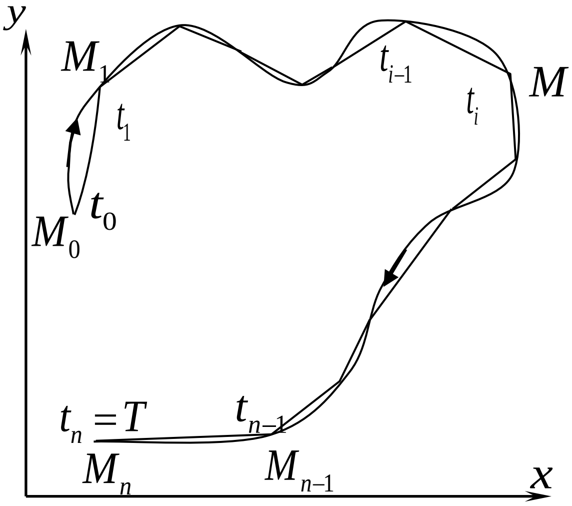


Рис. 5.11.

Введемо поняття довжини кривої. Будемо вважати, що довжина ламаної є визначеним поняттям. Введемо позначення: $P_{[M_{i-1},M_i]} = P_i$ – довжина ланки ламаної, $P = \sum_{i=1}^{n} P_i$ – довжина ламаної, що сполучає точки-вузли $M_0, M_1, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_{n-1}, M_n$ (див. рис. 5.11). Якщо вузли ламаної належать кривій, то кажуть, що *ламана вписана в криву*.

При додаванні точок розбиття параметра t і, відповідно, вузлів ламаної, довжина ламаної не зменшиться. Дійсно, додавання, наприклад, одного додаткового вузла ламаної, що відповідає новій точці розбиття значень параметра t, призводить до заміни однієї ланки ламаної двома іншими. Дві нові ланки й стара утворюють трикутник, тому сума довжин двох нових ланок не менша за довжину однієї старої. Оскільки інші ланки нової і старої ламаної не змінюються, то довжина нової ламаної не менша за довжину старої.

☝ 🗀**Означення 5.20.** Криву називають *спрямлюваною*, якщо довжини всіх ламаних, уписаних у криву, які відповідають різноманітним розбиттям відрізка $[t_0, T]$, утворюють множину, яка є обмеженою зверху. Значення величини $|L| = \sup\{P\}$ називають *довжиною кривої*.

Властивості спрямлюваних кривих

Властивість 1. Для спрямлюваної кривої її довжина не залежить від способу параметризації.

Доведення. Розглянемо дві параметризації за допомогою параметрів $t \in [a, b]$ і $s \in [\alpha, \beta]$. Тоді

$$\begin{array}{cccccc} a = t_0 & < t_1 < \ldots < t_{i-1} & < & t_i < \ldots < t_{n-1} & < t_n = b \\ \updownarrow & \updownarrow \qquad\quad \updownarrow & & \updownarrow \qquad\quad \updownarrow & \updownarrow \\ M_0 & \prec M_1 \prec \ldots \prec M_{i-1} & \prec & M_i \prec \ldots \prec M_{n-1} & \prec M_n \\ \updownarrow & \updownarrow \qquad\quad \updownarrow & & \updownarrow \qquad\quad \updownarrow & \updownarrow \\ \alpha = s_0 & < s_1 < \ldots < s_{i-1} & < & s_i < \ldots < s_{n-1} & < s_n = \beta \end{array}$$

Тобто в різних параметризаціях отримаємо однакові ламані $\{P_t\} \equiv \{P_s\}$, тому

$$\sup\{P_t\} = \sup\{P_s\} \Rightarrow |L_t| = |L_s|. \ ■$$

Властивість 2. Якщо спрямлювана крива розбита скінченною кількістю точок $M_0, M_1, \ldots, M_n$ на скінченну кількість кривих, і, крім того, цим точкам відповідають значення параметра $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$, то кожна з кривих, що сполучає точки M_{i-1}, M_i, є спрямлюваною, і, відповідно, довжина кривої дорівнює сумі довжин кривих, що її утворюють:

$$|L| = \sum_{i=1}^{n} \left| L_{(M_{i-1}, M_i)} \right|.$$

Доведення можна розглянути, наприклад, в підручнику [1] ■

🗁 **Означення 5.21.** Функцію $f(x)$ називають *неперервно диференційовною на відрізку* $[a,b]$, якщо функція $f'(x)$ неперервна на інтервалі (a,b) й існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x)$ та $\lim\limits_{x\to b-0} f'(x)$.

🗁 **Означення 5.22.** Просту криву, параметризовану рівняннями $L: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $t \in [t_0, T]$ називають *простою гладкою кривою*, якщо функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ неперервно диференційовні на $[t_0, T]$.

✍ **Теорема 5.17.** Проста гладка крива $L: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $t \in [t_0, T]$ є спрямлюваною, а її довжина $|L|$ обчислюється за формулою:

$$✍ \ \boxed{|L| = \int_{t_0}^{T} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt}$$

Доведення. Розглянемо точки на кривій $M_0, M_1, \ldots, M_n$, що відповідають розбиттю параметра $\{t\}$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} t_0 & < & t_1 < \ldots < t_{i-1} & < & t_i < \ldots < t_{n-1} & < t_n = T \\ \updownarrow & & \updownarrow \qquad\qquad \updownarrow & & \updownarrow \qquad\qquad \updownarrow & \updownarrow \\ M_0 & \prec & M_1 \prec \ldots \prec M_{i-1} & \prec & M_i \prec \ldots \prec M_{n-1} & \prec M_n \end{array}$$

$M_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i))$,

Тоді

$$|P| = \sum_{i=1}^{n} |P_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2} =$$

$$= \|\text{теорема Лагранжа [}\mathbf{3}\text{, с.245-246; }\mathbf{4}\text{, с.226-227]}\| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\varphi'(\alpha_i)(t_i - t_{i-1})\right)^2 + \left(\psi'(\beta_i)(t_i - t_{i-1})\right)^2} = \|\alpha_i, \beta_i \in [t_{i-1}, t_i]\| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \cdot \sqrt{\left(\varphi'(\alpha_i)\right)^2 + \left(\psi'(\beta_i)\right)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\varphi'(\alpha_i)\right)^2 + \left(\psi'(\alpha_i)\right)^2}\, \Delta t_i +$$

---

[1] Ilyin, V. A.; Poznyak, È. G. Fundamentals of mathematical analysis. Part 1. 1982. 637 p.

$$+\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i\cdot\underbrace{\left(\sqrt{\left(\varphi'(\alpha_i)\right)^2+\left(\psi'(\beta_i)\right)^2}-\sqrt{\left(\varphi'(\alpha_i)\right)^2+\left(\psi'(\alpha_i)\right)^2}\right)}_{A_i}.$$

Оцінимо виділений вираз, який позначено через A_i:

$$|A_i|=\left|\frac{\left(\psi'(\beta_i)\right)^2-\left(\psi'(\alpha_i)\right)^2}{\sqrt{\left(\varphi'(\alpha_i)\right)^2+\left(\psi'(\beta_i)\right)^2}+\sqrt{\left(\varphi'(\alpha_i)\right)^2+\left(\psi'(\alpha_i)\right)^2}}\right|=$$

$$=\left|\frac{\left(\psi'(\beta_i)-\psi'(\alpha_i)\right)\cdot\left(\psi'(\beta_i)+\psi'(\alpha_i)\right)}{\sqrt{\left(\varphi'(\alpha_i)\right)^2+\left(\psi'(\beta_i)\right)^2}+\sqrt{\left(\varphi'(\alpha_i)\right)^2+\left(\psi'(\alpha_i)\right)^2}}\right|\le$$

$$\le\left|\psi'(\beta_i)-\psi'(\alpha_i)\right|\cdot\underbrace{\frac{\left(\left|\psi'(\beta_i)\right|+\left|\psi'(\alpha_i)\right|\right)}{\sqrt{(\varphi'(\alpha_i)^2+(\psi'(\beta_i)^2)}+\sqrt{(\varphi'(\alpha_i)^2+(\psi'(\alpha_i)^2)}}}_{=B_i};$$

$$\frac{|a|+|b|}{\sqrt{c^2+b^2}+\sqrt{c^2+a^2}}\le\frac{|a|+|b|}{\sqrt{b^2}+\sqrt{a^2}}=\frac{|a|+|b|}{|a|+|b|}=1\quad\Rightarrow\quad B_i\le 1\,\forall i.$$

Таким чином,

$$|A_i|\le 1\cdot\left|\psi'(\beta_i)-\psi'(\alpha_i)\right|\,\forall i\,.$$

Із геометричного змісту коливання функції на множині випливає $|\psi'(\beta_i)-\psi'(\alpha_i)|<\omega_i^{(\psi')}\ \ \forall\{\beta_i\},\forall\{\alpha_i\}$. Отже,

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta t_i\cdot A_i\right)\right|\le\sum_{i=1}^{n}\Delta t|A_i|\le\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i\left|\psi'(\beta_i)-\psi'(\alpha_i)\right|\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(\psi')}\,\Delta t_i$$

Разом одержимо:

$$\forall R=\{t_i\}\exists\{\alpha_i\}\ (\text{знайдено вище за формулою Лагранжа}):$$

$$|P|=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(\varphi'(\alpha_i)\right)^2+\left(\psi'(\alpha_i)\right)^2}\Delta t_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta t_i\cdot A_i\right);\quad\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta t_i\cdot A_i\right)\right|\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(\psi')}\,\Delta t_i.$$

Звідси

$$\forall R=\{t_i\}\exists\{\alpha_i\}:\ \left||P|-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\varphi'(\alpha_i))^2+(\psi'(\alpha_i))^2}\Delta t_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(\psi')}\,\Delta t_i\,.$$

Маємо:

крива – проста гладка $\Rightarrow$ функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – неперервно диференційовні на $[t_0,T]$ $\Rightarrow$ функція $\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}$ – неперервна на $[t_0,T]$, $\Rightarrow$ (*за теоремою* 5.9) функція $\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}$ – інтегровна на $[t_0,T]$.

Сума $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\varphi'(\alpha_i))^2+(\psi'(\alpha_i))^2}\Delta t_i$ є інтегральною сумою функції $\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}$ на $[t_0,T]$, тому границя інтегральних сум не залежить від способу розбиття й вибору проміжних точок. Проміжні точки обираємо ті, що отримали вище, за теоремою Лагранжа.

Отже: $\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{(\varphi'(\alpha_i))^2+(\psi'(\alpha_i))^2}\Delta t_i=\int\limits_{t_0}^{T}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}dt$.

Оскільки $\psi(t)$ – неперервно диференційовні на $\left[t_0,T\right]$, то з використанням *теореми 5.9* отримаємо, що $\psi'(t)$ – інтегровна на $\left[t_0,T\right]$. Унаслідок *третього критерію Дарбу інтегровності функції* (теореми 5.8),

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(\psi')}\,\Delta t_i=0.$$

Таким чином,

$$0\le\lim_{d\to 0}\left||P|-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\varphi'(\alpha_i))^2+(\psi'(\alpha_i))^2}\Delta t_i\right|\le\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(\psi')}\,\Delta t_i\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;0\le\left|\lim_{d\to 0}|P|-\int\limits_{t_0}^{T}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}dt\right|\le 0\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\exists|L|=\sup\left\{|P|\right\}=\lim_{d\to 0}|P|=\int\limits_{t_0}^{T}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}dt.\;\blacksquare$$

Зауваження 5.8. Існують неспрямлювані криві. (Розглянути самостійно ✍ відомий приклад неспрямлюваної зімкненої кривої за посиланням до властивості 2!)

Зауваження 5.9. Якщо крива є параметризованою рівняннями

$$L:\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad t\in\left[t_0,T\right],$$

а функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – неперервно диференційовні на $\left[t_0,T\right]$, то розіб'ємо її на прості ділянки $L_i=[M_{i-1},M_i]$ і застосуємо доведену теорему до кожної з них:

$$|L_i|=\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt.$$

Отримаємо суму інтегралів $\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt$, потім застосуємо *властивість адитивності інтеграла*:

$$\int\limits_{t_0}^{T}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt,$$

одержимо, що загальна довжина кривої буде обчислена як $|L|=\sum\limits_{i=1}^{n}|L_i|=\int\limits_{t_0}^{T}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}dt$. Тобто *у випадку параметризовної кривої, де функції* $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *– неперервно диференційовні на* $\left[t_0,T\right]$, *для обчислення її довжини використовується та сама формула, що й у останній теоремі*:

$$|L|=\int_{t_0}^{T}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt.$$

Іноді цю формулу записують інакше:

$$|L|=\int_{t_0}^{T}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt.$$

З останньої формули легко знайти довжину кривої, що визначається **явно заданою**, неперервно диференційовною на $[a,b]$ функцією $y=f(x)$. Поклавши в цій формулі $t=x,\ y(t)=f(x)$, отримаємо

☝ $$\boxed{|L|=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \quad \text{або} \quad |L|=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx}$$

Визначимо довжину дуги кривої, **заданої в полярній системі координат**, тобто $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$, функція $\rho(\varphi)$ – неперервно диференційовна на $[\alpha,\beta]$, тоді $\begin{cases}x=\rho(\varphi)\cos\varphi,\\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi\end{cases}$ – параметризація кривої, $\varphi\in[\alpha,\beta]$.

Маємо:

$$(x_t')^2+(y_t')^2=(\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi)^2+(\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi)^2=\underline{(\rho')^2\cos^2\varphi}-$$

$$-2\rho'\rho\cos\varphi\sin\varphi+\underline{\underline{\rho^2\sin^2\varphi}}+\underline{(\rho')^2\sin^2\varphi}+2\rho'\rho\cos\varphi\sin\varphi+\underline{\underline{\rho^2\cos^2\varphi}}=\rho^2+(\rho')^2.$$

Тому

☝ $$\boxed{|L|=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi}$$

Таким чином, ми отримали **формули довжини кривої** для різних випадків її задання. Наведемо їх у вигляді таблиці:

гладка крива задана параметрично: $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\ t\in[t_0,T]$ ($\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервно диференційов-ні на відрізку $[t_0,T]$)	$\|L\| = \int_{t_0}^{T}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt=$ $=\int_{t_0}^{T}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt;$
гладка крива задана явно: $y=f(x)$ – неперервно диференційовна на відрізку $[a,b]$	$\|L\|=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=$ $=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx;$
гладка крива задана в полярній системі координат: $\rho=\rho(\varphi)$ – неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha,\beta]$	$\|L\|=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi$

Зауваження 5.10. Нехай $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $t \in [t_0, T]$ – зімкнена крива. Під *додатнім напрямом оббігу* параметрично заданої зімкненої кривої розуміють такий напрям, що при оббігу по кривій область, яку вона обмежує, залишається зліва. Це відповідає оббігу проти годинникової стрілки (див. рис. 5.12).

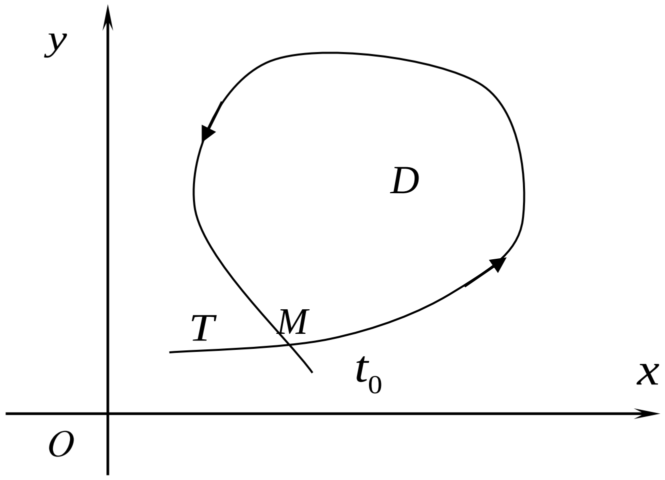


Рис. 5.12.

2. Диференціал дуги

Нехай $L: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $t \in [t_0, T]$ – проста гладка крива, тоді $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервно диференційовні на $[t_0, T]$. Розбиття відрізка $[t_0, T]$:

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = T\,.$$

Довжина дуги, що відповідає відрізкові розбиття $[t_{i-1}, t_i]$:

$$|L_i| = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt\,.$$

Якщо $t \in [t_0, T]$, то $|L(t)| = \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt$ – інтеграл із змінною верхньою межею, підінтегральна функція є неперервною на $[t_0, T]$, тому, за *властивістю 2 інтеграла із змінної верхньою межею*, функція $|L(t)|$ – диференційовна на $[t_0, T]$, крім того, $|L(t)|' = \sqrt{(\varphi_t')^2 + (\psi_t')^2}$. Звідси

$$d|L(t)| = \sqrt{(\varphi_t')^2 + (\psi_t')^2}\,dt = \sqrt{(\varphi_t' dt)^2 + (\psi_t' dt)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\,.$$

Зазвичай знак «$|\ldots|$» опускають. Вираз

$$dL(t) = \sqrt{(d(x))^2 + (d(y))^2}$$

називають *диференціалом дуги*. Крім того,

$$dL(t_{i-1}) \approx L(t_i) - L(t_{i-1}) = L_{[t_i, t_{i-1}]} = |L_i|,$$

тому має місце наближена формула:

$$|L_i| \approx \sqrt{(d(x))^2 + (d(y))^2}\,\Delta t_i\,.$$

Випишемо також **формули для обчислення диференціала дуги**:

гладка крива задана параметрично $\left\| \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \right\|$:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt\,;$$

гладка крива задана явно $\| y = f(x) \|$:

$$ds = \sqrt{1 + (y_x')^2}\, dx\ ;$$

гладка крива задана в полярній системі координат $\| \rho = \rho(\varphi) \|$:

$$ds = \sqrt{\rho^2 + (\rho_\varphi')^2}\, d\varphi$$

Розглянемо просторову просту параметризовану криву:

$$L : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [t_0, T], \\ z = z(t), \end{cases}$$

де $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – функції, неперервно диференційовні на $[t_0, T]$. Тоді

$$\left| L^{(3)} \right| = \int_{t_0}^{T} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, dt,$$

$$d(L^{(3)}) = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

3. Обчислення площ за допомогою інтегралів

🗁 **Означення 5.23**. *Обмеженою множиною* на площині $\mathbb{R}^2$ називають множину на $\mathbb{R}^2$, яку можна помістити всередину деякого круга.

🗁 **Означення 5.24**. ε-*околом* точки (x_0, y_0) називають відкритий круг з центром в точці (x_0, y_0) радіуса ε, а саме:

$$B_\varepsilon(x_0, y_0) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2 \right\}.$$

☝ 🗁**Означення 5.25**. Точку $M_0(x_{0,} y_0)$ називають *межовою точкою множини* $D \subset \mathbb{R}^2$, якщо в будь-якому її ε-околі містяться як точки, що належать множині D, так і точки, що їй не належать, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \left(B_\varepsilon(x_0, y_0) \bigcap D \neq \varnothing \wedge B_\varepsilon(x_0, y_0) \bigcap (\mathbb{R}^2 \setminus D) \neq \varnothing \right).$$

🗁 **Означення 5.26**. Множину всіх межових точок множини D називають *межею* цієї множини (позначення: $\partial(D) = \Gamma$).

☝ 🗁**Означення 5.27**. Точку $M_0(x_{0,} y_0)$ називають *граничною точкою множини* D, якщо в будь-якому її ε-околі міститься нескінченна кількість точок, що належать області D, тобто

$$\forall \varepsilon > 0\ B_\varepsilon(x_0, y_0) \cap D - \text{нескінченна множина.}$$

☝ 🗀**Означення 5.28**. Множину $D\subset\mathbb{R}^2$ називають *замкненою*, якщо вона містить усі свої граничні точки.

🗀 **Означення 5.29**. *Плоскою фігурою* або *областю* на площині $\mathbb{R}^2$ називають обмежену замкнену множину на площині.

Якщо область $D\subset\mathbb{R}^2$ являє собою множину, обмежену скінченною кількістю неперервних кривих, то її межею буде об'єднання кривих, що її обмежують. В загальному випадку межа області може мати дуже своєрідну форму. Наприклад, множина точок квадрату $[0,1]^2$ з раціональними координатами має межу, яка збігається з квадратом $[0,1]^2$.

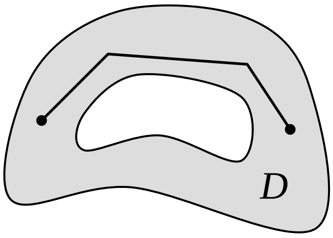


Рис. 5.13.

🗀 **Означення 5.30**. Множину $D\subset\mathbb{R}^2$ називають *зв'язною*, якщо будь-які дві її точки можна сполучити ламаною, яка цілком належить множині D (див. рис. 5.13).

🗀 **Означення 5.31**. *Многокутною фігурою* або просто *многокутником* називають фігуру (не обов'язково зв'язну), обмежену скінченною кількістю замкнених ламаних.

Площа многокутника P може бути знайдена шляхом підсумовування площ трикутників, на які він розбивається (рис. 5.14). Оскільки площу трикутника ми можемо обчислити, то будемо вважати, що площу многокутника ми завжди можемо визначити. Площу многокутника P будемо позначати $S(P)$.

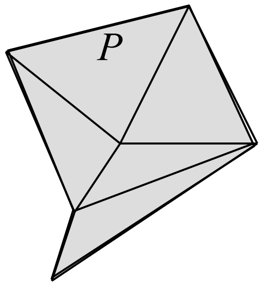


Рис. 5.14.

Навколо фігури $D\subset\mathbb{R}^2$ можна описати многокутник *A*, тобто помістити фігуру *D* всередину многокутника *A*. Також можна вписати многокутник *B*, тобто помістити многокутник *B* всередину фігури *D* (рис. 5.15). Тоді $B\subset D\subset A$.

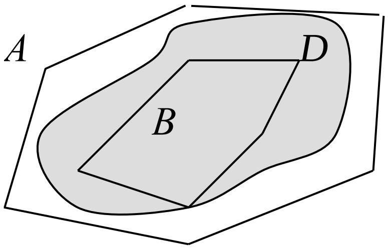


Рис. 5.15.

Розглянемо множини

$\tilde{A}=\{A$ – описаний навколо D многокутник$\}$,

$\tilde{B}=\{B$ – вписаний в D многокутник$\}$.

Множина $\{S(A), A\in\tilde{A}\}$ обмежена знизу будь-яким значенням $S(B), B\in\tilde{B}$. Множ$S(B)\le\overline{I}\le\underline{I}\le S(A)$ина $\{S(B), B\in\tilde{B}\}$ обмежена зверху будь-яким значенням $S(A), A\in\tilde{A}$. Тому

$$\boxed{\begin{array}{l}\exists\inf\{S(A)\}=\underline{I}\ \text{– верхня площа } D,\\ \exists\sup\{S(B)\}=\overline{I}\ \text{– нижня площа } D\end{array}}$$

Оскільки $B\subset D\subset A$, то $S(B)\le S(A)$. За означенням точних меж

$$S(B)\le\overline{I},\quad S(A)\ge\underline{I}.$$

Доведення того факту, що $\overline{I} \le \underline{I}$, здійснюється аналогічно доведенню нерівності $I_* \le I^*$ для верхнього й нижнього інтегралів Дарбу (див. *властивість 4* в §2, п. 3 цього розділу). Таким чином,

$$S(B) \le \overline{I} \le \underline{I} \le S(A). \tag{5.31}$$

☝ 🗀 **Означення 5.32**. Плоску фігуру D називають *квадровною*, якщо $\overline{I} = \underline{I} = I$, а значення I називають *площею фігури* D і позначають $S(D)$.

☝ **Теорема 5.18** (*перший критерій квадровності плоскої фігури*). Фігура D є квадровною тоді й лише тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0\,(\exists A \in \tilde{\mathrm{A}} \wedge \exists B \in \tilde{\mathrm{B}}):\ \big(A \supset D \supset B \quad \wedge \quad S(A) - S(B) < \varepsilon\big).$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай D – квадровна

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad \overline{I} = \underline{I} = I. \\ \sup\{S(B)\} = \overline{I} \Leftrightarrow \underline{\underline{\forall \varepsilon > 0 \exists B \in \tilde{\mathrm{B}}}} : \overline{I} - \dfrac{\varepsilon}{2} < S(B) \le \overline{I}; \\ \inf\{S(A)\} = \underline{I} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \underline{\underline{\exists A \in \tilde{\mathrm{A}}}} : \underline{I} \le S(B) < \underline{I} + \dfrac{\varepsilon}{2}; \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I - \frac{\varepsilon}{2} < S(B) \le I \le S(A) < I + \frac{\varepsilon}{2}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{S(A) - S(B) < \varepsilon.}}$$

Окрім того, за побудовою $\underline{\underline{A \supset D \supset B}}$.

Розглянемо висловлювання, що утворюється з підкреслених:

$$\forall \varepsilon > 0\,(\exists A \in \tilde{\mathrm{A}} \wedge \exists B \in \tilde{\mathrm{B}}):\big(A \supset D \supset B \quad \wedge \quad S(A) - S(B) < \varepsilon\big).$$

Це й відповідає тому, що потрібно довести в цій частині.

Достатність.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Дано: } \forall \varepsilon > 0\,(\exists A \in \tilde{\mathrm{A}} \wedge \exists B \in \tilde{\mathrm{B}}): \\ \quad \big(A \supset D \supset B \quad \wedge \quad S(A) - S(B) < \varepsilon\big). \\ \text{Із (5.31)} \Rightarrow S(B) \le \overline{I} \le \underline{I} \le S(A). \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \big(\underline{I} - \overline{I} < \varepsilon\ \forall \varepsilon > 0\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underline{I} = \overline{I} \quad \Rightarrow D - \text{квадровна.}\ \blacksquare$$

Теорема 5.18 а) (*узагальнений перший критерій квадровності плоскої фігури*). Фігура D є квадровною тоді й лише тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists P \text{ і } Q - \text{квадровні фігури}: \big(P \supset D \supset Q \ \wedge\ S(P) - S(Q) < \varepsilon\big).$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай D – квадровна, тоді, за першим критерієм квадровності,

$$\forall \varepsilon > 0\,(\exists A \in \tilde{\mathrm{A}} \wedge \exists B \in \tilde{\mathrm{B}}):\big(A \supset D \supset B \quad \wedge \quad S(A) - S(B) < \varepsilon\big).$$

Тому, якщо обрати $P = A$, а $Q = B$, то, зважаючи на квадровність многокутників, матимемо:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists P \text{ і } Q - \text{квадровні фігури}: \big(P \supset D \supset Q \quad \wedge \quad S(P) - S(Q) < \varepsilon\big).$$

Достатність. Нехай

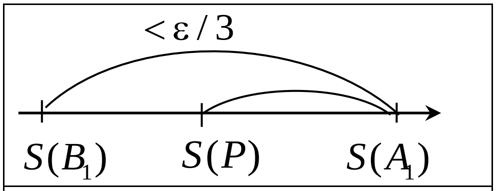
$$\forall\varepsilon>0\ \exists P \text{ і } Q-\text{квадровні фігури}:\left(P\supset D\supset Q \quad\wedge\quad S(P)-S(Q)<\varepsilon/3\right).$$

Оскільки P і $Q-$ квадровні фігури, то, за першим критерієм квадровності,

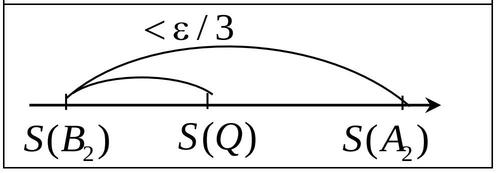
$$\forall\varepsilon>0\,(\exists A_1\in\tilde{\mathrm{A}}\wedge\exists B_1\in\tilde{\mathrm{B}}):\left(A_1\supset P\supset B_1 \quad\wedge\quad S(A_1)-S(B_1)<\varepsilon/3\right),$$

$$\forall\varepsilon>0\,(\exists A_2\in\tilde{\mathrm{A}}\wedge\exists B_2\in\tilde{\mathrm{B}}):\left(A_2\supset Q\supset B_2 \quad\wedge\quad S(A_2)-S(B_2)<\varepsilon/3\right).$$

Тоді

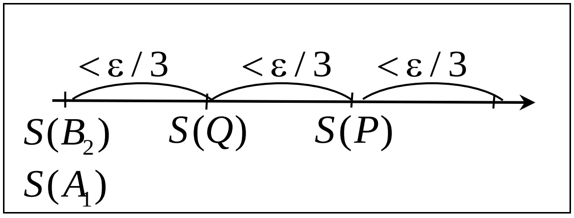


$$\left.\begin{array}{l} S(A_1)\supset S(P)\supset S(B_1),\\ S(A_1)-S(B_1)<\varepsilon/3, \end{array}\right\}\Rightarrow S(A_1)-S(P)<\varepsilon/3,$$



$$\left.\begin{array}{l} S(A_2)\supset S(Q)\supset S(B_2),\\ S(Q)-S(B_2)<\varepsilon/3, \end{array}\right\}\Rightarrow S(Q)-S(B_2)<\varepsilon/3.$$

Звідки



$$\left.\begin{array}{l} A_1\supset P\supset D\supset Q\supset B_2,\\ S(A_1)-S(P)<\varepsilon/3,\\ S(P)-S(Q)<\varepsilon/3,\\ S(Q)-S(B_2)<\varepsilon/3, \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} A_1\supset D\supset B_2,\\ S(A_1)-S(B_2)<\varepsilon. \end{array}\right.$$

Отже, маємо:

$$\forall\varepsilon>0\,(\exists A_1\in\tilde{\mathrm{A}}\wedge\exists B_2\in\tilde{\mathrm{B}}):\left(A_1\supset D\supset B_2 \quad\wedge\quad S(A_1)-S(B_2)<\varepsilon\right),$$

це означає (за першим критерієм квадровності), що область $D-$ квадровна. ■

🗁 **Означення 5.33.** Кажуть, що множина Γ *має площу нуль* (тобто $S(\Gamma)=0$), якщо

$$\forall\varepsilon>0\ \exists P \text{ – многокутник: } P\supset\Gamma\,(P \text{ покриває } \Gamma)\wedge S(P)<\varepsilon.$$

☝ **Теорема 5.19** (*другий критерій квадровності плоскої фігури*). Фігура D – квадровна тоді й лише тоді, коли її межа має площу нуль, тобто $S(\partial(D))=0$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай D – квадровна $\Rightarrow$ (перший критерій квадровності) $\underline{\forall\varepsilon>0}\left(\exists A\in\tilde{\mathrm{A}}\wedge\exists B\in\tilde{\mathrm{B}}\right):A\supset D\supset B \quad\wedge\quad S(A)-S(B)<\varepsilon$.

Тоді:

$$B\subset D\subset A\ \Rightarrow\ \partial D=\Gamma\subset(A\setminus B);$$

$$\left(\underline{(A\setminus B)=\mathrm{P}}\ \wedge\ S(A)-S(B)<\varepsilon\right)\ \Rightarrow\ \underline{S(P)}=S(A\setminus B)=S(A)-S(B)\underline{<\varepsilon}.$$

Підкреслена однією рискою частина утворює висловлювання:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists P \text{ – многокутник: } (P\supset\Gamma\wedge S(P)<\varepsilon),$$

це і означає, що $S(\partial(D))=0$.

Достатність.

Нехай $\partial D=\Gamma:\ S(\Gamma)=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\forall\varepsilon>0}}\,\exists P\supset\Gamma:\ S(\mathrm{P})<\varepsilon$.

Многокутник $\underline{\underline{B\in\tilde{\mathrm{B}}}}$ утворюється як множина точок, що лежать в непокритій многокутником P області D, а многокутник $A\in\tilde{\mathrm{A}}$ – як $\underline{\underline{A=B\bigcup P}}$, тоді $A\supset D\supset B,\ A\setminus B=P$. Звідки маємо

$$S(P)=\underline{\underline{S(A)-S(B)<\varepsilon}}.$$

Підкреслена двома рисками частина утворює висловлювання:

$$\forall\varepsilon>0\left(\exists A\in\tilde{\mathrm{A}}\wedge\exists B\in\tilde{\mathrm{B}}\right):\ \left(A\supset D\supset B\ \wedge\ S(A)-S(B)<\varepsilon\right),$$

це і означає, що D – квадровна область. ■

🗁 **Означення 5.34.** Точку $M_0\left(x_{0,}y_0\right)$ називають *внутрішньою точкою множини* D, якщо вона належить цій множині разом із деяким своїм околом, тобто

$$\exists\varepsilon>0:B_\varepsilon\left(x_0,y_0\right)\subset D.$$

Теорема 5.20 *(адитивність площ квадровних фігур).* Якщо $\left\{D_i\right\}_{i=1}^n$ – множина квадровних плоских фігур, що не мають спільних внутрішніх точок, тоді множина $D=\bigcup\limits_{i=1}^n D_i$ є квадровною фігурою, крім того, $S(D)=\sum\limits_{i=1}^n S(D_i)$.

Доведення провести *самостійно* ✍**!** ■

Теорема 5.21. Якщо $f(x)$ – неперервна функція, $f(x)\geq 0$ на $\left[a,b\right]$, тоді криволінійна трапеція (див. рис. 5.1)

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:a\leq x\leq b\wedge 0\leq y\leq f(x)\}$$

є квадровною фігурою.

Доведення. Оскільки $f(x)$ – неперервна функція на $\left[a,b\right]$, то за *теоремою 5.9* функція $f(x)$ – інтегровна на $\left[a,b\right]$, тоді, за першим критерієм Дарбу,

$$\Rightarrow\underline{\forall\varepsilon>0}\,\exists\delta>0\forall R=\{x_k\}:d<\delta\Rightarrow\overline{S}-\underline{S}<\varepsilon.$$

Із геометричної інтерпретації сум Дарбу випливає, що $\overline{S}=\sum\limits_{k=1}^n M_k\Delta x_k$ – площа східчастої фігури, що містить у собі область D (див. рис. 5.4). Оберемо цією (східчастою) фігурою многокутник $A=\bigcup\limits_{k=1}^n\left[x_{k-1},x_k\right]\times\left[0,M_k\right]$, тоді $A\in\tilde{\mathrm{A}}$, $A\supset D$ і $\overline{S}=S(A)$. Аналогічно будуємо многокутник $B\subset D$: $B=\bigcup\limits_{k=1}^n\left[x_{k-1},x_k\right]\times\left[0,m_k\right]$, $S(B)=\underline{S}$, $B\in\tilde{\mathrm{B}}$. Тоді $\underline{S(A)-S(B)<\varepsilon}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ із підкреслених висловлювань і першого критерію квадровності приходимо до висновку про те, що криволінійна трапеція D – квадровна фігура. ■

Наслідок 5.6. Графік неперервної невід'ємної на $\left[a,b\right]$ функції $f(x)$ є множиною площі нуль.

Доведення. Із доведення *теореми 5.20* випливає, що за многокутник, що покриває графік неперервної невід'ємної функції, можна обрати $P = A \setminus B$ (див. також рис. 5.4). В загальному випадку функції, що приймає значення різних знаків, за шуканий потрібно обрати многокутник

$$P = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k] \times [m_k, M_k].$$

Доведіть це ✍! ■

Теорема 5.22. Площа криволінійної трапеції D обчислюється за формулою

$$\boxed{S(D) = \int_a^b f(x)dx}$$

Доведення. Внаслідок попередньої теореми, криволінійна трапеція $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \wedge 0 \le y \le f(x)\}$ – квадровна фігура, а із доведення цієї теореми випливає, що:

1) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall R = \{x_k\} \;\; d < \delta \Rightarrow \overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$,

2) існують східчасті фігури A і B, для яких суми Дарбу дорівнюють $\overline{S} = S(A), \;\; \underline{S} = S(B)$.

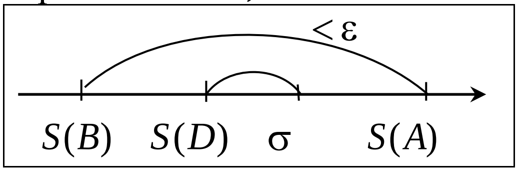
Тому

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall R \quad d < \delta \;\Rightarrow\; \overline{S} - \underline{S} = S(A) - S(B) < \varepsilon .$$

За умовою $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, тому (*за теоремою 5.9*) інтегровна на $[a,b]$, тобто

$$\exists \int_a^b f(x)dx = \lim_{d \to 0} \sigma . \tag{5.32}$$

Зафіксуємо розбиття R з діаметром $d < \delta$. Оскільки із (5.18) $\forall P \;\; \underline{S} \le \sigma \le \overline{S}$ і (за доведенням) $\overline{S} = S(A), \;\; \underline{S} = S(B)$, то $S(B) \le \sigma \le S(A)$. Крім того, D – квадровна фігура, тому (за означенням) $\overline{I} = \underline{I} = S(D)$ і $S(B) \le S(D) \le S(A)$. Отже, для будь-якого вибору проміжних точок, пов'язаних із розбиттям R, матимемо:



$$\left. \begin{array}{l} S(B) \le \sigma \le S(A), \\ S(B) \le S(D) \le S(A), \end{array} \right\} \Rightarrow |\sigma - S(D)| < \varepsilon .$$

Таким чином, $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall R \;\; d < \delta \Rightarrow |\sigma - S(D)| < \varepsilon$ для будь-якого вибору проміжних точок. Це означає, що $\lim\limits_{d \to 0} \sigma = S(D)$. З урахуванням (5.32) отримаємо:

$$S(D) = \int_a^b f(x)dx . \;\blacksquare$$

☝ **Наслідок 5.7** *(геометричний зміст визначеного інтеграла Рімана).* Визначений інтеграл Рімана від неперервної невід'ємної на $[a,b]$ функції $f(x)$ дорівнює площі криволінійної трапеції D, утвореної графіком цієї функції, віссю абсцис і прямими $x=a$, $x=b$, тобто

$$S(D)=\int_a^b f(x)dx$$

Заваження 5.11. У означенні криволінійної трапеції припускається невід'ємність функції. Якщо функція може приймати значення різних знаків, то потрібно область, яку вона обмежує, розбити на ділянки сталості знака функції, застосувати *властивість адитивності площі* й просумувати площі отриманих ділянок. Площу тієї ділянки, що відповідає від'ємним значенням функції, потрібно обчислювати, ставлячи перед інтегралом знак «–». Наприклад, у випадку функції, графік якої наведено на рис. 5.16, площа заштрихованої фігури дорівнює

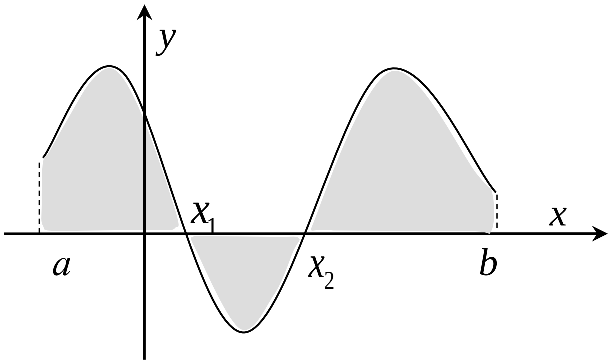


Рис. 5.16.

$$S(D)=\int_a^{x_1} f(x)dx-\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+\int_{x_2}^{b} f(x)dx=\int_a^b |\,f(x)\,|\,dx.$$

Зауваження 5.12. Площа плоскої фігури D, що обмежена на декартовій площині графіками неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, де $f_2(x)\le f_1(x)$, відрізками прямих $x=a$, $x=b$ (рис. 5.17), обчислюється за формулою

$$\boxed{S=\int_a^b\big(f_1(x)-f_2(x)\big)dx.}$$

(*доведіть* ✍!)

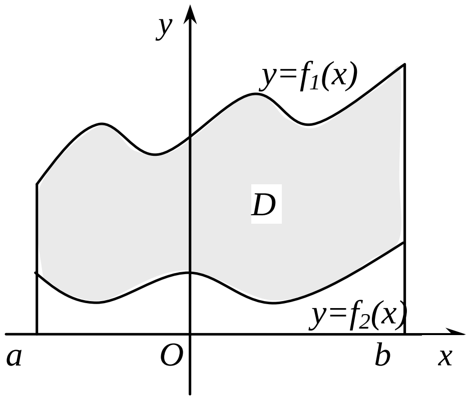


Рис. 5.17.

Випадок полярних координат. Нехай φ – полярний кут, а ρ – полярна відстань, тоді $\rho\ge 0$,

$\rho=const=\rho_0$ – коло радіуса ρ_0,

$\varphi=const=\varphi_0$ – промінь, що виходить із початку координат і утворює кут φ_0 із полярною віссю.

Розглянемо функцію $\rho=R$ у полярній системі координат, графіком якої є коло. В декартовій системі координат ця функція представляється двома неперервними функціями $f_+(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ при $x\in[-R,R]$ і $f_-(x)=-\sqrt{R^2-x^2}$

при $x \in [-R, R]$. Тому коло є множиною площі нуль, а, за другим критерієм квадровності, круг – квадровна область.

Розглянемо круговий сектор, обмежений дугою кола $\rho = R$ і променями $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$. Дуга кола й похилі прямі мають площу нуль (доведіть це для похилих прямих ✍!), тому круговий сектор має межу площі нуль, отже, він є квадровною фігурою.

Скінченне об'єднання кругових секторів (за *властивістю адитивності*) утворює квадровну область.

Розглянемо область D в полярній системі координат, яка обмежена графіком неперервної функції $\rho = \rho(\varphi)$ на $[\alpha, \beta]$ і променями $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ (див. рис. 5.18):

$$D = \{(\rho, \varphi):\ \alpha \le \varphi \le \beta \ \wedge\ 0 \le \rho \le \rho(\varphi)\}.$$

Таку область називають *криволінійним сектором*.

Розіб'ємо відрізок $[\alpha, \beta]$ скінченною кількістю точок:

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{k-1} < \varphi_k < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta.$$

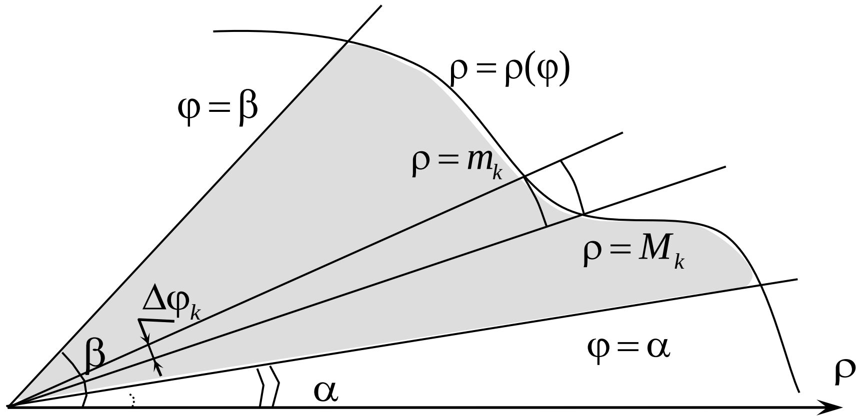


Рис.5.18.

Завдяки неперервності функції $\rho(\varphi)$ і *другій теоремі Вейєрштрасса* [**2**, с.161]

$$m_k = \inf_{[\varphi_{k-1}, \varphi_k]} \rho(\varphi) = $$

$$= \min_{[\varphi_{k-1}, \varphi_k]} \rho(\varphi).$$

Крива $\rho = m_k$ є колом радіусу m_k. Знайдемо площу кругового сектора, що утворюється променями $\varphi = \varphi_{k-1}, \varphi = \varphi_k$ і колом $\rho = m_k$:

$$S^{(k)}_{\text{сектора}} = \frac{1}{2} \cdot m_k^2 \cdot \Delta\varphi_k.$$

Аналогічно зробимо після знаходження $M_k = \sup_{[\varphi_{k-1}, \varphi_k]} \rho(\varphi) = \max_{[\varphi_{k-1}, \varphi_k]} \rho(\varphi)$.

Утворимо фігури $B \subset D$ і $A \supset D$, повторивши зазначену процедуру для всіх $k = 1, 2, ..., n$. Ці фігури, як скінченне об'єднання кругових секторів, є квадровними областями. Завдяки *властивості адитивності*, площі фігур A і B виражаються формулами:

$$S(A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot M_k{}^2 \Delta\varphi_k, \qquad S(B) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot m_k{}^2 \Delta\varphi_k,$$

які є відповідно верхньою та нижньою сумами Дарбу для функції $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ на $[\alpha,\beta]$. Ця функція є неперервною, тому, за *теоремою 5.9*, – інтегровною на $[\alpha,\beta]$. Отже,

1) різницю $S(A)-S(B)$ можна зробити як завгодно малою; застосовуючи узагальнений перший критерій квадровності, отримаємо квадровність області D;
2) $S(B)\le S(D)\le S(A)$

$$\searrow \quad \Downarrow \quad \swarrow \; d=\max_k \Delta\varphi_k \to 0 \quad \Rightarrow \quad S(D)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi .$$

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$$

Отже, доведено таку теорему.

Теорема 5.23. Криволінійний сектор *OAB* (рис. 5.19), обмежений графіком неперервної функції $\rho=\rho(\phi)$ в полярній системі координат і двома півпрямими $\phi=\alpha$ і $\phi=\beta$ ($\alpha<\beta$), є квадровною областю, площа якого дорівнює

$$\boxed{☝\; S(D)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi}$$

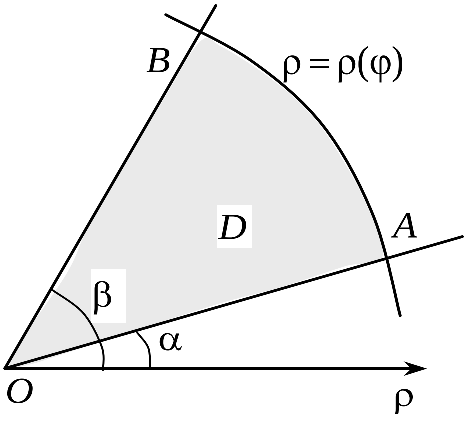


Рис. 5.19.

Зауваження 5.13. У випадку області, обмеженої зімкненою параметризовною кривою $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$, параметризація якої задає додатний напрям обходу (див. *зауваження 5.10* і рис.1.12), площа області, яку вона обмежує, дорівнює

$$\boxed{S=-\int_\alpha^\beta \psi(t)\cdot\varphi'(t)dt=-\int_\alpha^\beta y(t)\cdot x'(t)dt}$$

(у припущенні, що $\varphi(t)$ неперервна, а $\psi(t)$ неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha,\beta]$).

Виведення цієї формули виходить за межі тематики цього посібника.

4. Обчислення об’ємів тіл обертання.

Аналогічно плоскому випадку вводиться поняття тіла в $\mathbb{R}^3$.

Обмеженою множиною в просторі $\mathbb{R}^3$ називають множину, яку можна помістити всередину деякої кулі.

ε-*околом* точки (x_0,y_0,z_0) називають відкриту кулю з центром в цій точці радіуса ε, а саме:

$$B_\varepsilon\left(x_0,y_0,z_0\right)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<\varepsilon^2\right\}.$$

Поняття межової, граничної і внутрішньої точки $M_0\left(x_{0,}y_0,z_0\right)$ області $D\subset\mathbb{R}^3$, межі цієї множини, замкненої множини в просторі $\mathbb{R}^3$ вводяться аналогічно плоскому випадку.

🗁 **Означення 5.35**. *Тілом* або *областю* в просторі $\mathbb{R}^3$ називають обмежену замкнену множину в просторі.

🗁 **Означення 5.36**. *Многогранною фігурою* або просто *многогранником* називають фігуру (не обов'язково зв'язну), обмежену в просторі скінченною кількістю многокутників.

Для обчислення об'єму многогранника P його можна розбити на скінченну кількість пірамід, в основі яких лежать трикутники, і просумувати їх об'єми. Тому будемо вважати, що об'єм многогранника ми завжди можемо визначити. Об'єм многогранника P будемо позначати $V(P)$.

Навколо тіла $D\subset\mathbb{R}^3$ можна описати многогранник *A*, тобто помістити тіло *D* всередину многогранника *A*. Також можна вписати многогранник *B*, тобто помістити многогранник *B* всередину тіла *D*. Тоді $B\subset D\subset A$.

Розглянемо множини

$\tilde{\mathrm{A}}=\{A$ – описаний навколо D многогранник$\}$,

$\tilde{\mathrm{B}}=\{B$ – вписаний в D многогранник$\}$.

Множина $\{V(A),A\in\tilde{\mathrm{A}}\}$ обмежена знизу будь-яким значенням $V(B),B\in\tilde{\mathrm{B}}$. Множина $\{V(B),B\in\tilde{\mathrm{B}}\}$ обмежена зверху будь-яким значенням $V(A),A\in\tilde{\mathrm{A}}$. Тому

$$\boxed{\begin{array}{l}\exists\inf\{V(A)\}=\underline{V}-\text{верхній об'єм тіла } D,\\ \exists\sup\{V(B)\}=\overline{V}-\text{ нижній об'єм тіла } D\end{array}}$$

Аналогічно плоскому випадку для многогранників $A\in\tilde{\mathrm{A}}$ і $B\in\tilde{\mathrm{B}}$ та довільних тіл D в просторі (тут $B\subset D\subset A$), мають місце нерівності

$$V(B)\le\overline{V}\le\underline{V}\le V(A).$$

☝ 🗁 **Означення 5.37**. Тіло D називають *кубовним*, якщо $\overline{V}=\underline{V}=V$, а значення V називають *об'ємом тіла* D і позначають $V(D)$.

☝ **Теорема 5.24** (*перший критерій кубовності тіла*). Тіло D є кубовним тоді й лише тоді, коли

$$\forall\varepsilon>0\,(\exists A\in\tilde{\mathrm{A}}\wedge\exists B\in\tilde{\mathrm{B}}):\left(A\supset D\supset B\quad\wedge\quad V(A)-V(B)<\varepsilon\right).$$

Доведення здійснюється аналогічно плоскому випадку ■

Теорема 5.24 а) (*узагальнений перший критерій кубовності тіла*). Тіло D є кубовним тоді й лише тоді, коли

$$\forall\varepsilon>0\,\exists P\text{ і }Q-\text{кубовні тіла}:\left(P\supset D\supset Q\quad\wedge\quad V(P)-V(Q)<\varepsilon\right).$$

Доведення здійснюється аналогічно плоскому випадку ■

🗁 **Означення 5.38**. Кажуть, що множина Γ *має об'єм нуль* (тобто $V(\Gamma)=0$), якщо

$\forall\varepsilon>0\,\exists P$ – многогранник: $P\supset\Gamma$ (P покриває Γ)$\wedge V(P)<\varepsilon$.

Теорема 5.25 (*другий критерій кубовності тіла*). Фігура D – кубовна тоді й лише тоді, коли її межа має об'єм нуль, тобто $V(\partial(D))=0$.

Доведення. Здійснюється аналогічно плоскому випадку ■

Також має місце наступна теорема.

Теорема 5.26 *(адитивність об'ємів кубовних тіл).* Якщо $\{D_i\}_{i=1}^{n}$ – множина кубовних тіл, що не мають спільних внутрішніх точок, тоді множина $D=\bigcup\limits_{i=1}^{n}D_i$ є кубовним тілом, крім того $V(D)=\sum\limits_{i=1}^{n}V(D_i)$.

🗁 **Означення 5.39**. *Циліндром* називають тіло, обмежене поверхнею, що має твірну, паралельну деякій осі, а також двома площинами α_1 і α_2, які перпендикулярні цій твірній.

Відстань між паралельними площинами α_1 і α_2 називають *висотою циліндра.* При перетині кожної з таких площин циліндричною поверхнею утворюється зімкнена крива на цій площині, яка обмежує плоску фігуру. Такі фігури на двох паралельних площинах рівні. Їх називають *основами циліндра*.

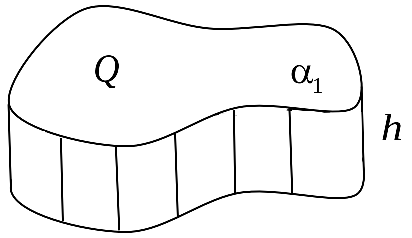


Рис. 5.20.

Теорема 5.27. Якщо основа $Q\subset\alpha_1$ циліндра E (див. рис. 5.20) є квадровною фігурою, то циліндр є кубовним тілом, причому $V(E)=S(Q)\cdot H$

Доведення. Нехай h – висота циліндра. Оскільки $Q\subset\alpha_1$ є квадровною фігурою, то

$\underline{\forall\varepsilon>0}\,\exists A$ і $B-$ многокутники на $\alpha_1:\left(A\supset Q\supset B\ \wedge\ S(A)-S(B)<\varepsilon/h\right)$.

Розглянемо прямі призми P_1 і P_2 з основами A і B відповідно в площині α_1 і висотою h такі, що $P_1\supset E\supset P_2$. Тоді їх об'єми дорівнюють

$$V(P_1)=S(A)\cdot h,\quad V(P_2)=S(B)\cdot h,$$

а різниця об'ємів –

$$\underline{V(P_1)-V(P_2)}=(S(A)-S(B))\cdot h\le\frac{\varepsilon}{h}\cdot h=\underline{\varepsilon}.$$

Отже,

$$\forall\varepsilon>0\left(\exists P_1\in\tilde{A}\wedge\exists P_2\in\tilde{B}\right):\left(P_1\supset E\supset P_2\ \wedge\ V(P_1)-V(P_2)<\varepsilon\right).$$

Це означає (за першим критерієм) кубовність циліндра E. Тому

$$\exists V(E)=\inf_{P_1\supset E}V(P_1)=\inf_{A\supset Q}S(A)\cdot h.$$

За означенням площі квадровної фігури $S(Q)=\inf\limits_{A\supset Q}S(A)$. Таким чином, $V(E)=S(Q)\cdot h$. ■

Означення 5.40. Тіло називають *східчастим,* якщо воно є скінченним об'єднанням таких циліндрів, що верхня основа попереднього циліндра лежить в тій самій площині, що і нижня основа наступного (див. рис. 5.21).

Наслідком останньої теореми про кубовність циліндра і властивості адитивності є такий

Наслідок 5.8. Східчасте тіло є кубовним, якщо кожен циліндр, що його утворює, має квадровну основу.

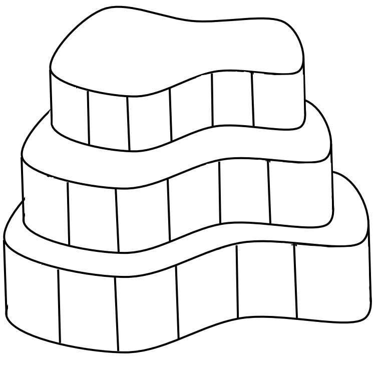


Рис. 5.21.

Теорема 5.28. Якщо тіло T утворене обертанням криволінійної трапеції $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b\wedge 0\le y\le f(x)\}$ (тут $f(x)$ – неперервна функція на $[a,b]$) навколо осі Ox, то це тіло T є кубовним, а його об'єм дорівнює

$$\boxed{V_x=V(T)=\pi\int_a^b f^2(x)dx}$$

Доведення. Розглянемо розбиття відрізка $[a,b]$:

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_{k-1}<x_k<...<x_{n-1}<x_n=b.$$

Оскільки $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, то за *другою теоремою Вейєрштрасса* **[2**, с. 161]

$$M_k=\sup_{[\varphi_{k-1},\varphi_k]}\rho(\varphi)==\max_{[\varphi_{k-1},\varphi_k]}\rho(\varphi),\quad m_k=\inf_{[\varphi_{k-1},\varphi_k]}\rho(\varphi)=\min_{[\varphi_{k-1},\varphi_k]}\rho(\varphi).$$

Утворимо східчасті фігури на площині xOy:

$$A=\bigcup_{k=1}^{n}[x_{k-1},x_k]\times[0,M_k] \text{ і } B=\bigcup_{k=1}^{n}[x_{k-1},x_k]\times[0,m_k],$$

тоді $A\supset D\supset B$. При обертанні навколо осі абсцис цих фігур утворюються східчасті тіла T_1 і T_2, причому $T_1\supset T\supset T_2$. Циліндри, що утворюються при обертанні прямокутників $[x_{k-1},x_k]\times[0,M_k]$ і $[x_{k-1},x_k]\times[0,m_k]$, зображено на рис. 5.22. Кожне з цих східчастих тіл T_1 і T_2 утворюється з кругових циліндрів; круг – квадровна область на площині, тому східчасте тіло є кубовним (за *наслідком 5.8*).

Об'єми утворених східчастих тіл

$$V(T_1)=\pi\sum_{k=1}^{n}M_k^2\Delta x_k,\quad V(T_2)=\pi\sum_{k=1}^{n}m_k^2\Delta x_k$$

є відповідно верхньою та нижньою сумами Дарбу для інтеграла $\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

Функція під знаком інтеграла є неперервною, тому за *теоремою 5.9* – інтегровною. Отже,

1) різницю $V(T_1)-V(T_2)$ можна зробити як завгодно малою; застосовуючи узагальнений перший критерій кубовності, отримаємо кубовність тіла T;

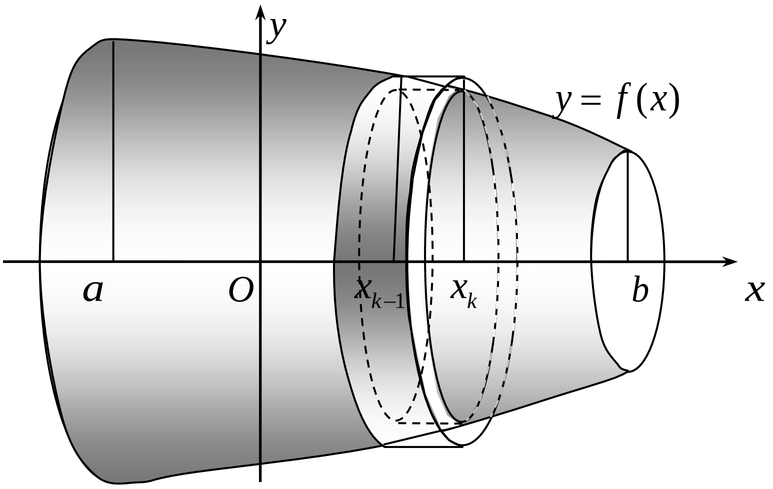


Рис. 5.22.

$$2)\quad \pi\sum_{k=1}^{n} m_k^2\Delta x_k \le V(T) \le \pi\sum_{k=1}^{n} M_k^2\Delta x_k$$

$$\searrow \qquad \Downarrow \qquad \swarrow \quad \text{при } d\to 0 \qquad ■$$

$$\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Зауваження 5.14. Об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox плоскої фігури D, що обмежена на декартовій площині графіками неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, де $0\le f_2(x)\le f_1(x)$, відрізками прямих $x=a$, $x=b$ (фігуру D див. на рис. 5.17), обчислюється за формулою (*доведіть* ✍**!)**

$$\boxed{V_x=\pi\int_a^b\left(f_1^2(x)-f_2^2(x)\right)dx}$$

Зауваження 5.15. Об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy криволінійної трапеції

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b \wedge 0\le y\le f(x)\},$$

де $f(x)$ – однозначна неперервна функція на $[a,b]$, дорівнює (*доведіть* ✍**!)**

$$\boxed{V_y=2\pi\int_a^b x\cdot f(x)dx}$$

5. Площі поверхонь обертання

Розглянемо просту гладку, параметризовану рівняннями

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in[t_0,T].$$

Тоді функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ є неперервно диференційовними на $[t_0,T]$, а крива є спрямлюваною (*за теоремою 5.17*). Крім того, припустимо, що

1° $\psi(t) \geq 0$ на $[t_0, T]$,

2° $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0 \quad \forall t \in [t_0, T]$,

3° крива не має кратних точок, тому є простою кривою.

Розглянемо параметризацію довжиною дуги $s = S(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt, \quad t \in [t_0, T]$:

$$\begin{cases} x = \Phi(s), \\ y = \Psi(s), \end{cases} \quad s \in [0, |L|]\,?$$

де $|L|$ – довжина усієї кривої.

Маємо:

1) $\psi(t)$ – неперервна на $[t_0, T]$;

2) $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервно диференційовні на $[t_0, T]$, тому за *властивістю 1 інтеграла із змінної верхньою межею* $s = S(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt$ – неперервна на $[t_0, T]$;

3) із припущення 3° випливає, що функція $s = S(t)$ є взаємно однозначною, а за побудовою цієї функції й припущенням 2°, вона є строго зростаючою на $[t_0, T]$; тому з теореми про неперервність оберненої функції **(**🗐 повторіть теорему [**2**, с. 160]!) отримаємо існування й неперервність оберненої функції $t = S^{-1}(s)$ на $[0, |L|]$.

Звідси $\Psi(s) = \psi(S^{-1}(s))$ – неперервна на відрізку $[0, |L|]$ як складена.

Розглянемо розбиття кривої AB і розбиття множини значень параметру, що йому відповідає:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} A = M_0 & \prec & M_1 & \prec \ldots \prec & M_{i-1} & \prec & M_i & \prec \ldots \prec & M_{n-1} & \prec & M_n = B \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ 0 = s_0 & < & s_1 & < \ldots < & s_{i-1} & < & s_i & < \ldots < & s_{n-1} & < & s_n = |L|. \end{array}$$

При сполученні точок M_i відрізками утвориться ламана (див. рис. 5.23).

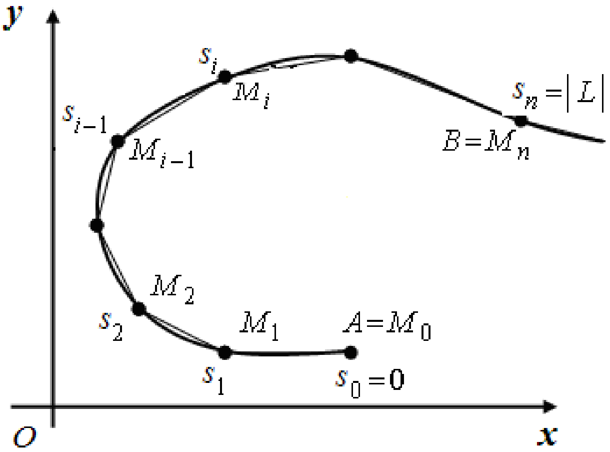


Рис. 5.23.

Означення 5.41. *Площею поверхні обертання* ($P_{\text{поверхні}}$) будемо називати границю площ поверхонь, що утворені обертанням вписаних ламаних навколо осі Ox ($P_{\text{ламаної}}$) при прямуванні до нуля діаметра розбиття $d = \max\limits_i \Delta s_i \to 0$. Тобто

$$P_{\text{поверхні}} \overset{def}{=} \lim_{d \to 0} P_{\text{ламаної}} .$$

Позначення:

Δl_i – довжина прямолінійного відрізка $M_{i-1}M_i$;

Δs_i – довжина дуги кривої, що сполучає точки M_{i-1} *і* M_i;

$y_i = \Psi(s_i)$; $\quad y_{i-1} = \Psi(s_{i-1})$;

$\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = \Psi(s_i) - \Psi(s_{i-1})$.

Виведемо формулу для обчислення площі поверхні обертання ламаної навколо Ox. Маємо:

$$P_{\text{ламаної}} = \sum_{i=1}^{n} P_i ,$$

де P_i – площа поверхні обертання відрізка $[M_{i-1}; M_i]$ навколо осі Ox, тобто P_i – площа поверхні зрізаного конуса. Тоді

$$P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta l_i = \pi \Delta l_i (y_i + y_i - \Delta y_i) = \pi \Delta l_i (2y_i - \Delta y_i);$$

$$P_{\text{ламаної}} = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \, y_i - \pi \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \, \Delta y_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} (\Delta l_i - \Delta s_i) y_i + 2\pi \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i \, y_i - \pi \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \, \Delta y_i \cdot$$

Нехай

$$\alpha = 2\pi \sum_{i=1}^{n} (\Delta l_i - \Delta s_i) y_i \; ; \quad \beta = \pi \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \, \Delta y_i \cdot$$

Доведемо, що $\lim\limits_{d \to 0} \alpha = \lim\limits_{d \to 0} \beta = 0$.

Розглянемо β :

$$\beta = \pi \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \, \Delta y_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \left[\Psi(s_i) - \Psi(s_{i-1}) \right] \cdot$$

Із доведеного вище випливає, що $\Psi(s)$ – неперервна на відрізку $[0, |L|]$. Тому, за *теоремою Кантора* [**2**, с. 163], функція $\psi(s)$ – рівномірно неперервна на $[0, |L|]$, тобто

$$\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, \delta > 0 : \forall R = \{s_i\} : \; d = \max_i (s_i - s_{i-1}) < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow | \Delta y_i | = \left| \Psi(s_i) - \Psi(s_{i-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi |L|} .$$

Тоді

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i\,\Delta y_i\right| \le \sum_{i=1}^{n}\Delta l_i\left|\Delta y_i\right| < \frac{\varepsilon}{2\pi|L|}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i}_{=|L_{\text{ламаної}}|\le|L|} \le \frac{\varepsilon}{2\pi|L|}\cdot|L| = \frac{\varepsilon}{2\pi}\ .$$

Отже,

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta_1>0\ \forall R=\{s_i\}:\ d<\delta_1 \Rightarrow |\beta| < \pi\cdot\frac{\varepsilon}{2\pi}=\frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Розглянемо $\alpha = 2\pi\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta l_i-\Delta s_i\right)y_i$. Оскільки $\Psi(s)$ неперервна на $[0,|L|]\Rightarrow$ (за *першою теоремою Вейєрштрасса* [**2**, с. 161]) обмежена на $[0,|L|]\Rightarrow$

$$\exists\,K>0:\ \left|\Psi(s)\right|=|y|\le K\quad\forall[0,|L|],$$

звідки

$$|\alpha| \le 2\pi\sum_{i=1}^{n}|\Delta l_i-\Delta s_i|\cdot y_i \le 2\pi K\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta s_i-\Delta l_i\right) = 2\pi K\cdot\left(|L|_{\text{кривої}}-|L|_{\text{ламаної}}\right).$$

Оскільки крива є простою гладкою на $[0,|L|]$, то із доведення *теореми 5.17* випливає, що

$$|L|_{\text{кривої}}=\lim_{d\to 0}|L|_{\text{ламаної}}\Rightarrow$$

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta_2>0\ \forall R=\{s_i\}:\ d<\delta_2\ \Rightarrow\ 0\le|L|_{\text{кривої}}-|L|_{\text{ламаної}}<\frac{\varepsilon}{4\pi K},$$

звідки

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta_2>0\ \forall R=\{s_i\}:\ d<\delta_2\ \Rightarrow\ |\alpha|<2\pi K\cdot\frac{\varepsilon}{4\pi K}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, для будь-якого $\varepsilon>0$ при виборі діаметра розбиття меншим за $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ отримаємо:

$$\left.\begin{array}{l} P_{\text{ламаної}}=\alpha+2\pi\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta s_i\,y_i-\beta;\\ |\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{2};\quad |\beta|<\dfrac{\varepsilon}{2}; \end{array}\right\}\Rightarrow\left|P_{\text{ламаної}}-2\pi\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i\,y_i\right|<\varepsilon,$$

тому

$$\lim_{d\to 0}P_{\text{ламаної}}=\lim_{d\to 0}2\pi\sum_{i=1}^{n}y_i\,\Delta s_i\,.$$

Оскільки під знаком границі знаходиться сума, що є інтегральною сумою для функції $y=\psi(s)$ на відрізку $[0,|L|]$, то

$$P_{\text{поверхні}}=\lim_{d\to 0}P_{\text{ламаної}}=2\pi\int_{0}^{|L|}y\,ds\,.$$

Оскільки s – параметр довжини дуги кривої, то ds – диференціал дуги, тоді, скориставшись формулами обчислення диференціала дуги, отримаємо **формули для обчислення площ поверхонь обертання навколо осі абсцис** гладких кривих ($y \geq 0$) для різних випадків їх задання. Наведемо їх у вигляді таблиці:

загальний випадок: $\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases} \quad s \in [0, \lvert L \rvert]$ ($\Phi(s)$ і $\Psi(s)$ – неперервно диференційовні на відрізку $[0, \lvert L \rvert]$, s – параметр довжини дуги)	$P_x = 2\pi \cdot \int\limits_0^{\lvert L \rvert} y(s) ds$;
гладка крива задана параметрично: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, T]$ ($x(t)$ і $y(t)$ – неперервно диференційовні на відрізку $[t_0, T]$)	$P_x = 2\pi \cdot \int\limits_{t_0}^{T} y(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$;
гладка крива задана явно: $y = f(x)$ – неперервно диферент-ційовна на відрізку $[a,b]$	$P_x = 2\pi \cdot \int\limits_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$;
гладка крива задана в полярній системі координат: $\rho = \rho(\varphi)$ – неперервно диферент-ційовна на відрізку $[\alpha,\beta]$	$P_\rho = 2\pi \cdot \int\limits_\alpha^\beta \rho(\varphi) \sin\varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2} d\varphi$.

6. Схема застосування визначених інтегралів

Нехай необхідно знайти значення деякої величини Q, що залежить від $[a;b]$. Наприклад, як Q може бути $\lvert L \rvert, P_x, S$. Величина Q може бути геометричною, фізичною або іншою величиною.

Припущення на Q:

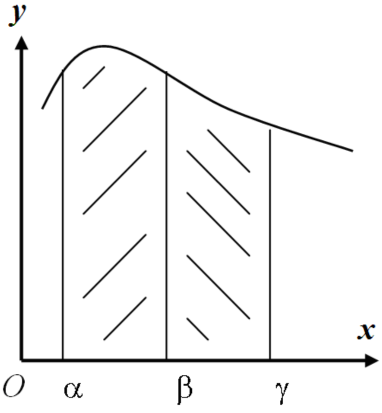
1) будь-якому відрізку $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ відповідає частина величини Q, тобто Q залежить від $[\alpha, \beta]$;
2) Q – адитивна функція відрізка, тобто

$$\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in [a, b] \quad \alpha < \beta < \gamma \Rightarrow$$

$$Q_{[\alpha,\beta]} + Q_{[\beta,\gamma]} = Q_{[\alpha,\gamma]}.$$

На рис. 5.24 наочно показана властивість адитивності у випадку, коли Q є площею криволінійної трапеції.

Розглянемо $[x, x+\Delta x] \to \Delta Q$ – функцію відрізка $[x, x+\Delta x]$.



$$S_{[\alpha,\beta]} + S_{[\beta,\gamma]} = S_{[\alpha,\gamma]}$$

Рис. 5.24.

Мета: отримати наближену рівність $\Delta Q \approx q(x)\cdot\Delta x$, де знак “$\approx$” слід розуміти так: ΔQ подається сумою, один із доданків якої $q(x)\cdot\Delta x$, а інші – нескінченно малі більш високого порядку мализни, ніж Δx. Тобто $q(x)\cdot\Delta x$ – головна лінійна частина величини ΔQ. Ось чому іноді замість ΔQ пишуть диференціал величини Q, тобто dQ .

Наприклад, при обчисленні площі поверхні обертання (див. попередній пункт) суму доданків, що відповідали i-му відрізку розбиття, можна обрати як ΔQ, тобто

$$\Delta Q = \Delta P_{\text{ламаної}} = 2\pi\cdot y(s)\cdot\Delta s + 2\pi\cdot(\Delta l - \Delta s)\cdot y(s) - \pi\cdot\Delta l\cdot\Delta y(s).$$

Тоді ті доданки, що відповідали величинам α і β, – це $2\pi\cdot(\Delta l-\Delta s)\cdot y(s)$ і $\pi\cdot\Delta l\cdot\Delta y(s)$, відповідно, – мають більш високий порядок мализни, ніж Δs (доведіть це ✍!). Отже, $\Delta P_{\text{ламаної}} \approx 2\pi\cdot y(s)\cdot\Delta s$.

Схема застосування визначеного інтеграла

1) Розглянемо ΔQ, що відповідає $[x, x+\Delta x]$. Представляємо $\Delta Q \approx q(x)\cdot\Delta x$, де всі інші доданки величини ΔQ є нескінченно малими більш високого порядку мализни за Δx.
2) Якщо вважати, що за Δx виступають довжини відрізків розбиття Δx_i, то величині ΔQ буде відповідати ΔQ_i.
3) Якщо ми просумуємо ΔQ_i, то отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta Q_i = Q_{[a,\,b]},$$

$$\sum_{i=1}^{n}q(x_i)\Delta x_i \approx Q_{[a,\,b]}.$$

4) Тоді після переходу до границі при $d\to 0$, одержимо точну рівність:

$$\int_a^b q(x)\,dx = Q_{[a,\,b]}.$$

Фактично, при застосування зазначеної схеми обмежуються першим пунктом схеми, після чого приходять до висновку про представлення величини $Q_{[a,\,b]}$ останнім інтегралом.

7. Статичні моменти й центр мас плоских кривих

Нехай на координатній площині задано систему матеріальних точок $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$,…, $P_n(x_n,y_n)$ (рис.1.25) із відповідними масами $m_1, m_2,..., m_n$. Добутки $x_i m_i$ та $y_i m_i$ називають *статичними моментами матеріальної точки* P_i *відносно осей* Oy *та* Ox, а суми $\sum_{i=1}^{n}x_i m_i$ та $\sum_{i=1}^{n}y_i m_i$ – *статичними моментами заданої системи матеріальних точок відносно осей* Oy *та* Ox.

Центром мас системи матеріальних точок називають таку точку $(x_{ц.м.}, y_{ц.м.})$, що коли загальну масу системи помістити в неї, то отримаємо матеріальну точку, статичні моменти якої відносно осей Ox та Oy дорівнюватимуть статичним моментам даної системи.

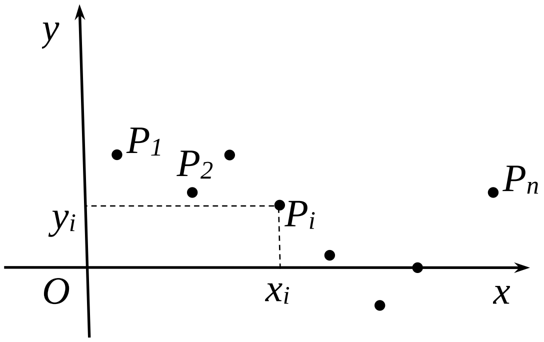


Рис. 5.25.

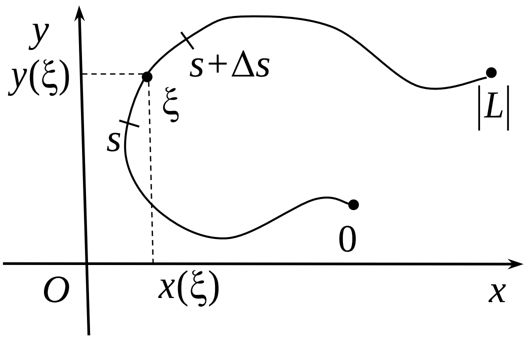


Рис. 5.26.

Якщо ж маси зосереджені не в окремих точках, а розташовані суцільно, заповнюючи криву або плоску фігуру, то в такому випадку для обчислення статичного моменту замість суми буде застосовано інтеграл.

Розглянемо матеріальну криву, тобто таку криву, вздовж якої розподілена деяка маса. Знайдемо її статичні моменти відносно координатних осей Ox та Oy (рис. 5.26). Позначимо їх відповідно K_x і K_y.

Нехай крива є однорідною, тобто її густина $\gamma = const$. Будемо вважати, що $\gamma = 1\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}}\right]$. Маса будь-якої ділянки кривої $[s, s+\Delta s]$ (s – параметр довжини дуги кривої) наближено дорівнює

$$\Delta m \approx \gamma \cdot \Delta s .$$

Тому після застосування зазначеної схеми отримаємо формулу для обчислення маси кривої:

$$m = \int_0^{|L|} \gamma\, ds = 1 \cdot \int_0^{|L|} ds = |L| .$$

В загальному випадку $\gamma(s) \neq const$, прийнявши $\Delta m \approx \gamma(\xi) \cdot \Delta s$, де ξ – довільно вибрана точка на $[s, s+\Delta s]$, отримаємо формулу

$$m = \int_0^{|L|} \gamma(s)\, ds .$$

Статичний момент ділянки однорідної кривої $[s, s+\Delta s]$ відносно осі абсцис наближено можна замінити на статичний момент точки s, що належить цій ділянці:

$$\Delta K_x \approx \Delta m \cdot y(s) = \Delta s \cdot y(s).$$

Тому після застосування зазначеної схеми отримаємо формулу для обчислення статичного моменту гладкої однорідної кривої відносно осі абсцис:

$$\boxed{K_x = \int_0^{|L|} y(s)\, ds}$$

Аналогічно, статичний момент такої кривої відносно осі ординат дорівнює

$$\boxed{K_y = \int_0^{|L|} x(s)\,ds}$$

В загальному випадку, коли $\gamma(s) \neq const$, використовується формула

$$\boxed{K_x = \int_0^{|L|} \gamma(s)\,y(s)\,ds, \quad K_y = \int_0^{|L|} \gamma(s)\,x(s)\,ds}$$

Оскільки s – параметр довжини дуги кривої, то ds – диференціал дуги, тоді, скориставшись формулами обчислення диференціала дуги, отримаємо **формули для обчислення статичних моментів плоских гладких однорідних кривих відносно осей координат**:

загальний випадок: $\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases} \quad s \in [0, \lvert L \rvert]$ (s – параметр довжини дуги)	$K_x = \int_0^{\lvert L \rvert} y(s)\,ds$, $K_y = \int_0^{\lvert L \rvert} x(s)\,ds$;
гладка крива, задана параметрично: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, T]$	$K_x = \int_{t_0}^{T} y(t)\,\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt$, $K_y = \int_{t_0}^{T} x(t)\,\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt;$
гладка крива, задана явно: $y = f(x),\ x \in [a,b]$	$K_x = \int_a^b f(x)\,\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx,$ $K_y = \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx;$
гладка крива, задана в полярній системі координат: $\rho = \rho(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta]$	$K_\rho = \int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\,\sin\varphi\,\sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2}\,d\varphi$

Центр мас матеріальної кривої означається аналогічно центру мас системи матеріальних точок.

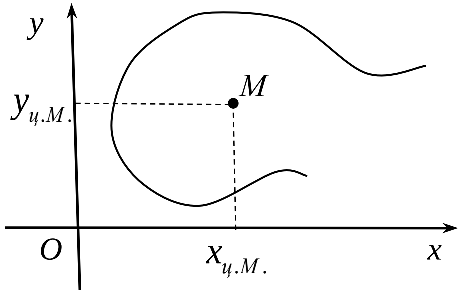


Рис. 5.27.

Означення 5.42. *Центр мас кривої* – це точка $M(x_{ц.М.}, y_{ц.М.})$ на площині, в якій зосереджено масу, що дорівнює масі цієї кривої, а статичний момент цієї маси відносно Ox і Oy дорівнює статичному моменту цієї кривої відносно координатних осей (див. рис. 5.27).

За означенням і отриманими формулами маємо:

$$K_x^{(M)} = K_x^{(\text{кривої})}; \quad K_y^{(M)} = K_y^{(\text{кривої})};$$

$$\left.\begin{aligned} &K_x^{(M)} = m_M \cdot y_M = m_{\text{кривої}} \cdot y_M \Rightarrow K_x^{ц.т.} = |L| \cdot y_{_{ц.М.}} \\ &K_x^{ц.т.} = K_x^{(\text{кривої})} = \int\limits_0^{|L|} y(s)\,ds \end{aligned}\right\} \Rightarrow |L| \cdot y_{_{ц.М.}} = \int\limits_0^{|L|} y(s)\,ds \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow y_{_{ц.М.}} = \frac{1}{|L|} \cdot \int\limits_0^{|L|} y(s)\,ds}\,.$$

Аналогічно

$$\boxed{x_{_{ц.М.}} = \frac{1}{|L|} \cdot \int\limits_0^{|L|} x(s)\,ds}$$

В загальному випадку, коли густина маси кривої $\gamma(s)$ не є сталою, можна вивести формули

$$\boxed{x_{_{ц.М.}} = \frac{\int\limits_0^{|L|} \gamma(s) \cdot x(s)\,ds}{\int\limits_0^{|L|} \gamma(s)\,ds}, \quad y_{_{ц.М.}} = \frac{\int\limits_0^{|L|} \gamma(s) \cdot y(s)\,ds}{\int\limits_0^{|L|} \gamma(s)\,ds}}$$

Оскільки s – параметр довжини дуги кривої, то **формули для обчислення координат центрів мас однорідних плоских гладких кривих** мають вигляд:

загальний випадок: $\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases} \quad s \in [0, \lvert L \rvert]$ (s – параметр довжини дуги)	$x_{_{ц.М.}} = \frac{1}{\lvert L \rvert} \cdot \int\limits_0^{\lvert L \rvert} x(s)\,ds$, $y_{_{ц.М.}} = \frac{1}{\lvert L \rvert} \cdot \int\limits_0^{\lvert L \rvert} y(s)\,ds$;
гладка крива, задана параметрично: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, T]$	$x_{_{ц.М.}} = \frac{1}{\lvert L \rvert} \cdot \int\limits_{t_0}^{T} x(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt,$ $y_{_{ц.М.}} = \frac{1}{\lvert L \rvert} \cdot \int\limits_{t_0}^{T} y(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt;$
гладка крива, задана явно: $y = f(x),\ x \in [a,b]$	$x_{_{ц.М.}} = \frac{1}{\lvert L \rvert} \cdot \int\limits_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$, $y_{_{ц.М.}} = \frac{1}{\lvert L \rvert} \cdot \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$;
гладка крива, задана в полярній системі координат: $\rho = \rho(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta]$	$x_{_{ц.М.}} = \frac{1}{\lvert L \rvert} \cdot \int\limits_\alpha^\beta \rho(\varphi)\cos\varphi\sqrt{\rho^2 + (\rho_\varphi')^2}\,d\varphi,$ $y_{_{ц.М.}} = \frac{1}{\lvert L \rvert} \cdot \int\limits_\alpha^\beta \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2 + (\rho_\varphi')^2}\,d\varphi.$

Обидві частини рівності $|L|\cdot y_{ц.т.}=\int\limits_0^{|L|} y(s)ds$ помножимо на 2π, одержимо

$\lvert L\rvert\cdot$	$2\cdot\pi\cdot y_{ц.М.}$	$= \quad 2\cdot\pi\cdot\int\limits_0^{\lvert L\rvert} y(s)ds$
– довжина кривої,	– довжина кола, що описує центр мас кривої,	– площа поверхні обертання кривої навколо осі абсцис при $y\geq 0$

Таким чином, отримано теорему.

Теорема 5.29 *(перша теорема Гюльдена*[1]*)***.** Площа поверхні обертання гладкої кривої навколо осі абсцис у випадку, коли крива не перетинає цієї осі, дорівнює довжині цієї кривої, помноженій на довжину кола, що описує центр мас кривої.

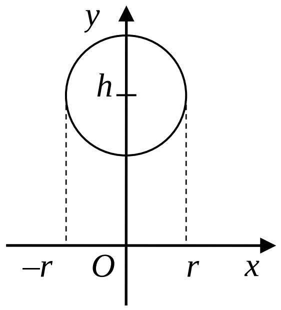


Рис. 5.28.

Приклад 5.21. Знайти площу поверхні тора, що утворюється обертанням кола, зображеного на рис. 5.28, навколо осі абсцис.

Розв'язання. Довжина цієї кривої (кола) дорівнює $2\pi r$. Центр мас знаходиться в центрі кола і має координати $(0,h)$, тому довжина кола, що описує центр мас – $2\pi h$. Тому, за теоремою Гюльдена,

$$P_{\text{поверхні тора}}=2\pi r\cdot 2\pi h=4\pi^2 rh.$$

8. Центр мас криволінійної трапеції

Нехай $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\leq x\leq b\wedge 0\leq y\leq f(x)\}$ – криволінійна трапеція, де $f(x)$ – неперервна невід'ємна функція на відрізку $[a,b]$. Нехай ця криволінійна трапеція є матеріальною, тобто на ній розподілена деяка маса.

Нехай криволінійна трапеція – матеріальна фігура однорідної густини $\gamma = const = 1\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^2}\right]$. Розглянемо цю криволінійну трапецію на відрізку $[x,\, x+\Delta x]$ (див. рис. 5.29). Її можна наближено замінити на прямокутник із довжиною основи Δx і висотою $y=f(x)$ $(y\geq 0)$. Координати центра мас прямокутника $\left(x+\frac{\Delta x}{2},\ \frac{y}{2}\right)$. Тоді статичний момент криволінійної трапеції на відрізку $[x,\, x+\Delta x]$ можна наближено замінити на статичний момент центра мас зазначеного прямокутника.

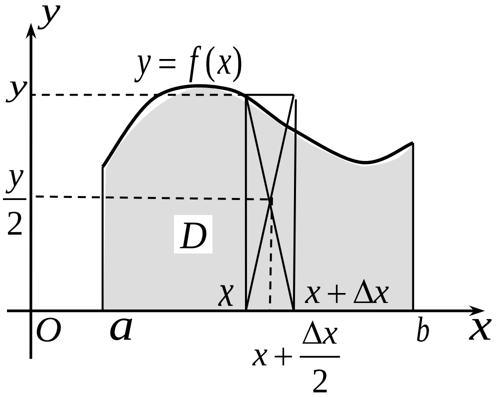


Рис. 5.29.

---

[1] *Гюльден (Гульдін) Пауль* (12.6.1577 – 3.11.1643) – швейцарський математик. Основні роботи присвячені проблемі нескінченно малих, серед яких «Про центр тяжіння» (1635 – 1643). Ім'я Гюльдена носить кратер на Місяці.

Позначимо Δm і ΔS масу і площу прямокутника відповідно. Відносно осі абсцис отримаємо:

$$\Delta K_x \approx \Delta m \cdot \frac{y}{2} = \gamma \cdot \Delta S \cdot \frac{y}{2} = \Delta x \cdot y \cdot \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot \Delta x,$$

а відносно осі ординат

$$\Delta K_y \approx \Delta m \cdot \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \Delta x \cdot y \cdot \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = xy \cdot \Delta x + \underbrace{\frac{y}{2} \cdot (\Delta x)^2}_{=o(\Delta x)} \approx xy \cdot \Delta x \cdot$$

Тому після застосування зазначеної схеми отримаємо формулу для обчислення статичного моменту криволінійної трапеції відносно осей координат:

$$\boxed{K_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx, \quad K_y = \int_a^b xy\, dx}$$

🗁 **Означення 5.43.** *Центр мас криволінійної трапеції* – це матеріальна точка M, маса якої дорівнює масі цієї криволінійної трапеції, а статичний момент цієї точки відносно Ox і Oy дорівнює статичному моменту цієї трапеції відносно цих осей.

За означенням і отриманими формулами маємо:

$$K_x^{(M)} = K_x^{(\text{крив. трапеції})}; \quad K_y^{(M)} = K_y^{(\text{крив. трапеції})};$$

$$\left.\begin{array}{l} K_x^{(M)} = m_M \cdot y_M = m_{\text{крив. трапеції}} \cdot y_M \Rightarrow K_x^{ц.т.} = S_{\text{крив. трапеції}} \cdot y_{ц.М.}, \\ K_x^{ц.т.} = K_x^{(\text{крив. трапеції})} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^b y^2 dx, \quad S_{\text{крив. трапеції}} = \int_a^b y dx, \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx = \int_a^b y dx \cdot y_{ц.М.} \Rightarrow y_{ц.М.} = \frac{\int_a^b y^2 dx}{2\int_a^b y dx},$$

аналогічно

$$K_y^{ц.т.} = K_y^{(\text{крив. трапеції})} = S_{\text{крив. трапеції}} \cdot x_{ц.т.} \Rightarrow x_{ц.М.} = \frac{\int_a^b xy\, dx}{\int_a^b y dx}.$$

Отже, **координати центра мас криволінійної трапеції** (тут $\gamma = const = 1\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^2}\right]$) обчислюються за формулами

$$\boxed{x_{ц.М.} = \frac{\int_a^b xy\, dx}{\int_a^b y dx}, \quad y_{ц.М.} = \frac{\int_a^b y^2 dx}{2\int_a^b y dx}}$$

Обидві частини формули

$$\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx = S_{\text{крив. трапеції}} \cdot y_{ц.М.}$$

помножимо на 2π, одержимо

$S_{\text{крив. трапеції}} \cdot$	$2\cdot\pi\cdot y_{ц.М.}$	$= \quad \pi\cdot\int_a^b y^2dx$
– площа криволінійної трапеції,	– довжина кола, що описує центр мас,	– об’єм тіла обертання криволінійної трапеції навколо осі абсцис

Аналогічні міркування призведуть до тих самих висновків відносно осі ординат.

Таким чином, отримано теорему.

Теорема 5.30 *(друга теорема Гюльдена)***.** Об’єм тіла обертання криволінійної трапеції навколо однієї з осей координат у випадку, коли графік функції, що задає цю трапецію, не перетинає цієї осі, дорівнює площі такої криволінійної трапеції, помноженій на довжину кола, що описує центр мас криволінійної трапеції.

9. Механічна робота

Нехай під дією деякої сили F матеріальна точка M рухається вздовж прямої Ox, причому напрям дії сили збігається з напрямком руху матеріальної точки. Потрібно знайти роботу A, яку виконує сила F при переміщенні точки M з положення $x=a$ у положення $x=b$.

Якщо величина F є сталою, то робота A дорівнює добутку сили F на довжину шляху, пройденого матеріальною точкою M :

$$A=F\cdot(b-a).$$

Нехай F неперервно змінюється в залежності від координати x точки M, тобто $F=F(x)$, де $F(x)$ є неперервною функцією на $[a;b]$. Поділимо відрізок $[a;b]$ на n частин (елементарних відрізків), довжини яких відповідно дорівнюють $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$. На кожному елементарному відрізку $[x_{i-1};x_i]$ виберемо довільну точку ξ_i, і силу $F(x)$ на цьому відрізку вважатимемо сталою такою, що дорівнює $F(\xi_i)$. У цьому випадку наближене значення роботи сили F на шляху довжиною Δx_i буде дорівнювати $F(\xi_i)\cdot\Delta x_i$. Наближене значення роботи сили F із переміщення матеріальної точки з положення $x=a$ в положення $x=b$ дорівнює:

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}F(\xi_i)\Delta x_i \cdot$$

Оскільки $F(x)$ є неперервною функцією на відрізку $[a;b]$, то існує границя інтегральної суми A_n для цієї функції на $[a;b]$ при $\max_i \Delta x_i \to 0$, що дорівнює роботі сили F із переміщення матеріальної точки M з положення $x=a$ в положення $x=b$. Ця границя є визначеним інтегралом від функції $F(x)$ вздовж відрізка $[a;b]$. Тому робота змінної сили $F(x)$ тут визначається рівністю

$$A=\int_a^b F(x)dx$$

Розглянемо загальний випадок. Нехай рух здійснюється вздовж кривої $L=AB$, що параметризована довжиною дуги й задається рівняннями $\begin{cases} x=\varphi(s), \\ y=\psi(s), \end{cases}$ $s\in[0,|L|]$. У такому випадку точки A та B мають координати: $A(\varphi(0),\psi(0))$, $B(\varphi(|L|),\psi(|L|))$. Якщо рух матеріальної точки вздовж цієї кривої під дією сили $F(s)$, яка є неперервною функцією на $[0,|L|]$, здійснюється так, що сила утворює з напрямом руху кут $\alpha(s)$, який так само є неперервною на $[0,|L|]$ функцією, то робота цієї сили з переміщення з точки A в точку B вздовж кривої $L=\cup AB$ обчислюється за формулою[1]

$$A=\int_0^{|L|} F(s)\cdot\cos\alpha(s)ds$$

Якщо силу розкласти на дотичну й нормальну складові відносно кривої, то добуток $F_s(s)=F(s)\cdot\cos(F(s),s)$ виражає саме дотичну складову. Саме вона визначає величину роботи. Тому формулу для обчислення роботи можна переписати у вигляді

$$A=\int_0^{|L|} F_s(s)ds\,,$$

де $F_s(s)$ – дотична складова сили $F(s)$ вздовж даної кривої.

---

[1] Вивчення формули здійснюється в рамках теми «Криволінійні інтеграли». Див. с.30 посібника: Математичний аналіз: інтегральне числення функції багатьох змінних: навч. посіб. для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напрямів підготовки «Математика», «Прикладна математика», «Програмна інженерія» / С.М. Гребенюк, Н.М. Д'яченко, І.В. Красікова, Є.В. Панасенко. Запоріжжя: ЗНУ, 2015. 120 с

§4. Наближене обчислення інтегралів

1. Формула прямокутників

Пригадаємо деякі теоретичні відомості, потрібні для подальшого розуміння матеріалу.

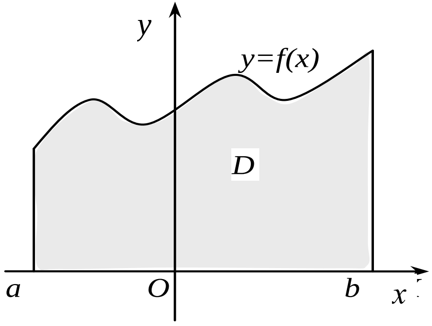


Рис. 5.30.

Геометричний зміст визначеного інтеграла. Якщо функція $f\left(x\right)$ – неперервна на $[a,b]$ і $f\left(x\right)\geq 0$, то визначений інтеграл Рімана дорівнює площі криволінійної трапеції (рис. 5.30), тобто

$$S=\int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Розглянемо розбиття

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_{k-1}<x_k<...<x_{n-1}<x_n=b$$

відрізка $[a,b]$. Позначимо розбиття $R=\{x_k\}$. Розглянемо проміжні точки $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$, позначимо множину, яку вони утворюють, через $P=\{\xi_k\}$.

Геометричний зміст інтегральної суми Рімана $\sigma=\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$ для невід'ємної неперервної на $[a,b]$, функції $f(x)$. Значення $f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$ *відповідає площі прямокутника*, що є складовою східчастої фігури, зображеної на рис. 5.31. Значення площі усієї східчастої фігури дорівнює значенню інтегральної суми $\sigma=\sigma(f,P,R)$.

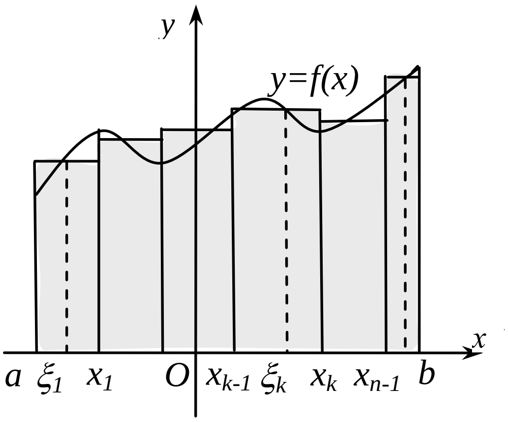


Рис. 5.31.

Таким чином, при застосуванні формули прямокутників інтеграл наближено замінюється відповідною інтегральною сумою.

З геометричної точки зору (у випадку $f\left(x\right)\geq 0$ на $[a,b]$), використання формули прямокутників передбачає заміну площ криволінійних трапецій на площі прямокутників. У загальному випадку будемо застосовувати наближення вигляду: $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\approx f\left(\dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\cdot\Delta x_i$, де $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=\overline{1,n})$.

Нехай функція $f\left(x\right)$ – неперервна на $[a,b]$ $\Rightarrow$ функція $f\left(x\right)$ – інтегровна на $[a,b]$ (*теорема 5.9*) $\Rightarrow$ границя інтегральних сум не залежить від вибору проміжних точок і способу розбиття.

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин, а проміжні точки виберемо як середини відрізків розбиття. Тоді

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}\ ; \qquad \xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}\ .$$

Обчислимо

$$x_i = a + i\cdot\frac{b-a}{n}\ ,$$

$$\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = a + (i-1)\cdot\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{2n} = a + \left(i-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{n}\ ,$$

позначимо $x_{i-\frac{1}{2}} = a + \left(i-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{n}$, отримаємо

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right).$$

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)$ або $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\left(i-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{n}\right)$	– ***формула прямокутників***

Обчислимо похибку наближеної формули.

За *властивістю адитивності визначеного інтеграла* маємо

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\ . \tag{1.34}$$

Зробимо тимчасові перепозначення: $\alpha = x_{i-1}$; $\beta = x_i$.

Проведемо *допоміжні викладки* й знайдемо значення інтеграла $\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

Накладемо такі **припущення** на функцію:

1) $f(x)$ задана на $[a,b]$,
2) $f(x)$ неперервно диференційовна на $[a,b]$,
3) $f(x)$ двічі диференційовна на (a,b).

У зазначених припущеннях можна застосовувати формулу Тейлора в точці $x_0 \in [\alpha,\beta] \subset [a,b]$ із залишковим членом у формі Лагранжа у вигляді:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \frac{f''(c)}{2!}\cdot(x-x_0)^2.$$

В залишковому члені (останній доданок) точка c лежить між x і x_0. Покладемо $x_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$, тоді

$$f(x)=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{1!}\cdot\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{f''(c)}{2!}\cdot\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2;$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot(\beta-\alpha)+f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\int_\alpha^\beta\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx+$$

$$+\int_\alpha^\beta\frac{f''(c)}{2}\cdot\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2dx.$$

Тут c розташована між x і $\frac{\alpha+\beta}{2}$, тому c залежить від x, тобто $c=c(x)$. До останнього доданка будемо застосовувати узагальнену теорему про середнє (*властивість 13^o*). Сформулюємо її в зручних для доведення позначеннях:

$\varphi(x),\ g(x)$ – неперервні функції, $g(x)\geq 0$ на $[\alpha,\beta]\ \Rightarrow\ \exists c^*\in(\alpha,\beta)$:

$$\int_\alpha^\beta\varphi(x)g(x)dx=\varphi(c^*)\int_\alpha^\beta g(x)dx.$$

Покладемо

$$\varphi(x)=\frac{f''(c(x))}{2};\quad g(x)=\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\geq 0,$$

Тоді

$$\int_\alpha^\beta\frac{f''(c)}{2}\cdot\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2dx=\frac{f''(c^*)}{2!}\cdot\int_\alpha^\beta\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2dx=\frac{f''(c^*)}{2!}\cdot\frac{(\beta-\alpha)^3}{12}.$$

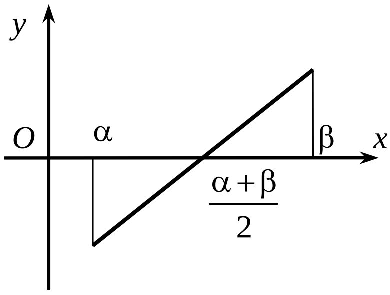


Рис. 5.32.

На рис. 5.32 зображено графік функції $y=x-\frac{\alpha+\beta}{2}$. В силу його симетрії відносно точки $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},0\right)$ отримаємо:

$$\int_\alpha^\beta\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx=0.$$

Отже,

$$\exists c^*\in(\alpha,\beta):\ \int_\alpha^\beta f(x)dx=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot(\beta-\alpha)+\frac{f''(c^*)}{2!}\cdot\frac{(\beta-\alpha)^3}{12}.$$

Зробимо зворотні перепозначення $x_{i-1}=\alpha,\ x_i=\beta$, отримаємо:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)dx=f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\cdot(x_i-x_{i-1})+\frac{f''(c_i^*)}{24}\cdot(x_i-x_{i-1})^3,$$

підставимо в (1.34)

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\cdot\left(x_i - x_{i-1}\right) + \sum_{i=1}^n \frac{f''\left(c_i^*\right)}{24}\cdot\left(x_i - x_{i-1}\right)^3 =$$

$$= \left\| \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = x_{i-\frac{1}{2}}; \qquad x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \right\| =$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) + \frac{(b-a)^3}{24\cdot n^2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^n f''\left(c_i^*\right). \qquad (1.35)$$

Тут $\frac{(b-a)^3}{24\cdot n^2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^n f''\left(c_i^*\right)$ – залишковий член формули прямокутників.

Оцінимо залишковий член. Накладемо ***додаткове припущення***, що функція $f''(x)$ – неперервна на $[a,b]$. Тоді, за *другою теоремою Вейєрштрасса* [**2**, с. 161],

$$m = \inf_{[a,b]} f''(x) = \min_{[a,b]} f''(x); \quad M = \sup_{[a,b]} f''(x) = \max_{[a,b]} f''(x);$$

Звідси $m \le f''\left(c_i^*\right) \le M \; \forall i = \overline{1,n}$ і

$$m\cdot n \le \sum_{i=1}^n f''\left(c_i^*\right) \le M\cdot n;$$

$$m \le \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^n f''\left(c_i^*\right) \le M.$$

Отже, значення $\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^n f''\left(c_i^*\right)$ є проміжним між значеннями функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Тому за *теоремою Коші*, неперервна на відрізку $[a,b]$ функція набуває усіх своїх проміжних значень [**2**, с. 159],

$$\Rightarrow \exists\, c^{**} \in [a,b]:\; f''\left(c^{**}\right) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^n f''\left(c_i^*\right).$$

Підставимо в (1.35), отримаємо

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^n f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) + \frac{(b-a)^3}{24\cdot n^2}\cdot f''\left(c^{**}\right), \quad c^{**}\in[a,b]}$$ – ***формула прямокутників із залишковим членом***

Тут $\frac{(b-a)^3}{24\cdot n^2}\cdot f''\left(c^{**}\right)$ $\left(c^{**}\in[a,b]\right)$ – *залишковий член у формулі прямокутників.*

Звідси випливає, що *похибка формули прямокутників має порядок* $\frac{1}{n^2}$.

ВИСНОВОК:

1) **Припущення**: $f(x)$ двічі неперервно диференційовна на $[a,b]$.

2) Формула прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) \quad \text{або} \quad \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\left(i-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{n}\right). \quad (1.36)$$

3) Формула прямокутників із залишковим членом:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)+\frac{(b-a)^3}{24\cdot n^2}\cdot f''\left(c^{**}\right), \quad c^{**}\in[a,b].$$

4) Залишковий член формули прямокутників:

$$\frac{(b-a)^3}{24\cdot n^2}\cdot f''\left(c^{**}\right) \ (c^{**}\in[a,b]). \quad (1.37)$$

5) Похибка формули прямокутників має порядок $\frac{1}{n^2}$.

2. Формула трапецій

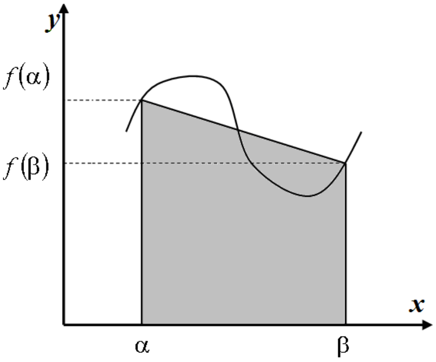


Рис. 5.33.

Ідея цієї формули полягає в тому, що у випадку неперервної невід'ємної на $[a,b]$ функції $f(x)$, у ній площа криволінійної трапеції буде наближено замінятися на площу прямолінійної трапеції (див. рис. 5.33). А у загальному випадку неперервної функції $f(x)$ на $[a,b]$ застосовується наближення вигляду:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \approx (\beta-\alpha)\cdot\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}.$$

Якщо функція $f(x)$ – неперервна на $[a, b]$, то вона інтегровна на $[a, b]$ (*теорема* 5.9). Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин, тоді

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}; \qquad x_i = a + i\cdot\frac{b-a}{n},$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \left(x_i - x_{i-1}\right)\cdot\left(\frac{f\left(x_{i-1}\right)}{2}+\frac{f\left(x_i\right)}{2}\right).$$

За *властивістю адитивності визначеного інтеграла*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{i-1}\right)\cdot\left(\frac{f\left(x_{i-1}\right)}{2}+\frac{f\left(x_i\right)}{2}\right)=\left\|x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}\right\|=$$

$$=\frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{f\left(x_0\right)}{2}+\frac{f\left(x_1\right)}{2}+\frac{f\left(x_1\right)}{2}+\frac{f\left(x_2\right)}{2}+\frac{f\left(x_2\right)}{2}+\frac{f\left(x_3\right)}{2}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{f\left(x_{n-2}\right)}{2}+\frac{f\left(x_{n-1}\right)}{2}+\frac{f\left(x_{n-1}\right)}{2}+\frac{f\left(x_n\right)}{2}\right)=$$

$$=\frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{f(a)}{2}+\frac{f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}f\left(x_i\right)\right)=\frac{b-a}{2\cdot n}\left(f(a)+f(b)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1}f\left(x_i\right)\right).$$

$$\boxed{\begin{gathered}\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2\cdot n}\left(f(a)+f(b)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1}f\left(x_i\right)\right),\\ x_i=a+i\cdot\frac{b-a}{n}(i=\overline{1,n})\end{gathered}}$$

Отримано ***формулу трапецій***.

Для обчислення *похибки* формули розглянемо спочатку інтеграл $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f\left(x\right)dx$. Зробимо тимчасові перепозначення: $\alpha=x_{i-1},\ \beta=x_i$.

Проведемо *допоміжні викладки* й знайдемо значення інтеграла $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x\right)dx$.

Накладемо такі **припущення** на функцію: $f(x)$ – двічі неперервно диференційовна на $[a,b]$. Тоді можливо застосувати визначене інтегрування частинами до появи другої похідної функції $f(x)$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)d(x-\alpha)=f(x)\cdot(x-\alpha)\Big|_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)\cdot f'(x)dx=$$

$$=f(\beta)\cdot(\beta-\alpha)-0-\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\cdot(x-\alpha)\cdot d(x-\beta)=$$

$$=\left\|\begin{matrix}u=f'(x)\cdot(x-\alpha), & du=\left(f''(x)\cdot(x-\alpha)+f'(x)\right)dx,\\ dv=d(x-\beta), & v=x-\beta\end{matrix}\right\|=$$

$$=f(\beta)\cdot(\beta-\alpha)-f'(x)\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)\Big|_{\alpha}^{\beta}+$$

$$+\int_{\alpha}^{\beta} f''(x)\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)dx+\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\cdot(x-\beta)\,dx=$$

$$=f(\beta)\cdot(\beta-\alpha)+\int_{\alpha}^{\beta} f''(x)\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)dx+\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\cdot(x-\beta)dx\ =$$

$$=\left\| \begin{matrix} u = x-\beta, & du = dx, \\ dv = f'(x)dx, & v = f(x) \end{matrix} \right\| =$$

$$= f(\beta)\cdot(\beta-\alpha)+\int_{\alpha}^{\beta} f''(x)\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)dx + f(x)\cdot(x-\beta)\Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Таким чином,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\beta)\cdot(\beta-\alpha)+ f(\alpha)\cdot(\beta-\alpha)+\int_{\alpha}^{\beta} f''(x)\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)dx-\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx,$$

тому

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\cdot(\beta-\alpha)+\frac{1}{2}\cdot\int_{\alpha}^{\beta} f''(x)\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)dx.$$

Нехай

$$I_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\cdot\int_{\alpha}^{\beta} f''(x)\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)dx,$$

тоді покладемо в узагальненій теоремі про середнє (формулювання наведене в попередньому пункті при виведенні формули похибки у формулі прямокутників)

$$\varphi(x) = f''(x);$$

$$g(x)=(x-\alpha)\cdot(x-\beta).$$

На відрізку $[\alpha,\beta]$ функція $g(x)=(x-\alpha)\cdot(x-\beta)\le 0$ має сталий знак, тому до $I_{\alpha\beta}$ можна застосовувати теорему про середнє:

$$\exists c^* \in (\alpha,\beta): I_{\alpha\beta}=\frac{1}{2} f''(c^*)\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)\cdot(x-\beta)dx = -\frac{f''(c^*)}{12}\cdot(\beta-\alpha)^3.$$

Зробимо зворотні перепозначення, підсумуємо за i від 1 до n, отримаємо:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f(x_i)}{2}+\frac{f(x_{i-1})}{2}\right)-\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{f''(c_i^*)}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2}=$$

{аналогічно виведенню похибки формули прямокутників доводиться, що

$$\exists\, c^{**}\in[a,b]: f''(c^{**}) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f''(c_i^*)\ \}$$

$$=\frac{b-a}{2n}\cdot\left(f(a)+ f(b)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)- f''(c^{**})\cdot\frac{(b-a)^3}{12\cdot n^2}.$$

Отже, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2n}\cdot\left(f(a)+ f(b)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)- f''(c^{**})\cdot\frac{(b-a)^3}{12\cdot n^2}$

($c^{**}\in[a,b]$) – ***формула трапецій із залишковим членом***

Тут $f''\left(c^{**}\right)\cdot\dfrac{\left(b-a\right)^3}{12\cdot n^2}$ $(c^{**}\in[a,b])$ – *залишковий член у формулі трапецій. Похибка формули має порядок* $\dfrac{1}{n^2}$.

ВИСНОВОК:

1) **Припущення**: $f(x)$ двічі неперервно диференційовна на $[a,b]$.

2) Формула трапецій:

$$\int_a^b f\left(x\right)dx\approx\frac{b-a}{2\cdot n}\left(f\left(a\right)+f\left(b\right)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1}f\left(x_i\right)\right),\quad x_i=a+i\cdot\frac{b-a}{n}(i=\overline{1,n}).\quad(1.38)$$

3) Формула трапецій із залишковим членом:

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=\frac{b-a}{2n}\cdot\left(f\left(a\right)+f\left(b\right)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1}f\left(x_i\right)\right)-f''\left(c^{**}\right)\cdot\frac{\left(b-a\right)^3}{12\cdot n^2}$$

$$(c^{**}\in[a,b]).$$

4) Залишковий член формули трапецій:

$$f''\left(c^{**}\right)\cdot\frac{\left(b-a\right)^3}{12\cdot n^2}\ (c^{**}\in[a,b]).\qquad(1.39)$$

5) Похибка формули трапецій має порядок $\dfrac{1}{n^2}$

3. Формула Сімпсона[1] (формула парабол)

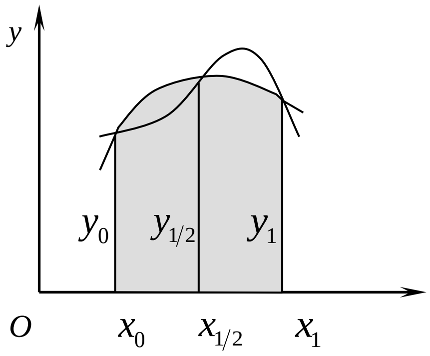


Рис.5.34

Нехай довільні попарно різні точки

$$\left(x_0,y_0\right),\quad\left(x_1,y_1\right),\quad\left(x_{1/2},y_{1/2}\right)$$

належать параболі $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ (рис. 5.34). Чи можна визначити a, b, c? Ці точки задовольняють рівнянню параболи, тому

$$\begin{cases}y_0=a\,x_0^2+b\,x_0+c,\\ y_1=a\,x_1^2+b\,x_1+c,\\ y_{1/2}=a\,x_{1/2}^2+b\,x_{1/2}+c.\end{cases}\qquad(1.40)$$

Визначник цієї системи $\Delta=\begin{vmatrix}x_0^2 & x_0 & 1\\ x_1^2 & x_1 & 1\\ x_{1/2}^2 & x_{1/2} & 1\end{vmatrix}$ не дорівнює нулю, як визначник Вандермонда, тому система (1.40) має єдиний розв'язок.

---

[1] **Томас Сімпсон** (1710-1761) – англійський математик і педагог, син ткача, самоук, не отримав спеціальної математичної освіти. Завдяки своїй працьовитості, таланту й інтересу до математики, він самостійно досконало опанував диференціальне й інтегральне числення. Формула, що носить його ім'я, була опублікована в його "Математичних міркуваннях на фізичні і аналітичні теми" (1743), фактично ця формула була ним лише знову відкрита. До нього її зміст був відомий Торічеллі (1644), Грегорі (1668), Ньютону (1676) й Котесу (1722).

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин, тоді інтеграл можна записати у вигляді суми

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \ .$$

Зробимо <u>допоміжні викладки</u>. На кожному відрізку розбиття замінимо інтеграл від функції $f(x)$ інтегралом від квадратичної функції, тобто

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} (a\,x^2 + b\,x + c)\,dx =$$

$$= a\,\frac{x_i^3}{3} - a\,\frac{x_{i-1}^3}{3} + b\,\frac{x_i^2}{2} - b\,\frac{x_{i-1}^2}{2} + c\,x_i - c\,x_{i-1} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(2\,a\left(x_i^3 - x_{i-1}^3\right) + 3b\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right) + 6\,c\left(x_i - x_{i-1}\right)\right) = \left\| x_i - x_{i-1} = h \right\| =$$

$$= \frac{h}{6}\left(2\,a\left(x_i^2 + x_i\,x_{i-1} + x_{i-1}^2\right) + 3b\left(x_i + x_{i-1}\right) + 6\,c\right) =$$

$$= \frac{h}{6}\,(\underline{2\,a\,x_i^2 + 2\,b\,x_i + 2\,c} + \underline{\underline{2\,a\,x_{i-1}^2 + 2\,b\,x_{i-1} + 2\,c}} +$$

$$+ \underline{\underline{\underline{2\,a\,x_i\,x_{i-1} + b\,x_i + b\,x_{i-1} + 2\,c}}}) =$$

$$= \frac{h}{6}\left(2\,y_i + 2\,y_{i-1} + \underline{\underline{\underline{2\,a\,x_i\,x_{i-1} + b\,x_i + b\,x_{i-1} + 2\,c}}}\right).$$

Пригадаємо, що $x_{i-1/2} = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$, тому

$$y_{i-1/2} = a\,x_{i-1/2}^2 + b\,x_{i-1/2} + c = a\,\frac{x_i^2}{4} + \frac{a}{2}\,x_i\,x_{i-1} + a\,\frac{x_{i-1}^2}{4} + b\,\frac{x_i}{2} + b\,\frac{x_{i-1}}{2} + c =$$

$$= \frac{1}{4}\left(a\,x_i^2 + 2\,a\,x_i\,x_{i-1} + a\,x_{i-1}^2 + 2\,b\,x_i + 2\,b\,x_{i-1} + 4\,c\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\underline{a\,x_i^2 + b\,x_i + c} + \underline{\underline{a\,x_{i-1}^2 + b\,x_{i-1} + c}} + \underline{\underline{\underline{b\,x_i + bx_{i-1} + 2\,c + 2\,a\,x_i\,x_{i-1}}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(y_i + y_{i-1} + \underline{\underline{\underline{2\,a\,x_i\,x_{i-1} + b\,x_i + b\,x_{i-1} + 2\,c}}}\right).$$

Звідки отримаємо

$$\underline{\underline{\underline{2\,a\,x_i\,x_{i-1} + b\,x_i + b\,x_{i-1} + 2\,c}}} = 4\,y_{i-1/2} - y_i - y_{i-1}\ .$$

Підставимо останнє в наближену рівність:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left(2\,y_i + 2\,y_{i-1}\right) + \frac{h}{6}\left(2\,a\,x_i\,x_{i-1} + b\,x_i + b\,x_{i-1} + 2\,c\right),$$

одержимо

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left(2\,y_i + 2\,y_{i-1} + 4\,y_{i-1/2} - y_i - y_{i-1}\right).$$

Отже,

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i-1}} f\left(x\right)dx \approx \frac{h}{6}\left(y_i + y_{i-1} + 4\,y_{i-1/2}\right).$$

В результаті підсумовування отримаємо:

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx \approx \frac{h}{6}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i + y_{i-1} + 4\,y_{i-1/2}\right) = \left\| h = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \right\| =$$

$$= \frac{b-a}{6\,n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i + y_{i-1} + 4\,y_{i-1/2}\right) =$$

$$= \frac{b-a}{6\,n}\cdot\left(f\left(a\right) + f\left(b\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i + 4\sum_{i=1}^{n} y_{i-1/2} \right).$$

Висновок:

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx \approx \frac{b-a}{6\,n}\cdot\left(f\left(a\right) + f\left(b\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i + 4\sum_{i=1}^{n} y_{i-1/2} \right) \qquad (1.41)$$

формула Сімпсона

В цій формулі

$$y_i = f\left(x_i\right) = f\left(a + \frac{b-a}{n}\cdot i \right);\; y_{i-1/2} = f\left(x_{i-1/2}\right) = f\left(a + \frac{b-a}{n}\cdot\left(i - 1/2\right) \right).$$

Зробимо припущення про чотирикратну неперервну диференційовність функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Відомо, що залишковий член у формулі Сімпсона має вигляд

$$R_n = -\frac{f^{IV}\left(c^{**}\right)}{2880\cdot n^4}\cdot\left(b-a\right)^5 \qquad (1.42)$$

Тому *похибка має порядок* $\frac{1}{n^4}$. (✍ Рекомендуємо розібрати виведення формули для залишкового члена самостійно[1]!)

§5. Невласні інтеграли

Із означення визначеного інтеграла Рімана випливає, що він задається на скінченному відрізку $[a,b]$. Необхідною умовою інтегровності функції є її обмеженість. Однак багато геометричних і прикладних задач потребують обчислення інтегралів на нескінченних проміжках або від необмежених функцій. Цю проблему вирішують невласні інтеграли.

Невласні інтеграли I роду розглядаються на нескінченних проміжках, а невласні інтеграли II роду – від необмежених функцій.

---

[1] Ilyin, V. A.; Poznyak, È. G. Fundamentals of mathematical analysis. Part 1. 1982. 637 p.

1. Невласні інтеграли I роду

Розглянемо нескінченні проміжки трьох типів:

I. $[a,+\infty)$; II. $(-\infty,b]$; III. $(-\infty, +\infty)$.

> У *випадку I* будемо **припускати**:
> - функція $f(x)$ задана на $[a,+\infty)$;
> - $\forall A>a$ функція $f(x)$ інтегровна на $[a, A]$, тобто
>
> $$\forall A>a \ \exists\int_a^A f(x)dx.$$

Тоді будь-якому $A>a$ відповідає єдине значення інтеграла $\int_a^A f(x)dx$, в результаті чого утворюють функцію $F(A)=\int_a^A f(x)dx$, яку задано на $[a, +\infty)$. Таким чином, коректним буде питання: чи існує границя

$$\lim_{A\to+\infty} F(A)=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx? \qquad (1.43)$$

Не завжди!

☝ 🗁**Означення 5.44**. У випадку, коли функція $f(x)$ справджує зазначені вище припущення і існує границя (1.43),

1) значення границі називають *невласним інтегралом I роду* на $[a,+\infty)$, який позначають $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, тобто

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx};$$

2) інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називають *збіжним.*

У випадку, коли границі (1.43) не існує, то кажуть, що невласний інтеграл *розбігається*, використовуючи для його позначення той самий символ: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

II. 🗁**Означення 5.45**. Нехай функцію $f(x)$ задано на $(-\infty,b]$ і $\forall\, B<b\ \exists\int_B^b f(x)dx$, то у випадку, коли $\exists\lim\limits_{B\to-\infty}\int_B^b f(x)dx$,

1) значення границі називають *невласним інтегралом I роду на* $(-\infty,b]$, тобто

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{b} f(x)dx};$$

2) інтеграл $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ називають *збіжним.*

III. 🗀**Означення 5.46**. Нехай функцію $f(x)$ задано на (-∞,+∞) і $\forall\left(A\in\mathbb{R}\wedge B\in\mathbb{R}\right)$ $\exists\int_{B}^{A} f(x)dx$, тоді, якщо $\exists\lim\limits_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}}\int_{B}^{A} f(x)dx$ при незалежному прямуванні *A*→+∞ і *B*→-∞, то значення цієї границі називають *невласним інтегралом I роду на* (-∞,+∞), тобто

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}}\int_{B}^{A} f(x)dx}$$

При цьому інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають *збіжним* на (-∞, +∞).

Зауваження 5.16 *до випадку III.* Якщо для деякого $a\in\mathbb{R}$ $\exists\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ і $\exists\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, тоді $\exists\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Доведення.

$$\begin{array}{ccccc}
\lim\limits_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}}\int_{B}^{A} f(x)dx & = & \lim\limits_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}}\left(\int_{B}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{A} f(x)dx\right) & = & \lim\limits_{B\to-\infty}\int_{B}^{a} f(x)dx+\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{a}^{B} f(x)dx,\\
\exists & \Leftrightarrow & \exists & \Leftarrow & (\exists \quad \wedge \quad \exists)\\
\| & & \| & & \|\\
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx & = & \int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{+\infty} f(x)dx. & & \blacksquare
\end{array}$$

Зауваження 5.17.

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ \exists\int_{a}^{+\infty} f(x)dx,\\[2ex]
2)\ b>a,
\end{array}\right\}\Rightarrow
\begin{array}{l}
1^{0}\ \exists\int_{b}^{+\infty} f(x)dx;\\[2ex]
2^{0}\ \int_{a}^{+\infty} f(x)dx=\int_{a}^{b} f(x)dx+\int_{b}^{+\infty} f(x)dx.
\end{array}$$

Доведення. Оскільки $\exists\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{a}^{A} f(x)dx=\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, то при $b>a$ маємо

$$\begin{array}{ccccc}
\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx & = & \lim\limits_{A\to+\infty}\left(\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_b^A f(x)dx\right) = \int\limits_a^b f(x)dx\, + & \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_b^A f(x)dx \\
\exists & \Rightarrow & & \exists \\
\| & & & \| \\
\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx & = & \int\limits_a^b f(x)dx\, + & \int\limits_b^{+\infty} f(x)dx.
\end{array} \quad \blacksquare$$

Приклад 5.22.

1) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_0^A\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{A\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^A=\lim\limits_{A\to+\infty}(\operatorname{arctg}A-\operatorname{arctg}0)=\frac{\pi}{2}$.

2) Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}$, $a>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}=\lim_{A\to+\infty}\frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\Bigg|_a^A=\lim_{A\to+\infty}\frac{A^{1-\lambda}-a^{1-\lambda}}{1-\lambda}, \text{ якщо } \lambda\neq1,$$

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}=\lim_{A\to+\infty}\ln|x|\Big|_a^A=\lim_{A\to+\infty}\ln\frac{A}{a}, \text{ якщо } \lambda=1.$$

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}=\begin{cases}\dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1}, & \text{якщо } \lambda>1\\ \infty, & \text{якщо}\lambda<1\\ \infty, & \text{якщо } \lambda=1\end{cases}$$

Висновок: $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}$, $a>0$

збігається при $\lambda>1$ розбігається при $\lambda\leq1$.

Нехай функцію $f(x)$ задано на $[a,+\infty)$ і $\exists\int\limits_a^A f(x)dx\ \forall A>a$. Відповідь на питання, збігається чи розбігається інтеграл, залежить від того, чи $\exists\lim\limits_{A\to+\infty}F(A)=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$. Пригадаємо *критерій Коші* [**2**, с. 126] існування границі функції на нескінченності:

$$\exists\lim_{A\to+\infty}F(A)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists\Delta>0:\forall\left(A_1>a\wedge A_2>a\right)\left(A_1>\Delta\wedge A_2>\Delta\right)\Rightarrow\left|F(A_1)-F(A_2)\right|<\varepsilon.$$

Оскільки $\left|F(A_1)-F(A_2)\right|=\left|\int\limits_{A_1}^{A_2}f(x)dx\right|$, то, об’єднуючи все разом, отримаємо

Теорема 5.31 (*критерій Коші збіжності невласного інтеграла І роду*). Нехай функцію $f(x)$ задано на $[a,+\infty)$ і

$$\forall A > a \ \exists \int_a^A f(x)dx.$$

Невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається тоді і лише тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta > 0 : \forall \left(A_1 > a \wedge A_2 > a\right) \ \left(A_1 > \Delta \wedge A_2 > \Delta\right) \Rightarrow \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

2. Достатні ознаки збіжності невласного інтеграла I роду

☝ **Теорема 5.32** (*загальна ознака порівняння*). Нехай функцію $f(x)$ задано на $[a,+\infty)$ і $\exists \int_a^A f(x)dx \ \forall A > a$. Тоді мають місце твердження

$$\text{I. } \exists\, g(x)\!: \left.\begin{array}{l} 1)\ |f(x)| \le g(x)\ \forall x \ge a, \\ 2)\ \int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ збігається,} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ збігається;}$$

$$\text{II. } \exists\, g(x)\!: \left.\begin{array}{l} 1)\ 0 \le g(x) \le f(x)\ \forall x \ge a, \\ 2)\ \int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ розбігається,} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ розбігається.}$$

Зокрема, якщо $f(x) \ge 0 \ \forall x \in [a,+\infty)$, то дослідження на збіжність невласних інтегралів I роду можна подати таким чином:

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 \le f(x) \le g(x) \\ \text{зб.} \ \Leftarrow \ \text{зб.} \\ \text{розб.} \Rightarrow \text{розб.} \end{array}}$$

Доведення

I. Із властивостей визначених інтегралів отримаємо:

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| \le \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|dx \le \int_{A_1}^{A_2} g(x)dx. \qquad (1.44)$$

Оскільки інтеграл і $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ збігається, то за критерієм Коші одержимо:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Delta > 0 : \forall \left(A_1 > a \wedge A_2 > a\right) \ \left(A_1 > \Delta \wedge A_2 > \Delta\right) \Rightarrow \int_{A_1}^{A_2} g(x)dx < \varepsilon. \qquad (1.45)$$

Із (1.44) і (1.45) випливає:

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| \le \int_{A_1}^{A_2} g(x)dx < \varepsilon, \text{ якщо } \left(A_1 > \Delta \wedge A_2 > \Delta\right).$$

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Delta > 0 : \forall \left(A_1 > a \wedge A_2 > a\right) \ \left(A_1 > \Delta \wedge A_2 > \Delta\right) \Rightarrow \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Це означає, що за критерієм Коші інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

II. За умовою $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ розбігається. Це означає, що для функції $G(A)=\int\limits_a^{A} g(x)dx$ не існує границі $\lim\limits_{A\to+\infty} G(A)$. У даному випадку, коли $g(x)\geq 0 \quad \forall x\in[a,+\infty)$, це означає, що функція $G(A)$ має властивості:

1) $G(A)\geq 0 \quad \forall A>a$;

2) якщо $a<A\leq B$, то

$$G(A)=\int\limits_a^{A} g(x)dx=\int\limits_a^{B} g(x)dx-\underbrace{\int\limits_A^{B} \underset{\geq 0}{g(x)}\,dx}_{\geq 0\,(\text{за вл. }6^o)}\leq\int\limits_a^{B} g(x)dx=G(B),$$

тобто $G(A)\nearrow$ на $[a,+\infty)$.

Звідки отримаємо:

$$\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \text{ розбігається} \Rightarrow \lim_{A\to+\infty} G(A)=+\infty\text{, тобто } \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^{A} g(x)dx=+\infty .$$

Тепер застосуємо до умови $0\leq g(x)\leq f(x)\,\forall x\geq a$ *властивість 7^o визначеного інтеграла* та отримаємо:

$$\begin{array}{ccc} \int\limits_a^{A} f(x)dx & \geq & \int\limits_a^{A} g(x)dx \\ \Downarrow & \swarrow & (A\to+\infty) \\ +\infty & & \end{array}$$

Отже, $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^{A} f(x)dx=+\infty \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx -$ розбігається. ■

Пригадаємо, що $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}$ збігається, якщо $\lambda>1$ і розбігається, якщо $\lambda\leq 1$. Тому, як наслідок загальної ознаки порівняння, одержимо таку теорему.

☝ **Теорема 5.33** (*частинна ознака порівняння*). Нехай функція $f(x)$ задана на $[a,+\infty)$ і $\exists\int\limits_a^{A} f(x)dx \;\forall A>a$.

I. Якщо $\exists\lambda>1\wedge\exists c>0:\left|f(x)\right|\leq\frac{c}{x^{\lambda}}\;\forall x\geq a$, тоді $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

II. Якщо $\exists\lambda\leq 1\wedge\exists c>0:\; f(x)\geq\frac{c}{x^{\lambda}}\forall x\geq a$, тоді $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Доведення. Покладемо $g(x)=\frac{c}{x^{\lambda}}$, тоді ми опиняємося в умовах загальної ознаки порівняння, звідки приходимо до висновків теореми. ■

☝ **Наслідок 5.9** (*частинна ознака порівняння в граничній формі*): $f(x)$ задана на $[a,+\infty)$

I. Якщо $\exists\lambda > 1 \wedge \exists \lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| x^{\lambda} = c$, тоді $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

II. Якщо $\exists\lambda \le 1 \wedge \exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\, x^{\lambda} = c > 0$, тоді $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Зокрема, якщо $f(x) \ge 0\ \forall x \in [a,+\infty)$, то при $f(x) \overset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\lambda}}$ маємо:

якщо $\lambda > 1$, то інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ збігається,

якщо $\lambda \le 1$, то інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Доведення. I. Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| x^{\lambda} = c$, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\Delta > 0 : \forall x \ge a\ \ x > \Delta \Rightarrow\ \left| |f(x)| x^{\lambda} - c \right| < \varepsilon,$$

тому

$$c - \varepsilon < |f(x)| x^{\lambda} < c + \varepsilon \text{ при } x > \Delta,$$

$$\text{при } x > \Delta\ \ |f(x)| < \frac{c+\varepsilon}{x^{\lambda}} \quad (\lambda > 1).$$

Отже, за частинною ознакою порівняння, інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

II. Зауважимо, що $\exists\varepsilon > 0 : c - \varepsilon > 0$, наприклад, $\varepsilon = \frac{c}{2}$. Тоді

$$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) x^{\lambda} = c > 0 \Rightarrow$$

для цього ε $\exists\Delta > 0 : \forall x \ge a\ \ x > \Delta \Rightarrow\ \left| f(x) x^{\lambda} - c \right| < \varepsilon,$

$$c - \varepsilon < f(x) x^{\lambda} < c + \varepsilon \text{ при } x > \Delta,$$

$$\text{при } x > \Delta\ \ f(x) > \frac{c-\varepsilon}{x^{\lambda}} \quad (\lambda \le 1).$$

Отже, за частинною ознакою порівняння, $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

У частинному випадку, коли $f(x) \ge 0\ \forall x \in [a,+\infty)$, висловлювання $f(x) \overset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\lambda}}$ еквівалентне тому, що $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{1/x^{\lambda}} = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \cdot x^{\lambda} = 1$. Отже, для завершення доведення потрібно обрати $c = 1 > 0$ в загальному формулюванні наслідку. ■

Приклад 5.23. **1.** Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \sin\frac{1}{x^2}\, dx$.

Оскільки $\sin t \overset{t\to 0}{\sim} t$ (це те саме, що $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$) та $t=\dfrac{1}{x^2}\to 0$ при $x\to+\infty$, тоді, $\sin\dfrac{1}{x^2}\overset{x\to\infty}{\sim}\dfrac{1}{x^2}$. Оскільки $\lambda=2>1$, то за ознакою порівняння в граничній формі інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\sin\dfrac{1}{x^2}\,dx$ збігається.

Відповідь: заданий інтеграл збігається.

2. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^3}dx$.

Розв’язання проілюструємо схемою

$$\left|\frac{\cos x}{x^3}\right|\le\frac{1}{x^3},\ \lambda=3>1$$
$$\text{зб.}\ \Leftarrow\ \text{зб.}$$

Відповідь: заданий інтеграл збігається.

3. Абсолютна та умовна збіжність невласних інтегралів І роду

☝ 🗀**Означення 5.47**. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx-$ *абсолютно збіжний* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ – збіжний.

Усі попередні ознаки порівняння дають можливість відповісти на питання про абсолютну збіжність інтегралів.

☝ **Теорема 5.34.** Якщо інтеграл збігається абсолютно, тоді він збігається.

Доведення. Покладемо $g(x)=|f(x)|$, тоді

$$\left.\begin{array}{l}|f(x)|\le g(x),\\ \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx=\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx\ \text{ збігається (за умовою),}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx\ \text{ збігається.}\ \blacksquare$$

☝ 🗀**Означення 5.48**. Якщо інтеграл збігається, але не абсолютно, то його називають *умовно збіжним*.

☝ **Теорема 5.35** (*ознака Діріхле-Абеля*).

1) $f(x)$ неперервна і має обмежену первісну на $[a,+\infty)$, тобто функція $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt-$ обмежена:
$\exists\ K>0:\forall\ x\ge a\ \ |F(x)|\le K$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$;

3) $g(x)$ неперервна і не зростає на $[a,+\infty)$;

4) $\exists\ g'(x)$ - неперервна на $[a,+\infty)$,

$\Rightarrow\ \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ збігається.

Доведення. Завдяки умовам 1) і 4) можна застосувати формулу інтегрування частинами на відрізку $[A_1,A_2]$:

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx\right| = \left\|\begin{matrix} u = g(x), & du = g'(x)dx, \\ dv = f(x)dx & v = F(x) \end{matrix}\right\| =$$

$$= \left|F(x)g(x)\Big|_{A_1}^{A_2} - \int_{A_1}^{A_2} F(x)g'(x)dx\right| = \left|F(A_2)g(A_2) - F(A_1)g(A_1) -\right.$$

$$\left.-\int_{A_1}^{A_2} F(x)g'(x)dx\right| \le |F(A_2)g(A_2)| + |F(A_1)g(A_1)| + \left|\int_{A_1}^{A_2} F(x)g'(x)dx\right|.$$

Оскільки $g(x)$ не зростає на $[a,+\infty)$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, то

а) $g(x) \ge 0$ на $[a,+\infty)$,

б) $g'(x) \le 0$ на $[a,+\infty)$.

Звідси $|g(x)| = g(x)$, $|g'(x)| = -g'(x)$ на $[a,+\infty)$. Звідки й за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx\right| \le \ K\cdot g(A_2) + K\cdot g(A_1) + K\cdot\int_{A_1}^{A_2}(-g'(x))dx =$$

$$= K\cdot g(A_2) + K\cdot g(A_1) - K\cdot g(A_2) + K\cdot g(A_1) = 2\cdot K\cdot g(A_1).$$

Отже,

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx\right| \le 2K\cdot g(A_1).$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, то

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \Delta>0 : \forall A\ge a:\ A>\Delta \Rightarrow g(A) < \varepsilon/(2K).$$

Таким чином,

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \Delta>0 : \forall A_1, A_2 \ge a:\ \ (A_1 \ge \Delta \wedge A_2 > \Delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx\right| \le 2K\cdot g(A_1) < 2K\cdot\frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon.$$

Отже, за критерієм Коші інтеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)g(x)dx$ збігається. ■

Зауваження 5.18. Якщо для доведення використати не формулу інтегрування частинами, а другу теорему про середнє, то відомо, що припущення *теореми* 5.35 можна послабити і сформулювати цю теорему у вигляді [^{1}, с. 74] :

---

[1] Математичний аналіз: Диференціальне числення функцій кількох дійсних змінних. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Частина I [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / уклад. Ю. Є. Бохонов. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 83 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/42338/1/Matan_I-integrals_Bokhonov.pdf

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \forall x\ge a\ f(x)-\text{ інтегровна на } [a,x] \text{ і } f(x) \text{ задо-}\\ \quad\text{вольняє умову: } \exists\ K>0:\forall\ x\ge a\ \left|\int\limits_a^x f(t)dt\right|\le K;\\ 2)\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0;\\ 3)\ g(x) \text{ монотонна на } [a,+\infty); \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx\\ \text{збігається.}\end{array}$$

Приклад 5.24. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ ($p>0$).

Дослідимо спочатку на звичайну збіжність. Покладемо $f(x)=\sin x$, $g(x)=\frac{1}{x^p}$. Отримаємо:

1) $F(x)=\int\limits_1^x \sin t\, dt=-\cos t\big|_1^x \Rightarrow |F(x)|\le|\cos 1|+|\cos x|\le 2\ \ \Rightarrow F(x)-$ об-межена на $[1,+\infty)$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0\ \ \forall p>0$;

3) $g(x)$ спадає ($\searrow$) на $[1,+\infty)$.

Висновок 1: інтеграл збігається $\forall p>0$ за ознакою Діріхле-Абеля.

Дослідимо на *абсолютну збіжність*. Оцінимо інтеграл знизу:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^p}dx\ge\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}-\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^p}dx.$$

Перший із інтегралів $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ збігається, якщо $p>1$, і розбігається, якщо $p\le 1$. У другому інтегралі покладемо $f(x)=\cos 2x$, $g(x)=\frac{1}{x^p}$. Отримаємо:

1) $F(x)=\int\limits_1^x \cos 2t\, dt=\frac{1}{2}\sin 2t\big|_1^x \Rightarrow |F(x)|\le\frac{1}{2}\left(|\sin 2|+|\sin 2x|\right)\le 1\ \forall x\in[1,+\infty)$

$\Rightarrow F(x)-$ обмежена на $[1,+\infty)$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0\ \ \forall p>0$;

3) $g(x)-\ \searrow$ на $[1,+\infty)$.

Отже, другий інтеграл збігається $\forall p>0$ за ознакою Діріхле-Абеля.

Висновок 2: інтеграл збігається абсолютно при $p>1$, а при $p\le 1$ він абсолютно розбігається.

Відповідь: інтеграл збігається абсолютно при $p>1$, умовно – при $p\le 1$.

Приклад 5.25. Дослідити інтеграл Френеля $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ на збіжність.

Запишемо цей інтеграл сумою

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int\limits_0^{1} \sin x^2 dx + \int\limits_1^{+\infty} \sin x^2 dx .$$

Тут $\int\limits_0^{1} \sin x^2 dx$ – визначений інтеграл Рімана, він існує (підінтегральна функція неперервна на відрізку інтегрування) і скінченний. Розглянемо другий інтеграл суми:

$$\int\limits_1^{+\infty} \sin x^2 dx = \int\limits_1^{+\infty} \underbrace{x \sin x^2}_{=f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{=g(x)} dx .$$

Застосуємо ознаку Діріхле-Абеля:

1) $F(x) = \int\limits_1^{x} t \sin t^2 dt = \frac{1}{2}\int\limits_1^{x} \sin t^2 d(t^2) = \left\| \begin{array}{c} u = t^2 \\ \dfrac{t\,|1|\,x}{u|1|x^2} \end{array} \right\| = \frac{1}{2}\int\limits_1^{x^2} \sin u du =$

$= -\frac{1}{2}\cos u\Big|_1^{x^2} = -\frac{1}{2}\left[\cos x^2 - \cos 1\right] \Rightarrow |F(x)| \le 1 \;\; \forall x \in [1,+\infty)$

$\Rightarrow F(x) -$ обмежена на $[1,+\infty)$;

2) $g(x) = \frac{1}{x}$ – $\searrow$ на $[1,+\infty)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Відповідь: інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ збігається.

Самостійно дослідити ✍ на абсолютну збіжність і зробити висновки щодо умовної збіжності!

4. Заміна змінних під знаком невласного інтеграла. Формула інтегрування частинами

Пригадаємо теорему про заміну змінної під знаком визначеного інтеграла.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f(x) \text{ – неперервна на } [a, A]; \\ 2)\ x = \varphi(t) \text{ – неперервно диференційовна} \\ \text{на } [\alpha,\beta]\ ([\beta,\alpha]); \\ 3)\ a = \varphi(\alpha),\ A = \varphi(\beta); \\ 4)\ \varphi([\alpha,\beta]) = [a,A]\ \left(\varphi([\beta,\alpha]) = [a,A]\right), \end{array}\right\} \Rightarrow \int\limits_a^A f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt .$$

☝ **Теорема 5.36** (*заміна змінної під знаком невласного інтеграла I роду*).

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ f(x) \text{ – неперервна на } [a,+\infty);\\
2)\ x=\varphi(t) \text{ – неперервно диференційовна на } [\alpha,+\infty)\ ((-\infty,\alpha]);\\
3)\ a=\varphi(\alpha);\\
4)\ \varphi(t) \text{ – строго монотонна};\\
5)\ \varphi([\alpha,+\infty))=[a,+\infty)\\
\big(\varphi((-\infty,\alpha])=[a,+\infty)\big),
\end{array}\right\} \Rightarrow
\boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_\alpha^{\pm\infty} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.\\
\text{зб.} \quad \Rightarrow \quad \text{зб.}\end{array}}$$

Доведення. Нехай для визначеності $\varphi(t)$ зростає ($\nearrow$) на $[\alpha,+\infty)$. Під знаком визначеного інтеграла $\int_a^A f(x)dx$ $(A>a)$ зробимо заміну, застосовуючи згадану теорему, а потім здійснимо граничний перехід при $A\to+\infty$. Але спочатку доведемо: якщо $A\to+\infty$, то $\beta\to+\infty$.

Маємо (з *теореми про неперервність оберненої функції* [**2**, с. 149]):

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ \varphi(t) - \nearrow \text{ на } [\alpha,+\infty),\\
2)\ \varphi([\alpha,+\infty))=[a,+\infty),\\
3)\ \varphi(t) \text{ – неперервна на } [\alpha,+\infty),
\end{array}\right\} \Rightarrow
\begin{array}{l}
1)\ \exists\varphi^{-1}:[a,+\infty)\to[\alpha,+\infty),\\
2)\ \varphi^{-1}(x) - \nearrow \text{ на } [a,+\infty),\\
3)\ \varphi^{-1}(x) \text{ – неперервна на } [a,+\infty).
\end{array}$$

Розглянемо нескінченно велику послідовність $\{A_n\}$ таку, що $A_n\to+\infty$. Упорядкуємо її в порядку зростання (доведіть, що це можливо зробити ✍!), утворивши послідовність $\{A'_n\}-\nearrow$, при цьому $A'_n\to+\infty$. Тоді послідовність $\left\{\beta_n=\varphi^{-1}\left(A_n\right)\right\}$ буде упорядкованою разом із $\{A'_n\}$, в результаті послідовність $\left\{\beta'_n=\varphi^{-1}\left(A'_n\right)\right\}$ також буде зростаючою. Дійсно,

$$\left.\begin{array}{l}
A'_n\le A'_{n+1},\\
\varphi^{-1}(x)-\nearrow \text{ на } [a,+\infty),
\end{array}\right\}\Rightarrow \quad \beta'_n=\varphi^{-1}\left(A'_n\right)\le\varphi^{-1}\left(A'_{n+1}\right)=\beta'_{n+1}.$$

Доведемо, що $\beta'_n\to+\infty$. Припустимо супротивне: $\beta'_n\not\to+\infty$. Оскільки послідовність $\{\beta'_n\}$ зростає, і $\beta'_n\not\to+\infty$, то вона є обмеженою, а тому, за *теоремою Вейєрштрасса* ([**2**, с. 103]), збіжною.

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Нехай } \lim\limits_{n\to\infty}\beta'_n=\mathrm{B}\in[\alpha,+\infty),\\
\text{за умовою } \varphi(t) \text{ – неперервна на } [\alpha,+\infty),\\
\varphi([\alpha,+\infty))=[a,+\infty),
\end{array}\right\}\Rightarrow
\begin{array}{l}
\lim\limits_{n\to\infty}A'_n=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi\left(\beta'_n\right)=\\
=\varphi\left(\mathrm{B}\right)\in[a,+\infty)
\end{array}.$$

Отримане суперечить припущенню про те, що $A'_n\to+\infty$.

При переставленні послідовностей $\{A'_n\}$ і $\{\beta'_n\}$ у зворотному порядку висновки щодо їх прямування до $+\infty$ не зміняться. Отже, якщо $A\to+\infty$, то $\beta\to+\infty$.

Таким чином, маємо

$$\int_a^A f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt;$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx = \lim_{\beta\to\pm\infty}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = \int_\alpha^{\pm\infty} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt,$$

$$\exists \qquad \Rightarrow \qquad \exists \qquad\qquad\qquad \blacksquare$$

Пригадаємо теорему про інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Якщо *u*, *v* неперервно диференційовні на [*a*,*A*], то

$$\int_a^A udv = uv\Big|_a^A - \int_a^A vdu. \tag{1.46}$$

✍ **Теорема 5.37** (*інтегрування частинами під знаком невласного інтеграла I роду*).

$$\left.\begin{array}{l} u,\ v \text{ неперервно диференційовні} \\ \text{на } [a,+\infty); \\ \exists \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x) = L, \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \int_a^{+\infty} udv = L - u(a)v(a) - \int_a^{+\infty} vdu \\ \text{зб.} \quad \Leftrightarrow \quad \text{зб.} \end{array}}$$

Доведення. Потрібно лише зробити граничний перехід у формулі (1.46). Ті дві границі, що будуть стояти перед знаками інтегралів, будуть існувати чи не існувати одночасно. ■

5. Невласні інтеграли II роду

Ці інтеграли є узагальненням визначеного інтеграла Рімана для необмеженої функції.

Нехай $f(x)$ задана на [*a*, *b*).

✍ 🗀**Означення 5.49.** Точку b називають *особливою точкою функції* $f(x)$, якщо функція обмежена на будь-якому відрізку $[a,b-\alpha]$ $\forall\alpha\in(0,b-a)$, а на [*a*,*b*) ця функція необмежена.

$$F(\alpha) = \int_a^{b-\alpha} f(x)dx \text{ – функція змінної } \alpha\in(0,b-a).$$

Чи існує границя $\lim\limits_{\alpha\to+0} F(\alpha)$? Не завжди!

✍ 🗀**Означення 5.50.** Нехай точка b – особлива точка функції $f(x)$, тоді якщо $\exists\lim\limits_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha} f(x)dx$, то значення цієї границі називають *невласним інтегралом II роду*. Позначення: $\int_a^b f(x)dx$. Крім того, в цьому випадку інтеграл називають *збіжним*. Таке ж позначення зберігають й тоді, коли відповідної границі $\lim\limits_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha} f(x)dx$ не існує, а інтеграл називають *розбіжним*.

Зауваження 5.19. Розглянемо випадок, коли функція $f(x)$ має скінченну кількість особливих точок на проміжку інтегрування.

Нехай спочатку на відрізку $[a,b]$ особливими є точки a,b,c, де $a<c<b$, тоді, за означенням,

$$\int\limits_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\substack{\alpha_1\to+0\\ \alpha_2\to+0\\ \alpha_3\to+0\\ \alpha_4\to+0}} \left(\int\limits_{a+\alpha_1}^{c-\alpha_2} f(x)dx + \int\limits_{c+\alpha_3}^{b-\alpha_4} f(x)dx \right)$$

при незалежному прямуванні $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ до нуля справа. В загальному випадку потрібно діяти за тим самим означенням.

Якщо відрізок $[a,b]$ з декількома особливими точками можна розбити на скінченну кількість відрізків, на кожному з яких лежить тільки одна особлива точка (що збігається з одним із кінців відрізка), причому на кожному такому відрізку інтеграл II роду збігається, то в такому випадку інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ буде збігатися й дорівнювати сумі інтегралів на відрізках розбиття. Доведення цього факту здійснюють аналогічно доведенню зауваження 5.16.

Приклад 5.26. Розглянемо інтеграл $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Підінтегральна функція на відрізку $[-1,1]$ має дві особливі точки -1 і 1. Подамо цей інтеграл у вигляді суми двох: $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1}^{0} \ldots + \int\limits_{0}^{1} \ldots$.

Оскільки

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\alpha\to+0} \int\limits_{-1+\alpha}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\alpha\to+0} \arcsin x\Big|_{-1+\alpha}^{0} = \lim_{\alpha\to+0}\big(0-\arcsin(-1+\alpha)\big) = \frac{\pi}{2},$$

аналогічно $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\pi}{2}$ (доведіть це ✍!), тобто обидва інтеграли збігаються, тому збігається й заданий інтеграл, причому

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1}^{0} \ldots + \int\limits_{0}^{1} \ldots = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Приклад 5.27. Розглянемо інтеграл $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{x}$.

Підінтегральна функція на відрізку $[-1,1]$ має одну особливу точку 0. Подамо інтеграл за означенням як таку границю:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}} \left(\ln|x|\Big\|_{-1}^{-\varepsilon_1} + \ln|x|\Big\|_{\varepsilon_2}^{1}\right) = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}} (\ln|-\varepsilon_1| - \ln\varepsilon_2) = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}} \ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Покажемо, що така границя не існує. Застосуємо означення границі за Гейне:

для $\varepsilon_{1,1}^{(n)} = \varepsilon_{2,1}^{(n)} = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ маємо $\ln\dfrac{\varepsilon_{1,1}^{(n)}}{\varepsilon_{2,1}^{(n)}} = \ln 1 = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

для $\varepsilon_{1,2}^{(n)} = \dfrac{1}{n}$ і $\varepsilon_{2,2}^{(n)} = \dfrac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, маємо $\ln\dfrac{\varepsilon_{1,2}^{(n)}}{\varepsilon_{2,2}^{(n)}} = \ln\dfrac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln\dfrac{1}{2}$,

тому границя не існує.

Отже, заданий інтеграл розбігається.

Приклад 5.28. Розглянемо такий інтеграл:

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\lambda}} = \lim_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha} \frac{dx}{(b-x)^{\lambda}} = \lim_{\alpha\to+0}\begin{cases} -\left.\dfrac{(b-x)^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right|_a^{b-\alpha}, \lambda\neq 1, \\ \ln|b-x|\Big|_a^{b-\alpha}, \quad \lambda=1 \end{cases} =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0}\begin{cases} \dfrac{-\alpha^{1-\lambda}+(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}, \lambda\neq 1, \\ -\ln\alpha+\ln|b-a|, \quad \lambda=1. \end{cases}$$

Тому при

$1-\lambda>0$ – інтеграл збігається, $\Rightarrow$ при $\lambda<1$ – збігається;

$1-\lambda\le 0$ – інтеграл розбігається, $\Rightarrow$ при $\lambda\ge 1$ – розбігається.

Висновок: $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\lambda}}$

$\swarrow \qquad \searrow$

збігається при $\lambda<1$ розбігається при $\lambda\ge 1$

6. Зв'язок між невласними інтегралами І та ІІ роду

Маємо:

$$\int_a^{b-\alpha} f(x)dx = \left\| \begin{array}{ll} t=\dfrac{1}{b-x} & x=b-\dfrac{1}{t} \\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b-\alpha \\ \hline t & \dfrac{1}{b-a} & \dfrac{1}{\alpha} \end{array} & dx=\dfrac{dt}{t^2} \end{array} \right\| = \int_{\frac{1}{b-\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2};$$

$f(x)$ на $[a,\ b\text{-}\alpha]$ обмежена і неперервна $\Rightarrow\exists$ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$; $\Rightarrow$

$\varphi(t)=b-\dfrac{1}{t} \ \Rightarrow\ \varphi'(t)=\dfrac{1}{t^2}$ на $\left[\dfrac{1}{b\text{-}a},\dfrac{1}{\alpha}\right]$ неперервна;

$\alpha\to+0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha}\to+\infty$,

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{b-\alpha}}^{+\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2} = \int_a^b f(x)dx.$$

<u>*Отже,*</u> якщо інтеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ є невласним інтегралом другого роду з

особливою точкою b, то після заміни $t=\dfrac{1}{b-x}$ він буде невласним інтегралом $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}dt$ першого роду.

<u>*Висновок:*</u> із наявності зв'язку між невласними інтегралами I і II роду випливає можливість використання властивостей інтегралів I роду для дослідження та обчислення невласних інтегралів II роду.

Теорема 5.38 (*критерій Коші збіжності невласних інтегралів II роду*). Нехай точка b – особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Інтеграл $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається тоді й лише тоді, коли

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\colon\ \forall\ \alpha_1,\alpha_2\in(0,b)\ \left(\alpha_1<\delta\wedge\alpha_2<\delta\right)\Rightarrow\left|\int\limits_{b-\alpha_1}^{b-\alpha_2} f(x)dx\right|<\varepsilon .$$

Доведення. Потрібно до функції $F(\alpha)=\displaystyle\int\limits_a^{b-\alpha} f(x)dx$ застосувати критерій Коші існування границі $\lim\limits_{\alpha\to+0}F(\alpha)$. (Закінчить доведення самостійно ✍!) ■

Як наслідок зв'язку між невласними інтегралами I і II роду й ознак порівняння для інтегралів I роду, існують ознаки порівняння для інтегралів II роду.

Загальна ознака порівняння має майже таке формулювання, що і для невласного інтеграла I роду.

Нехай точка b – особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, тоді:

I. Якщо $\exists\ g(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \left|f(x)\right|\le g(x)\ \forall x\in[a.b),\\ 2)\ \displaystyle\int\limits_a^b g(x)dx \text{ збігається,}\end{array}\right\}, \text{ тоді } \int\limits_a^b f(x)dx \text{ збігається;}$$

II. Якщо $\exists\ g(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 0\le g(x)\le f(x)\ \forall x\in[a.b),\\ 2)\ \displaystyle\int\limits_a^b g(x)dx \text{ розбігається,}\end{array}\right\}, \text{ тоді } \int\limits_a^b f(x)dx \text{ розбігається.}$$

Зокрема, якщо $f(x)\ge 0\ \forall x\in[a.b)$, то має місце схематичне зображення щодо дослідження на збіжність невласних інтегралів II роду

$$\boxed{\begin{array}{l} 0\le f(x)\le g(x)\\ \quad\text{зб.}\ \Leftarrow\ \text{зб.}\\ \ \text{розб.}\ \Rightarrow\ \text{розб.}\end{array}}$$

Частинна ознака порівняння. Нехай точка b – особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, тоді

I. якщо $\exists\lambda<1\wedge\exists\, c>0:\ \left|f(x)\right|\leq\dfrac{c}{(b-x)^{\lambda}}$, тоді $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається;

II. якщо $\exists\lambda\geq1\wedge\exists\, c>0:\ f(x)\geq\dfrac{c}{(b-x)^{\lambda}}$, тоді $\int\limits_a^b f(x)dx$ розбігається.

Частинна ознака порівняння в граничній формі. Нехай точка b – особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, тоді:

I. Якщо $\exists\lambda<1\wedge\exists\lim\limits_{x\to b-0}\left|f(x)\right|(b-x)^{\lambda}=c$, тоді $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається.

II. Якщо $\exists\lambda\geq1\wedge\exists\lim\limits_{x\to b-0}f(x)(b-x)^{\lambda}=c>0$, тоді $\int\limits_a^b f(x)dx$ розбігається.

7. Головне значення за Коші невласних інтегралів

Для функції $f(x)$, що задана на (-∞,+∞), невласний інтеграл I роду $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ було означено як значення границі (якщо вона існує); $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}}\int\limits_B^A f(x)dx$ при незалежному прямуванні A, B до $+\infty$ і $-\infty$. Якщо границі не існує, то інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ називають *розбіжним* на (-∞, +∞). Існують випадки, коли при заміні $B=-A$ дана границя існує. В такому випадку говорять про головне значення за Коші цього інтеграла.

☝ 🗀**Означення 5.51.** Нехай функція $f(x)$ визначена на $\left(-\infty,+\infty\right)$ і інтегровна на будь-якому сегменті $[-A,A]$, тоді кажуть, що *існує невласний інтеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ *у розумінні головного значення за Коші*, якщо $\exists\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A}f(x)dx$. Цю границю називають *головним значенням за Коші* й позначають V.p.$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$[1]. Тобто

$$\boxed{\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx\overset{def}{=}\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A}f(x)dx}$$

---

[1] V.p. – початкові літери словосполучення “Valeur principal”, що означає французькою «головне значення»

Із означення випливає, що зі збіжності невласного інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ випливає його існування в розумінні Коші, крім того $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Приклад 5.29. Розглянемо головне значення інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx$.

Маємо:

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx = \lim_{A\to+\infty} \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-A}^{A} = 0.$$

Як бачимо, він існує у розумінні головного значення за Коші. Однак він є розбіжним як невласний інтеграл І роду:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx = \lim_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}} \left.\frac{x^2}{2}\right|_{B}^{A} = \lim_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}} \frac{1}{2}(A^2 - B^2),$$

така границя не існує. Пояснимо це. Застосуємо означення границі за Гейне: для $A_1^{(n)} = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty, B_1^{(n)} = -n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ маємо

$$\frac{1}{2}\left[\left(A_1^{(n)}\right)^2 - \left(B_1^{(n)}\right)^2\right] = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

для $A_2^{(n)} = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty, B_2^{(n)} = -2n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ маємо

$$\frac{1}{2}\left[\left(A_2^{(n)}\right)^2 - \left(B_2^{(n)}\right)^2\right] = -\frac{3n^2}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty,$$

тому границі не існує.

Теорема 5.39 1) Якщо $f(x)$ – непарна на (-∞, +∞) і інтегровна на будь-якому сегменті $[-A, A]$, то $\exists\ \text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$.

2) Якщо $f(x)$ – парна на (-∞, +∞) і інтегровна на будь-якому сегменті $[-A, A]$, тоді

$\exists\ \text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \Leftrightarrow$ збігається невласний інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx$, причому

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx.$$

Доведення. Якщо $f(x)$ – непарна на $[-A, A]$, тоді $\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx = 0 \Rightarrow$

$\exists\ \text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx = 0.$

Якщо $f(x)$ – парна на $[-A,A]$, то $\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{A} f(x)dx$, тоді

$$\begin{array}{ccc}
\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx & = 2 & \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{0}^{A} f(x)dx, \\
\exists & \Leftrightarrow & \exists\,(\text{зб.}), \\
\| & & \| \\
\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx & = 2 & \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx.
\end{array} \qquad \blacksquare$$

Розглянемо відрізок $[a,b]$, і нехай $a<c<b$, а точка c – особлива.

✍ 🗁**Означення 5.52**. Якщо функція $f(x)$ така, що для будь-якого $\varepsilon>0$ такого, що $a<c-\varepsilon<c+\varepsilon<b$, існують інтеграли Рімана $\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx$ і $\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$, то під *головним значенням невласного інтеграла* $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ *в розумінні Коші* (V.p.) розуміють значення границі (якщо вона існує):

$$\boxed{\text{V.p.}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right]}$$

Нагадаємо, що звичайний *невласний інтеграл II роду* з тією ж особливою точкою означається як

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}}\left(\int\limits_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx\right)$$

у випадку існування границі в правій частині рівності при незалежному прямуванні ε_1 і ε_2 до нуля справа.

Із означень випливає, що якщо існує невласний інтеграл II роду з особливою точкою в середині відрізка, то існує й інтеграл у розумінні головного значення за Коші. Зворотне твердження – невірне.

Приклад 5.30. Розглянемо один наочний приклад. Інтеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ як невласний інтеграл є розбіжним (див. приклад 5.27). При цьому в розумінні головного значення Коші він існує й дорівнює нулю, а саме:

$$\text{V.p.}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon} \ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{1}\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{-\varepsilon}{\varepsilon}\right| = 0\,.$$

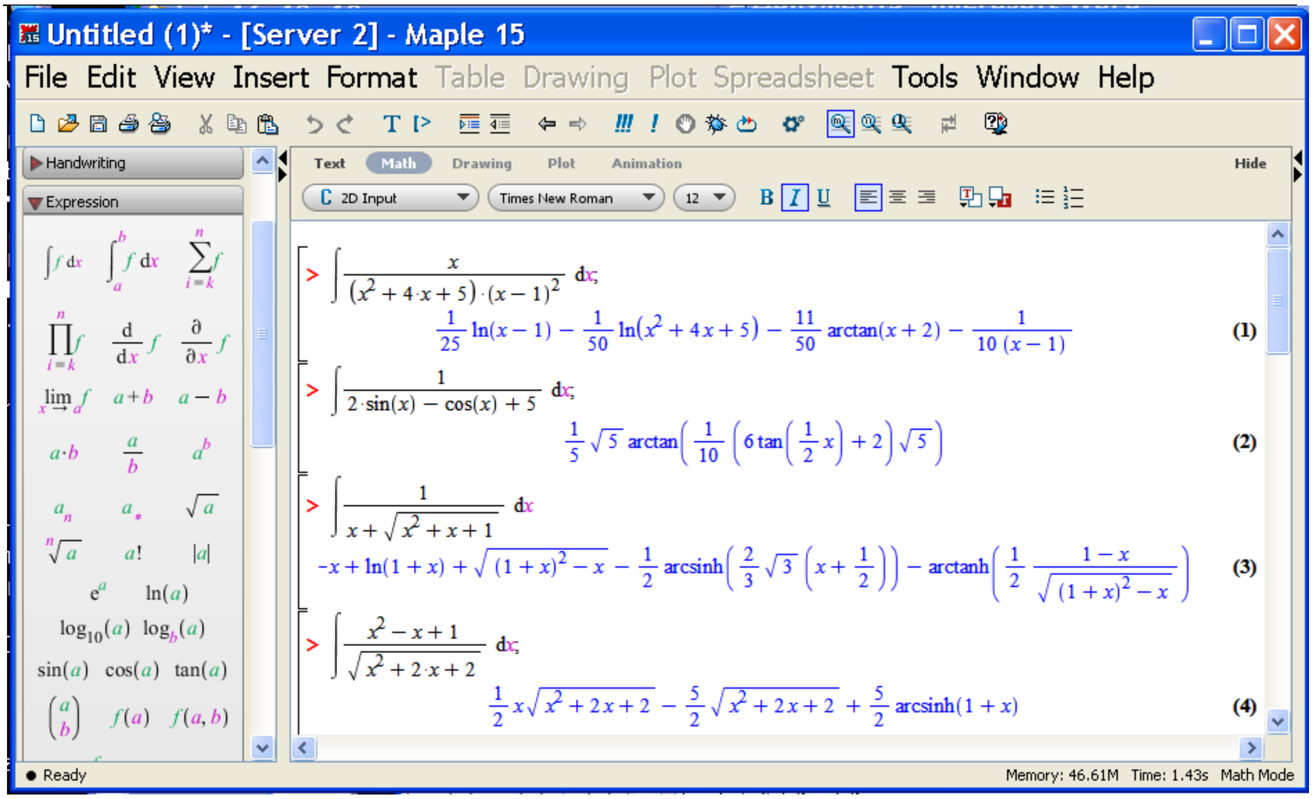
§6. Про використання програмного забезпечення в інтегральному численні

Сьогодні такими засобами програмного забезпечення ПК, як Maple, Mathematica, MatLab, Mathcad та ін., інтеграли можна обчислювати в символьному вигляді або чисельно. Наведемо декілька прикладів.

Для порівняння на рис. 5.37 наведено результати символьного обчислення невизначених інтегралів за допомогою програмного пакета Maple 15, що були обчислені вище. Результати зведено в порівняльній таблиці (табл. 5.1).

Таблиця 5.1 –

Номер прикладу	Невизначений інтеграл та результат його обчислення в теоретичній частині	Символьне обчислення. Номер формули на рис. 5.37.
1.6.	$\int \frac{xdx}{\left(x^2+4x+5\right)\left(x-1\right)^2}=-\frac{1}{10(x-1)}+$ $+\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+4x+5}-\frac{11}{50}\mathrm{arctg}(x+2)+C$	(1)
1.7.	$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}==\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{3\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C.$	(2)
1.9.	$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=$ $=2\ln\left\lvert\sqrt{x^2+x+1}+x\right\rvert-\frac{3}{2}\ln\left\lvert 1+2\sqrt{x^2+x+1}+2x\right\rvert+$ $+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+2\sqrt{x^2+x+1}+2x}+C$	(3)
1.10.1.	$\int\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=$ $=\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln\left\lvert x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right\rvert+C.$	(4)



$$> \int \frac{x}{(x^2+4\cdot x+5)\cdot(x-1)^2}\,dx;$$

$$\frac{1}{25}\ln(x-1)-\frac{1}{50}\ln(x^2+4x+5)-\frac{11}{50}\arctan(x+2)-\frac{1}{10\,(x-1)} \qquad \textbf{(1)}$$

$$> \int \frac{1}{2\cdot\sin(x)-\cos(x)+5}\,dx;$$

$$\frac{1}{5}\sqrt{5}\,\arctan\left(\frac{1}{10}\left(6\tan\left(\frac{1}{2}x\right)+2\right)\sqrt{5}\right) \qquad \textbf{(2)}$$

$$> \int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$$

$$-x+\ln(1+x)+\sqrt{(1+x)^2-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)-\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2}\,\frac{1-x}{\sqrt{(1+x)^2-x}}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

$$> \int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+2\cdot x+2}}\,dx;$$

$$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{5}{2}\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\operatorname{arcsinh}(1+x) \qquad \textbf{(4)}$$

Рис. 5.37.

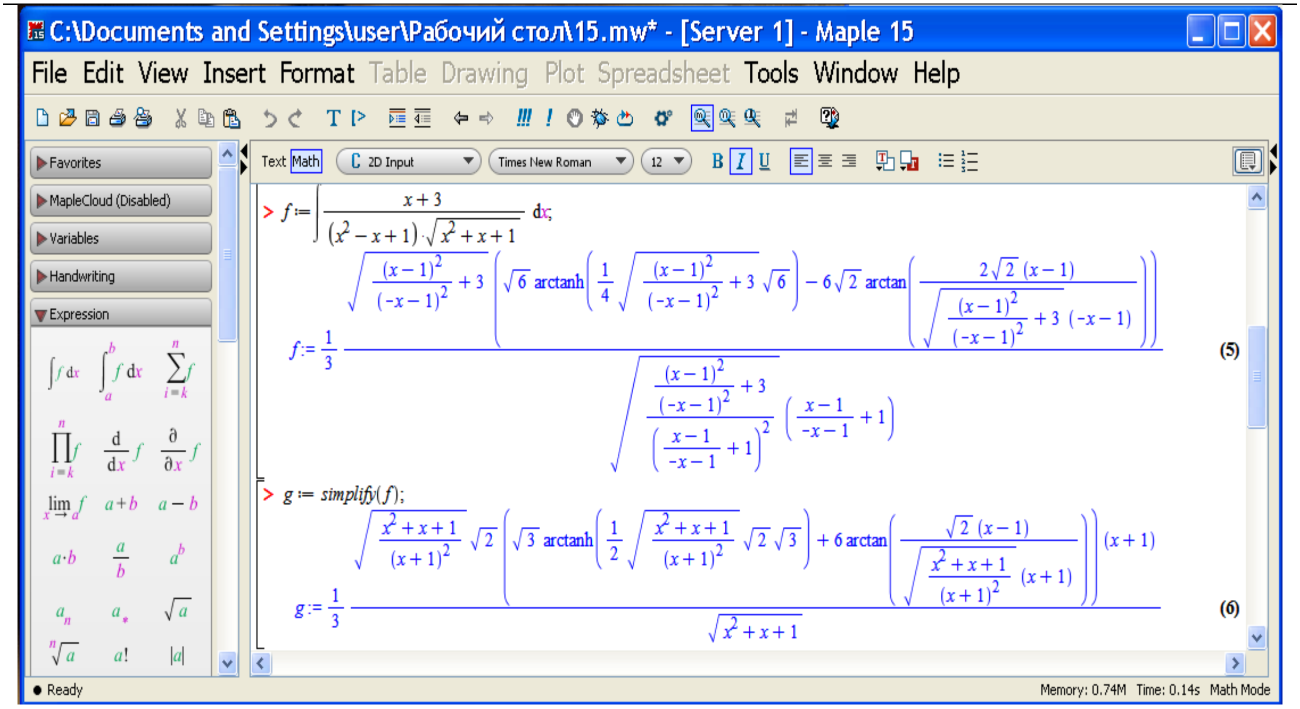
Якщо пригадати *зауваження 5.2*, в якому наведені формули для обчислення ареа-функцій, то стане зрозуміло, що результати обчислень однакові.

У прикладі 5.10.4 отримано:

$$\int \frac{x+3}{\left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^2+x+1}}dx=\sqrt{8}\cdot\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}\cdot|1-x|}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2}\cdot(1+x)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{2}\cdot(1+x)}\right|+C.$$

Обчислення інтеграла (вираз f) та його спрощення (вираз g) за допомогою Maple 15 наведено на рис. 5.38. Обидва результати однакові. Однак результат, отриманий за допомогою ПК, громіздкий і дещо недосконалий.



> $f := \int \frac{x+3}{(x^2-x+1)\cdot\sqrt{x^2+x+1}}\,dx;$

$$f := \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{\frac{(x-1)^2}{(-x-1)^2}+3}\left(\sqrt{6}\,\mathrm{arctanh}\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(x-1)^2}{(-x-1)^2}+3}\,\sqrt{6}\right)-6\sqrt{2}\,\arctan\left(\frac{2\sqrt{2}\,(x-1)}{\sqrt{\frac{(x-1)^2}{(-x-1)^2}+3}\,(-x-1)}\right)\right)}{\sqrt{\frac{\frac{(x-1)^2}{(-x-1)^2}+3}{\left(\frac{x-1}{-x-1}+1\right)^2}}\left(\frac{x-1}{-x-1}+1\right)} \qquad (5)$$

> $g := simplify(f);$

$$g := \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}}\,\sqrt{2}\left(\sqrt{3}\,\mathrm{arctanh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}}\,\sqrt{2}\,\sqrt{3}\right)+6\arctan\left(\frac{\sqrt{2}\,(x-1)}{\sqrt{\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}}\,(x+1)}\right)\right)(x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}} \qquad (6)$$

Рис. 5.38.

Програмне забезпечення з кожним роком удосконалюється. На рис. 5.39 наведено результати обчислень двох інтегралів із *прикладів 5.10.3*

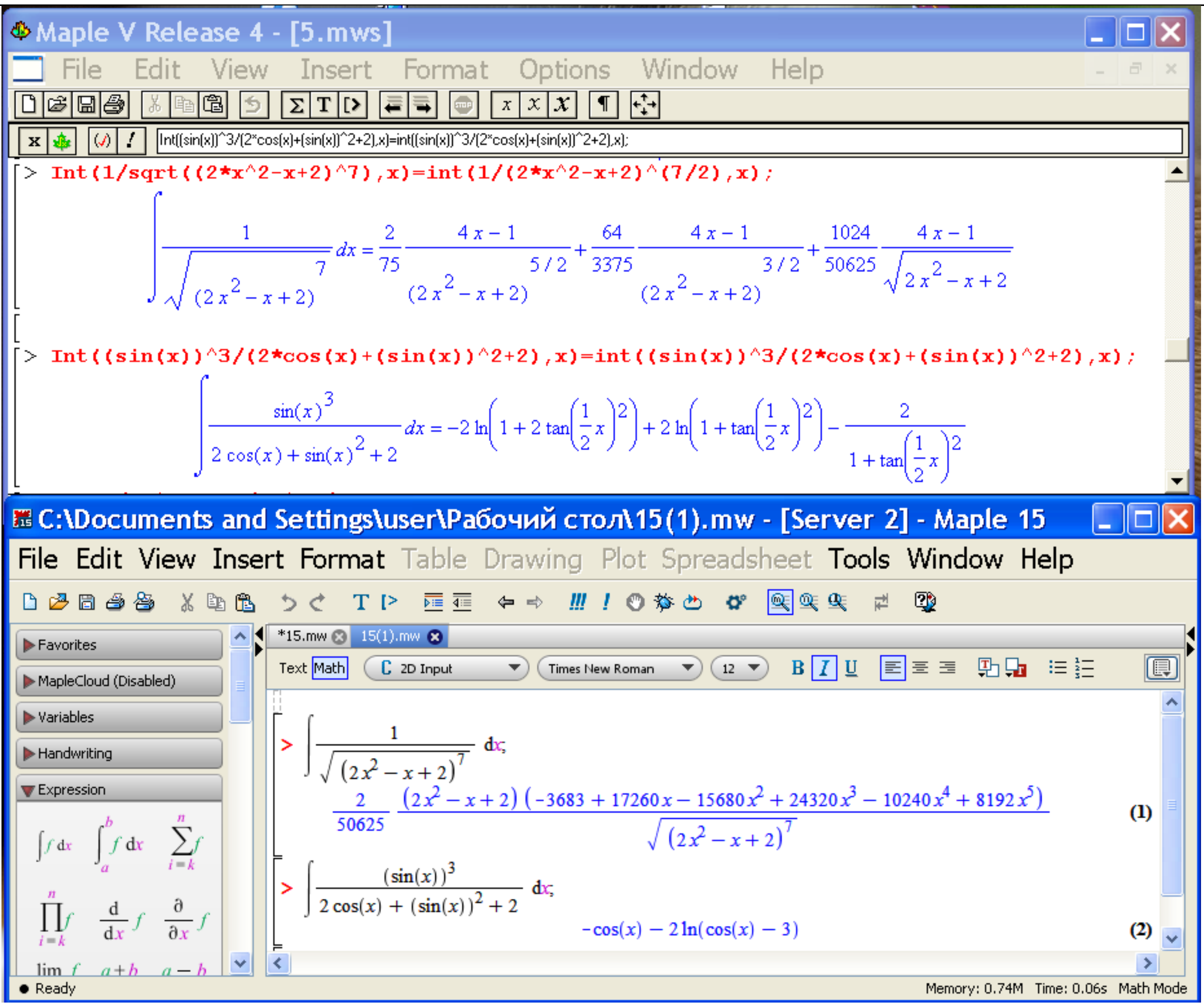
$$\int\frac{dx}{(2x^2-x+2)^{\frac{7}{2}}}=\frac{2^9}{\sqrt{2}\cdot 15^3}\left(\frac{x-0,25}{\sqrt{x^2-0,5x+1}}-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{x-0,25}{\sqrt{x^2-0,5x+1}}\right)^3+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{x-0,25}{\sqrt{x^2-0,5x+1}}\right)^5\right)+C$$

та 5.*12*

$$\int\frac{\sin^3 x dx}{2\cos x+\sin^2 x+2}=-\cos x-2\ln(\cos x-3)+C$$

за допомогою Maple 5.4 та Maple 15. Наочно можна спостерегти відмінність подання результатів. Зокрема, можна дійти висновку, що в попередній версії розробниками програмного забезпечення було закладено обчислення інтеграла від тригонометричних функцій лише через універсальну тригонометричну підстановку. Більш досконала остання версія програмного продукту «застосовує» раціональніший спосіб обчислення, а саме той, що застосовувався при обчисленні *прикладу 5.12*.



```
Int((sin(x))^3/(2*cos(x)+(sin(x))^2+2),x)=int((sin(x))^3/(2*cos(x)+(sin(x))^2+2),x);
> Int(1/sqrt((2*x^2-x+2)^7),x)=int(1/(2*x^2-x+2)^(7/2),x);
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{(2x^2-x+2)^7}}\,dx = \frac{2}{75}\,\frac{4x-1}{(2x^2-x+2)^{5/2}} + \frac{64}{3375}\,\frac{4x-1}{(2x^2-x+2)^{3/2}} + \frac{1024}{50625}\,\frac{4x-1}{\sqrt{2x^2-x+2}}$$

```
> Int((sin(x))^3/(2*cos(x)+(sin(x))^2+2),x)=int((sin(x))^3/(2*cos(x)+(sin(x))^2+2),x);
```

$$\int \frac{\sin(x)^3}{2\cos(x)+\sin(x)^2+2}\,dx = -2\ln\left(1+2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)^2\right) + 2\ln\left(1+\tan\left(\frac{1}{2}x\right)^2\right) - \frac{2}{1+\tan\left(\frac{1}{2}x\right)^2}$$

$$> \int \frac{1}{\sqrt{(2x^2-x+2)^7}}\,dx;$$

$$\frac{2}{50625}\,\frac{(2x^2-x+2)\,(-3683+17260x-15680x^2+24320x^3-10240x^4+8192x^5)}{\sqrt{(2x^2-x+2)^7}} \qquad (1)$$

$$> \int \frac{(\sin(x))^3}{2\cos(x)+(\sin(x))^2+2}\,dx;$$

$$-\cos(x) - 2\ln(\cos(x)-3) \qquad (2)$$

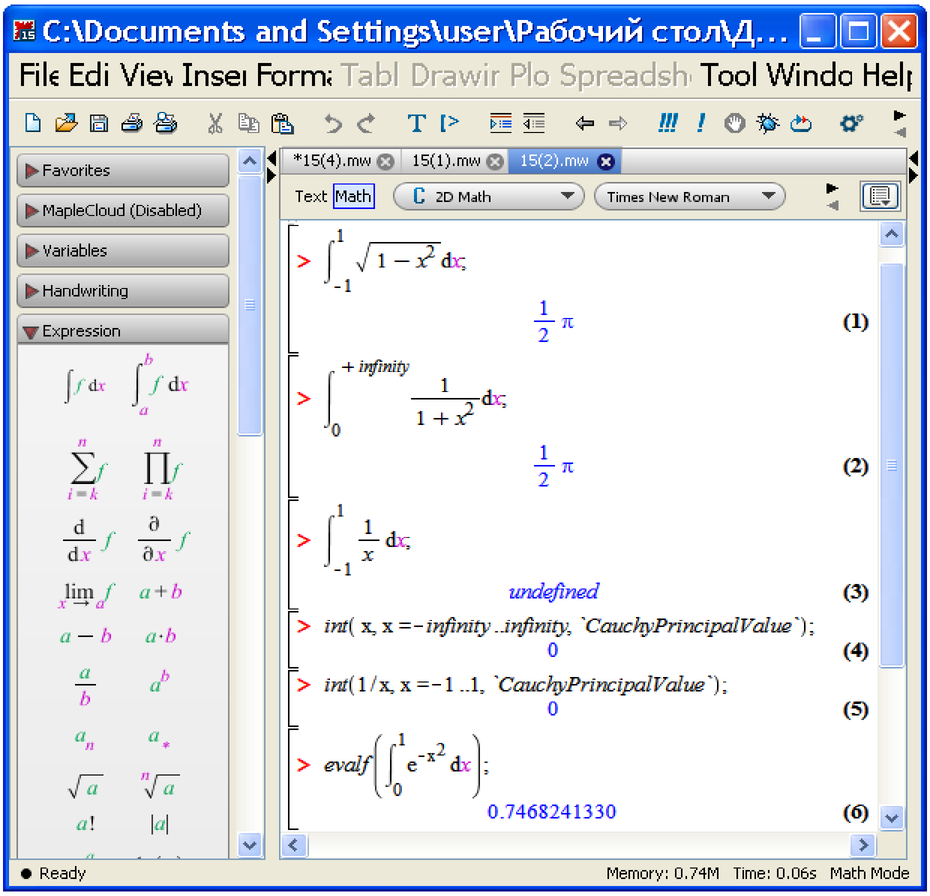
Рис. 5.39.

За допомогою Maple можна також обчислювати визначені інтеграли в символьному вигляді та наближено, обчислювати або отримувати результат щодо розбіжності невласних інтегралів та їх головних значень за Коші. Відповідні результати наведені в табл. 5.2 та на рис. 5.40.

Таблиця 5.2 –

Номер прикладу	Результат, отриманий у посібнику	Формула на рис. 5.40.
1.18.	. $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$. (визначений інтеграл)	(1)
1.22. 1)	$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$ (невласний інтеграл)	(2)
1.27.	$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ (невласний інтеграл)	(3)
.30.	$\mathrm{V.p.}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=0$ (головне значення за Коші невласного інтеграла ІІ роду)	(4)
1.29.	$\mathrm{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,dx=0$ (головне значення за Коші невласного інтеграла І роду)	(5)

Номер прикладу	Результат, отриманий у посібнику	Формула на рис. 5.40.
3.171.	$\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0,7468$ (наближене обчислення визначеного інтеграла)	(6)



$> \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx;$

$$\frac{1}{2}\pi \qquad (1)$$

$> \int_{0}^{+infinity}\frac{1}{1+x^2}\,dx;$

$$\frac{1}{2}\pi \qquad (2)$$

$> \int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\,dx;$

$$undefined \qquad (3)$$

```
> int( x, x =-infinity ..infinity, `CauchyPrincipalValue`);
                              0                          (4)
> int(1/x, x =-1 ..1, `CauchyPrincipalValue`);
                              0                          (5)
```

$> evalf\left(\int_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx\right);$

$$0.7468241330 \qquad (6)$$

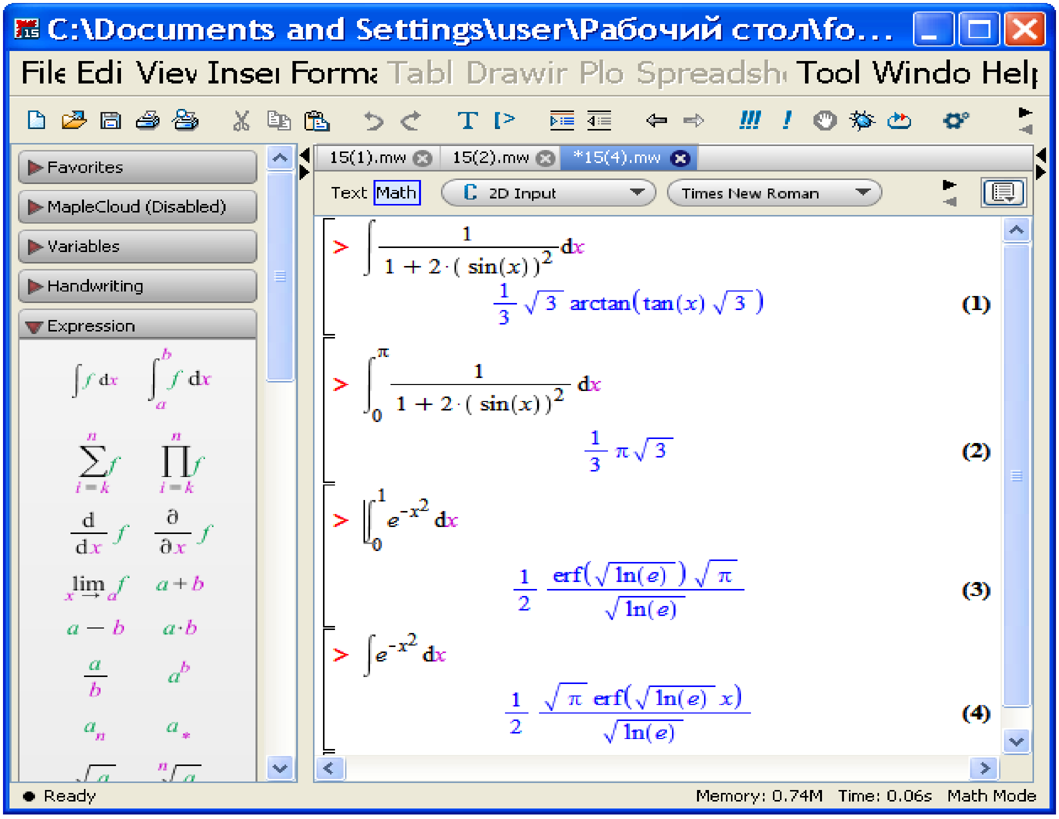
Рис. 5.40.

Це був лише незначний екскурс у можливості програмного забезпечення ЕОМ. Можливості цих засобів величезні. На перший погляд навіть може здатися, що в детальному вивченні інтегрального числення взагалі немає потреби. Однак така думка хибна.

По-перше, програмне забезпечення недосконале, про що вже йшлося вище, і його потрібно надалі вдосконалювати.

По-друге, результатами, які надає програмний продукт, треба вміти правильно користуватися. Наприклад, поставивши собі задачу щодо обчислення визначеного інтеграла $\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}$ за допомогою формули Ньютона-Лейбніца, користувач Maple може застосувати результат формули (1) із рис. 5.41 і вирішити, що він вже знає первісну для підінтегральної функції на відрізку інтегрування. Однак це не так; про це йдеться у прикладі 3.115. Ось тоді цей користувач і отримає не зрозуміло який результат, а якщо ще й порівняє його з результатом, наданим формулою (2) на рис. 5.41, то дуже здивується відмінностям.

По-третє, потрібно вміти правильно «ставити задачу перед комп’ютером». Так, очікуючи отримати числовий результат для інтеграла $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, користувач Maple одержить відповідь у вигляді формули (3) на рис. 5.41. Досвідченого користувача такий результат зовсім не збентежить, і він переформулює задачу на пошук чисельного (наближеного) значення цього інтеграла так, як це було виконано на рис. 5.40 з відповіддю (6).



$$> \int \frac{1}{1+2\cdot(\sin(x))^2}\,dx$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\tan(x)\sqrt{3}\right) \qquad (1)$$

$$> \int_0^{\pi} \frac{1}{1+2\cdot(\sin(x))^2}\,dx$$

$$\frac{1}{3}\pi\sqrt{3} \qquad (2)$$

$$> \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{erf}\left(\sqrt{\ln(e)}\right)\sqrt{\pi}}{\sqrt{\ln(e)}} \qquad (3)$$

$$> \int e^{-x^2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(\sqrt{\ln(e)}\,x\right)}{\sqrt{\ln(e)}} \qquad (4)$$

Рис. 5.41.

Розділ 6. ПРАКТИКУМ ІЗ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

§1. Невизначений інтеграл

1. Безпосереднє інтегрування.

Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла та таблиці інтегралів називають **безпосереднім інтегруванням**. При цьому використовують елементарні перетворення підінтегральної функції.

Приклад 6.1 . Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральний вираз, використовуючи основну тригонометричну тотожність:

$$\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Підставимо отриманий вираз у інтеграл. За допомогою формул (7) та (8) розширеної таблиці основних інтегралів (розділ 1, §1, п. 2.1), отримуємо

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C \,. \blacksquare$$

Приклад 6.2 . Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}$.

Розв'язання. Подамо підінтегральну функцію у вигляді суми двох дробів:

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)} = \frac{1}{4} \frac{\left(x^2+1\right)-\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2-3} - \frac{1}{x^2+1} \right).$$

З урахуванням формул (13) та (15) розширеної таблиці основних інтегралів знаходимо:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)} = \frac{1}{4}\left(\int \frac{dx}{x^2-3} - \int \frac{dx}{x^2+1} \right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| - \operatorname{arctg} x \right) + C \,. \blacksquare$$

Приклад 6.3 . Знайти інтеграл $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3 dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. У підінтегральній функції поділимо чисельник на знаменник:

$$\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1+3\sqrt{x}+3x+x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1+3x^{\frac{1}{2}}+3x+x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{6}} + 3x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{7}{6}}.$$

Інтегруємо отриману суму степеневих функцій за формулою (1) розширеної таблиці основних інтегралів:

$$\int\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3dx}{\sqrt[3]{x}}=\int\left(x^{-\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{6}}+3x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{7}{6}}\right)dx=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+\frac{18}{7}x^{\frac{7}{6}}+\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}+C=$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{18}{7}x\sqrt[6]{x}+\frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}+C.\ ■$$

Приклад 6.4 . Знайти інтеграл $\int\cos^4 xdx$.

Розв'язання. Понизимо степінь у підінтегральному виразі, отримаємо:

$$\cos^4 x=\left(\cos^2 x\right)^2=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{3}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}.$$

Підставляючи отриманий вираз у інтеграл, знаходимо:

$$\int\left(\frac{3}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}\right)dx=\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C\cdot$$

Тут ми використали властивість

$$\int f\left(ax+b\right)dx=\frac{1}{a}F\left(ax+b\right)+C, \qquad (6.1)$$

де $a\neq 0$, $F\left(x\right)$ є первісною функції $f\left(x\right)$, а також формулу (6) розширеної таблиці основних інтегралів. ■

Приклад 6.5 . Знайти інтеграл $\int\frac{1+\sin^2 x}{1-\cos 2x}dx$.

Розв'язання. Використовуючи формулу косинуса подвійного кута, подамо підінтегральну функцію у вигляді:

$$\frac{1+\sin^2 x}{1-\cos 2x}=\frac{1+\sin^2 x}{2\sin^2 x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 x}+1\right).$$

Тоді інтеграл набуває вигляду:

$$\int\frac{1+\sin^2 x}{1-\cos 2x}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+1\right)dx=\frac{-\operatorname{ctg} x+x}{2}+C\cdot\ ■$$

Приклад 6.6 . Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{1+\sin x}$.

Розв'язання. Запишемо підінтегральну функцію у вигляді:

$$\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}.$$

Після чого для обчислення інтеграла застосуємо формулу (6.1) і формулу (7) розширеної таблиці інтегралів:

$$\int\frac{dx}{1+\sin x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(-1/2)}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C\cdot\ ■$$

Приклад 6.7 . Знайти інтеграл $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}dx$.

Розв'язання. Виділимо цілу частину в підінтегральному виразі. Використовуючи формулу (15) розширеної таблиці основних інтегралів, отримаємо:

$$\int \frac{x^2+3}{x^2-1}dx = \int \frac{\left(x^2-1\right)+4}{x^2-1}dx = \int \left(1+\frac{4}{x^2-1}\right)dx = x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C. \ ■$$

Приклад 6.8 . Знайти інтеграл $\int \cos 3x \cdot \cos 2x dx$.

Розв'язання. Подамо підінтегральну функцію у вигляді суми:

$$\cos 3x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2}\left(\cos 5x + \cos x\right).$$

Маємо:

$$\int \cos 3x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos 5x + \cos x\right)dx = \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + C. \ ■$$

Приклад 6.9 . Знайти інтеграл $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx$.

Розв'язання. Розкладемо на квадратні множники біквадратний тричлен, що знаходиться в знаменнику підінтегральної функції: $x^4-5x^2+6=\left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right)$. Підінтегральну функцію можна подати у вигляді суми двох дробів:

$$\frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6} = \frac{x^2-2+x^2-3}{\left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right)} = \frac{1}{x^2-3}+\frac{1}{x^2-2}.$$

Підставляючи у інтеграл, маємо:

$$\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx = \int \left(\frac{1}{x^2-3}+\frac{1}{x^2-2}\right)dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + C. ■$$

Приклад 6.10 . Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}$.

Розв'язання. Помножимо чисельник та знаменник підінтегрального виразу на спряжений вираз $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}$ та одержимо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}} = \int \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}{2a}dx = \frac{1}{3a}\left[\left(x+a\right)^{\frac{3}{2}}-\left(x-a\right)^{\frac{3}{2}}\right]+C. \ ■$$

Приклад 6.11 . Знайти інтеграл $\int x\sqrt{a-bx}dx$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення підінтегральної функції:

$$x\sqrt{a-bx} = -\frac{1}{b}\left(-bx\sqrt{a-bx}\right) = -\frac{1}{b}\left(\left(a-bx-a\right)\sqrt{a-bx}\right) = -\frac{\left(a-bx\right)^{\frac{3}{2}}}{b}+\frac{a\left(a-bx\right)^{\frac{1}{2}}}{b}$$

.

$$\int x\sqrt{a-bx}dx = -\frac{1}{b}\int \left(a-bx\right)^{\frac{3}{2}}dx + \frac{a}{b}\int \left(a-bx\right)^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$=\frac{2}{5b^2}(a-bx)^{\frac{5}{2}}-\frac{2a}{3b^2}(a-bx)^{\frac{3}{2}}+C\,.\ \blacksquare$$

Приклад 6.12 . Знайти інтеграл $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}=2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$, то інтеграл набуває вигляду:

$$\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx=2\cdot\int5^{-x}dx-\frac{1}{5}\cdot\int2^{-x}dx=-2\cdot\frac{5^{-x}}{\ln5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2^{-x}}{\ln2}+C\,.$$

Тут для інтегрування було використано формулу (4) розширеної таблиці основних інтегралів. ■

Приклад 6.13 . Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у знаменнику підінтегральної функції:

$$4x^2+4x+5=\underline{(2x)^2+2\cdot2x\cdot1+1}+4=(2x+1)^2+4\,.$$

Підставляючи в підінтегральний вираз, отримаємо інтеграл, що можна обчислити безпосереднім інтегруванням за допомогою формули (13) розширеної таблиці основних інтегралів:

$$\int\frac{dx}{4x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{(2x+1)^2+4}=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2}+C\,.\ \blacksquare$$

Приклад 6.14 . Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат під коренем у підінтегральній функції:

$$7-6x-x^2=7-\left(x^2+2\cdot3\cdot x+9\right)+9=16-(x+3)^2,$$

отримаємо:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{16-(x+3)^2}}=\arcsin\frac{x+3}{4}+C\,.$$

Тут при інтегруванні було використано формулу (14) розширеної таблиці основних інтегралів. ■

Приклад 6.15 . Знайти всі криві, кутовий коефіцієнт дотичних до яких у кожній точці дорівнює $2e^{2x}$.

Розв'язання. Нехай $y=y(x)$ – рівняння кривої. Тоді

$$y'=2e^{2x}\Rightarrow y=\int2e^{2x}dx=e^{2x}+C\,.\ \blacksquare$$

Приклад 6.16 . Швидкість тіла, що рухається прямолінійно, змінюється за законом $v=3t^2+2$. Знайти закон руху тіла $s(t)$, якщо $s(0)=0$.

Розв'язання. Із механічного змісту похідної (розділ 1, §1, п. 3) випливає, що $v(t)=s'(t)=3t^2+2$, тоді

$$s(t)=\int v(t)\,dt=\int\left(3t^2+2\right)dt=t^3+2t+C.$$

Оскільки в початковий момент часу $s=0$, то маємо

$$s(0)=C=0\Rightarrow s(t)=t^3+2t. \blacksquare$$

2. Метод підстановки (заміни змінної) в невизначеному інтегралі

У теоретичній частині було розглянуто обґрунтування застосування методу підстановки (заміни змінної) для знаходження невизначеного інтеграла (*теорема 5.2*) та деякі приклади використання підстановок $u=\varphi(x)$ або $x=\varphi(t)$. На прикладах розглянемо особливості застосування цього методу.

Приклад 6.17. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{\sin^2(\ln x)\,dx}{x}$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{dx}{x}=d(\ln x)$, то доцільно використати підстановку $u=\ln x$. Отримуємо:

$$I=\int\sin^2 u\,du=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2u)\,du=\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{2}\sin 2u\right)+C=\frac{\ln x}{2}-\frac{\sin(2\ln x)}{4}+C. \blacksquare$$

Приклад 6.18 . Обчислити інтеграл $I=\int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+3}}$.

Розв'язання. У підінтегральному виразі $e^x dx=d\left(e^x\right), e^{2x}=\left(e^x\right)^2$, тому застосуємо підстановку $u=e^x$. Інтеграл I набуває вигляду $\int\frac{du}{\sqrt{u^2+3}}$. Отримали табличний інтеграл:

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2+3}}=\ln\left(u+\sqrt{u^2+3}\right)+C=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+3}\right)+C. \blacksquare$$

Приклад 6.19 . Обчислити інтеграл $I=\int\frac{(2x+1)dx}{\sqrt[3]{1+x+x^2}}$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз містить функцію $u=1+x+x^2$, а також, у вигляді множника, її диференціал $du=(2x+1)dx$. Тому, використовуючи підстановку $u=1+x+x^2$, отримуємо табличний інтеграл:

$$I=\int\frac{du}{\sqrt[3]{u}}=\int u^{-\frac{1}{3}}du=\frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}+C. \blacksquare$$

Приклад 6.20 . Обчислити інтеграл $\int \frac{f(x)\cdot f'(x)dx}{1+f(x)}$, де $f(x)$ – неперервно диференційовна на своїй області визначенння функція, $f(x)\neq -1$.

Розв'язання. Маємо:

$$\int \frac{f(x)\cdot f'(x)dx}{1+f(x)} = \left\| \begin{matrix} t = f(x), \\ dt = f'(x)dx \end{matrix} \right\| = \int \frac{tdt}{1+t} = \int \frac{t+1-1}{t+1}dt = \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= t - \ln|t+1| + C.$$

Повертаючись до змінної x, отримуємо:

$$\int \frac{f(x)\cdot f'(x)dx}{1+f(x)} = f(x) - \ln|1+f(x)| + C. \blacksquare$$

Приклад 6.21. Обчислити інтеграл $\int \frac{\sin x \cos x dx}{1+\sin x}$.

Розв'язання. Скористуємось результатом прикладу 6.20, де $f(x) = \sin x$, отримаємо:

$$\int \frac{\sin x \cos x dx}{1+\sin x} = \sin x - \ln|1+\sin x| + C. \blacksquare$$

Приклад 6.22 . Знайти інтеграл $I = \int x(1-x)^{20}dx$.

Розв'язання. Цей інтеграл можна знайти, застосовуючи для піднесення до 20-го степеня формулу бінома Ньютона, проте більш доцільніше скористатися методом підстановки. Оскільки $x = 1-(1-x)$, то інтеграл I можна подати у вигляді:

$$I = \int (1-(1-x))(1-x)^{20}dx.$$

Виконаємо підстановку $1-x=t, dx=-dt$. Отримуємо інтеграл:

$$I = \int (t-1)\cdot t^{20}dt = \int \left(t^{21} - t^{20}\right)dt = \frac{t^{22}}{22} - \frac{t^{21}}{21} + C = \frac{(1-x)^{22}}{22} - \frac{(1-x)^{21}}{21} + C. \blacksquare$$

Приклад 6.23 . Обчислити інтеграл $\int \frac{x^{n-1}dx}{x^{2n}+a^2}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $d\left(x^n\right) = n\cdot x^{n-1}dx$, доцільно виконати підстановку $z = x^n$. Маємо інтеграл

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{x^{2n}+a^2} = \frac{1}{n}\int \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{na}\operatorname{arctg}\frac{z}{a} + C = \frac{1}{na}\operatorname{arctg}\frac{x^n}{a} + C. \blacksquare$$

Приклад 6.24 . Знайти інтеграл $I = \int \frac{1+\ln x}{3+x\ln x}dx$.

Розв'язання. Використаємо підстановку

$$3 + x\ln x = t,\ dt = (1+\ln x)dx.$$

Отримаємо:

$$I=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|3+x\ln x|+C.\ \blacksquare$$

Приклад 6.25. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^3 x}\cdot\cos^2 x}$.

Розв'язання. Оскільки $d(\operatorname{tg}x)=\frac{dx}{\cos^2 x}$, то інтеграл I можна подати у вигляді ($u=\operatorname{tg}x$):

$$I=\int u^{-\frac{3}{5}}du=\frac{5}{2}u^{\frac{2}{5}}+C=\frac{5}{2}\sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 x}+\text{C}.$$

Зазначені вище дії еквівалентні внесенню функції $\operatorname{tg}x$ під знак диференціала. А саме;

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^3 x}\cdot\cos^2 x}=\int(\operatorname{tg}x)^{-\frac{3}{5}}d(\operatorname{tg}x)=\frac{5}{2}(\operatorname{tg}x)^{\frac{2}{5}}+C=\frac{5}{2}\sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 x}+\text{C}.\ \blacksquare$$

Приклади 6.26 – 6.29 розв'яжемо внесенням функцій під знак диференціала.

Приклад 6.26 . Обчислити інтеграл $\int x^2\cdot\sqrt[3]{1+x^3}dx$.

Розв'язання. Тут внесемо під знак диференціала функцію $1+x^3$, отримаємо:

$$\int x^2\cdot\sqrt[3]{1+x^3}dx=\left\|\begin{matrix}d\left(1+x^3\right)=3x^2dx\\ x^2dx=\frac{1}{3}d\left(1+x^3\right)\end{matrix}\right\|=\frac{1}{3}\int\left(1+x^3\right)^{1/3}d\left(1+x^3\right)\overset{(1)}{=}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(1+x^3\right)^{4/3}}{4/3}+C=\frac{1}{4}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^4}+C.\ \blacksquare$$

Приклад 6.27 . Обчислити інтеграл $\int\frac{x^3dx}{x^8-2}$.

Розв'язання. Внесемо під знак диференціала функцію x^4, одержимо:

$$\int\frac{x^3dx}{x^8-2}=\int\frac{1/4d\left(x^4\right)}{\left(x^4\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C.\ \blacksquare$$

Приклад 6.28 . Обчислити інтеграл $\int\operatorname{tg}xdx$.

Розв'язання. Тут після перетворень під знаком диференціала опиниться функція $\cos x$:

$$\int\operatorname{tg}xdx=\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x}=\int\frac{-d(\cos x)}{\cos x}\overset{(2)}{=}-\ln|\cos x|+C.\ \blacksquare$$

Приклад 6.29 . Обчислити інтеграл $\int\frac{dx}{\cos x}$.

Розв'язання. Застосуємо основну тригонометричну тотожність $\sin^2 x+\cos^2 x\equiv 1$ і внесемо функцію $\sin x$ під знак диференціала:

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos x dx}{\cos^2 x}=\int\frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x}\overset{(15)}{=}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos(\pi/2-x)}{1-\cos(\pi/2-x)}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\text{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|=\ln\left|\text{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|+C.\ \blacksquare$$

Приклад 6.30. Знайти інтеграл $\int\frac{2x^3+x}{x^4+x^2}dx$.

Розв'язання. Використовуючи підстановку $z=x^4+x^2$, зведемо інтеграл до табличного:

$$\int\frac{2x^3+x}{x^4+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}=\frac{1}{2}\ln|z|+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^4+x^2\right|+C.\ \blacksquare$$

Приклад 6.31. Знайти інтеграл $\int\frac{5^x dx}{9+25^x}$.

Розв'язання. Для спрощення інтеграла застосуємо підстановку $t=5^x, dt=\ln 5\cdot 5^x dx$. Отримаємо табличний інтеграл:

$$\int\frac{5^x dx}{9+25^x}dx=\frac{1}{\ln 5}\int\frac{dt}{9+t^2}=\frac{1}{3\ln 5}\text{arctg}\ \frac{t}{3}+C=\frac{1}{3\ln 5}\text{arctg}\ \frac{5^x}{3}+C.\ \blacksquare$$

Приклад 6.32. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\cos^2\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. Підстановка $\sqrt[3]{x}=t,\ dt=\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$ зводить цей інтеграл до інтеграла:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\cos^2\sqrt[3]{x}}=3\int\frac{dt}{\cos^2 t}=3\text{tg}\ t+C=3\text{tg}\ \sqrt[3]{x}+C\cdot\ \blacksquare$$

Приклад 6.33 . Знайти інтеграл $I=\int\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. Для зведення цього інтеграла до інтеграла від раціональної функції використаємо підстановку $x=t^6$. Тоді диференціал набуває вигляду $dx=6t^5dt$. Маємо інтеграл:

$$I=6\int\frac{\left(1+t^3\right)t^5dt}{t^3-t^2}=6\int\frac{t^3+t^6}{t-1}dt=6\int\frac{(t^3-1)+\left(t^6-1\right)+2}{t-1}dt=6\left(I_1+I_2+I_3\right).$$

$$I_1=\int\frac{t^3-1}{t-1}dt=\int\left(t^2+t+1\right)dt=\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+C_1;$$

$$I_2=\int\frac{t^6-1}{t-1}dt=\int\left(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1\right)dt=\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+C_2;$$

$$I_3=\int\frac{2}{t-1}dt=2\ln|t-1|+C_3.$$

$$I=6\left(I_1+I_2+I_3\right)=6\left(\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{2t^3}{3}+t^2+2t+2\ln|t-1|\right)+C\,.$$

Виконуючи зворотну підстановку $t=\sqrt[6]{x}$, остаточно отримуємо:

$$I=6\left(\frac{x}{6}+\frac{x^{\frac{5}{6}}}{5}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{4}+\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{3}+x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{6}}+2\ln\left|x^{\frac{1}{6}}-1\right|\right)+C=$$

$$=6\left(\frac{x}{6}+\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}+\frac{2\sqrt{x}}{3}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+2\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|\right)+C\,. ■$$

Приклад 6.34 . Обчислити інтеграл $\int\frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{1+x^2}}$.

Розв'язання. Застосуємо підстановку $x=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{dt}{t^2}$. Переходячи до нової змінної, отримуємо:

$$\int\frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{1+x^2}}=-\int\frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+t^2\right)}{\sqrt{1+t^2}}=-\sqrt{1+t^2}+C=$$

$$=-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}+C.\ ■$$

Приклад 6.35. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt[4]{1+x^7}}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\int\frac{x^6dx}{x^7\cdot\sqrt[4]{1+x^7}}=\left\|\begin{matrix}1+x^7=t^4,\\ 7x^6dx=4t^3dt\end{matrix}\right\|=\frac{4}{7}\int\frac{t^3dt}{\left(t^4-1\right)\cdot t}=\frac{4}{7}\int\frac{t^2dt}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}.$$

Отриманий інтеграл перетворимо таким чином:

$$\frac{4}{7}\int\frac{t^2dt}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}=\frac{2}{7}\int\frac{\left(t^2-1\right)+\left(t^2+1\right)}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}dt=\frac{2}{7}\left(\int\frac{dt}{t^2+1}+\int\frac{dt}{t^2-1}\right)=$$

$$=\frac{2}{7}\left(\operatorname{arctg}t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C\,.$$

Зробимо зворотну підстановку $t=\sqrt[4]{1+x^7}$, отримаємо значення інтеграла:

$$I=\frac{2}{7}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1+x^7}+\frac{1}{7}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^7}-1}{\sqrt[4]{1+x^7}+1}\right|+C\,. ■$$

Розглянемо підстановки, що використовуються при інтегруванні виразів виду $\sqrt{a^2\pm x^2}$, $\sqrt{x^2\pm a^2}$, $a>0$. Тут можливі такі випадки.

1) Якщо підінтегральна функція містить вираз $\sqrt{a^2-x^2}$, доцільно використовувати підстановку $x=a\sin t,\ -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$. У цьому випадку отримуємо $dx=a\cos t\,dt,\ \sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$.

2) Якщо підінтегральна функція містить вираз $\sqrt{x^2-a^2}$, позбутися ірраціональності можна за допомогою підстановки $x=\frac{a}{\cos t},\ 0<t<\frac{\pi}{2}$. Тоді $dx=\frac{a\sin t\,dt}{\cos^2 t},\ \sqrt{x^2-a^2}=a\,\mathrm{tg}t$.

3) У випадку, коли під знаком інтеграла маємо корінь $\sqrt{a^2+x^2}$, можна позбутися радикала, використовуючи заміну змінної $x=a\,\mathrm{tg}t,\ -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$. Маємо $dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t}, \sqrt{a^2+x^2}=\frac{a}{\cos t}$.

У цих випадках можуть також бути використані гіперболічні підстановки, а саме: для випадку 1 – $x=a\,\mathrm{th}t$, для випадку 2 – $x=a\,\mathrm{ch}t$, для випадку 3 – $x=a\,\mathrm{sh}t$.

Приклад 6.36 . Обчислити інтеграл $I=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)^3}}$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральний вираз містить корінь $\sqrt{a^2+x^2}$, то маємо випадок 3, тому використаємо підстановку $x=a\,\mathrm{tg}t,\ -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$. Отримаємо:

$$I=\int\frac{a^3\mathrm{tg}^2t\cos^3t\,dt}{a^3\cos^2 t}=\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}dt=\int\frac{\sin^2 t\cos t\,dt}{1-\sin^2 t}=\left\|\begin{matrix}\sin t=u,\\ \cos t\,dt=du\end{matrix}\right\|=\int\frac{u^2du}{1-u^2}.$$

Виконаємо перетворення у отриманому інтегралі:

$$\int\frac{u^2du}{1-u^2}=-\int\frac{(1-u^2)-1}{1-u^2}du=-\int du+\int\frac{du}{1-u^2}=-u-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C=$$

$$=-\sin t-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t-1}{\sin t+1}\right|+C\cdot$$

Оскільки $x=a\,\mathrm{tg}t,\ t=\mathrm{arctg}\frac{x}{a}$, то, користуючись тотожністю $\sin(\mathrm{arctg}\,\alpha)=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, при $\alpha=\frac{x}{a}$ маємо $\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

Остаточно отримуємо:

$$I = -\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x - \sqrt{a^2 + x^2}}{x + \sqrt{a^2 + x^2}}\right| + C. \ ■$$

Приклад 6.37 . Обчислити інтеграл $I = \int x^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}dx.$

Розв'язання. Для цього інтеграла маємо випадок 1), тому використовуємо заміну змінної $x = a\sin\ t,\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$:

$$I = a^4\int \sin^2 t\cos^2 tdt = \frac{a^4}{4}\int \sin^2 2tdt = \frac{a^4}{8}\int(1 - \cos 4t)dt = \frac{a^4}{8}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right) + C \cdot$$

Виконаємо зворотну заміну: $t = \arcsin\frac{x}{a}$. Виразимо через змінну x величину $\sin 4t$.

$$\sin 4t = 2\sin 2t\cos 2t = 4\sin t\cos t\left(1 - 2\sin^2 t\right).$$

При $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ маємо $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$. Для $t = \arcsin\frac{x}{a}$ одержимо $\sin t = \frac{x}{a}$, $\cos t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}, a > 0$. Підставляючи ці залежності у вираз для $\sin 4t$, отримаємо $\sin 4t = \frac{4x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{8x^3}{a^4}\sqrt{a^2 - x^2}$. Підставимо цей вираз у отримане значення інтеграла I:

$$I = \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{a^2 x}{8}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^3}{4}\sqrt{a^2 - x^2} + C. \ ■$$

Приклад 6.38 . Обчислити інтеграл $I = \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}dx$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральний вираз містить $\sqrt{x^2 - a^2}$, то для цього інтеграла доцільно використати підстановку випадку 2: $x = \frac{a}{\cos t}, 0 < t < \frac{\pi}{2}$.

$$I = \int \frac{a\,\mathrm{tg}\,t \cdot \cos t}{a} \cdot \frac{a\sin tdt}{\cos^2 t} = a\int \mathrm{tg}^2 tdt = = a\int\left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)dt = a(\mathrm{tg}\,t - t) + C /$$

Перейдемо до змінної x:

$$\cos t = \frac{a}{x},\ t = \arccos\frac{a}{x},\ \mathrm{tg}\,t = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Таким чином, $I = \sqrt{x^2 - a^2} - a \cdot \arccos\frac{a}{x} + C$. ■

Приклад 6.39 . Обчислити інтеграл $I = \int \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}dx$.

Розв'язання. У цьому випадку доцільно використати підстановку $x = a\cos t$:

$$I = \left\| \begin{aligned} & x = a\cos t, \\ & 0 < t < \pi, \\ & t = \arccos\frac{x}{a}, \\ & dx = -a\sin t\,dt \end{aligned} \right\| = -a\int\sqrt{\frac{a - a\cos t}{a + a\cos t}}\sin t\,dt =$$

$$= -a\int\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| \cdot 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt \,.$$

Оскільки $0 < t < \pi$, то $\operatorname{tg}\frac{t}{2} > 0$, модуль відкривається із знаком „+”, звідки отримаємо

$$I = -2a\int\sin^2\frac{t}{2}dt = -a\int(1 - \cos t)dt = -a(t - \sin t) + C =$$

$$= -a\arccos\frac{x}{a} + a\sin\left(\arccos\frac{x}{a}\right) + C \,.$$

Далі скористаємось формулою $\sin\arccos y = \sqrt{1 - y^2}$ і одержимо

$$I = -a\arccos\frac{x}{a} + a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} + C = -a\arccos\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C \,. \blacksquare$$

Приклад 6.40. Обчислити інтеграл $I = \int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 9}}$.

Розв'язання. Спочатку зазначимо, що підінтегральна функція визначена при $x < -3$ і при $x > 3$. Оскільки підінтегральний вираз містить радикал вигляду $\sqrt{x^2 - a^2}$, то для знаходження цього інтеграла можна використати гіперболічну підстановку $x = 3\operatorname{ch}t, t > 0$ у випадку $x > 3$ або підстановку $x = -3\operatorname{ch}t, t > 0$ у випадку $x < -3$.

Розглянемо спочатку випадок $x > 3$. Тоді $x = 3\operatorname{ch}t, t > 0$, $dx = 3\operatorname{sh}t\,dt$, а підінтегральний вираз набуває вигляду:

$$\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{3\operatorname{sh}t\,dt}{9\operatorname{ch}^2t \cdot \sqrt{9\operatorname{ch}^2t - 9}} = \frac{3\operatorname{sh}t\,dt}{9\operatorname{ch}^2t \cdot 3\operatorname{sh}t} = \frac{dt}{9\operatorname{ch}^2t} \,.$$

Підставимо його в інтеграл I:

$$I = \frac{1}{9}\int\frac{dt}{\operatorname{ch}^2t} = \frac{1}{9}\operatorname{th}t + C \,.$$

Перейдемо до змінної x:

$$\operatorname{th}t=\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{ch}t}=\frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1}}{\operatorname{ch}t}=\frac{\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-1}}{\frac{x}{3}}=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x};$$

$$I=\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C \text{ при } x>3.$$

Тепер розглянемо випадок $x<-3$. Тоді $x=-3\operatorname{ch}t, t>0$, $dx=-3\operatorname{sh}t\,dt$, отже

$$I=\int\frac{-3\operatorname{sh}t\,dt}{9\operatorname{ch}^2 t\cdot\sqrt{9\operatorname{ch}^2 t-9}}=\int\frac{-dt}{9\operatorname{ch}^2 t}=-\frac{1}{9}\operatorname{th}t+C=$$

$$=-\frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1}}{\operatorname{ch}t}+C=-\frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-1}}{-\frac{x}{3}}+C=\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C \text{ при } x<-3. \blacksquare$$

3. Метод інтегрування частинами

Цей метод ґрунтується на використанні формули, доведення якої надається у розділі 1, §1, п. 2.2 (*теорема 5.3*):

$$\int u(x)\,d(v(x))=u(x)v(x)-\int v(x)\,d(u(x))$$

Тут із існування на X невизначеного інтеграла $\int u(x)d(v(x))$ випливає існування інтеграла $\int v(x)\,d(u(x))$ і навпаки.

Для застосування цього методу підінтегральний вираз слід подати у вигляді добутку однієї функції та диференціала іншої функції. У розділі 1, §1, п. 2.2 у таблиці надано класифікацію основних типів функцій, що інтегруються частинами.

Приклад 6.41. Обчислити інтеграл $\int x^\alpha \ln x\,dx,\quad \alpha\neq-1$.

Розв'язання. Виберемо за u вираз $\ln x$. При цьому отримуємо:

$$u=\ln x, dv=x^\alpha dx, du=\frac{dx}{x}, v=\int dv=\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}.$$

Тут і в інших прикладах при знаходженні v ми вибираємо найпростішу первісну, для якої $C=0$. З формули інтегрування частинами знаходимо:

$$\int x^\alpha \ln x\,dx=\left\|\begin{matrix}u=\ln x, & dv=x^\alpha dx,\\ du=\frac{dx}{x}, & v=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\end{matrix}\right\|=\frac{x^{\alpha+1}\cdot\ln x}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}\int x^\alpha dx=$$

$$=\frac{x^{\alpha+1}\cdot\ln x}{\alpha+1}-\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}+C. \blacksquare$$

Приклад 6.42 . Обчислити інтеграл $\int\arcsin x dx$.

Розв’язання. Для даного інтеграла $u=\arcsin x, dv=dx$. Тоді $du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, v=x$. Підставляючи ці вирази у формулу інтегрування частинами, знаходимо:

$$\int \arcsin x dx = x\cdot\arcsin x - \int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C . \blacksquare$$

Приклад 6.43 . Обчислити інтеграл $I=\int\cos\left(\ln x\right)dx$.

Розв’язання. Приймемо $u=\cos\left(\ln x\right), dv=dx$. Тоді

$$du=-\frac{\sin\left(\ln x\right)dx}{x}, v=\int dv = x;$$

$$I = x\cos\left(\ln x\right)+\int\sin\left(\ln x\right)dx.$$

Застосуємо формулу інтегрування частинами ще раз:

$$u=\sin\left(\ln x\right), dv=dx, du=\frac{\cos\left(\ln x\right)dx}{x}, v=x;$$

$$I_1=\int\sin\left(\ln x\right)dx = x\sin\left(\ln x\right)-\int\cos(\ln x)dx = x\sin\left(\ln x\right)-I.$$

Підставляючи I_1 у вираз для I, отримуємо:

$$I = x\cos\left(\ln x\right)+x\sin\left(\ln x\right)-I.$$

Звідси отримуємо: $I=\frac{x}{2}\left[\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)\right]+C$. ■

Приклад 6.44. Обчислити інтеграл $I=\int\left(x^2-3x+7\right)\sin 2xdx$.

Розв’язання. Даний інтеграл відноситься до класу А за класифікацією розділу 1, §1, п. 2.2, тому за u виберемо многочлен: $u=x^2-3x+7$. Тоді $dv=\sin 2xdx, du=\left(2x-3\right)dx, v=-\frac{1}{2}\cos 2x$. За формулою інтегрування частинами знаходимо:

$$I=-\frac{x^2-3x+7}{2}\cdot\cos 2x+\frac{1}{2}\int\left(2x-3\right)\cos 2xdx.$$

В інтегралі у правій частині цієї рівності покладемо

$$u=2x-3,\ dv=\cos 2xdx,\ du=2dx, v=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Тоді

$$I=\frac{-x^2+3x-7}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\left(\frac{2x-3}{2}\sin 2x-\int\sin 2xdx\right)=$$

$$=\frac{6x-2x^2-13}{4}\cos 2x+\frac{2x-3}{4}\sin 2x+C . \blacksquare$$

При обчисленні інтегралів вигляду $\int P_n(x)e^{ax}dx$, де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня, які належать до класу А (за класифікацією розділу 1, §1, п. 2.2), інтегрування частинами необхідно виконувати n разів, вибираючи $u=P_n(x)$. При цьому в результаті інтегрування отримуємо функцію, що має вигляд $Q_n(x)e^{ax}$, де $Q_n(x)$ – многочлен того ж степеня n, що й $P_n(x)$. Це дає змогу застосувати для обчислення інтегралів цього типу метод невизначених коефіцієнтів, сутність якого розглянемо на прикладі.

Приклад 6.45 . Обчислити інтеграл $\int(3x^3-17)e^{2x}dx$.

Розв'язання. Застосуємо розглянутий вище підхід до розв'язання цього прикладу. Будемо шукати інтеграл I у вигляді добутку многочлена 3-го степеня з невизначеними коефіцієнтами на показникову функцію e^{2x}:

$$\int(3x^3-17)e^{2x}dx=\left(A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4\right)e^{2x}+C.$$

Диференціюючи праву та ліву частину цієї рівності, отримуємо:

$$(3x^3-17)e^{2x}=(3A_1x^2+2A_2x+A_3)e^{2x}+2e^{2x}\left(A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4\right).$$

$$3x^3-17\equiv 2A_1x^3+(2A_2+3A_1)x^2+(2A_3+2A_2)x+(2A_4+A_3).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у правій та лівій частинах цієї тотожності, отримуємо систему рівнянь відносно невизначених коефіцієнтів A_1, A_2, A_3, A_4:

$$\begin{cases}2A_1=3,\\ 2A_2+3A_1=0,\\ 2A_3+2A_2=0,\\ 2A_4+A_3=-17;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=\frac{3}{2},\ A_2=-\frac{9}{4},\\ A_3=\frac{9}{4},\ A_4=-\frac{77}{8}.\end{cases}$$

Таким чином, отримуємо:

$$\int(3x^3-17)e^{2x}dx=\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{77}{8}\right)e^{2x}+C.\ \blacksquare$$

Метод невизначених коефіцієнтів можна застосувати також для знаходження інтегралів більш загального вигляду $I=\int e^{ax}\left(P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx\right)dx$, де $P_n(x)$ та $Q_m(x)$ – многочлени степенів n та m відповідно. У цьому випадку результат інтегрування шукаємо у вигляді: $I=e^{ax}\left(R_l(x)\cos bx+S_l(x)\sin bx\right)$, де $R_l(x)$ та $S_l(x)$ – многочлени з невизначеними коефіцієнтами степені $l=\max\{m,n\}$. Ці коефіцієнти знаходимо, диференціюючи вирази для I та прирівнюючи коефіцієнти при однакових виразах виду $x^ke^{ax}\cos bx$ та $x^ke^{ax}\sin bx$, $k=1,2,...,l$.

Приклад 6.46 . Обчислити інтеграл

$$I=\int e^{-x}\left[(x^2+1)\cos 2x-x\sin 2x\right]dx.$$

Розв'язання. Оскільки $l = \max\{1;\, 2\} = 2$, будемо шукати значення інтеграла I у вигляді:

$$\int e^{-x}\left[\left(x^2+1\right)\cos 2x - x\sin 2x\right]dx =$$
$$= e^{-x}\left[\left(A_1x^2 + A_2x + A_3\right)\cos 2x + \left(B_1x^2 + B_2x + B_3\right)\sin 2x\right] + C.$$

Після диференціювання обох частин цієї рівності отримаємо:

$$e^{-x}\left[\left(x^2+1\right)\cos 2x - x\sin 2x\right] =$$
$$= -e^{-x}\left[\left(A_1x^2 + A_2x + A_3\right)\cos 2x + \left(B_1x^2 + B_2x + B_3\right)\sin 2x\right] + e^{-x}\times$$
$$\times\left[(2A_1x + A_2)\cos 2x - 2\left(A_1x^2 + A_2x + A_3\right)\sin 2x +\right.$$
$$\left.+(2B_1x + B_2)\sin 2x + 2\left(B_1x^2 + B_2x + B_3\right)\cos 2x\right].$$

З останньої рівності отримуємо систему для знаходження невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{cases} 2B_1 - A_1 = 1, \\ 2B_2 + 2A_1 - A_2 = 0, \\ 2B_3 + A_2 - A_3 = 1, \\ -B_1 - 2A_1 = 0, \\ 2B_1 - B_2 - 2A_2 = -1, \\ B_2 - B_3 - 2A_3 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -\dfrac{1}{5},\, A_2 = \dfrac{16}{25}, \\ A_3 = \dfrac{17}{125},\, B_1 = \dfrac{2}{5}, \\ B_2 = \dfrac{13}{25},\, B_3 = \dfrac{31}{125}. \end{cases}$$

Таким чином, отримуємо значення інтеграла I:

$$I = e^{-x}\left[\left(-\frac{1}{5}x^2 + \frac{16}{25}x + \frac{17}{125}\right)\cos 2x + \left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{13}{25}x + \frac{31}{125}\right)\sin 2x\right] + C. \ \blacksquare$$

Приклад 6.47 . Обчислити інтеграл $I = \int \sin\sqrt{x}dx$.

Розв'язання. Виконаємо підстановку $t = \sqrt{x},\, x = t^2,\, dx = 2tdt$. Отримаємо $I = 2\int t\sin tdt$. Застосуємо формулу інтегрування частинами, вибираючи $u = t, dv = \sin tdt, du = dt, v = -\cos t$:

$$I = 2\left(-t\cos t + \int \cos tdt\right) = 2(\sin t - t\cos t) + C = = 2\left(\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right) + C. \ \blacksquare$$

Приклад 6.48 . Отримати рекурентну формулу для інтеграла $I_{n,m} = \int \dfrac{\sin^n x}{\cos^m x}dx$, де $m, n \in \mathbb{N}, n \neq 1.$

Розв'язання. Застосуємо для знаходження цього інтеграла метод інтегрування частинами:

$$u = \sin^{n-1} x,\, dv = \frac{\sin xdx}{\cos^m x},\, du = (n-1)\sin^{n-2} x\cos xdx,$$

$$v=-\int \cos^{-m} x d\left(\cos x\right)=\frac{1}{(m-1)\cos^{m-1} x};$$

$$I_{n,m}=\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}dx=\frac{\sin^{n-1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x}-\frac{n-1}{m-1}\int \frac{\sin^{n-2} xdx}{\cos^{m-2} x}=$$

$$=\frac{\sin^{n-1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x}-\frac{n-1}{m-1}I_{n-2,m-2}. \blacksquare$$

Приклад 6.49 . Отримати рекурентну формулу для інтеграла $I_n=\int x^{\alpha}\ln^n xdx$, де $\alpha\neq -1$, $n\geq 2$.

Розв'язання. Для випадку $n=1$ інтеграл I_1 знайдено у прикладі 6.41. Для обчислення інтеграла I_n виберемо $u=\ln^n x, dv=x^{\alpha}dx,$ тоді $du=n\ln^{n-1} x\cdot\frac{dx}{x}, v=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. За формулою інтегрування частинами маємо:

$$I_n=\int x^{\alpha}\ln^n xdx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^n x-\frac{n}{\alpha+1}\int x^{\alpha}\ln^{n-1} xdx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^n x-\frac{n}{\alpha+1}I_{n-1}, n\geq 2.$$

При $n=1$ маємо $I_1=\frac{x^{\alpha+1}\cdot\ln x}{\alpha+1}-\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}+C$. $\blacksquare$

Приклад 6.50. Знайти інтеграл $I=\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^3}$.

Розв'язання. Використаємо рекурентну формулу, отриману в розділі 1, §1, п. 2.2:

$$K_{\lambda}=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{\lambda}}=\frac{1}{a^2}\left[\frac{2\lambda-3}{2(\lambda-1)}K_{\lambda-1}+\frac{x}{2(\lambda-1)\left(x^2+a^2\right)^{\lambda-1}}\right],\ \lambda\in\mathbb{N},\quad (6.2)$$

де $K_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a}+C$. При $\lambda=3, a=2$ отримаємо:

$$K_3=\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^3}=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{4}K_2+\frac{x}{4\left(x^2+4\right)^2}\right].$$

Далі послідовно знаходимо:

$$K_1=\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x}{2}+C,$$

$$K_2=\frac{1}{8}\left(\frac{x}{x^2+4}+\frac{1}{2}\text{arctg}\ \frac{x}{2}\right)+C.$$

Підставляючи K_2 в K_3, маємо:

$$K_3=\frac{1}{16}\left(\frac{x}{\left(x^2+4\right)^2}+\frac{3}{8}\frac{x}{x^2+4}+\frac{3}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)+C\,.\ \blacksquare$$

При обчисленні багатьох інтегралів доводиться застосовувати формулу інтегрування частинами послідовно кілька разів. Результат можна отримати швидше, якщо використати узагальнену формулу інтегрування частинами:

$$\int u(x)v(x)dx=u(x)v_1(x)-u'(x)v_2(x)+u''(x)v_3(x)-\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}u^{(n-1)}(x)v_n(x)+\left(-1\right)^n\int u^{(n)}(x)v_n(x)dx.$$

У цій формулі $v_k(x)=\int v_{k-1}(x)dx,\ k=1,2,...,n,\ v_0=v(x)$. Тут за $v_k(x)$ вибираємо первісну, для якої $C=0$. При цьому вважається, що всі похідні та інтеграли, які входять у цю формулу, існують. Застосування формули узагальненого інтегрування частинами є доцільним, зокрема, при обчисленні інтеграла $\int P_n(x)\varphi(x)dx$, де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня, а множник $\varphi(x)$ легко послідовно інтегрувати $n+1$ разів.

Приклад 6.51 . Використовуючи узагальнену формулу інтегрування частинами, обчислити інтеграл

$$I=\int\left(2x^3+3x^2-8x+1\right)\sqrt{2x+6}dx.$$

Розв'язання. Виберемо $u=2x^3+3x^2-8x+1,\quad v=\sqrt{2x+6}$. Тоді знаходимо:

$$u'=6x^2+6x-8,\ u''=12x+6,\ u'''=12,$$

$$v_1=\int vdx=\int\sqrt{2x+6}dx=\frac{(2x+6)^{\frac{3}{2}}}{3},\ v_2=\int v_1dx=\frac{1}{3}\int(2x+6)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{(2x+6)^{\frac{5}{2}}}{15},$$

$$v_3=\int v_2dx=\frac{1}{15}\int(2x+6)^{\frac{5}{2}}dx=\frac{(2x+6)^{\frac{7}{2}}}{105},$$

$$v_4=\int v_3dx=\frac{1}{105}\int(2x+6)^{\frac{7}{2}}dx=\frac{(2x+6)^{\frac{9}{2}}}{945}\ .$$

Оскільки $u^{(n)}(x)=0$ при $n\geq4$, то за узагальненою формулою інтегрування частинами отримуємо значення інтеграла I:

$$I=\left(2x^3+3x^2-8x+1\right)\frac{(2x+6)^{\frac{3}{2}}}{3}-\left(6x^2+6x-8\right)\frac{(2x+6)^{\frac{5}{2}}}{15}+$$
$$+(12x+6)\frac{(2x+6)^{\frac{7}{2}}}{105}-12\frac{(2x+6)^{\frac{9}{2}}}{945}+C\,.\ \blacksquare$$

4. Інтегрування раціональних функцій

Загальні теоретичні відомості щодо інтегрування раціональних функцій наведено в розділі 1, §1, п. 3.

Розглянемо приклади інтегрування раціональних функцій вигляду $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}, n\in N$.

Приклад 6.52. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+16x+73}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у знаменнику підінтегрального виразу:

$$x^2+16x+73=\underline{x^2+2\cdot 8x+64}+9=\left(x+8\right)^2+9.$$

Підставимо в інтеграл:

$$\int\frac{dx}{x^2+16x+73}=\int\frac{dx}{\left(x+8\right)^2+9}=\frac{1}{3}\text{arctg}\frac{x+8}{3}+C. \blacksquare$$

Приклад 6.53. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{xdx}{2x^2+2x+5}$.

Розв'язання. Оскільки похідною знаменника дробу є $4x+2$, доцільно виділити цей вираз у чисельнику підінтегральної функції:

$$\frac{x}{2x^2+2x+5}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4x+2-2}{2x^2+2x+5}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4x+2}{2x^2+2x+5}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)}.$$

Тоді $\displaystyle\int\frac{xdx}{2x^2+2x+5}=\frac{1}{4}\left(I_1-I_2\right)$, де $\displaystyle I_1=\int\frac{4x+2}{2x^2+2x+5}dx, I_2=\int\frac{dx}{x^2+x+\dfrac{5}{2}}$.

$$I_1=\int\frac{d\left(2x^2+2x+5\right)}{2x^2+2x+5}=\ln\left(2x^2+2x+5\right)+C_1, I_2=\int\frac{dx}{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\text{arctg}\frac{2x+1}{3}+C_2.$$

Для заданого інтеграла отримуємо:

$$\int\frac{xdx}{2x^2+2x+5}=\frac{1}{4}\left(I_1-I_2\right)=\frac{1}{4}\ln\left(2x^2+2x+5\right)-\frac{1}{6}\text{arctg}\frac{2x+1}{3}+C. \blacksquare$$

Приклад 6.54 . Обчислити інтеграл $\displaystyle I=\int\frac{3x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}dx$.

Розв'язання. Похідна квадратного тричлена $x^2+2x+10$ дорівнює $2x+2$, тому підінтегральну функцію перетворимо до вигляду

$$\frac{3x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}=\frac{\dfrac{3}{2}\left(2x+2\right)-1}{\left(x^2+2x+10\right)^2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}-\frac{1}{\left(\left(x+1\right)^2+9\right)^2}.$$

Заданий інтеграл подамо у вигляді суми двох інтегралів:

$$I = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{2x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2} dx - \int \frac{dx}{\left(\left(x+1\right)^2+9\right)^2},$$

$$I_1 = \int \frac{2x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2} dx, \quad I_2 = \int \frac{dx}{\left(\left(x+1\right)^2+9\right)^2}.$$

Тоді інтеграл I_1 набуде вигляду

$$I_1 = \int \frac{d\left(x^2+2x+10\right)}{\left(x^2+2x+10\right)^2} = -\frac{1}{x^2+2x+10} + C_1,$$

а інтеграл I_2 заміною $x+1=t$ зведемо до інтеграла K_λ, $\lambda=2$, що обчислюємо за рекурентною формулою (6.2):

$$I_2 = \int \frac{dt}{\left(t^2+9\right)^2} = \frac{1}{18} \cdot \frac{t}{t^2+9} + \frac{1}{54} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C_2.$$

Остаточно отримаємо:

$$I = \int \frac{3x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2} dx = \frac{3}{2} \cdot I_1 - I_2 = -\frac{3}{2\left(x^2+2x+10\right)} - \frac{1}{54} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C. \blacksquare$$

Для інтегрування раціональних функцій найчастіше використовують їх розклад на прості дроби. Методику здійснення такого розкладання розглянуто в розділі 1, §1, п. 3.

Приклад 6.55. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^2+4x+4}{x\left(x-1\right)^2} dx$.

Розв’язання. Дріб $\frac{x^2+4x+4}{x\left(x-1\right)^2}$ є правильним (степінь чисельника є меншим, ніж степінь знаменника), його розклад у суму простих дробів має вигляд:

$$\frac{x^2+4x+4}{x\left(x-1\right)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{\left(x-1\right)^2}.$$

Знайдемо коефіцієнти A, B та C, для чого приведемо праву частину розкладу до спільного знаменника:

$$\frac{x^2+4x+4}{x\left(x-1\right)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{\left(x-1\right)^2} = \frac{A\left(x-1\right)^2 + Bx\left(x-1\right) + Cx}{x\left(x-1\right)^2}.$$

Знаменники дробів у лівій та правій частинах цієї рівності є рівними, тому повинні збігатися й чисельники. Маємо:

$$x^2+4x+4 = A\left(x^2-2x+1\right) + B\left(x^2-x\right) + Cx.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у правій та лівій частинах останньої рівності, отримуємо систему для знаходження коефіцієнтів A, B та C:

$$\begin{cases} A+B=1, \\ -2A-B+C=4, \\ A=4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=4, \\ B=-3, \\ C=9. \end{cases}$$

Таким чином, розклад підінтегральної функції на прості дроби має вигляд:

$$\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}=\frac{4}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{9}{(x-1)^2}.$$

Підставляючи цей розклад у інтеграл I, отримуємо:

$$\int\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}dx=4\int\frac{dx}{x}-3\int\frac{dx}{x-1}+9\int\frac{dx}{(x-1)^2}=4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C.\ ■$$

Приклад 6.56. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{x^2-x+4}{(x+1)(x^2-5x+6)}dx$.

Розв'язання. Подамо другий множник знаменника у вигляді добутку незвідних многочленів: $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$. Знайдемо розклад підінтегральної функції на прості дроби:

$$\frac{x^2-x+4}{(x+1)(x^2-5x+6)}=\frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}.$$

Після зведення суми дробів у правій частині до спільного знаменника, прирівнюючи чисельники, отримаємо:

$$x^2-x+4=A(x-2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-2).$$

Для знаходження коефіцієнтів A, B та C замість прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x можна обчислити значення правої та лівої частин цієї рівності при трьох різних значеннях змінної x. Для цього зручно вибрати корені знаменника підінтегральної функції: $x=-1$, $x=2$ та $x=3$. При $x=-1$ отримуємо $12A=6, A=\frac{1}{2}$. При $x=2$ знаходимо $-3B=6, B=-2$, при $x=3$ маємо $4C=10, C=\frac{5}{2}$.

Таким чином, отримуємо:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-2\int\frac{dx}{x-2}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x-3}=\frac{1}{2}\ln|x+1|-2\ln|x-2|+\frac{5}{2}\ln|x-3|+C.$$

Зауважимо, що невизначені коефіцієнти в цьому прикладі можна було також шукати за допомогою прийому викреслювання (див. у розділ 1, §1, п. 3). У цьому випадку усі коефіцієнти A, B та C почергово знаходяться викреслюванням у знаменнику дробу

$$\frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}$$

відповідного незвідного множника $(x+1)$, $(x-2)$ та $(x-3)$ і підстановкою в ті вирази, що залишилися

$$\frac{x^2-x+4}{(x-2)(x-3)},\ \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-3)}\ \text{та}\ \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)}$$

значень коренів $-1,\ 2$ та 3. Відповідно отримаємо:

$$A=\frac{(-1)^2-(-1)+4}{(-1-2)(-1-3)}=\frac{1}{2},\ B=\frac{2^2-2+4}{(2+1)(2-3)}=2\ \text{та}\ C=\frac{3^2-3+4}{(3+1)(3-2)}=\frac{5}{2}.\ \blacksquare$$

Приклад 6.57. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{3x^2-x+2}{\left(x^2+1\right)^2(x-1)}dx$.

Розв'язання. Розклад дробу $\frac{3x^2-x+2}{\left(x^2+1\right)^2(x-1)}$ у суму простих дробів шукаємо у вигляді:

$$\frac{3x^2-x+2}{\left(x^2+1\right)^2(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Систему для визначення коефіцієнтів цього розкладу отримаємо, зводячи дроби у правій частині рівності до спільного знаменника та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у чисельнику:

$$3x^2-x+2=A\left(x^2+1\right)^2+(Bx+C)(x-1)\left(x^2+1\right)+(Dx+E)(x-1).$$

Вибираючи $x=1$, знаходимо $A=1$. Із рівності коефіцієнтів при однакових степенях x випливає:

$$\begin{cases}A+B=0,\\-B+C=0,\\2A-C+D+B=3,\\A-C-E=2.\end{cases}$$

З урахуванням $A=1$ із даної системи знаходимо решту коефіцієнтів: $B=C=-1, D=1, E=0$.

$$I=\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{x+1}{x^2+1}dx+\int\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-$$

$$-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+C.\ \blacksquare$$

Приклад 6.58. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{x^3-x}{x^2-5x+6}dx$.

Розв'язання. Оскільки дріб під знаком інтеграла є неправильним (степінь чисельника є більшим, ніж степінь знаменника), то перед його розкладом на прості дроби необхідно спочатку виділити цілу частину. Ділимо x^3-x на квадратний тричлен x^2-5x+6 та отримуємо:

$$\begin{array}{l|l}
{}_{-}\,x^3+0x^2-x+0 & x^2-5x+6 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-5x^2+6x} & x+5 \\
\quad {}_{-}\,5x^2-7x & \\
\quad \underline{5x^2-25x+30} & \\
\qquad\quad 18x-30. &
\end{array}$$

Звідки

$$\frac{x^3-x}{x^2-5x+6}=x+5+\frac{18x-30}{x^2-5x+6}=x+5+\frac{18x-30}{(x-2)(x-3)}.$$

Розкладемо дріб у правій частині рівності на прості дроби:

$$\frac{18x-30}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при степенях x у чисельниках, маємо $A+B=18$, $-3A-2B=-30$. Звідси знаходимо $A=-6,\ B=24$. Таким чином,

$$I=\int(x+5)dx-6\int\frac{dx}{x-2}+24\int\frac{dx}{x-3}=\frac{x^2}{2}+5x-6\ln|x-2|+24\ln|x-3|+C\,.\ \blacksquare$$

Приклад 6.59 . Обчислити інтеграл $I=\int\frac{x^{10}}{x^2+x-2}dx$.

Розв'язання. Підінтегральний раціональний дріб є неправильним, тому спочатку виділимо цілу частину, поділивши чисельник на знаменник «стовпчиком»:

$$\begin{array}{l|l}
{}_{-}\,x^{10}+0x^9+0x^8+0x^7+0x^6+0x^5+0x^4+0x^3+0x^2+0x+0 & x^2+x-2 \\ \cline{2-2}
\quad x^{10}+\qquad x^9 & x^8-x^7+3x^6-5x^5+11x^4- \\
\underline{\ -2x^8\qquad\qquad} & \\
\quad {}_{-}\,-x^9+2x^8+0x^7 & -21x^3+43x^2-85x+171 \\
\quad \underline{\ -x^9-x^8+2x^7} & \\
\qquad {}_{-}\,3x^8-2x^7+0x^6 & \\
\qquad \underline{\ 3x^8+3x^7-6x^6} & \\
\qquad\quad {}_{-}\,-5x^7+6x^6+0x^5 & \\
\qquad\quad \underline{\ -5x^7-5x^6+10x^5} & \\
\qquad\qquad {}_{-}\,11x^6-10x^5+0x^4 & \\
\qquad\qquad \underline{\ 11x^6+11x^5-22x^4} & \\
\qquad\qquad\quad {}_{-}\,-21x^5+22x^4+0x^3 & \\
\qquad\qquad\quad -21x^5\qquad -21x^4 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{+42x^3\qquad\qquad\qquad} & \\
\qquad\qquad\qquad {}_{-}\,43x^4-42x^3+0x^2 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\ 43x^4+43x^3-86x^2} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad {}_{-}\,-85x^3+86x^2+0x & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{\ -85x^3-85x^2+170x} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad {}_{-}\,171x^2-170x+0 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 171x^2\qquad\qquad + & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{171x-342\qquad\qquad} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -341x+342 &
\end{array}$$

Звідки отримаємо

$$I=\int\left(x^8-x^7+3x^6-5x^5+11x^4-21x^3+43x^2-85x+171+\frac{-341x+342}{x^2+x-2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^9}{9}-\frac{x^8}{8}+\frac{3x^7}{7}-\frac{5x^6}{6}+\frac{11x^5}{5}-\frac{21x^4}{4}+\frac{43x^3}{3}-\frac{85x^2}{2}+171x+\int\frac{-341x+342}{x^2+x-2}dx.$$

Тепер розглянемо підінтегральну функцію в інтегралі $\int\frac{-341x+342}{x^2+x-2}dx$ і розкладемо цей дріб на найпростіші:

$$\frac{-341x+342}{x^2+x-2}=\frac{-341x+342}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}.$$

Невизначені коефіцієнти можна знайти, наприклад, за допомогою прийому викреслювання: $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1024}{3}$. Після чого одержимо

$$\int\frac{-341x+342}{x^2+x-2}dx=\int\left(\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1024}{3(x+2)}\right)dx=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1024}{3}\ln|x+2|+C.$$

Об’єднуючи разом усі отримані результати, отримаємо:

$$I=\frac{x^9}{9}-\frac{x^8}{8}+\frac{3x^7}{7}-\frac{5x^6}{6}+\frac{11x^5}{5}-\frac{21x^4}{4}+\frac{43x^3}{3}-\frac{85x^2}{2}+171x+$$
$$+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1024}{3}\ln|x+2|+C. \blacksquare$$

Приклад 6.60 . Обчислити інтеграл $\int\frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

Розв’язання. Підінтегральний дріб є правильним. Розкладемо його знаменник на незвідні множники:

$$x^5-x^4+x^3-x^2+x-1=\left(x^5-x^4\right)+\left(x^3-x^2\right)+\left(x-1\right)=(x-1)\left(x^4+x^2+1\right)=.$$
$$=(x-1)\left(x^4+2x^2+1-x^2\right)=(x-1)\left(\left(x^2+1\right)^2-x^2\right)=(x-1)\left(x^2+1-x\right)\left(x^2+1+x\right).$$

У результаті отримаємо дріб

$$\frac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}=\frac{1}{(x-1)\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)},$$

який підлягає розкладу на прості дроби:

$$\frac{1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{x^2-x+1}.$$

Після застосування методу невизначених коефіцієнтів одержимо $A=1/3$, $B=-1/3$, $C=-1/6$, $D=0$, $E=-1/2$, тому

$$I=\int\left(\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)}-\frac{1}{2(x^2-x+1)}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1/2)^2+3/4}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.\ \blacksquare$$

Оскільки розклад на прості дроби здебільшого потребує значних затрат часу, то при обчисленні інтегралів від раціональних функцій корисно виконувати спрощення або заміну змінних у підінтегральному виразі, що дозволяє полегшити обчислення інтеграла.

Приклад 6.61. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{(x-3)(x+4)}$.

Розв'язання. Здійснимо перетворення підінтегральної функції:

$$\frac{1}{(x-3)(x+4)}=\frac{1}{7}\cdot\frac{(x+4)-(x-3)}{(x-3)(x+4)}=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+4}\right).$$

Підставивши в інтеграл, отримаємо:

$$I=\frac{1}{7}\left(\int\frac{dx}{x-3}-\int\frac{dx}{x+4}\right)=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right|+C.$$

Приклад 6.62 . Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{x^2\left(x^2+2\right)^2}$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення підінтегральної функції:

$$\frac{1}{x^2\left(x^2+2\right)^2}=\frac{x^2+2-x^2}{2x^2\left(x^2+2\right)^2}=\frac{1}{2x^2\left(x^2+2\right)}-\frac{1}{2\left(x^2+2\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+2}\right)-\frac{1}{2\left(x^2+2\right)^2}.$$

Підставляючи в інтеграл I, отримаємо:

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2}=-\frac{1}{4x}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2}.$$

Застосуємо до останнього інтеграла рекурентну формулу (6.2).

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+2}+\frac{x}{4\left(x^2+2\right)}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x}{4\left(x^2+2\right)}+C_1.$$

Отже, $I=-\frac{1}{4x}-\frac{x}{8\left(x^2+2\right)}-\frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. ■

Приклад 6.63 . Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{x\left(1-x^3\right)^2}$.

Розв'язання. Помножимо чисельник та знаменник підінтегрального виразу на $3x^2$. Отримаємо:

$$I=\int\frac{3x^2dx}{3x^3\left(1-x^3\right)^2}=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x^3\right)}{x^3\left(1-x^3\right)^2}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u\left(1-u\right)^2}=\frac{1}{3}\int\frac{\left(1-u\right)+u}{u\left(1-u\right)^2}du=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\int\frac{du}{u\left(1-u\right)}+\int\frac{du}{\left(1-u\right)^2}\right]=\frac{1}{3}\left[\int\frac{u+\left(1-u\right)}{u\left(1-u\right)}du-\frac{1}{u-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\int\frac{du}{1-u}+\int\frac{du}{u}-\frac{1}{u-1}\right]=\frac{1}{3}\left[\ln\frac{x^3}{x^3-1}-\frac{1}{x^3-1}\right]+C.\ ■$$

Приклад 6.64. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}dx$.

Розв'язання. Ділимо чисельник та знаменник підінтегральної функції на x^2, отримаємо:

$$I=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+3+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+5}=\int\frac{dz}{z^2+5}=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{5}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{5}x}+C.\ ■$$

Якщо знаменник $Q(x)$ правильного раціонального дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ має кратні корені (в тому числі й комплексні), то для інтегрування цього дробу можна застосувати ***метод Остроградського***[1], який полягає у виділенні раціональної частини первісної. Запишемо многочлен $Q_2(x)$ так, щоб усі його корені були простими й при цьому кожний корінь $Q_2(x)$ був би також коренем многочлена $Q(x)$. Тоді $Q(x)=Q_2(x)Q_1(x)$, де корені $Q_1(x)$ є коренями многочлена $Q(x)$ на одиницю меншої кратності. Зокрема, всі прості корені $Q(x)$ будуть коренями $Q_2(x)$ і не будуть коренями $Q_1(x)$. Метод Остроградського ґрунтується на основному співвідношенні

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{R(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{S(x)}{Q_2(x)}dx,$$

де $R(x), S(x)$ – многочлени з невизначеними коефіцієнтами, степені яких відповідно на одиницю менші за степені многочленів $Q_1(x)$ та $Q_2(x)$. Невизначені коефіцієнти у цих многочленах знаходяться за допомогою диференціювання основного співвідношення методу Остроградського. Звичайно, цей метод доцільно застосовувати, якщо многочлен $Q(x)$ має кілька коренів великої кратності.

---

[1] Див. с. 15-17 в посібнику:
Математичний аналіз: Диференціальне числення функцій кількох дійсних змінних. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Частина I [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / уклад. Ю. Є. Бохонов. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 83 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/42338/1/Matan_I-integrals_Bokhonov.pdf

Приклад 6.65 . Обчислити інтеграл $I=\int\frac{(2x+12)dx}{\left(x^2+4x+8\right)^2}$.

Розв'язання. Застосуємо метод Остроградського, згідно з яким інтеграл I запишемо у вигляді:

$$I=\int\frac{(2x+12)dx}{\left(x^2+4x+8\right)^2}=\frac{ax+b}{x^2+4x+8}+\int\frac{(cx+d)dx}{x^2+4x+8}.$$

Тут $Q(x)=\left(x^2+4x+8\right)^2$ має пару комплексних коренів кратності 2, тому $Q_2(x)$ та $Q_1(x)$ є многочленами, що мають лише ці ж прості корені. Звідси $Q_2(x)=Q_1(x)=x^2+4x+8$. Диференціюючи отриманий вираз для I, маємо

$$\frac{2x+12}{\left(x^2+4x+8\right)^2}=\frac{a\left(x^2+4x+8\right)-(2x+4)(ax+b)}{\left(x^2+4x+8\right)^2}+\frac{cx+d}{x^2+4x+8}.$$

Звідси, додаючи дроби в правій частині останньої рівності, прирівнюємо чисельники зліва та справа:

$$2x+12=a\left(x^2+4x+8\right)-(2x+4)(ax+b)+(cx+d)\left(x^2+4x+8\right).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій та правій частинах отриманої рівності, будуємо систему для знаходження невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{cases}c=0,\\ a-2a+d+4c=0,\\ 4a-4a-2b+4d+8c=2,\\ 8a-4b+8d=12;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=0,\\ a=b=d=1.\end{cases}$$

Таким чином,

$$\int\frac{(2x+12)dx}{\left(x^2+4x+8\right)^2}=\frac{x+1}{x^2+4x+8}+\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\left\|\begin{matrix}x^2+4x+8=\\ =\underline{x^2+4x+4}+4=\\ =(x+2)^2+2^2\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{x+1}{x^2+4x+8}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C.\ \blacksquare$$

Приклад 6.66. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{x^4+1}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники знаменник підінтегрального виразу:

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=\left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2=\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right).$$

Подамо підінтегральну функцію у вигляді суми простих дробів:

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Приводячи суму дробів у правій частині останньої рівності до спільного знаменника, отримуємо тотожність:

$$1\equiv(Ax+B)\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)+(Cx+D)\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right).$$

Звідси отримуємо систему для визначення коефіцієнтів $A,\ B,\ C$ та D:

$$\begin{cases}A+C=0,\\ -A\sqrt{2}+B+C\sqrt{2}+D=0,\\ A-B\sqrt{2}+C+D\sqrt{2}=0,\\ B+D=1.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}A=\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\\ C=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\\ B=D=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Таким чином отримуємо інтеграл I:

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}(I_1-I_2);$$

$$I_1=\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx+\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)+\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}+1\right)+C.$$

Аналогічно знаходимо інтеграл I_2:

$$I_2=\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)-\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}-1\right)+C.$$

Підставляючи I_1 та I_2 у вираз для I, отримаємо:

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}(I_1-I_2)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}+1\right)+\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}-1\right)\right)+C.\ \blacksquare$$

5. Інтегрування ірраціональних виразів

При інтегруванні виразів, що містять знак кореня, використовують підстановки, які дозволяють позбутися ірраціональностей у підінтегральній функції. Основні типи таких підстановок розглянуті у розділі 1, §1, п. 6 – 9 .

Приклад 6.67. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$.

Розв'язання. Найменше спільне кратне знаменників степенів змінної x, тобто чисел 2, 3, 4, 6, дорівнює 12, тому виконаємо заміну

$$x=t^{12},\ dx=12t^{11}dt.\ \text{Тоді}\ t=\sqrt[12]{x},\ \sqrt{x}=t^6,\ \sqrt[3]{x}=t^4,\ \ \sqrt[4]{x^5}=t^{15},\ \sqrt[6]{x^7}=t^{14}.$$

Інтеграл I набуває вигляду:

$$I=\int\frac{\left(t^6+t^4\right)12t^{11}dt}{t^{15}-t^{14}}=12\int\frac{t^3+t}{t-1}dt=12\int\frac{\left(t^3-1\right)+\left(t-1\right)+2}{t-1}dt=$$

$$=12\int\left(t^2+t+1\right)dt+12\int dt+\ 24\int\frac{dt}{t-1}=$$

$$=4t^3+6t^2+24t+24\ln\left|t-1\right|+C=4\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+24\sqrt[12]{x}+24\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+C.\ \blacksquare$$

Приклад 6.68 . Обчислити інтеграл $I=\int\frac{2}{\left(2-x\right)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є раціональною відносно x та дробово-лінійної ірраціональності $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$, тому використаємо підстановку $t=\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$ (див. розділ 1, §1, п. 6). Отримаємо:

$$t^3=\frac{2-x}{2+x},\ x=\frac{2-2t^3}{1+t^3},\ 2-x=\frac{4t^3}{1+t^3},$$

$$dx=\frac{-6t^2\left(1+t^3\right)-\left(2-2t^3\right)\cdot3t^2}{\left(t^3+1\right)^2}dt=\frac{-12t^2dt}{\left(t^3+1\right)^2}.$$

Підставимо ці вирази в інтеграл I:

$$I=-\int\frac{2\left(1+t^3\right)^2\cdot t\cdot12t^2dt}{16t^6\left(1+t^3\right)^2}=-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^3}=\frac{3}{4t^2}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C.\ \blacksquare$$

Приклад 6.69 . Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{\left(x-1\right)^3\left(x+2\right)^5}}$.

Розв'язання. Перетворимо знаменник підінтегрального виразу в такий спосіб:

$$\sqrt[4]{\left(x-1\right)^3\left(x+2\right)^5}=\left(x-1\right)\left(x+2\right)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}.$$

Підінтегральний вираз є раціональною функцією від x та $\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-1}}$, тому доцільно використати підстановку $t=\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-1}}$. Звідси отримуємо

$$\frac{x+2}{x-1}=t^4,\ x=\frac{t^4+2}{t^4-1},$$

$$dx=\frac{4t^3\left(t^4-1\right)-4t^3\left(t^4+2\right)}{\left(t^4-1\right)^2}dt=-\frac{12t^3dt}{\left(t^4-1\right)^2},\ x-1=\frac{3}{t^4-1},\ x+2=\frac{3t^4}{t^4-1}.$$

Отже, отримуємо вираз для інтеграла I:

$$I=-\int\frac{\left(t^4-1\right)^2 12t^3dt}{9t^5\left(t^4-1\right)^2}=-\frac{4}{3}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{4}{3t}+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C.\ ■$$

Розглянемо приклади на застосування підстановок Ейлера (в розділі 1, §1, п. 7).

Приклад 6.70 . Обчислити інтеграл $I=\int\dfrac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Розв'язання. Для квадратного тричлена під знаком радикала $ax^2+bx+c\equiv x^2+2x+2$ коефіцієнт при x^2 дорівнює 1, тобто $a=1>0$. Тому використаємо відповідну підстановку Ейлера $\sqrt{x^2+2x+2}=t-x$. Піднесемо до квадрата обидві частини цієї рівності. Після зведення подібних доданків отримаємо $2x+2tx=t^2-2$. Звідси знаходимо:

$$x=\frac{t^2-2}{2(t+1)},\ dx=\frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}dt.$$

Перейдемо під інтегралом до змінної t. У знаменнику маємо:

$$1+\sqrt{x^2+2x+2}=1+t-x=1+t-\frac{t^2-2}{2(1+t)}=\frac{t^2+4t+4}{2(1+t)}.$$

Інтеграл набуває вигляду:

$$I=\int\frac{2(1+t)\left(t^2+2t+2\right)}{\left(t^2+4t+4\right)\cdot 2(1+t)^2}dt=\int\frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}dt.$$

Таким чином, отримано інтеграл від раціонального дробу. Розкладемо підінтегральну функцію на прості дроби:

$$\frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}+\frac{C}{(t+2)^2}=\frac{A(t+2)^2+B(t+1)(t+2)+C(t+1)}{(t+1)(t+2)^2}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у чисельниках лівої та правої частин цієї рівності, знаходимо коефіцієнти $A,\ B$ та C:

$$\begin{cases} A+B=1, \\ 4A+3B+C=2, \\ 4A+2B+C=2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1, \\ B=0, \\ 4A+3B+C=2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=0, \\ C=-2. \end{cases}$$

Знаходимо I:

$$I=\int\frac{dt}{t+1}-2\int\frac{dt}{(t+2)^2}=\ln|t+1|+\frac{2}{t+2}+C.$$

Повертаючись до змінної x, отримуємо:

$$I=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+\frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}}+C. \blacksquare$$

Приклад 6.71. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{xdx}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}}$.

Розв'язання. У цьому випадку для квадратного тричлена в знаменнику $ax^2+bx+c\equiv 7x-10-x^2$ маємо: $a<0, c<0$. Тому першу та другу підстановки Ейлера застосувати не можна. Проте квадратний тричлен $7x-10-x^2$ має дійсні корені $x_1=2, x_2=5$, тому можна застосувати третю підстановку Ейлера $\sqrt{7x-10-x^2}=(x-2)t$. Знайдемо з цієї рівності x:

$$\sqrt{7x-10-x^2}=\sqrt{(x-2)(5-x)}=(x-2)t.$$

Підносячи до квадрата після скорочення на $x-2$, отримаємо:

$$5-x=(x-2)t^2,\ x=\frac{5+2t^2}{t^2+1},\ dx=-\frac{6tdt}{(t^2+1)^2},\ \sqrt{7x-10-x^2}=$$

$$=(x-2)t=\left(\frac{5+2t^2}{1+t^2}-2\right)t=\frac{3t}{1+t^2}.$$

Підставимо в інтеграл I:

$$I=-\frac{6}{27}\int\frac{5+2t^2}{t^2}dt=-\frac{2}{9}\left(-\frac{5}{t}+2t\right)+C==\frac{10(x-2)}{9\sqrt{7x-10-x^2}}-\frac{4\sqrt{7x-10-x^2}}{9(x-2)}+C.$$

■

Приклад 6.72. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+x+2)^5}}$.

Розв'язання. Для знаходження цього інтеграла застосуємо підстановку Абеля (розділ 1, §1, п. 8), згідно з якою вводимо нову змінну $t=\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)'=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}$. Встановимо зв'язок між диференціалами dx та dt. Задля цього спочатку виразимо x^2+x+2 через t:

$$4t^2\left(x^2+x+2\right)=4x^2+4x+1=4\left(x^2+x+2\right)-7,\quad x^2+x+2=-\frac{7}{4t^2-4}.$$

Диференціюючи рівність $t\sqrt{x^2+x+2}=x+\dfrac{1}{2}$, отримаємо:

$$dt\sqrt{x^2+x+2}+\frac{(2x+1)tdx}{2\sqrt{x^2+x+2}}=dx.$$

Звідси, враховуючи, що $t=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}$, отримуємо:

$$dt\sqrt{x^2+x+2}+t^2dx=dx,\ \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}=\frac{dt}{1-t^2}.$$

Підставимо цей вираз у інтеграл:

$$I=\int\frac{1}{\left(x^2+x+2\right)^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}=\frac{16}{49}\int\frac{\left(t^2-1\right)^2}{1-t^2}dt=$$

$$=\frac{16}{49}\int\left(1-t^2\right)dt=\frac{16}{49}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)+C.$$

Переходячи до змінної x, остаточно отримуємо:

$$I=\frac{16}{49}\left[\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}-\frac{1}{24}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}\right)^3\right]+C.\ ■$$

Приклад 6.73. Знайти інтеграл $I=\displaystyle\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл вигляду $\displaystyle\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, для знаходження якого можна використати метод невизначених коефіцієнтів, розглянутий у розділі 1, §1, п. 8.1. Згідно з цим методом, такий інтеграл шукаємо у вигляді:

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\left(b_1x^2+b_2x+b_3\right)\sqrt{x^2+4x+5}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

Диференціюючи цю рівність, маємо

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\left(2b_1x+b_2\right)\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{\left(b_1x^2+b_2x+b_3\right)(2x+4)}{2\sqrt{x^2+4x+5}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

Помножимо цей вираз на $\sqrt{x^2+4x+5}$ та отримаємо:

$$\left(2b_1x+b_2\right)\left(x^2+4x+5\right)+\left(b_1x^2+b_2x+b_3\right)(x+2)+\lambda=x^3.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримуємо систему:

$$\begin{cases}3b_1=1,\\10b_1+2b_2=0,\\10b_1+6b_2+b_3=0,\\5b_2+2b_3+\lambda=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_1=\dfrac{1}{3},\ \ b_2=-\dfrac{5}{3},\\b_3=\dfrac{20}{3},\ \lambda=-5.\end{cases}.$$

Тоді, підставляючи знайдені коефіцієнти у вираз для I, отримаємо:

$$I = \frac{1}{3}\left(x^2 - 5x + 20\right)\sqrt{x^2 + 4x + 5} - 5\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+2\right)^2 + 1}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2 - 5x + 20\right)\sqrt{x^2 + 4x + 5} - 5\ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 5}\right| + C. \ ■$$

Приклад 6.74 . Знайти інтеграл $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}dx$.

Розв'язання. В чисельнику стоїть многочлен третього степеня, тому многочлен із невизначеними коефіцієнтами треба обрати другого степеня, і тоді отримаємо:

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}dx = (Ax^2 + Bx + C)\sqrt{x^2 + 4x + 3} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}.$$

Для отримання значень невизначених коефіцієнтів треба спочатку продиференціювати обидві частини останньої рівності:

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} = (2Ax + B)\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (Ax^2 + Bx + C)\cdot\frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x + 3}} +$$

$$+ \lambda\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}},$$

потім обидві частини помножити на квадратичну ірраціональність $\sqrt{x^2 + 4x + 3}$:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (2Ax + B)(x^2 + 4x + 3) + (Ax^2 + Bx + C)(x + 2) + \lambda,$$

після чого застосувати метод невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{cases} 2A + A = 1, \\ 8A + B + 2A + B = -6, \\ 6A + 4B + 2B + C = 11, \\ 3B + 2C + \lambda = -6; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3}, \ B = -\frac{14}{3}, \\ C = 37, \ \lambda = -66. \end{cases}$$

Звідки отримаємо

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}dx = \left(\frac{x^2}{3} - \frac{14x}{3} + 37\right)\sqrt{x^2 + 4x + 3} - 66\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 - 1}} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{3} - \frac{14x}{3} + 37\right)\sqrt{x^2 + 4x + 3} - 66\ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3}\right| + C. \ ■$$

Приклад 6.75. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{\left(x-1\right)^3\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$.

Розв'язання. Інтеграли вигляду $\int \frac{dx}{\left(x - \alpha\right)^m\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ при $x > \alpha$ підстановкою $t = \frac{1}{x - \alpha}$ зводять до інтегралів, розглянутих у попередньому прикладі (розділ 1, §1, п.8.2). При $\alpha=1$ і $x>1$ виконаємо підстановку $x-1=\frac{1}{t}$. Звідси знаходимо:

$$dx=-\frac{dt}{t^2},\ x^2-2x-1=\left(x-1\right)^2-2=\frac{1}{t^2}-2=\frac{1-2t^2}{t^2}.$$

Підставимо в інтеграл:

$$I=-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{1-2t^2}}.$$

Обчислимо цей інтеграл методом невизначених коефіцієнтів:

$$I=\int\frac{-t^2dt}{\sqrt{1-2t^2}}=\left(b_1t+b_2\right)\sqrt{1-2t^2}+\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}}.$$

Диференціюючи цю рівність, знаходимо:

$$\frac{-t^2}{\sqrt{1-2t^2}}=b_1\sqrt{1-2t^2}-\frac{2t\left(b_1t+b_2\right)}{\sqrt{1-2t^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1-2t^2}}=\frac{b_1\left(1-2t^2\right)-2b_1t^2-2b_2t+\lambda}{\sqrt{1-2t^2}}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t у чисельниках лівої та правої частин рівності, отримуємо систему для знаходження λ, b_1, b_2:

$$\begin{cases}-4b_1=-1,\\ b_2=0,\\ \lambda+b_1=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_1=\frac{1}{4},\\ b_2=0,\lambda=-\frac{1}{4}.\end{cases}$$

Підставляючи в вираз для I, одержимо:

$$I=\frac{1}{4}t\sqrt{1-2t^2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}t+C.$$

Оскільки $t=\frac{1}{x-1}$, то остаточно отримуємо

$$I=\frac{1}{4\left(x-1\right)}\cdot\sqrt{1-\frac{2}{\left(x-1\right)^2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x-1}+C.\ ■$$

Приклад 6.76. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{\left(11x-13\right)dx}{\left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^2+1}}$.

Розв'язання. Методику обчислення інтегралів такого типу викладено у розділі 1, §1, п. 8.3. Інтеграл I належить до інтегралів 3-го типу, для знаходження яких використовують дробово-лінійну підстановку $x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$, $\alpha\neq\beta$. Квадратний тричлен x^2-x+1 набуває вигляду:

$$x^2-x+1=\frac{\alpha^2t^2+2\alpha\beta t+\beta^2-\left(\alpha t+\beta\right)\left(t+1\right)+t^2+2t+1}{\left(t+1\right)^2}.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнт при t у чисельнику останнього дробу, отримуємо співвідношення між коефіцієнтами α та β:

$$2\alpha\beta-\alpha-\beta+2=0.$$

Для виразу x^2+1 маємо

$$x^2+1=\frac{\alpha^2t^2+2\alpha\beta t+\beta^2+t^2+2t+1}{(t+1)^2}.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнт при t у чисельнику останнього дробу, знаходимо ще одне співвідношення між α та β:

$$2\alpha\beta+2=0.$$

Таким чином, для визначення коефіцієнтів α та β отримуємо систему:

$$\begin{cases}2\alpha\beta-\alpha-\beta+2=0,\\ 2\alpha\beta+2=0.\end{cases}$$

Ця система має два розв'язки: $\alpha=1,\ \beta=-1$ та $\alpha=-1,\ \beta=1$. Виберемо один із них, наприклад, $\alpha=1,\ \beta=-1$, тобто в інтегралі необхідно виконати підстановку $x=\dfrac{t-1}{t+1}$.

Перейдемо до змінної t у підінтегральному виразі:

$$x^2-x+1=\frac{t^2+3}{(t+1)^2},\ x^2+1=\frac{2t^2+2}{(t+1)^2},\ 11x-13=\frac{-2t-24}{t+1},\ dx=\frac{2dt}{(t+1)^2}.$$

Підставляючи ці співвідношення під знак інтеграла, отримаємо

$$\int\frac{(11x-13)dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}=-2\sqrt{2}\int\frac{(t+12)dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}=-2\sqrt{2}\left(I_1+12I_2\right).$$

Обчислимо інтеграл:

$$I_1=\int\frac{tdt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}=\int\frac{d\left(\sqrt{t^2+1}\right)}{t^2+3}=\int\frac{du}{u^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{2}}+C.$$

Для обчислення інтеграла

$$I_2=\int\frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}$$

використаємо підстановку Абеля:

$$z=\left(\sqrt{t^2+1}\right)'=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}},\ z^2=\frac{t^2}{t^2+1},\ t^2+3=\frac{3-2z^2}{1-z^2},\ \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{dz}{1-z^2}.$$

Інтеграл I_2 набуває вигляду:

$$I_2=\int\frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}=\int\frac{dz}{3-2z^2}=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+z\sqrt{2}}{\sqrt{3}-z\sqrt{2}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3t^2+3}+\sqrt{2}t}{\sqrt{3t^2+3}-\sqrt{2}t}\right|+C.$$

Отже,

$$I=\int\frac{(11x-13)dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}=-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{2}}-4\sqrt{3}\ln\left|\frac{\sqrt{3t^2+3}+\sqrt{2}t}{\sqrt{3t^2+3}-\sqrt{2}t}\right|+C,$$

де $t=\dfrac{x+1}{1-x}$. ■

Приклад 6.77 . Обчислити інтеграл $I=\int\dfrac{\sqrt{x}dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз цього інтеграла є біноміальним диференціалом (розділ 1, §1, п. 9) , при цьому $p=-2\in\mathbb{Z}$. Найменшим спільним знаменником дробів $m=\dfrac{1}{2}$ та $n=\dfrac{1}{3}$ є 6, тому виконуємо підстановку $x=t^6$. Тоді $dx=6t^5dt, \sqrt{x}=t^3, \sqrt[3]{x}=t^2$. Отримуємо інтеграл від раціональної функції:

$$I=6\int\frac{t^8dt}{(t^2+1)^2}=6\int\left(t^4-2t^2+3-\frac{3(t^2+1)+t^2}{(t^2+1)^2}\right)dt=$$

$$=\frac{6}{5}t^5-4t^3+18t-18\operatorname{arctg}t-6\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)^2}.$$

Обчислимо інтеграл у правій частині рівності:

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\int t\cdot d\left(\frac{1}{1+t^2}\right)=-\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C.$$

Враховуючи, що $t=\sqrt[6]{x}$, остаточно отримуємо:

$$I=\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-4\sqrt{x}+18\sqrt[6]{x}+\frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}-21\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C. ■$$

Приклад 6.78. Обчислити інтеграл $I=\int\dfrac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}dx}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Маємо біноміальний диференціал, у якому

$$m=-\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{4},\ p=\frac{1}{2},\ \frac{m+1}{n}=2\in\mathbb{Z}.$$

Отже, маємо другий випадок інтегровності біноміального диференціала, що потребує використання підстановки $1+\sqrt[4]{x}=t^2$.

Звідси отримуємо

$$x=(t^2-1)^4, \sqrt{x}=(t^2-1)^2, t=\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}, dx=4(t^2-1)^3\cdot 2tdt=8t(t^2-1)^3dt.$$

Підставляючи ці вирази у інтеграл I, отримуємо інтеграл від раціональної функції:

$$I=8\int\frac{t^2\left(t^2-1\right)^3dt}{\left(t^2-1\right)^2}=8\int\left(t^4-t^2\right)dt=\frac{8}{5}t^5-\frac{8}{3}t^3+C=$$

$$=\frac{8}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}\right)^5-\frac{8}{3}\left(\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}\right)^3+C.\ ■$$

Приклад 6.79. Обчислити інтеграл $I=\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^3}\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}}$.

Розв'язання. Для біноміального диференціала, що перебуває під знаком інтеграла $m=-\dfrac{3}{2}$, інші параметри – $n=\dfrac{3}{4}$, $p=-\dfrac{1}{3}$. Знаходимо $\dfrac{m+1}{n}+p=-1\in\mathbb{Z}$. Виконуємо підстановку $x^{-\frac{3}{4}}+1=t^3$, тобто

$$x=\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}},\ dx=-\frac{4}{3}\left(t^3-1\right)^{-\frac{7}{3}}\cdot 3t^2dt=-4t^2\left(t^3-1\right)^{-\frac{7}{3}}dt.$$

Перейдемо в підінтегральному виразі до змінної t. Отримаємо:

$$x^{-\frac{3}{2}}\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{3}}dx=x^{-\frac{3}{2}}\left[x^{-\frac{1}{4}}\left(x^{-\frac{3}{4}}+1\right)^{-\frac{1}{3}}\right]dx=x^{-\frac{7}{4}}\left(x^{-\frac{3}{4}}+1\right)^{-\frac{1}{3}}dx=$$

$$=-\left(t^3-1\right)^{\frac{7}{3}}\cdot 4t\left(t^3-1\right)^{-\frac{7}{3}}dt.$$

Таким чином, отримуємо інтеграл від раціональної функції:

$$I=-4\int tdt=-2t^2+C=-2\sqrt[3]{\left(x^{-\frac{3}{4}}+1\right)^2}+C.\ ■$$

Інтеграли вигляду $\int R(x;\sqrt{P_n(x)})dx,$ де $P_n(x)-$ многочлен степеня $n>2,$ як правило, не можна виразити через елементарні функції і в такому випадку при $n=3$ і $n=4$ називають *еліптичними*, а при $n>4-$*гіпереліптичними*. Якщо ж цей інтеграл при $n=3$ і $n=4$ є елементарною функцією, його називають *псевдоеліптичним*. Кожний еліптичний інтеграл може бути вираженим через елементарні функції й через стандартні еліптичні інтеграли[1]:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}},\quad\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}},$$

$$\int\frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}},\ \kappa\in(0;1).$$

Заміною $x=\sin\varphi$ ці інтеграли зводять до лінійних комбінацій інтегралів:

---

[1] L Ilyin, V. A.; Poznyak, È. G. Fundamentals of mathematical analysis. Part 1. 1982. 637 p.

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}}, \tag{6.3}$$

$$\int \sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \tag{6.4}$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}},\ \ \kappa\in(0;1),$$

які називають відповідно *еліптичними інтегралами першого, другого, третього роду у формі Лежандра*.

Через $F(\varphi;\kappa)$ та $E(\varphi;\kappa)$ позначимо відповідно ту з первісних (6.3) і (6.4), яка при $\varphi=0$ перетворюється в нуль. Отримаємо спеціальні функції, значення яких наведено у відповідних таблицях, вперше побудованих Лежандром.

Приклад 6.80. Обчислити інтеграли

а) $\displaystyle\int\frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$, б) $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{36x^4-13x^2+1}}$.

Розв'язання.

$$\text{а) } \int\frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}=\int\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}=\left\|\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=t,\quad t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2,\\ \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=dt\end{array}\right\|=$$

$$=\int\frac{dt}{t\sqrt{t^2-2}}=\left\|\begin{array}{l}\frac{1}{t}=z,\ z>0,\\ -\frac{1}{t^2}dt=dz\end{array}\right\|=-\int\frac{dz}{\sqrt{1-2z^2}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{1-(z\sqrt{2})^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos z\sqrt{2}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}+C.$$

$$\text{б) } \int\frac{x^2dx}{\sqrt{36x^4-13x^2+1}}=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-9x^2)(1-4x^2)}}=\left\|\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}\sin\varphi,\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2},\\ dx=\frac{1}{3}\cos\varphi\, d\varphi\end{array}\right\|=$$

$$=\frac{1}{27}\int\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\sin^2\varphi}}=-\frac{1}{27}\int\frac{\frac{9}{4}\left(-\frac{4}{9}\sin^2\varphi+1\right)-\frac{9}{4}}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\sin^2\varphi}}d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{12}\int\sqrt{1-\frac{4}{9}\sin^2\varphi d\varphi}+\frac{1}{12}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\sin^2\varphi}}=\frac{1}{12}\left(F\left(\varphi;\frac{2}{3}\right)-E\left(\varphi;\frac{2}{3}\right)\right)+C,$$

де $\varphi=\arcsin 3x.$ ■

6. Інтегрування виразів, що містять тригонометричні та гіперболічні функції

У п. 5 і п. 10, 11 розділу 1, §1 висвітлюено основні методи інтегрування тригонометричних та гіперболічних функцій. Розглянемо приклади застосування зазначених методів.

Приклад 6.81 . Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є раціональною функцією аргументів $\sin x$ та $\cos x$, тому для інтегрування доцільно застосувати універсальну тригонометричну підстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, -\pi<x<\pi$. Тоді тригонометричні функції виражають через раціональні дроби у такий спосіб:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Підставляючи ці вирази в інтеграл I, маємо:

$$I=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+C=-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}+C.\ \blacksquare$$

Приклад 6.82. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{(1+\sin x)dx}{\sin x(1+\cos x)}$.

Розв'язання. Застосовуючи універсальну тригонометричну підстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, -\pi<x<\pi$, перейдемо до інтеграла від раціональної функції:

$$I=\int\frac{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}+t+2\right)dt=\frac{1}{2}\left(\ln|t|+\frac{t^2}{2}+2t\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.\ \blacksquare$$

Приклад 6.83. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{3\sin x+\cos x}$.

Розв'язання. Перейдемо до інтеграла від раціональної функції, для чого використаємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$I=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3\cdot\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{6t+1-t^2}=-2\int\frac{dt}{(t-3)^2-10}=-\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{t-3-\sqrt{10}}{t-3+\sqrt{10}}\right|+C.$$

Переходячи до змінної x, отримуємо:

$$I=-\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-3-\sqrt{10}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-3+\sqrt{10}}\right|+C. \blacksquare$$

Приклад 6.84. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{\sin x\cdot\sin 2x}$.

Розв'язання. Запишемо інтеграл I у вигляді

$$I=\int\frac{dx}{\sin x\cdot 2\sin x\cos x}=\int\frac{dx}{2\sin^2 x\cos x}.$$

Під інтегралом знаходиться раціональна відносно $\sin x$ та $\cos x$ функція, тобто $R(\sin x,\cos x)$, яка змінює знак при заміні $\cos x$ на $(-\cos x)$, а саме:

$$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x).$$

Тому для інтегрування доцільно використати заміну $\sin x=t$, $\cos xdx=dt$. Помножимо чисельник та знаменник підінтегрального виразу на $\cos x$ та отримаємо:

$$I=\int\frac{\cos xdx}{2\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{dt}{2t^2\left(1-t^2\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{t^2+\left(1-t^2\right)}{t^2\left(1-t^2\right)}dt=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{1-t^2}+\int\frac{dt}{t^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{1}{2t}+C.$$

Перейдемо до змінної x:

$$I=-\frac{1}{2\sin x}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C. \blacksquare$$

Приклад 6.85. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{2\mathrm{tg}\,x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$.

Розв'язання. Оскільки при зміні знаків функцій $\sin x$ та $\cos x$ підінтегральна функція не змінює знака, то застосуємо підстановку $\mathrm{tg}\,x=t$. Поділивши чисельник та знаменник на $\cos^2 x$, маємо:

$$I=\int\frac{\left(2\mathrm{tg}\,x+3\right)\frac{dx}{\cos^2 x}}{\mathrm{tg}^2 x+2}=\int\frac{2t+3}{t^2+2}dt=\ln\left(t^2+2\right)+\frac{3}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C.$$

Переходячи до змінної x, отримуємо:

$$I=\ln\left(\mathrm{tg}^2 x+2\right)+\frac{3}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}}+C. \blacksquare$$

Приклад 6.86. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{\left(\sin x+\sin^3 x\right)dx}{1-2\sin^2 x}$.

Розв'язання. Оскільки при заміні $\sin x$ на $-\sin x$ підінтегральний вираз змінює знак на протилежний, то використаємо заміну $\cos x=t$. Звідси отримуємо такі вирази:

$$1-2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1,\quad \sin^2 x = 1-t^2,\quad \sin x dx = -dt\,.$$

Підставляючи їх у інтеграл I, знаходимо:

$$I=\int\frac{t^2-2}{2t^2-1}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2t^2-4}{2t^2-1}dt=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{3}{2t^2-1}\right)dt=\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^2-\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{t}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1}\right|+C\,.$$

Оскільки $t=\cos x$,то остаточно отримаємо:

$$I=\frac{\cos x}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C\,.\ ■$$

Приклад 6.87 . Обчислити інтеграл $I=\int\frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$.

Розв'язання. Маємо інтеграл вигляду $\int\sin^{\nu}x\cos^{\mu}xdx$, де $\nu=-6,\ \mu=3$. Оскільки μ – непарне, то доцільно застосувати підстановку $\sin x = t$. Перейдемо до змінної t:

$$I=\int\frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx=\int\frac{\left(1-\sin^2 x\right)d\left(\sin x\right)}{\sin^6 x}=\int\frac{\left(1-t^2\right)dt}{t^6}=$$

$$=\int t^{-6}dt-\int t^{-4}dt=-\frac{1}{5t^5}+\frac{1}{3t^3}+C\,.$$

Виконаємо зворотну заміну:

$$I=\frac{1}{3\sin^3 x}-\frac{1}{5\sin^5 x}+C\,.\ ■$$

Приклад 6.88. Обчислити інтеграл $\int\sin^6 x\cos^4 xdx$.

Розв'язання. Тут обидва показники степенів функцій $\sin x$ та $\cos x$ є парними невід'ємними числами, тому при інтегруванні доцільно використати формули синуса подвійного кута та зниження степеня:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\quad \sin^2\alpha=\frac{1}{2}\left(1-\cos 2\alpha\right),\quad \sin^4\alpha=\frac{1}{8}\left(\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha+3\right).$$

У нашому випадку отримуємо:

$$\int\sin^6 x\cos^4 xdx=\frac{1}{16}\int\sin^4 2x\cdot\sin^2 xdx=\frac{1}{32}\int\sin^4 2x\left(1-\cos 2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{32}\int\sin^4 2xdx-\frac{1}{64}\int\sin^4 2x\cdot d\left(\sin 2x\right)=\frac{1}{256}\int\left(\cos 8x-4\cos 4x+3\right)dx-$$

$$-\frac{1}{64}\cdot\frac{\sin^5 2x}{5}=\frac{\sin 8x}{2048}-\frac{\sin 4x}{256}+\frac{3x}{256}-\frac{\sin^5 2x}{320}+C\,.\ ■$$

Приклад 6.89. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{\sin^3 x}{\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos x}}dx$.

Розв'язання. Тут показник степеня функції $\sin x$ дорівнює $\nu = 3$ – непарному додатному числу, тому використаємо заміну змінної $\cos x = t$. Для цього запишемо інтеграл у вигляді:

$$I = -\int \frac{\left(1-\cos^2 x\right) d\left(\cos x\right)}{\left(\cos x\right)^{\frac{4}{3}}} = \int \frac{\left(t^2-1\right)dt}{t^{\frac{4}{3}}} = \int \left(t^{\frac{2}{3}} - t^{-\frac{4}{3}} \right) dt = \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + 3t^{-\frac{1}{3}} + C .$$

Переходячи до змінної x, отримаємо:

$$I = \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5}\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos^2 x} + C . \blacksquare$$

Приклад 6.90 . Обчислити інтеграл $I = \int \operatorname{tg}^7 x dx$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральну функцію з врахуванням того, що

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x = \left(\operatorname{tg} x\right)' ;$$

$$\operatorname{tg}^7 x = \operatorname{tg}^5 x \left(\sec^2 x - 1\right) = \operatorname{tg}^5 x \sec^2 x - \operatorname{tg}^3 x \left(\sec^2 x - 1\right) =$$

$$= \operatorname{tg}^5 x \sec^2 x - \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x + \operatorname{tg} x \left(\sec^2 x - 1\right).$$

Виконуючи заміну $\operatorname{tg} x = t, \sec^2 x dx = dt$, отримаємо:

$$I = \int \left(t^5 - t^3 + t\right) dt - \int \operatorname{tg} x dx = \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln\left|\cos x\right| + C . \ \blacksquare$$

Приклад 6.91 . Знайти інтеграл $I = \int \cos x \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} dx$.

Розв'язання. Перетворимо добуток тригонометричних функцій під знаком інтеграла в суму.

$$\cos x \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{4} = \frac{1}{2}\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{7x}{4} + \cos\frac{5x}{4}\right) + +\frac{1}{4}\left(\cos\frac{3x}{4} + \cos\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{7x}{4} + \cos\frac{5x}{4} + \cos\frac{3x}{4} + \cos\frac{x}{4}\right).$$

Підставимо отриманий вираз у інтеграл I:

$$I = \frac{1}{4}\int\left(\cos\frac{7x}{4} + \cos\frac{5x}{4} + \cos\frac{3x}{4} + \cos\frac{x}{4}\right)dx =$$

$$= \frac{\sin\frac{7x}{4}}{7} + \frac{\sin\frac{5x}{4}}{5} + \frac{\sin\frac{3x}{4}}{3} + \sin\frac{x}{4} + C.. \blacksquare$$

Для знаходження інтегралів вигляду $\int \frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x}dx$ можна користуватися методом невизначених коефіцієнтів, який проілюструємо наступним прикладом.

Приклад 6.92 . Обчислити інтеграл $I = \int \frac{\sin x - 3\cos x}{4\sin x + 5\cos x}dx$.

Розв'язання. Подамо чисельник підінтегральної функції $(\sin x - 3\cos x)$ у вигляді лінійної комбінації знаменника $(4\sin x + 5\cos x)$ та його похідної $(4\cos x - 5\sin x)$, тобто

$$\sin x - 3\cos x = A(4\sin x + 5\cos x) + B(4\cos x - 5\sin x).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin x$ та $\cos x$ у обох частинах останнього рівняння, маємо:

$$\begin{cases} 4A - 5B = 1, \\ 5A + 4B = -3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{11}{41}, \\ B = -\dfrac{17}{41}. \end{cases}$$

$$I = -\frac{11}{41}\int \frac{4\sin x + 5\cos x}{4\sin x + 5\cos x}dx - \frac{17}{41}\int \frac{d(4\sin x + 5\cos x)}{4\sin x + 5\cos x} = -\frac{11x}{41} -$$

$$-\frac{17}{41}\ln|4\sin x + 5\cos x| + C\ . \blacksquare$$

Розглянемо приклади інтегрування виразів, що містять гіперболічні функції.

Приклад 6.93 . Знайти інтеграл $I = \int \mathrm{ch}^2 x dx$.

Розв'язання. Використаємо тотожність $\mathrm{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\, 2x + 1)$. Підставляючи її в інтеграл, отримуємо:

$$I = \frac{1}{2}\int (\ \mathrm{ch}\, 2x + 1)dx = \frac{1}{4}\mathrm{sh}\, 2x + \frac{1}{2}x + C\ . \blacksquare$$

Приклад 6.94 . Обчислити інтеграл $I = \int \mathrm{ch}^3 x dx$.

Розв'язання. Оскільки $\mathrm{ch}\, x$ входить у підінтегральний вираз у непарному степені, можна використати підстановку $\mathrm{sh}\, x = t, dt = \mathrm{ch}\, x dx$. Підставимо ці вирази в інтеграл:

$$I = \int \mathrm{ch}^2 x \cdot \mathrm{ch}\, x dx = \left\| \mathrm{ch}^2 x = 1 + \mathrm{sh}^2 x \right\| = \int (1 + t^2) dt = t + \frac{t^3}{3} + C = \mathrm{sh}\, x + \frac{\mathrm{sh}^3 x}{3} + C\ . \blacksquare$$

Приклад 6.95. Обчислити інтеграл $I = \int \mathrm{th}^4 x dx$.

Розв'язання. Нехай $\mathrm{th}\, x = u$, тоді $|u| < 1$. Звідки

$$du = \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = (1 - \mathrm{th}^2 x)dx = (1 - u^2)dx.$$

Тому $dx = \dfrac{du}{1 - u^2}$, а інтеграл I набуває вигляду:

$$I=\int \operatorname{th}^4 x dx=\int \frac{u^4 du}{1-u^2}=\int \frac{\left(u^4-1\right)+1}{1-u^2}du=-\int\left(u^2+1\right)du+\int \frac{du}{1-u^2}=$$

$$=-\frac{u^3}{3}-u-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C.$$

Переходячи до змінної x, отримуємо:

$$I=-\operatorname{th} x-\frac{\operatorname{th}^3 x}{3}+x+C.$$

Тут було застосовано формулу (див. *зауваження 5.2*):

$$\operatorname{arth} u=\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u},\quad |u|<1,\ u=\operatorname{th} x.\ \blacksquare$$

Інтеграли від раціональних виразів відносно гіперболічних функцій знаходять за допомогою універсальної гіперболічної підстановки $t=\operatorname{th}\frac{x}{2}$.

Тоді $dx=\frac{2dt}{1-t^2}$, $\operatorname{sh} x=\frac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{ch} x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$.

Приклад 6.96. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{2+\operatorname{ch} x}$.

Розв'язання. Використовуючи універсальну гіперболічну підстановку, запишемо підінтегральний вираз через змінну t:

$$\frac{dx}{2+\operatorname{ch} x}=\frac{\frac{2dt}{1-t^2}}{2+\frac{1+t^2}{1-t^2}}=\frac{2dt}{3-t^2}.$$

Підставляючи в I, отримаємо табличний інтеграл:

$$I=2\int\frac{dt}{3-t^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}-t}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}-\operatorname{th}\frac{x}{2}}\right|+C.\ \blacksquare$$

§ 2. Визначений інтеграл

1. Поняття визначеного інтеграла та інтегровності функцій за Ріманом

Приклад 6.97. Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої віссю Ox, кривою $y=e^x$ та прямими $x=0$ і $x=1$.

Розв'язання. Для знаходження площі поділимо відрізок $[0;1]$ на n рівних частин точками

$$x_0=0<x_1=\frac{1}{n}<\ldots<x_k=\frac{k}{n}<\ldots<x_n=\frac{n}{n}=1.$$

Довжина кожного відрізка $\left[x_k; x_{k+1}\right]$ дорівнює $\Delta x_k = \frac{1}{n}$.

Нехай $\xi_k = x_k = \frac{k}{n}$, де $k = 0, 1, ..., n-1$. Тоді

$$f\left(\xi_k\right) = e^{\frac{k}{n}},\ k = 0, 1, ..., n-1.$$

Будемо вважати, що площа частини трапеції, розташованої над k-м відрізком, наближено дорівнює площі прямокутника з основою Δx_k та висотою $f\left(\xi_k\right)$. Тоді наближена величина площі визначиться сумою $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}$.

Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Оскільки $\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}$ є сумою n членів геометричної прогресії зі знаменником $q = e^{\frac{1}{n}}$ та першим членом, що дорівнює 1, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} = \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}},$$

тому

$$S_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \left(e-1\right)\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}. \tag{6.5}$$

Оскільки при $\alpha \to 0$ маємо $e^{\alpha} - 1 \sim \alpha$ (див. додаток А), то границя в правій частині рівності (6.5) дорівнює 1, тому отримуємо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = e-1$.

Оскільки S_n є інтегральною сумою функції e^x, а функція e^x є неперервною (а, значить, і інтегровною) на відрізку $\left[0;1\right]$, то значення границі інтегральних сум S_n не залежить від способу розбиття й вибору проміжних точок, тому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ є визначеним інтегралом функції $y = e^x$ по проміжку $\left[0;1\right]$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 e^x dx = e-1.$$

Згадуючи геометричний зміст визначеного інтеграла, доходимо висновку, що площа шуканої області S дорівнює

$$S = \int_0^1 e^x dx = e-1.$$

Тут ми площу наближено замінили сумою S_n, тобто $S \approx S_n$ і отримали, що похибка такого наближення прямує до нуля при $n \to \infty$ та $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.■

Приклад 6.98. Тіло рухається прямолінійно, причому його швидкість $v(t)$ у момент часу t дорівнює t^2. Знайти шлях, пройдений тілом від початку руху $(t=0)$ до моменту $t=b$.

Розв'язання. Поділимо проміжок часу $[0; b]$ на n рівних частин, тривалість кожної з яких дорівнює $\Delta t = \frac{b}{n}$, причому k-й проміжок часу починається в момент $t_k = \frac{kb}{n}$ і закінчується в момент часу $t_{k+1} = \frac{(k+1)b}{n}$. Спочатку знайдемо наближене значення пройденого шляху. Будемо вважати, що протягом кожного окремо взятого проміжку часу $\left[t_{k;}\, t_{k+1}\right]$ тіло рухається зі сталою швидкістю $v(t_k) = t_k{}^2$. Тоді шлях, пройдений за k-й проміжок часу, наближено знайдемо за формулою:

$$\Delta s_k \approx v(t_k)\Delta t = t_k{}^2 \Delta t.$$

Весь шлях $s(b)$, пройдений тілом, наближено можна знайти як суму

$$s(b) \approx \sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)\Delta t = \sum_{k=0}^{n-1} t_k{}^2 \Delta t = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{kb}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} =$$

$$= \frac{b^3}{6}\cdot\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}.$$

Тут ми використали формулу

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Зі збільшенням значення n проміжки часу Δt зменшуються, тим самим зменшується похибка, яку ми допускаємо при заміні руху на окремих проміжках рівномірним. Тому шлях, пройдений тілом за проміжок $t \in [0; b]$, дорівнює границі суми:

$$s(b) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} t_k{}^2 \Delta t = \lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{6}\cdot\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} = \frac{b^3}{3}. \ ■$$

Сума $\sum\limits_{k=0}^{n} t_k{}^2 \Delta t$ є інтегральною сумою для визначеного інтеграла $\int\limits_0^b t^2 dt$, що відповідає розбиттю відрізка $[0; b]$ на n рівних частин та вибору точок ξ_k на кожній із них на початку відповідних відрізків $\left[t_{k;}\, t_{k+1}\right]$. Якщо б ми прийняли швидкість на $\left[t_{k;}\, t_{k+1}\right]$ такою, що дорівнює швидкості у момент t_{k+1}, то отримали б іншу суму

$$\sum_{k=0}^{n-1} t_{k+1}^2 \Delta t = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 ,$$

границя якої при $n \to \infty$ залишається тією ж. Ці суми є відповідно нижньою та верхньою інтегральними сумами для інтеграла $\int_0^b t^2 dt$. ■

Приклад 6.99. Для функції $f(x) = 4x - x^2$ знайти нижню та верхню інтегральні суми Дарбу на відрізку $[2; 4]$, поділивши його на n рівних частин. Знайти границі цих сум при $n \to \infty$.

Розв'язання. Поділимо відрізок $[2; 4]$ на n рівних частин. Отримаємо n елементарних відрізків $[x_k; x_{k+1}]$ довжиною $\Delta x_k = \frac{2}{n}$, де точки поділу мають вигляд $x_k = 2 + \frac{2k}{n}, k = 0, 1, 2, ..., n$. Оскільки

$$f'(x) = 4 - 2x < 0, x \in (2; 4),$$

то $f(x)$ монотонно спадає на проміжку інтегрування. Таким чином, на кожному елементарному відрізку $[x_k; x_{k+1}]$

$$\min_{[x_k; x_{k+1}]} f(x) = f(x_{k+1}) = f\left(2 + \frac{2(k+1)}{n}\right) = 4\left(2 + \frac{2(k+1)}{n}\right) - \left(2 + \frac{2(k+1)}{n}\right)^2 =$$

$$= 4 - \frac{4(k+1)^2}{n^2} = m_k .$$

Отримуємо нижню інтегральну суму Дарбу:

$$\underline{S_n} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(4 - \frac{4(k+1)^2}{n^2}\right) = \frac{2}{n}\left(4n - \frac{4}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2\right) = 8 - \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

.

Функція $f(x)$ на кожному з елементарних відрізків $[x_k; x_{k+1}]$ досягає свого максимального значення в точці x_k. Тут

$$\max_{[x_k; x_{k+1}]} f(x) = f(x_k) = f\left(2 + \frac{2k}{n}\right) = 4\left(2 + \frac{2k}{n}\right) - \left(2 + \frac{2k}{n}\right)^2 = 4 - \frac{4k^2}{n^2} = M_k .$$

Тепер знайдемо верхню інтегральну суму Дарбу:

$$\overline{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(4 - \frac{4k^2}{n^2}\right) = \frac{2}{n}\left(4n - \frac{4}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k^2\right) = 8 - \frac{4(n-1)(2n-1)}{3n^2} .$$

Знайдемо границі верхньої та нижньої сум Дарбу при $n \to \infty$.

$$\lim_{n \to \infty} \underline{S_n} = \lim_{n \to \infty} \left(8 - \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}\right) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} .$$

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S_n}=\lim_{n\to\infty}\left(8-\frac{4(n-1)(2n-1)}{3n^2}\right)=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}.$$

Таким чином, у даному прикладі $\lim\limits_{n\to\infty}\underline{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\overline{S_n}=\dfrac{16}{3}$. ■

Приклад 6.100. З'ясувати, чи буде інтегровною на $[0;1]$ функція

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\left(\cos\dfrac{\pi}{2x}\right), x\neq 0,\\ 0,\quad x=0.\end{cases}$$

Розв'язання. Якщо $\cos\dfrac{\pi}{2x}>0$, то

$$\frac{\pi}{2x}\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\Rightarrow\frac{1}{x}\in(4n-1;4n+1), n\in\mathbb{Z}.$$

Тоді $\cos\dfrac{\pi}{2x}>0$, якщо $x\in\left(\dfrac{1}{4n+1};\dfrac{1}{4n-1}\right)$, $n\in\mathbb{N}$, а $\cos\dfrac{\pi}{2x}<0$ при $x\in\left(\dfrac{1}{4n+3};\dfrac{1}{4n+1}\right)$, $n=0,1,2,\ldots$.

Отже, $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\cos\dfrac{\pi}{2x}\right)=1$, якщо $x\in\left(\dfrac{1}{4n+1};\dfrac{1}{4n-1}\right)$, $n\in\mathbb{N}$, $f(x)=-1$ при значеннях аргументу $x\in\left(\dfrac{1}{4n+3};\dfrac{1}{4n+1}\right)$, $n=0,1,2,\ldots$, $f(x)=0$, якщо $x=\dfrac{1}{2n+1}$, $n\in\mathbb{N}$. Точками розриву функції $f(x)$ є точки $x=0$, $x=\dfrac{1}{2n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, що утворюють зчисленну множину. Оскільки функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[0;1]$ та має на ньому зчисленну множину точок розриву, то вона є інтегровною на цьому відрізку, згідно з критерієм Лебеґа. ■

Приклад 6.101 . З'ясувати, чи буде інтегровною на довільному відрізку $[a,b]$ функція Рімана

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, x\neq\dfrac{m}{n},\\ \dfrac{1}{n}, x=\dfrac{m}{n},\end{cases}$$

де m та n $(n\geq 1)$ – взаємно прості цілі числа.

Розв'язання. *І спосіб.* Скористаємось критерієм Дарбу інтегровності функції на $[a,b]$. Для того, щоб обмежена на $[a,b]$ функція була інтегровною на цьому відрізку, необхідно та достатньо, щоб $\forall\varepsilon>0$ знайшлося таке розбиття $T_{[a,b]}$ відрізка $[a,b]$, для якого $\overline{S}-\underline{S}<\varepsilon$, де $\overline{S}$, $\underline{S}$ – відповідно верхня та нижня інтегральні суми Дарбу.

Задамо довільне $\varepsilon>0$. Тоді функція Рімана $\varphi(x)$ задовольняє нерівність

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)}<\varphi(x)\le 1$$

лише в деякій скінченній кількості K точок. Дійсно, всі раціональні точки з $[a,b]$, тобто точки виду $\frac{m}{n}$ утворюють зчисленну множину. Розташуємо їх у такому порядку: спочатку точки виду $\frac{m}{1}$, потім точки виду $\frac{m}{2}$, $\frac{m}{3}$ тощо. Відповідні значення функції Рімана в цих точках дорівнюють 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$,…, тобто вони зменшуються з переходом до кожної наступної групи точок. При цьому маємо скінченну кількість точок кожного вигляду, які лежать на заданому відрізку $[a;b]$. Таким чином, у число вказаних K точок попадають такі, для яких $\frac{1}{n}>\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, звідки $n<\frac{2(b-a)}{\varepsilon}$. Маємо скінченну кількість K таких точок.

Покриємо ці точки скінченною системою відрізків, які попарно не перетинаються та мають загальну суму довжин, меншу, ніж $\frac{\varepsilon}{2}$. Довжини цих відрізків позначимо $\Delta x_i'$. Отримали деяке розбиття відрізка $[a,b]$. На відрізках, що мають довжини $\Delta x_i'$ коливання функції ω_i' не перевищують 1, оскільки $\forall x\in[a,b]\ 0\le\varphi(x)\le 1$. При розбитті ми отримали також деяку скінченну кількість інших сегментів. Позначимо їх довжини $\Delta x_i''$. Коливання ω_i'' функції $\varphi(x)$ на цих відрізках не перевищують $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Тому для отриманого розбиття відрізка $[a,b]$ виконується така оцінка:

$$\overline{S}-\underline{S}=\sum\omega_i\Delta x_i=\sum\omega_i'\Delta x_i'+\sum\omega_i''\Delta x_i''<$$

$$<\sum\Delta x_i'+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum\Delta x_i''<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)}=\varepsilon.$$

Таким чином, за заданим $\varepsilon>0$ знайдено таке розбиття відрізка $[a,b]$, для якого $\overline{S}-\underline{S}<\varepsilon$, тобто функція Рімана $\varphi(x)$ є інтегровною на будь-якому відрізку $[a,b]$.

II спосіб. Скористаємось критерієм Лебеґа інтегровності функції на $[a,b]$. Відомо [**2**, с. 143], що функція Рімана розривна в кожній раціональній і неперервна в кожній ірраціональній точці. Отже, множина A її точок розриву на відрізку $[a,b]$ – це множина раціональних чисел цього відрізка. Множина A – зчисленна, тому її міра Лебеґа дорівнює нулю (див. *приклад 5.17* пункт 3). Крім того, функція Рімана є обмеженою: $\forall x \in [a,b]\ 0 \le \varphi(x) \le 1$. Отже, за критерієм Лебеґа, вона є інтегровною. ■

Приклад 6.102 . Користуючись означенням, обчислити такий інтеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$.

Розв'язання. Функція $f(x)=x^{-1}$ є неперервною на $[1;2]$, тому вона є інтегровною на цьому відрізку. Це означає, що значення границі інтегральних сум при діаметрі розбиття, що прямує до нуля, не залежить від способу розбиття й вибору проміжних точок. Оберемо розбиття й проміжні точки так, щоб значення суми обчислювалося нескладно.

Поділимо відрізок інтегрування $[1;2]$ на n частин так, щоб точки поділу $x_i,\ i=1,...,n$, утворювали геометричну прогресію:

$$x_0=1,\ x_1=q,\ x_2=q^2,...,\ x_n=q^n=2.$$

З останньої рівності знаходимо $q=\sqrt[n]{2}$. Довжина i-го елементарного відрізка дорівнює

$$\Delta x_i=q^{i+1}-q^i=q^i(q-1).$$

Звідси випливає, що $\max\limits_i \Delta x_i=q^{n-1}(q-1)\to 0$ при $n\to\infty$, тобто при $q\to 1$. Отже, діаметр обраного розбиття прямує до нуля. Приймемо за точки ξ_i праві кінці елементарних відрізків, тобто $\xi_i=x_{i+1}=q^{i+1}$. Запишемо відповідну інтегральну суму:

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\xi_i}\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{q^{i+1}}q^i(q-1)=\frac{n}{q}(q-1)=\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right).$$

Знайдемо границю (див. додаток А) цієї інтегральної суми при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)}{2^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=1\cdot\ln 2=\ln 2.$$

Таким чином, $\int\limits_1^2\frac{dx}{x}=\ln 2$. ■

Приклад 6.103 . Користуючись означенням, обчислити такий інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$.

Розв'язання. Функція $f(x)=\sin x$ є неперервною на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, тому вона є інтегровною на цьому відрізку. Це робить можливим (так само, як і в попередньому прикладі) обирати розбиття й проміжні точки зручним для нас чином.

Поділимо відрізок $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ на n рівних частин точками $x_k=\frac{k\pi}{2n}$, $k=0,1,2,...,n$. Довжина кожного з отриманих елементарних відрізків дорівнює $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k=\frac{\pi}{2n}$, $k=0,1,...,n-1$. За точки ξ_k виберемо ліві межі кожного елементарного відрізка. Обчислимо значення підінтегральної функції в точках ξ_k:

$$f(\xi_k)=f(x_k)=\sin\frac{k\pi}{2n},\ k=0,1,...,n-1.$$

Складемо інтегральну суму:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k=\frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}.$$

Використовуючи тотожність

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}},$$

отримаємо: $S_n=\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}$. Звідки

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=1\cdot1=1.\ \blacksquare$$

Приклад 6.104. Користуючись означенням, обчислити $\int_{-1}^{1}\sqrt[3]{x^2}\sin x dx$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\sin x$ є неперервною на $[-1;1]$, то вона інтегровна на цьому відрізку (*теорема 5.9*) і можна знайти границю послідовності інтегральних сум за будь-якого вибору розбиттів відрізка інтегрування та точок ξ_i на цих відрізках. Розіб'ємо відрізок $[-1;1]$ точками

$$x_i = -1 + \frac{i}{n},\ 0 \le i \le 2n,\ n \in \mathbb{N}$$

на $2n$ елементарних відрізків. Виберемо точки $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, що є серединами відрізків $\left[x_{i-1};\, x_i\right],\ i = 1, 2, ..., 2n$. Отримаємо інтегральну суму:

$$S_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} f\left(\xi_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right),\ \xi_k = -\xi_{n-k+1},\ k = 1, 2, ..., n.$$

Тут $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$. Оскільки функція $f\left(x\right)$ є непарною, то

$$S_{2n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\xi_k\right) + f\left(\xi_{n-k+1}\right)\right) = 0.$$

Умова $\max\limits_i (x_i - x_{i-1}) \to 0$ тут еквівалентна умові $n \to \infty$. Таким чином, отримуємо:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^2}\sin x dx = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = 0.\ \blacksquare$$

Приклад 6.105. Виходячи з геометричного змісту визначеного інтеграла, знайти $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}dx$.

Розв'язання. При $0 \le x \le 4$ крива $y = \sqrt{16 - x^2}$ – це дуга кола, що знаходиться в першій координатній чверті. Криволінійна трапеція, обмежена лініями $y = \sqrt{16 - x^2},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 4$, – це четверта частина круга $x^2 + y^2 \le 16$. Його площа дорівнює 16π. Таким чином, враховуючи геометричний зміст визначеного інтеграла, отримаємо:

$$\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}dx = \frac{16\pi}{4} = 4\pi.\ \blacksquare$$

2. Формула Ньютона-Лейбніца

Для обчислення визначеного інтеграла основною є формула Ньютона-Лейбніца: якщо функція $f\left(x\right)$ є неперервною на $\left[a;b\right]$, а $F\left(x\right)$ є первісною для $f\left(x\right)$ на цьому відрізку, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Приклад 6.106. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx$.

Розв'язання. Використаємо формулу Ньютона-Лейбніца. Однією з первісних функції $f\left(x\right) = \sin 4x$ є $F\left(x\right) = -\frac{1}{4}\cos 4x$. Отримуємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx = -\frac{1}{4}\cos 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}\left(\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \cos(4\cdot 0)\right) = -\frac{1}{4}(1-1) = 0 .■$$

Приклад 6.107. Обчислити інтеграл $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

Розв'язання. За формулою Ньютона-Лейбніца маємо:

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln(\ln x)\Big|_e^{e^2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 .■$$

Приклад 6.108. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}$.

Розв'язання.

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{d(x^3)}{1+(x^3)^2} = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}(\mathrm{x}^3)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{12} .■$$

Приклад 6.109. Обчислити інтеграл $\int_0^8 f(x)dx$, якщо

$$f(x) = \begin{cases} x^2, 0 \le x < 1, \\ \sqrt[3]{x}, 1 \le x \le 8. \end{cases}$$

Розв'язання. Функція неперервна на відрізку [0,8] (доведіть це!), а тому інтегровна на цьому відрізку. Використаємо властивість адитивності інтеграла (властивість 5°), згідно з якою

$$\int_0^8 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^8 f(x)dx .$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} x^2 = 1 = f(1)$, то можна вважати, що функція $f(x)$ на відрізку [0,1] задається як x^2.

Для заданої функції $f(x)$ маємо:

$$\int_0^8 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^8 \sqrt[3]{x}dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_1^8 = \frac{1}{3} + \frac{3}{4}(16-1) = \frac{139}{12} .■$$

Приклад 6.110. Обчислити інтеграл $\int_0^4 |2-x|dx$.

Розв'язання. Оскільки $|2-x| = \begin{cases} 2-x, x \le 2, \\ x-2, x > 2, \end{cases}$ то (аналогічно до прикладу 6.109) отримаємо:

$$\int_0^4 |2-x|dx = \int_0^2 (2-x)dx + \int_2^4 (x-2)dx = -\frac{(2-x)^2}{2}\Big|_0^2 + \frac{(x-2)^2}{2}\Big|_2^4 = 2+2 = 4 .■$$

Приклад 6.111. Обчислити інтеграл $\int\limits_a^b \frac{|x|}{x}dx$, де $a<b$.

Розв'язання.

1) Якщо $0\le a\le b$, то $\frac{|x|}{x}=1$, тому $\int\limits_a^b \frac{|x|}{x}dx=\int\limits_a^b dx=b-a$.

2) Якщо $a<b\le 0$, то $\frac{|x|}{x}=-1$ і $\int\limits_a^b \frac{|x|}{x}dx=-\int\limits_a^b dx=-b+a$.

3) Для $a<0<b$ інтеграл розіб'ємо на два інтеграли:

$$\int\limits_a^b \frac{|x|}{x}dx=-\int\limits_a^0 dx+\int\limits_0^b dx=a+b.$$

Усі ці три випадки можна об'єднати однією формулою:

$$\int\limits_a^b \frac{|x|}{x}dx=|b|-|a|.$$

Приклад 6.112 . Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx$.

Розв'язання. Оскільки

$$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}=\sqrt{\frac{2\cos^2 x}{2}}=|\cos x|=\begin{cases}\cos x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2},\\ -\cos x,\ \frac{\pi}{2}\le x\le\pi.\end{cases}$$

то для заданого інтеграла маємо:

$$\int\limits_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos xdx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1+1=2. \ ■$$

Приклад 6.113 . Обчислити інтеграл $I=\int\limits_0^{50\pi}|\sin x|dx$.

Розв'язання. Функція $f(x)=|\sin x|$ є періодичною з періодом π, тому $\int\limits_0^{50\pi}|\sin x|dx=50\int\limits_0^{\pi}|\sin x|dx$. Оскільки $\sin x>0$ на $[0;\pi]$, то

$$I=50\int\limits_0^{\pi}|\sin x|dx=50\int\limits_0^{\pi}\sin xdx=-50\cos x\Big|_0^{\pi}=50+50=100. \ ■$$

Приклад 6.114. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{4\pi}x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)$ на відрізку інтегрування має 3 точки розриву першого роду $x_1=\pi, x_2=2\pi, x_3=3\pi$, тому для обчислення цього інтеграла його потрібно подати у вигляді суми інтегралів:

$$\int_0^{4\pi} x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)dx=\int_0^{\pi} x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)dx+\int_{\pi}^{2\pi} x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)dx+$$

$$+\int_{2\pi}^{3\pi} x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)dx+\int_{3\pi}^{4\pi} x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)dx.$$

Функція $\operatorname{sgn}(\sin x)$ дорівнює 1 на проміжках $(0;\pi)$, $(2\pi;3\pi)$, а на проміжках $(\pi;2\pi)$ та $(3\pi;4\pi)$ вона дорівнює -1. Підставляючи значення підінтегральної функції в останню рівність, отримуємо:

$$\int_0^{4\pi} x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)dx=\int_0^{\pi} xdx-\int_{\pi}^{2\pi} xdx+\int_{2\pi}^{3\pi} xdx-\int_{3\pi}^{4\pi} xdx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\pi}-\frac{x^2}{2}\Bigg|_{\pi}^{2\pi}+\frac{x^2}{2}\Bigg|_{2\pi}^{3\pi}-\frac{x^2}{2}\Bigg|_{3\pi}^{4\pi}=-2\pi^2.\ \blacksquare$$

При застосуванні формули Ньютона-Лейбніца для обчислення визначених інтегралів слід звертати увагу на правомірність її використання, тобто виконання умов, за яких згадана формула є справедливою. Цю формулу застосовують для обчислення визначеного інтеграла від неперервної функції лише тоді, коли рівність $F'(x)=f(x)$ виконується на всьому відрізку $[a;b]$, причому функція $F(x)$ має бути первісною функції $f(x)$, тобто диференційовною, і, зокрема, неперервною на всьому відрізку $[a;b]$. Приймаючи за первісну функцію, що має розриви на відрізку інтегрування, можна отримати невірний результат.

Приклад 6.115 . Знайти помилку, допущену при наступному обчисленні інтеграла:

$$I=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{\cos^2 x+3\sin^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{d(\operatorname{tg}x)}{1+3\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}x\right)\Big|_0^{\pi}=0.$$

Розв'язання. Функція $F(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}x\right)$ не є первісною функції $f(x)=\dfrac{1}{1+2\sin^2 x}$ на відрізку $[0;\pi]$, оскільки вона має розрив у точці $x=\frac{\pi}{2}\in[0;\pi]$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}F(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}x\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(+\infty)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}F(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Знайдемо вірний розв’язок. Для цього розглянемо функцію $F\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcctg}\left(\frac{\operatorname{ctg}x}{\sqrt{3}}\right)$, задану на інтервалі $\left(0;\pi\right)$. Довизначимо її в точках $x=0$ і $x=\pi$:

$$F(0)=\lim_{x\to 0+0}F(x)=0,\quad F(\pi)=\lim_{x\to\pi-0}F(x)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Знайдемо похідну функції $F(x)$. При $x\in\left(0;\pi\right)$ маємо

$$F'\left(x\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\frac{\operatorname{ctg}^2x}{3}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sin^2x}\right)=\frac{1}{1+2\sin^2x}=f(x);$$

в точках $x=0$ і $x=\pi$ –

$$F'\left(0\right)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{F(\Delta x)-F(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcctg}\left(\frac{\operatorname{ctg}\Delta x}{\sqrt{3}}\right)-0}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{ctg}\Delta x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\Delta x\right)}{\Delta x}=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\text{при } x\to 0\\ \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\Delta x\right)\sim\sqrt{3}\operatorname{tg}\Delta x\end{matrix}\right\|=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}\operatorname{tg}\Delta x}{\Delta x}=1;$$

$$F'\left(\pi\right)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{F(\pi+\Delta x)-F(\pi)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcctg}\left(\frac{\operatorname{ctg}\left(\pi+\Delta x\right)}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}{\Delta x}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\pi-\operatorname{arcctg}\left(\frac{\operatorname{ctg}\left(\Delta x\right)}{\sqrt{3}}\right)}{\Delta x}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\operatorname{ctg}\left(\Delta x\right)}{\sqrt{3}}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\Delta x\right)}{\Delta x}=1=f(\pi).$$

Отже, функція $F(x)$ неперервна й диференційовна на відрізку інтегрування $\left[0;\pi\right]$ і $F'(x)=f(x)\;\forall x\in[0;\pi]$, тому є первісною функції $f(x)$ на відрізку $\left[0;\pi\right]$.

Таким чином, вірний розв’язок має такий вигляд:

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{\cos^2x+3\sin^2x}=-\int_0^{\pi}\frac{d\left(\operatorname{ctg}x\right)}{\operatorname{ctg}^2x+3}=F(\pi)-F(0)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.\quad\blacksquare$$

Приклад 6.116 . Дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x = a$ утворює з віссю Ox кут $\frac{\pi}{3}$, а в точці з абсцисою $x = b$ – кут $\frac{\pi}{4}$. Обчислити інтеграли $I_1 = \int\limits_a^b f''(x)dx$ та $I_2 = \int\limits_a^b f'(x) \cdot f''(x)dx$.

Розв'язання. З геометричного змісту похідної випливає, що $f'(a) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3},\ f'(b) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. Тому

$$\int\limits_a^b f''(x)dx = \int\limits_a^b d\left(f'(x)\right) = f'(b) - f'(a) = \sqrt{3} - 1,$$

$$\int\limits_a^b f'(x)f''(x)dx = \int\limits_a^b f'(x)d\left(f'(x)\right) = \left.\frac{\left[f'(x)\right]^2}{2}\right|_a^b =$$

$$= \frac{1}{2}\left[f'^2(b) - f'^2(a)\right] = \frac{3-1}{2} = 1. \blacksquare$$

Приклад 6.117 . Розв'язати рівняння

$$\int\limits_1^3 \sqrt{x - |x-1|}dx = \lg(x-1).$$

Розв'язання. Оскільки область допустимих значень цього рівняння визначається нерівністю $x > 1$, то $|x-1| = x - 1$, маємо, що

$$\int\limits_1^3 \sqrt{x - |x-1|}dx = \int\limits_1^3 dx = 3 - 1 = 2,$$

$$2 = \lg(x-1) \quad \Rightarrow \quad x - 1 = 100 \quad \Rightarrow \quad x = 101. \blacksquare$$

Розглянемо приклади, пов'язані з диференціюванням інтеграла зі змінними межами інтегрування. Із властивостей таких інтегралів (див. розділ 1, §2, п.8) випливають рівності, що відображають правила диференціювання інтегралів зі змінними межами інтегрування:

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = f(x), \quad \frac{d}{dx}\int\limits_x^a f(t)dt = -f(x).$$

На основі цих формул та правила диференціювання складеної функції отримаємо рівність:

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = f\left(\psi(x)\right)\cdot\psi'(x) - f\left(\varphi(x)\right)\cdot\varphi'(x).$$

Приклад 6.118 . Знайти похідні функцій:

а) $F(x) = \int\limits_1^x \ln t dt \quad (x > 0)$; б) $F(x) = \int\limits_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos\left(t^2\right)dt \quad (x > 0)$.

Розв’язання. Маємо функції, що являють собою інтеграли зі змінними межами інтегрування. Використовуючи наведені вище правила диференціювання, отримуємо:

а) $F'(x)=\dfrac{d}{dx}\int\limits_1^x \ln t\,dt=\ln x$;

б) $F'(x)=\dfrac{d}{dx}\int\limits_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos\left(t^2\right)dt=\cos\left(\sqrt{x}\right)^2\cdot\left(\sqrt{x}\right)'-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)'=$

$$=\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}+\frac{\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^2}.\ \blacksquare$$

Приклад 6.119 . Знайти точки екстремуму функції $F(x)=\int\limits_0^{2x}\dfrac{\sin t}{t}dt$ при $x>0$.

Розв’язання. Знайдемо похідну функції $F(x)$. Отримаємо:

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_0^{2x}\frac{\sin t}{t}dt=2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{\sin 2x}{x}.$$

Знайдемо критичні точки функції $F(x)$:

$$\frac{\sin 2x}{x}=0\Rightarrow\sin 2x=0\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{N}.$$

Обчислимо другу похідну в критичних точках:

$$F''(x)=\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)'=\frac{2\cos 2x\cdot x-\sin 2x}{x^2},F''\left(\frac{k\pi}{2}\right)=\frac{2\cos k\pi-\sin k\pi}{k^2\pi^2}=\frac{2\cdot(-1)^k}{k^2\pi^2}.$$

Оскільки в критичних точках друга похідна $F''(x)\neq 0$, то ці точки є точкам екстремуму, а саме – точками максимуму, якщо k непарне, точками мінімуму при парних значеннях k. ■

Приклад 6.120 . Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^x \cos t^2 dt}{x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} t}\,dt}{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin t}\,dt}$.

Розв’язання.

1) При $x\to 0$ маємо невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

2) За властивістю 2 інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування (див. розділ 1, §2, п.8), випливає диференційовність функцій чисельника й знаменника в правому околі точки 0.

3) Для прикладу **а)**:

$$\frac{d}{dx}(x)=1\neq 0 \quad \forall x\in(0,\delta) \quad (\delta>0);$$

для прикладу **б)**:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin t}\,dt\right)=\sqrt{\sin(\operatorname{tg} x)}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\neq 0 \quad \forall x\in(0,\delta) \quad \left(0<\delta<\frac{\pi}{2}\right).$$

Отже, для знаходження границі можна застосувати перше правило Лопіталя у випадку існування границі відношення похідних. Спочатку при застосуванні правила Лопіталя поставимо знак «?» над знаком рівності. Потім, якщо границя відношення похідних буде існувати, то знак «?» закреслимо.

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}=[\text{правило Лопіталя}]\overset{?}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \cos t^2 dt\right)}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tgt}}dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin t}dt}=[\text{правило Лопіталя}]\overset{?}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(\int_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tgt}}dt\right)}{\frac{d}{dx}\left(\int_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin t}dt\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)}\cdot\cos x}{\sqrt{\sin(\operatorname{tg} x)}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin(\operatorname{tg} x)}}\cdot\lim_{x\to 0}\cos^3 x=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin(\operatorname{tg} x)}}.$$

Останню границю знаходимо, використавши еквівалентність нескінченно малих (див. додаток А) $\operatorname{tg}\alpha$ та $\sin\alpha$ при $\alpha\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin(\operatorname{tg} x)}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}}=1. \ \blacksquare$$

У наступних прикладах розглянемо застосування визначених інтегралів до обчислення границь.

Приклад 6.121 . Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+...+e^{\frac{n}{n}}\right)$.

Розв'язання. Розглянемо вираз, що знаходиться під знаком границі. Доданки $e^{\frac{1}{n}}, e^{\frac{2}{n}},...,e^{\frac{n}{n}}$ є значеннями функції $f(x)=e^x$ у точках $x_1=\frac{1}{n}, x_2=\frac{2}{n},..., x_n=\frac{n}{n}=1$. Ці точки розбивають відрізок $[0;1]$ на n рівних відрізків: $[0;x_1],[x_1;x_2],...,[x_{n\text{-}1};x_n]$ довжиною $\Delta x=\frac{1}{n}$.

Вираз, що знаходиться під знаком границі, є інтегральною сумою для функції $f(x)=e^x$ на $[0;1]$. Функція $f(x)=e^x$ є неперервною на $[0;1]$, і тому інтегровною на цьому відрізку (*теорема 5.9*). Звідси випливає, що границя інтегральних сум не залежить від способу розбиття і вибору точок $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ $(i=1, 2,..., n)$, тому ми можемо вибрати $\xi_i = x_i$, $i=1, 2,..., n$. Таким чином, шукана границя є границею інтегральної суми для функції $f(x)=e^x$ на $[0;1]$, тобто дорівнює визначеному інтегралу від цієї функції по даному відрізку. Цей інтеграл можна обчислити за допомогою формули Ньютона – Лейбніца:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+...+e^{\frac{n}{n}}\right)=\int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e-1. \blacksquare$$

Приклад 6.122 . Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Розв'язання. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=A$. Тоді знаходимо:

$$\ln A=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}(\ln 1+\ln 2+...+\ln n)-\ln n\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+...+\ln\frac{n}{n}\right].$$

Вираз під знаком границі в правій частині останньої рівності є інтегральною сумою $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ функції $f(x)=\ln x$ на $[0;1]$, де $\xi_i=\frac{1}{i}$, $i=1, 2,..., n$, $\Delta x_i=\Delta x=\frac{1}{n}$. З тієї ж причини, що й у попередньому прикладі, значення границі цих інтегральних сум не залежить від способу розбиття й вибору проміжних точок, тому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+...+\ln\frac{n}{n}\right]=\int_0^1 \ln t dt=(t\ln t-t)\Big|_0^1=-1.$$

Таким чином, $\ln A=-1$, звідки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{-1}$. ■

Приклад 6.123 . Обчислити границю

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+...+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}\right)$.

Розв'язання. а) Запишемо суму, що знаходиться під знаком границі, у вигляді:

$$S_n=\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right).$$

Маємо інтегральну суму функції $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ на відрізку $[0,1]$. Тому, аналогічно до попередніх двох прикладів, границю можна обчислити як визначений інтеграл:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

б) Запишемо суму, що знаходиться під знаком границі, у вигляді:

$$S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}.$$

Маємо інтегральну суму функції $f(x)=\frac{1}{1+x}$ на відрізку $[0,1]$. Тому границю можна обчислити як визначений інтеграл:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln|1+x|\Big|_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2.\ \blacksquare$$

3. Інтегральні нерівності. Теорема про середнє значення

Приклад 6.124. Оцінити інтеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}dx$.

Розв'язання. Для отримання такої оцінки знайдемо мінімальне m та максимальне M значення неперервної функції $f(x)=\sqrt{1+\cos^2 x}$ на відрізку інтегрування $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$. Функція $\cos x$ на цьому відрізку спадає та неперервно змінюється від $\frac{\sqrt{2}}{2}$ до 0. Тому для функції $f(x)=\sqrt{1+\cos^2 x}$ маємо: $m=1$, а $M=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$. Довжина відрізка інтегрування $b-a=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$. З оціночного співвідношення (властивість 8° визначеного інтеграла)

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

випливає оцінка даного інтеграла:

$$\frac{\pi}{4} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}dx \le \frac{\pi\sqrt{6}}{8}. \blacksquare$$

Приклад 6.125. Оцінити інтеграл $I = \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x}}dx$.

Розв’язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{x^6}{\sqrt{1+x}}$ є неперервною, а тому інтегровною на $[0;1]$. Знайдемо мінімальне m та максимальне M значення цієї функції на відрізку інтегрування.

Оскільки

$$f'(x) = \frac{6x^5\sqrt{1+x} - \dfrac{x^6}{2\sqrt{1+x}}}{1+x} = \frac{x^5(11x+12)}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} \ge 0, x \in [0;1],$$

то підінтегральна функція зростає на $[0;1]$, тому

$$f_{\min} = f(0) = 0,\ f_{\max} = f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}, b-a=1.$$

Звідси знаходимо оцінку заданого інтеграла:

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x}}dx \le \frac{1}{\sqrt{2}}. \blacksquare$$

Приклад 6.126. Користуючись інтегральною нерівністю Коші-Буняковського, оцінити інтеграл $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx$.

Розв’язання. Для інтегровних на $[a;b]$ функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ виконується нерівність Коші-Буняковського [1, с. 195]:

$$\left(\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b \varphi^2(x)dx.$$

Нехай $f(x)=1, \varphi(x)=\sqrt{1+x^4}$. Тоді, за нерівністю Коші-Буняковського, отримаємо:

$$\left(\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx\right)^2 \le \int_0^1 dx \cdot \int_0^1 (1+x^4)dx = \frac{6}{5}.$$

Отже, $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx \le \sqrt{\frac{6}{5}}$. ■

Приклад 6.127. Знайти середнє значення функції

а) $f(x) = 3x^2+2x+5$ на відрізку $[1;3]$;

---

[1] Д’яченко Н.М., Красікова І.В., Панасенко Є.В. Математичний аналіз – ІІ: Числові та функціональні ряди: навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра освітньо-професійних програм «Математика», «Середня освіта (Математика)». Запоріжжя: ЗНУ, 2018. 244 с.

б) $f(x) = \sin^5 x \cdot \cos x$ на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.

Розв'язання. Середнє значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ знаходимо за формулою (див. *означення 5.16*):

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

а) $\overline{f} = \frac{1}{3-1}\int_1^3 (3x^2 + 2x + 5)dx = \frac{1}{2}(x^3 + x^2 + 5x)\Big|_1^3 =$

$$= \frac{1}{2}(27 + 9 + 15 - 1 - 1 - 5) = 22.$$

б) $\overline{f} = \frac{1}{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^5 x \cos x dx = \frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^5 x d(\sin x) = \frac{6}{\pi}\frac{\sin^6 x}{6}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{64\pi}$. ■

Приклад 6.128 . Довести рівність $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx = 0 \quad (p > 0)$.

Доведення. В теоремі про середнє оберемо $a = n, b = n + p$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, тоді $g(x) > 0$, на $[n, n+p]$, $-1 \le \inf\limits_{[a,b]} f(x)$; $\sup\limits_{[a,b]} f(x) \le 1$, функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні, а тому інтегровні (*теорема 5.9*) на проміжку інтегрування. Отже, матиме місце оцінка

$$-1\cdot\int_n^{n+p}\frac{1}{x}dx \le \int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx \le 1\cdot\int_n^{n+p}\frac{1}{x}dx.$$

Формула Ньютона-Лейбніца дозволяє зробити обчислення

$$\int_n^{n+p}\frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_n^{n+p} = \ln\frac{n+p}{n}.$$

Тому за принипом двостороннього обмеження (про «двох поліціянтів») [**2**, с. 102] отримаємо при $n \to \infty$

$$\begin{array}{ccccc} -\ln\frac{n+p}{n} & \le & \int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx & \le & \ln\frac{n+p}{n} \\ \downarrow & & \Downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Що й треба було довести. ■

4. Інтегрування частинами та заміна змінної у визначеному інтегралі

Будемо застосовувати формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі (*теорема 5.16*). Якщо функції u та v є неперервно диференційовними на $\left[a;b\right]$, то виконується рівність (формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі):

$$\int\limits_a^b u\,dv = \left(u\cdot v\right)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$$

Також пригадаємо формулу заміни змінної (підстановки) під знаком визначеного інтеграла (*теорема 5.15*):

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - \text{неперервна на}\,[a,b]; \\ x=\varphi(t) - \text{неперервно диференційовна на}\,[\alpha,\beta]; \\ \varphi(\alpha)=a,\, \varphi(\beta)=b, \\ \varphi[\alpha,\beta]=[a,b]\ (\text{образ відрізка}\ [\alpha,\beta]\ \text{збігається з відрізком}\ [a,b]); \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

При заміні змінної у визначеному інтегралі, на відміну від невизначеного інтеграла, не потрібно повертатися до початкової змінної, оскільки після перетворення ми обчислюємо інтеграл за відрізком інтегрування, на якому змінюється новий аргумент.

Використовуючи заміну змінної, можна отримати такі правила, що дозволяють у багатьох випадках спростити обчислення визначених інтегралів:

1) Якщо $f\left(x\right)$ – парна та інтегровна на проміжку $[-a,a]$ функція, то (див. розділ 1, §2, п. 9)

$$\int\limits_{-a}^{a} f\left(x\right)dx = 2\int\limits_0^a f\left(x\right)dx\,.$$

2) Якщо $f\left(x\right)$ – непарна функція, інтегровна на $[-a,a]$, то (див. розділ 1, §2, п. 9)

$$\int\limits_{-a}^{a} f\left(x\right)dx = 0\,.$$

3) Якщо $f\left(x\right)$ – інтегровна на $\left[0;T\right]$ періодична функція з періодом T, то $f\left(x\right)$ є інтегровною на довільному відрізку $\left[a;b\right]$, причому

$$\int\limits_a^{a+T} f\left(x\right)dx = \int\limits_0^T f\left(x\right)dx$$

(доведіть самостійно ✍!).

Приклад 6.129. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^\pi x\sin x dx$.

Розв'язання. Застосуємо формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі:

$$\int_0^{\pi} x\sin x dx = \left\| \begin{matrix} u = x, dv = \sin x dx, \\ du = dx, v = -\cos x \end{matrix} \right\| = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi. \blacksquare$$

Приклад 6.130. Обчислити інтеграл $\int_1^e \ln x dx$.

Розв'язання. За формулою інтегрування частинами маємо:

$$\int_1^e \ln x dx = \left\| \begin{matrix} u = \ln x, dv = dx, \\ du = \dfrac{dx}{x}, v = x \end{matrix} \right\| = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - x\Big|_1^e = 1. \blacksquare$$

Приклад 6.131. Обчислити інтеграл $\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Розв'язання. Виконаємо заміну змінної $x = a\sin t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Оскільки $dx = a\cos t dt$, а при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ виконується

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\cos t,$$

то

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2} dx = a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t dt = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt =$$

$$= \frac{a^4}{8}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{16}. \blacksquare$$

Приклад 6.132. Обчислити інтеграл $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x} dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{x\sin x}{\cos^2 x}$ є парною, тому на симетричному відносно $x = 0$ відрізку інтегрування $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ маємо:

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x} dx.$$

Інтегруємо частинами, приймаючи $u = x, dv = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$. Тоді $du = dx, v = \frac{1}{\cos x}$.

Отримуємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx = \left.\frac{x}{\cos x}\right|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \frac{2\pi}{3} - \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right).$$

Тут для обчислення інтеграла $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}$ було використано заміну $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \left\| \begin{matrix} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \\ x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2dt}{1-t^2} = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\Bigg\|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right).$$

Таким чином, маємо:

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx = \frac{4\pi}{3} - 2\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right). \blacksquare$$

Приклад 6.133. Обчислити інтеграл $\int_{-1}^{1} \frac{x^4 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

Розв’язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{x^4 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}$ є непарною, її інтегрування здійснюється за симетричними відносно $x = 0$ відрізком, тому цей інтеграл дорівнює 0. ■

Приклад 6.134 . Обчислити інтеграл $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

Розв’язання. Використаємо підстановку $t = \sqrt{e^x+1}$. Тоді $e^x+1 = t^2, x = \ln\left(t^2-1\right), dx = \frac{2t\,dt}{t^2-1}$. Знайдемо межі інтегрування для змінної t.

При $x = \ln 3$ отримуємо значення $t = \sqrt{e^x+1} = \sqrt{e^{\ln 3}+1} = \sqrt{3+1} = 2$, при $x = \ln 8$ – значення $t = \sqrt{e^{\ln 8}+1} = \sqrt{8+1} = 3$. Таким чином,

$$\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int_2^3 \frac{2t\,dt}{t\left(t^2-1\right)} = 2\int_2^3 \frac{dt}{t^2-1} = 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg\|_2^3 = \ln\frac{3}{2}. \blacksquare$$

Приклад 6.135. Обчислити інтеграл $I = \int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{x}dx$.

Розв’язання. Застосуємо підстановку $t = \sqrt{x}$.Тоді $x = t^2, dx = 2tdt$. Нові межі інтегрування дорівнюють $t = 0$ при $x = 0$, $t = \pi$ при $x = \pi^2$. Отримаємо

$I=2\int\limits_0^{\pi}t\cos tdt$. Для обчислення цього інтеграла застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$I=2\int\limits_0^{\pi}t\cos tdt=\left\|\begin{matrix}u=t,\,dv=\cos tdt,\\ du=dt,\,v=\sin t.\end{matrix}\right\|=2t\sin t\Big|_0^{\pi}-2\int\limits_0^{\pi}\sin tdt=0+2\cos t\Big|_0^{\pi}=-4\,.\blacksquare$$

Приклад 6.136. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{dx}{(x-2)^2\sqrt{x^2-10x+13}}$.

Розв'язання. Виконаємо підстановку $z=\dfrac{1}{x-2}$. Тоді отримаємо $dz=-\dfrac{dx}{(x-2)^2}$. При $x=-1$ маємо $z=-\dfrac{1}{3}$, а при $x=1$ маємо $z=-1$. Підінтегральний вираз набуває вигляду:

$$\frac{dx}{(x-2)^2\sqrt{x^2-10x+13}}=-\frac{dz}{\sqrt{\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{6}{z}-3}}=\frac{-|z|dz}{\sqrt{1-6z-3z^2}}.$$

Оскільки на відрізку інтегрування $x<2$, то $z<0$ і $|z|=-z$. Інтеграл I набуває вигляду:

$$I=\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{-1}\frac{zdz}{\sqrt{1-6z-3z^2}}=-\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{3}}\frac{zdz}{\sqrt{1-6z-3z^2}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{3}}\frac{(z+1)dz}{\sqrt{\dfrac{4}{3}-(z+1)^2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{3}}\frac{dz}{\sqrt{\dfrac{4}{3}-(z+1)^2}}=I_1+I_2\,.$$

Обчислимо кожен інтеграл окремо:

$$I_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{3}}\frac{(z+1)dz}{\sqrt{\dfrac{4}{3}-(z+1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{3}-2z-z^2}\Bigg|_{-1}^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3},$$

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{3}}\frac{dz}{\sqrt{\dfrac{4}{3}-(z+1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{(z+1)\sqrt{3}}{2}\Bigg|_{-1}^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Підставивши у вираз для I, остаточно отримуємо

$$I=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\,.\ \blacksquare$$

Приклад 6.137 . Обчислити інтеграл $I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}$.

Розв'язання. Оскільки під знаком інтеграла знаходиться раціональна функція від $\cos x$, то для знаходження її первісної звичайно застосовують універсальну тригонометричну підстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Якщо формально виконати цю підстановку в заданому визначеному інтегралі, то отримаємо нові межі інтегрування: при $x=0$ буде $t=\operatorname{tg}0=0$, а при $x=2\pi$ буде $t=\operatorname{tg}\pi=0$. Отже, верхня та нижня межі інтегрування збігаються та дорівнюють 0, тобто $I=0$. Проте цей інтеграл не може дорівнювати нулю, оскільки це інтеграл від додатної на відрізку інтегрування функції, тому $I>0$. Отримана суперечність пояснюється некоректністю використання в цьому випадку визначеного інтегрування універсальної тригонометричної підстановки, оскільки функція $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не є неперервною на відрізку інтегрування $[0;2\pi]$. У точці $x=\pi\in[0;2\pi]$ вона має розрив другого роду.

Перетворимо інтеграл таким чином, щоб на новому відрізку інтегрування можна було б застосувати універсальну тригонометричну підстановку. Для цього спочатку зробимо заміну змінної $x-\pi=t$. Тоді $x=\pi+t, dx=dt$. Нові межі інтегрування дорівнюють $t=-\pi$ при $x=0$ і $t=\pi$ при $x=2\pi$. Отримаємо

$$I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{3+\cos(\pi+t)}=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{3-\cos t}.$$

Далі, зважаючи на парність функції під інтегралом, одержимо $I=2\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{3-\cos t}$.

Тепер в останньому інтегралі введемо заміну $t-\frac{\pi}{2}=y$. Тоді $dt=dy$. При $t=0$ маємо $y=-\frac{\pi}{2}$, а при $t=\pi$ маємо $y=\frac{\pi}{2}$. Отже,

$$I=2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dy}{3-\cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right)}=2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dy}{3+\sin y}.$$

Нарешті, застосуємо універсальну тригонометричну підстановку $z=\operatorname{tg}\frac{y}{2}$. Оскільки $\sin y=\frac{2z}{1+z^2}$, $\cos y=\frac{1-z^2}{1+z^2}$, $dy=\frac{2dz}{1+z^2}$, а при $y=\pm\frac{\pi}{2}$ маємо $z=\pm1$ відповідно, то

$$I=2\int\limits_{-1}^{1}\frac{2dz}{\left(1+z^2\right)\cdot\left(3+\frac{2z}{1+z^2}\right)}=4\int\limits_{-1}^{1}\frac{dz}{3z^2+2z+3}=\frac{4}{3}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dz}{z^2+\frac{2}{3}z+1}=\frac{4}{3}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dz}{\left(z+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}}=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3z+1}{2\sqrt{2}}\Bigg|_{-1}^{1}=\sqrt{2}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.\ ■$$

Приклад 6.138 . Довести рівність

$$\int_0^{\pi} x\cdot f\left(\sin x\right)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f\left(\sin x\right)dx,$$

де $f(t)-$ неперервна на $[0;1]$. Застосувати отриманий результат для обчислення інтеграла $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Розв'язання. До інтеграла в лівій частині заданої рівності застосуємо підстановку $x=\pi-t$. Тоді маємо $dx=-dt$ і нові межі інтегрування: при $x=0$ маємо $t=\pi$, а при $x=\pi$ маємо $t=0$. Одержимо:

$$I=\int_0^{\pi} x\cdot f\left(\sin x\right)dx=-\int_{\pi}^{0}\left(\pi-t\right)\cdot f\left(\sin\left(\pi-t\right)\right)dt=$$

$$=\int_0^{\pi}\pi\cdot f\left(\sin t\right)dt-\int_0^{\pi}t\cdot f(\sin t)dt=\int_0^{\pi}\pi\cdot f\left(\sin t\right)dt-I\ .$$

Звідси знаходимо:

$$2I=2\int_0^{\pi} x\cdot f\left(\sin x\right)dx=\pi\int_0^{\pi} f\left(\sin x\right)dx,$$

звідки випливає рівність, яку потрібно довести.

Використаємо доведену рівність для обчислення інтеграла $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$:

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}x\cdot\frac{\sin x}{2-\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{2-\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin xdx}{1+\cos^2 x}=$$

$$=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{d\left(\cos x\right)}{1+\cos^2 x}=-\frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}\left(\cos x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}.\ ■$$

Приклад 6.139. Довести, що $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos x\right)dx$, де $f(t)-$ неперервна на $[0;1]$.

Розв'язання. У інтегралі, що знаходиться в правій частині заданої рівності, виконаємо підстановку $x=\frac{\pi}{2}-t,\quad dx=-dt$. Нові межі інтегрування: при $x=0$ буде $t=\frac{\pi}{2}$, а при $x=\frac{\pi}{2}$ буде $t=0$. Звідси знаходимо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos x\right)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin t\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)dx,$$

що й потрібно було довести. ■

Використовуючи інтегрування частинами у визначеному інтегралі, можна отримати рекурентні формули для обчислення визначених інтегралів, що залежать від натурального параметра n. Приклад обчислення інтеграла такого типу, а саме $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, наведено в теоретичній частині цього посібника. Розглянемо інші приклади.

Приклад 6.140. Обчислити інтеграл $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.

Розв’язання. Використаємо формулу з *прикладу 5.19*:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot D_n, \quad D_n = \begin{cases} 1, & n - \text{непарне}, \\ \frac{\pi}{2}, & n - \text{парне}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Враховуючи доведену в попередньому прикладі рівність

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx,$$

маємо:

$$I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot D_n, \quad D_n = \begin{cases} 1, & n - \text{непарне}, \\ \frac{\pi}{2}, & n - \text{парне}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. ■$$

Приклад 6.141 . Обчислити інтеграл $I_n = \int\limits_0^a \left(a^2 - x^2\right)^n dx$, де $n \in \mathbb{N}$.

Розв’язання. Для отримання рекурентної формули подамо інтеграл I_n у вигляді:

$$I_n = \int\limits_0^a \left(a^2 - x^2\right)^n dx = \int\limits_0^a \left(a^2 - x^2\right)^{n-1} \left(a^2 - x^2\right) dx = a^2 I_{n-1} - \int\limits_0^a x\left(a^2 - x^2\right)^{n-1} x dx.$$

Останній інтеграл знайдемо, інтегруючи частинами:

$$\int\limits_0^a x\left(a^2 - x^2\right)^{n-1} x dx = \left\| \begin{matrix} u = x, dv = \left(a^2 - x^2\right)^{n-1} x dx, \\ du = dx, v = -\frac{1}{2n}\left(a^2 - x^2\right)^n. \end{matrix} \right\| =$$

$$= -\frac{1}{2n} x\left(a^2 - x^2\right)^n \Big|_0^a + \frac{1}{2n} I_n = \frac{1}{2n} I_n.$$

Підставляючи цей результат у вираз для I_n, отримаємо:

$$I_n = a^2 I_{n-1} - \frac{1}{2n} I_n \quad \Rightarrow \quad I_n = \frac{2a^2 n}{2n+1} I_{n-1}.$$

Враховуючи, що $I_0 = \int\limits_0^a dx = a$, отримаємо:

$$I_n = a^{2n+1} \frac{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 6\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3} = a^{2n+1}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Цей результат можна було б отримати, застосувавши для обчислення I_n підстановку $x = a\sin t$, і тим самим звести цей інтеграл до інтеграла, розглянутого в прикладі 6.140 (обчисліть його в такий спосіб самостійно ✍!). ■

Приклад 6.142. Обчислити інтеграл $I_{m,n} = \int\limits_0^1 x^m (1-x)^n dx$, де $m, n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання. Застосуємо інтегрування частинами. Нехай

$$u = (1-x)^n,\ x^m dx = dv,\ du = -n(1-x)^{n-1}dx,\ v = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Підставляючи у $I_{m,n}$, отримаємо:

$$I_{m,n} = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}(1-x)^n\right]\Bigg|_0^1 + \frac{n}{m+1}\int\limits_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx = \frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1}.$$

Застосовуючи послідовно цю формулу n разів, отримаємо:

$$I_{m,n} = \frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1} = \frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)}I_{m+2,n-2} = \ldots = \frac{n(n-1)\cdots(n-(n-1))}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}I_{m+n,0},$$

$$I_{m+n,0} = \int\limits_0^1 x^{m+n}dx = \frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{m+n+1}.$$

Остаточно отримуємо:

$$I_{m,n} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)(m+n+1)} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.\ ■$$

§3. Застосування визначених інтегралів

1. Обчислення довжин ліній за допомогою інтегралів

У теоретичній частині цього посібника (розділ 1, §3, п. 1) розглянуто основні формули, що можуть бути використані для обчислення довжини дуги кривої при різних способах її задання. Розглянемо приклади застосування цих формул.

Приклад 6.143. Знайти довжину дуги кривої $y = \operatorname{ch} x$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(b;\operatorname{ch} b)$.

Розв'язання. Використаємо формулу для знаходження довжини дуги графіка неперервно диференційовної функції $y = y(x)$, заданої в декартових координатах на відрізку $[a;b]$, що була розглянута в теоретичній частині (розділ 1, §3, п. 1):

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

У нашому випадку $y'(x) = \mathrm{sh}x$, $1+y'^2 = 1+\mathrm{sh}^2x = \mathrm{ch}^2x$, тому

$$|L| = \int_0^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^b \mathrm{ch}\,x\,dx = \mathrm{sh}\,x\Big|_0^b = \mathrm{sh}\,b. \ ■$$

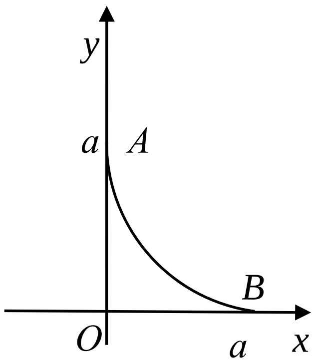


Рис. 6.1.

Приклад 6.144. Знайти довжину дуги L кривої, заданої в параметричній формі:

$x = a\cos^4 t,\ y = a\sin^4 t,\ a > 0$.

Розв'язання. Ця крива в декартовій системі координат наведена на рис. 6.1. Оскільки $x > 0, y > 0$, то можна прийняти, що $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Тоді кожному значенню t відповідає єдина точка на дузі L і навпаки. Функції $x(t)$ і $y(t)$ є неперервно диференційовними на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, отже, можна використати формулу для обчислення довжини дуги кривої, заданої в параметричній формі (*теорема 5.17*):

$$|L| = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt,$$

де $t \in [t_1; t_2]$.

Для заданої кривої $x'(t) = -4a\cos^3 t\cdot\sin t,\ y'(t) = 4a\sin^3 t\cos t$. Тоді отримуємо:

$$x'^2(t) + y'^2(t) = 16a^2\cos^6 t\sin^2 t + 16a^2\sin^6 t\cos^2 t = 2a^2\sin^2 2t\left(1+\cos^2 2t\right).$$

Шукана довжина дуги L дорівнює:

$$|L| = a\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 2t}\,\sin 2t\,dt = \left\| \begin{array}{l} \cos 2t = z,\ -2\sin 2t dt = dz, \\ t = 0 \Rightarrow z = 1,\ t = \pi/2 \Rightarrow z = -1 \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} \sqrt{1+z^2}\,dz.$$

Використаємо відомий табличний інтеграл

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C,$$

наведений у розширеній таблиці основних інтегралів (розділ 1, §1, п. 2):

$$|L| = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} \sqrt{1+z^2}\,dz = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(z\sqrt{1+z^2} + \ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)\right)\Big|_0^1 = a + \frac{a\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}. \ ■$$

Приклад 6.145. Знайти довжину дуги L кривої $\rho = a(1+\cos\varphi), a > 0$ (кардіоїда), заданої в полярній системі координат.

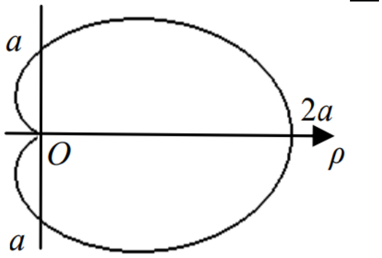


Рис. 6.2.

Розв'язання. Загальний вигляд кардіоїди наведено на рис. 6.2. Вона є зімкненою кривою й для неї $\varphi\in[0;2\pi]$. Використаємо формулу для знаходження довжини дуги кривої, заданої в полярних координатах, наведену в теоретичній частині посібника (розділ 1, §3, п. 1):

$$|L|=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

Для кардіоїди маємо:

$$\rho'=-a\sin\varphi,\ \rho^2+\rho'^2=a^2(2+2\cos\varphi)=4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

$$|L|=\int_0^{2\pi}2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=8a.\ \blacksquare$$

Приклад 6.146 . Обчислити довжину петлі кривої $x=\sqrt{3}t^2,\ y=t-t^3$.

Розв'язання. Для того, щоб скористатися формулою обчислення довжини дуги кривої, заданої в параметричній формі, знайдемо межі інтегрування t_1 та t_2.

Для цього знайдемо точки самоперетину кривої. Ці точки відповідають таким значенням параметра t_1 та t_2,, що $t_1\neq t_2$, однак $x(t_1)=x(t_2)$ і $y(t_1)=y(t_2)$. Таким чином, отримуємо систему:

$$\begin{cases}\sqrt{3}t_1^2=\sqrt{3}t_2^2,\\ t_1-t_1^3=t_2-t_2^3.\end{cases}$$

Звідси знаходимо $t_1=t_2=0$ або $t_1=-1,\ t_2=1$. Оскільки $t_1\neq t_2$, то єдиною точкою самоперетину кривої є точка, що відповідає значенням параметра $t_1=-1$ та $t_2=1$. Тут маємо $x(t_1)=x(t_2)=\sqrt{3}$, координати точки самоперетину – $\left(\sqrt{3};0\right)$. Таким чином, при знаходженні довжини дуги петлі кривої інтегрування має виконуватися у межах від -1 до 1.

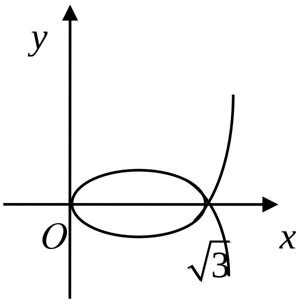


Рис. 6.3.

Функції $x(t)$ та $\left|f(x)\right|$ визначені при всіх дійсних t. Оскільки $x(t)=\sqrt{3}t^2\geq 0$, то задана крива розташована в правій півплощині. Зауважимо, що при зміні знака параметра t величина $x(t)$ не змінюється, а $\left|f(x)\right|$ змінює знак, то крива є симетричною відносно осі Ox. Схематичне зображення заданої кривої наведене на рис. 6.3.

Диференціюючи функції $x(t)$ і $y(t)$ із параметричного рівняння цієї кривої за змінною t, отримуємо:

$$x'(t)=2\sqrt{3}t,\ y'(t)=1-3t^2,$$

$$\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}=\sqrt{12t^2+1-6t^2+9t^4}=3t^2+1.$$

Підставляючи цей вираз у формулу для знаходження довжини дуги, заданої в параметричній формі, остаточно отримуємо:

$$\left|L\right|=\int_{-1}^{1}\left(1+3t^2\right)dt=\left(t+t^3\right)\Big|_{-1}^{1}=4. \blacksquare$$

2. Обчислення площ за допомогою інтегралів

З геометричного змісту визначеного інтеграла випливає методика його застосування до обчислення площ плоских фігур, заданих різноманітними способами, що була наведена в теоретичній частині (розділ 1, §3, п. 3). Розглянемо приклади знаходження площ за допомогою визначеного інтеграла.

Приклад 6.147 . Обчислити площу фігури, обмеженої прямими $x=0$, $x=2$ та кривими $y=2^x$, $y=2x-x^2$.

Розв'язання. Побудуємо задану фігуру (рис. 6.4). Виходячи з розташування графіків кривих $y=2^x$ та $y=2x-x^2$ при $x\in\left[0;2\right]$, знаходимо площу криволінійної трапеції, обмеженої цими лініями (див. *зауваження 5.12*):

$$S=\int_0^2\left(2^x-\left(2x-x^2\right)\right)dx=\frac{2^x}{\ln 2}\Bigg|_0^2-$$

$$-x^2\Big|_0^2+\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{3}{\ln 2}-4+\frac{8}{3}=\frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}. \blacksquare.$$

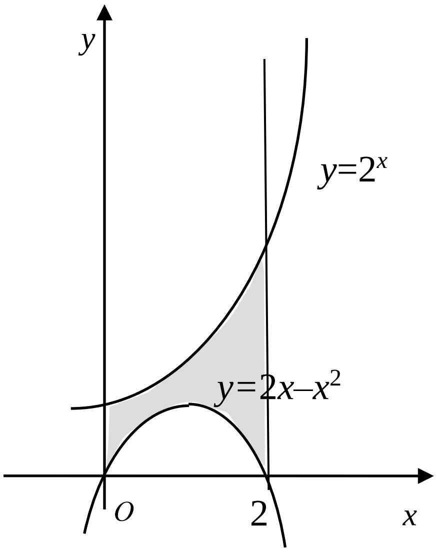


Рис. 6.4.

Приклад 6.148. Знайти площу області, обмеженої лініями $y=x-1$ та $y^2=x+1$

Розв'язання. Ця область зображена на рис. 6.5. Вона є об'єднанням двох областей D_1 та D_2, що визначаються нерівностями:

$$D_1:\begin{cases}-1\le x\le 0,\\ -\sqrt{x+1}\le y\le\sqrt{x+1};\end{cases}\quad D_2:\begin{cases}0\le x\le 3,\\ x-1\le y\le\sqrt{x+1}.\end{cases}$$

Знайдемо площу S цієї області як суму площ S_1 та S_1 областей D_1 та D_2:

$$S_1=\int_{-1}^{0}\left(\sqrt{x+1}-\left(-\sqrt{x+1}\right)\right)dx=2\int_{-1}^{0}\sqrt{x+1}\cdot dx=\frac{4}{3}\left(x+1\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{4}{3},$$

$$S_2=\int_0^3\left(\sqrt{x+1}-(x-1)\right)dx=\frac{2}{3}\left(x+1\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^3-\frac{\left(x-1\right)^2}{2}\Bigg|_0^3=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}-2+\frac{1}{2}=\frac{19}{6}.$$

Для площі S всієї області знаходимо:

$$S=S_1+S_2=\frac{19}{6}+\frac{4}{3}=\frac{9}{2}. \blacksquare$$

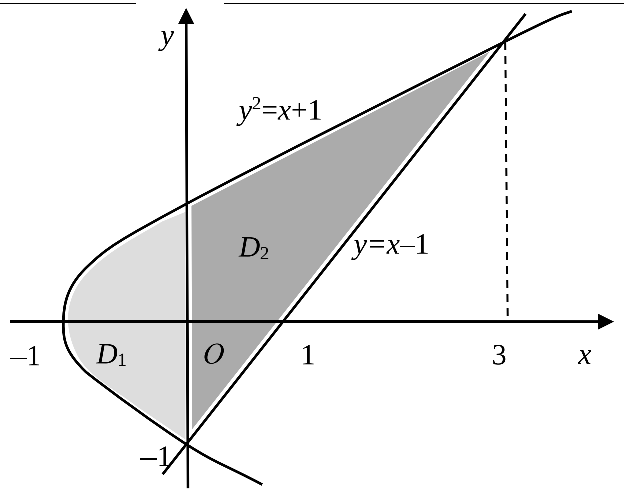


Рис. 6.5

Приклад 6.149. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y=|x-1|$ та $y=3-|x|$.

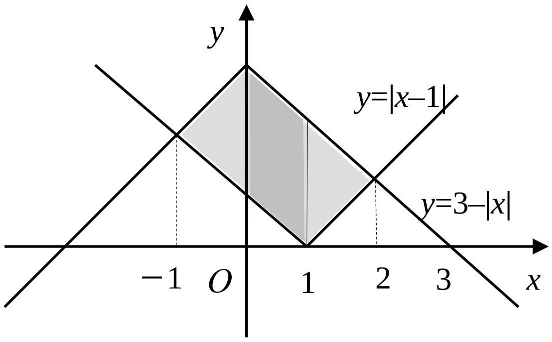


Рис. 6.6.

Розв’язання. Задані криві перетинаються у двох точках (рис. 6.6). Прирівнюючи значення y для цих кривих, знаходимо абсциси цих точок.

Розв’яжемо рівняння $|x-1|=3-|x|$. При $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[\ln|\ln x|\Big\|_{0,5}^{1-\varepsilon}+\ln|\ln x|\Big\|_{1+\varepsilon}^{2}\right]=$ маємо $1-x=3+x\Rightarrow x=-1$. При $x\in[0;1]$ $1-x=3-x\Rightarrow x\in\varnothing$. На промені $x>1$ точку перетину кривих знаходимо з рівняння $x-1=3-x$, звідки $x=2$. Для знаходження площі фігури поділимо $[-1;2]$ на три відрізки: $[-1;0]$, $[0;1]$ та $[1;2]$. У відповідності до рис. 6.6, враховуючи знак виразу під модулем на кожному з цих проміжків та відповідно з цим розкриваючи знак модуля, знаходимо шукану площу:

$$S=\int_{-1}^{0}\big((3+x)-(1-x)\big)\,dx+\int_{0}^{1}\big((3-x)-(1-x)\big)\,dx+\int_{1}^{2}\big((3-x)-(x-1)\big)\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}(2x+2)dx+\int_{0}^{1}2dx+\int_{1}^{2}(4-2x)dx=1+2+1=4.$$

Зауважимо, що той же результат можна знайти без застосування інтеграла, користуючись лише методами елементарної геометрії. Цю нескладну й цікаву задачу пропонуємо розв’язати читачеві самостійно. ■

Приклад 6.150 . Знайти площу фігури, обмеженої двома гілками кривої $(y-x)^2=x^3$ та прямою $x=1$.

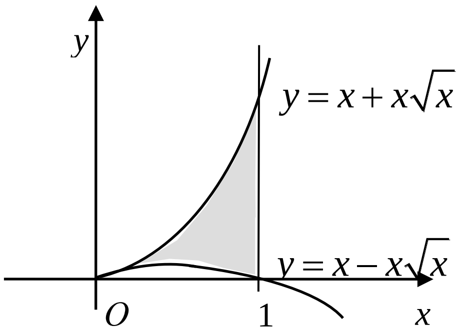


Рис. 6.7.

Розв'язання. З рівняння кривої $(y-x)^2=x^3$ випливає, що тут y визначена лише при $x\geq 0$, оскільки ліва частина цього рівняння є невід'ємною. З рівняння $(y-x)^2=x^3$ знаходимо $y=y(x)$. Отримуємо: $y-x=\pm x\sqrt{x}$; звідки рівняння гілок кривої мають вигляд: $y_1=x+x\sqrt{x}$, $y_2=x-x\sqrt{x}$. Вони зображені на рис. 6.7. При $x\geq 0$ $y_1(x)\geq y_2(x)$, тому для знаходження площі S заданої криволінійної трапеції отримуємо вираз:

$$S=\int_0^1\left[y_1(x)-y_2(x)\right]dx=\int_0^1\left(x+x\sqrt{x}-x+x\sqrt{x}\right)dx=2\int_0^1 x\sqrt{x}dx=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1=\frac{4}{5}.. \blacksquare$$

Приклад 6.151 . Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y=-x^2-2x+3$, дотичною до неї, проведеною у точці з абсцисою $x=2$ та віссю ординат.

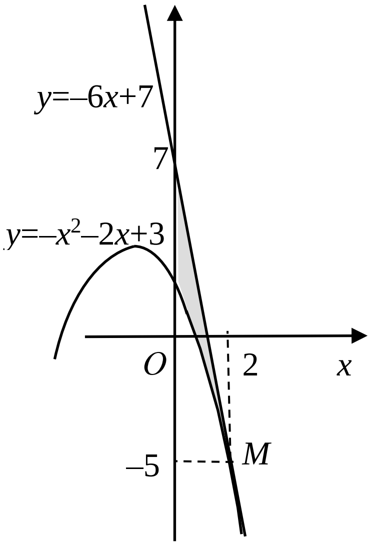


Рис. 6.8.

Розв'язання. Знайдемо рівняння вказаної дотичної. Оскільки $y(2)=-5$, $y'(2)=-6$, то рівняння дотичної має вигляд $y+5=-6(x-2)$, або $y=-6x+7$.

Фігуру, визначену в умові задачі, побудовано на рис. 6.8. Парабола розташована під дотичною на $[0;2]$. Звідси випливає, що площа фігури S обчислюється в такий спосіб:

$$S=\int_0^2\left[7-6x-\left(-x^2-2x+3\right)\right]dx=$$

$$=\int_0^2(x-2)^2\,dx=\frac{(x-2)^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}. \blacksquare$$

Приклад 6.152 . Знайти площу фігури, обмеженої петлею кривої

$$x=a\left(t^2-2t\right),\ y=a\left(t^2-1\right)(t-3),\ a>0.$$

Розв'язання. Якщо крива утворює петлю, то для неї існує точка самоперетину, тобто існують такі значення t_1, t_2 ($t_1\neq t_2$), що виконується умова:

$$\begin{cases}x(t_1)=x(t_2),\\ y(t_1)=y(t_2).\end{cases}$$

Звідси отримуємо:

$$\begin{cases} a\left(t_1{}^2-2t_1\right)=a\left(t_2^2-2t_2\right), \\ a\left(t_1^2-1\right)\left(t_1-3\right)=a\left(t_2^2-1\right)\left(t_2-3\right); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(t_1^2-t_2^2\right)=2\left(t_1-t_2\right), \\ \left(t_1^2-1\right)\left(t_1-3\right)=\left(t_2^2-1\right)\left(t_2-3\right); \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1=-1, \\ t_2=3. \end{cases}$$

Таким чином, точка самоперетину кривих відповідає значенням $t_1=-1$, $t_2=3$. Для побудови заданої кривої здійснимо дослідження функцій $x(t)$ та $y(t)$. У точці $t_1=-1$ маємо: $x(-1)=3a$, $y(-1)=0$. При $t_2=3$ маємо: $x(3)=3a$, $y(3)=0$.

З рівняння $x'(t)=2a(t-1)=0$ знаходимо стаціонарну точку функції $x(t)$ – точка $t_3=1$. У цій точці $x(1)=-a$, $y(1)=0$.

З рівняння $y'(t)=a\left(3t^2-6t-1\right)=0$ знаходимо стаціонарні точки функції $y(t)$ – точки $t_{4,5}=1\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Маємо:

$$x\left(1\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{a}{3},\ y\left(1\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\pm\frac{16\sqrt{3}a}{9}.$$

Таким чином, для заданої кривої значення координати x змінюються в межах від $x_{\min}=-a$ до $x_{\max}=3a$, значення y – від мінімального значення $-\frac{16\sqrt{3}a}{9}$ до максимального $\frac{16\sqrt{3}a}{9}$. Обидва екстремальні значення досягаються при $x=\frac{a}{3}$.

Стаціонарні точки t_3, t_4, t_5 ділять проміжок $(-1;3)$ на чотири інтервали. Встановлюючи знаки похідних на кожному з них, знаходимо, що на $\left(-1;1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ функція $x(t)$ спадає, а $y(t)$ зростає, на $\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{3};1\right)$ функція $x(t)$ продовжує спадати, $y(t)$ тут теж спадає. На проміжку $\left(1;1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ функція $x(t)$ зростає, $y(t)$ спадає, на останньому інтервалі $\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3};3\right)$ спостерігаємо зростання функцій $x(t)$ та $y(t)$.

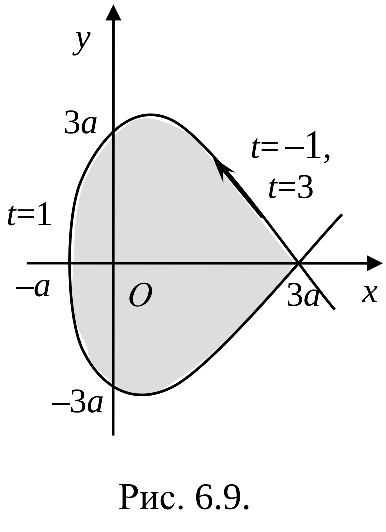


Рис. 6.9.

Ми знайшли точки перетину кривої з віссю Ox. Вісь Oy вона перетинає, якщо $x(t)=0$, тобто при $t=0$ та $t=2$. Тут отримуємо відповідні значення координати y: $y(0)=3a,\ y(2)=-3a$.

Ми дослідили функції $x(t)$ та $y(t)$ на монотонність на відрізку $[-1;3]$, в результаті отримали, що зі зростанням змінної t на цьому відрізку обхід петлі здійснюється проти годинникової стрілки (додатній напрям обходу). Побудуємо цю петлю на координатній площині (рис. 6.9).

Для обчислення шуканої площі використаємо таку формулу (див. *зауваження 5.13*):

$$S=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\right]dt.$$

У цьому випадку маємо:

$$x'(t)=2a(t-1),\ y'(t)=a\left(3t^2-6t-1\right),$$

$$S=\frac{a^2}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(t^2-2t\right)\left(3t^2-6t-1\right)-\left(t^2-1\right)(t-3)(2t-2)\right]dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-1}^{3}\left(t^4-4t^3+7t^2-6t+6\right)dt=\frac{a^2}{2}\left(\frac{t^5}{5}-t^4+\frac{7}{3}t^3-3t^2+6t\right)\Bigg|_{-1}^{3}=\frac{256}{15}a^2.\ \blacksquare$$

Приклад 6.153. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $\rho=a\sin 3\varphi$.

Розв'язання. Щоб знайти межі зміни полярного кута, потрібно розв'язати нерівність:

$$\rho\ge 0\ \Leftrightarrow\ a\sin 3\varphi\ge 0\ \Leftrightarrow\ \frac{2\pi n}{3}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}.$$

При $n=0,1,2$ отримаємо три ділянки даної кривої. Ця крива (трилисник) зображена на рис. 6.10. Вона утворює три петлі рівної площі, кожна з яких обмежує криволінійний сектор. Обчислимо площу одного такого сектора, використовуючи формулу (*теорема 5.23*):

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

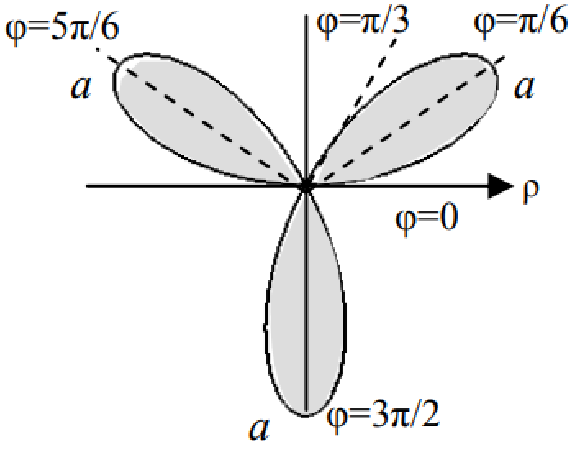


Рис. 6.10.

У нашому випадку для сектора в першій чверті координатної площини $0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$. Тому його площа дорівнює:

$$S_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}a^2\sin^2 3\varphi\,d\varphi=\frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 6\varphi)\,d\varphi=\frac{a^2}{4}\left(\varphi-\frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi a^2}{12}.$$

Шукана площа: $S=3S_1=\dfrac{\pi a^2}{4}$. ■

Приклад 6.154. Знайти площу петлі декартового листка $x^3 + y^3 = 3axy$.

Розв'язання. ця крива наведена на рис. 6.11. Для знаходження її площі перейдемо до полярних координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Рівняння декартового листка запишемо у вигляді:

$$\rho^3\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right) = 3a\rho^2\sin\varphi\cos\varphi .$$

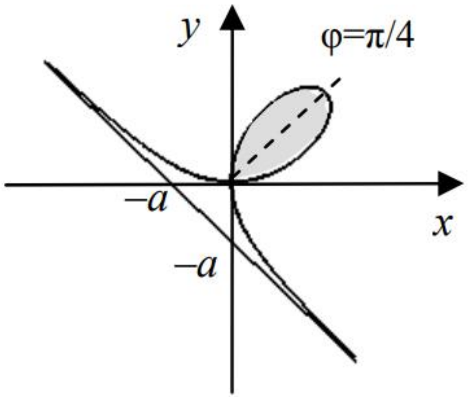


Рис. 6.11.

Виражаючи звідси ρ, знаходимо:

$$\rho = \frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} = \frac{3a\sin 2\varphi}{(\sin\varphi + \cos\varphi)(2 - \sin 2\varphi)} .$$

З цього рівняння випливає, що $\rho = 0$ при $\varphi = 0$ та $\varphi = \frac{\pi}{2}$. При $\varphi \to \frac{3\pi}{4}$ та $\varphi \to -\frac{\pi}{4}$ $\rho \to \infty$, що пояснюється наявністю в заданої кривої асимптоти $y = -x - a$. Петля декартового листка описується при зміні полярного кута φ у межах від 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Шукана площа дорівнює:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9a^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right)^2} d\varphi .$$

Крива є симетричною відносно променя $\varphi = \frac{\pi}{4}$, тому обчислимо спочатку площу половини її петлі:

$$S_1 = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{9a^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right)^2} d\varphi = \left\| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\varphi = z;\ \dfrac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = dz; \\ \varphi = 0 \Rightarrow z = 0,\ \varphi = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow z = 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{9a^2}{2}\int_0^1 \frac{z^2dz}{\left(1 + z^3\right)^2} = \frac{3a^2}{2}\int_0^1 \frac{d\left(1 + z^3\right)}{\left(1 + z^3\right)^2} = -\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{1}{1 + z^3}\bigg|_0^1 = \frac{3a^2}{4} .$$

Для площі петлі S остаточно отримуємо $S = 2S_1 = \frac{3a^2}{2}$. ■

3. Обчислення об'ємів тіл обертання

Розглянемо приклади, пов'язані з використанням визначеного інтеграла для знаходження об'ємів тіл обертання. Відповідні формули наведені в теоретичній частині (розділ 1, §3, п. 4).

Приклад 6.155. Знайти об'єм тіла, що утворене обертанням криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y=\sqrt{x},\ y=\sqrt{2-x}$ та $y=0$, навколо осі Ox.

Розв'язання. Задане тіло обертання схематично наведено на рис. 6.12. Абсцису точки перетину кривих $y=\sqrt{x}$ та $y=\sqrt{2-x}$ знаходимо з рівняння $\sqrt{2-x}=\sqrt{x}$, звідки $x=1$. Шуканий об'єм знаходимо як суму об'ємів двох тіл. Для першого з них $0\le x\le 1,\ 0\le y\le\sqrt{x}$, для другого – $1\le x\le 2,\ 0\le y\le\sqrt{2-x}$.

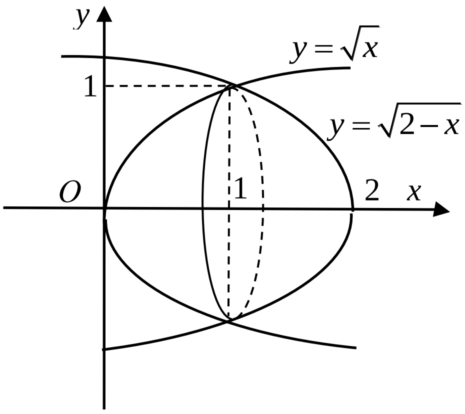


Рис. 6.12.

Використаємо для обчислення кожного з цих об'ємів формулу (див. *теорему 1.28*):

$$V=\pi\int_a^b y^2(x)\,dx,$$

отримаємо:

$$V=\pi\int_0^1 x\,dx+\pi\int_1^2(2-x)\,dx=\frac{\pi}{2}-\pi\frac{(x-2)^2}{2}\Bigg|_1^2=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.\ \blacksquare$$

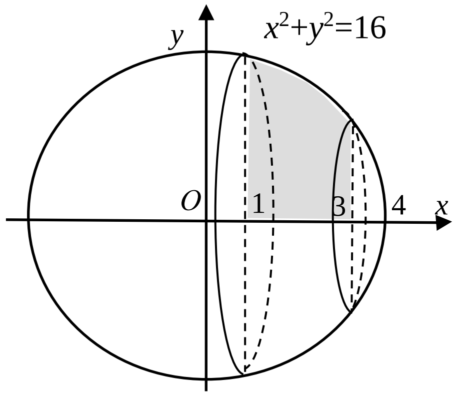


Рис. 6.13.

Приклад 6.156. Знайти об'єм тіла, що утворене обертанням криволінійної трапеції, обмеженої лініями $x^2+y^2=16,\ x=1,\ x=3,\ y=0$, навколо осі Ox.

Розв'язання. Схематичне зображення цього тіла обертання наведено на рис. 6.13. Для обчислення його об'єму використаємо формулу з попереднього прикладу. Маємо:

$$V=\pi\int_a^b y^2(x)\,dx=\pi\int_1^3\left(16-x^2\right)dx=$$

$$=\pi\left(16x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3=\frac{70\pi}{3}.\ \blacksquare$$

Приклад 6.157. Знайти об'єм тіла, що утворене обертанням криволінійної трапеції, обмеженої кривими $y=x^3,\ y=8,\ x=0$, навколо осі Oy.

Розв'язання. Для знаходження об'єму тіла, схематичне зображення якого наведене на рис. 6.14, використаємо формулу для об'єму тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції $a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)$ навколо осі Oy (див. *зауваження 1.15*):

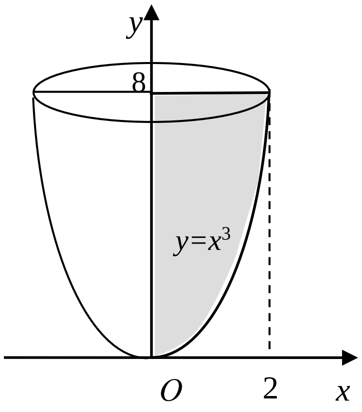


Рис. 6.14.

$$V = 2\pi\int_a^b x \cdot f(x)dx.$$

Звідки отримаємо:

$$V = 2\pi\int_0^2 x \cdot x^3 dx = 2\pi \frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2 = \frac{64\pi}{5}. \blacksquare$$

Приклад 6.158. Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої параболами $y = x^2$ та $8x = y^2$.

Розв'язання. Задане тіло схематично наведено на рис. 6.15. Знайдемо координати точок перетину парабол, розв'язуючи для цього систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = 8x. \end{cases}$$

Знаходимо ординати точок перетину цих кривих: $y_1 = 0$ та $y_2 = 4$. Для знаходження об'єму тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy області, для якої

$$0 \le \varphi_1(y) \le x(y) \le \varphi_2(y), c \le y \le d,$$

використаємо формулу (*зауваження 1.14*):

$$V = \pi\int_c^d \left(\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y)\right)dy.$$

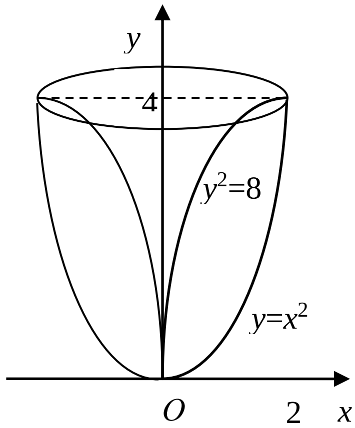


Рис. 6.15.

Тому шуканий об'єм дорівнює:

$$V = \pi\int_0^4 \left(\left(\sqrt{y}\right)^2 - \left(\frac{y^2}{8}\right)^2\right)dy = \pi\int_0^4 \left(y - \frac{y^4}{64}\right)dy = \pi\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{320}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{24\pi}{5}. \blacksquare$$

Приклад 6.159. Знайти об'єм тіла, отриманого при обертанні області, обмеженої кривою $\rho = a\cos 3\varphi$, $a > 0, -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$, навколо: **а)** полярної осі; **б)** прямої $\varphi = \frac{\pi}{6}$; **в)** прямої $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

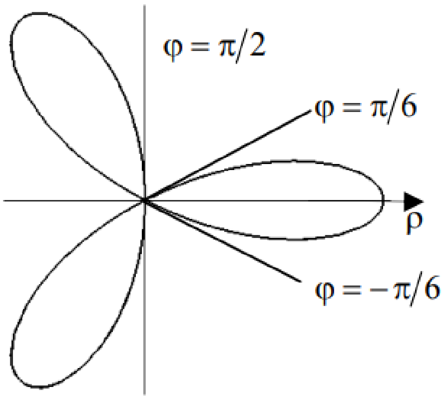


Рис. 6.16.

Розв'язання. Задану криву зображено на рис. 6.16.

а) Зауважимо спочатку, що при обертанні пелюстки кривої при $-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$ навколо полярної осі утворюється таке ж тіло, як і при обертанні навколо цієї осі області, обмеженої заданою лінією при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$ і полярною віссю.

I спосіб. Перейдемо до декартової системи координат, де полярній осі відповідає додатній напрям осі Ox, У цій системі рівняння кривої можна записати у параметричній формі:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi=a\cos3\varphi\cos\varphi=\dfrac{a}{2}\left(\cos4\varphi+\cos2\varphi\right), \\ y=\rho\sin\varphi=a\cos3\varphi\sin\varphi=\dfrac{a}{2}\left(-\sin2\varphi+\sin4\varphi\right). \end{cases}$$

Віссю обертання є вісь Ox.

Враховуючи, що

$$dx=\frac{a}{2}\left(\cos4\varphi+\cos2\varphi\right)'d\varphi=-\frac{a}{2}\left(4\sin4\varphi+2\sin2\varphi\right)d\varphi\le0,\ \ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{6},$$

отримаємо:

$$V_x=-\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}y^2\left(\varphi\right)\cdot dx\left(\varphi\right)=\frac{\pi a^3}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(-\sin2\varphi+\sin4\varphi\right)^2\left(2\sin4\varphi+\sin2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{\pi a^3}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(-3\sin2\varphi\sin^2 4\varphi+2\sin^3 4\varphi+\sin^3 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{\pi a^3}{16}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(-6\sin2\varphi-3\sin6\varphi+3\sin10\varphi\right)d\varphi-$$

$$-\frac{\pi a^3}{8}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\cos^2 4\varphi\right)d(\cos4\varphi)+\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\cos^2 2\varphi\right)d(\cos2\varphi)\right)=$$

$$=-\frac{47\pi}{320}-\frac{\pi a^3}{8}\left(\cos4\varphi-\frac{\cos^3 4\varphi}{3}+\cos2\varphi-\frac{\cos^3 2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{19\pi}{960}.$$

II спосіб. Скористаємося формулою для обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі плоскої фігури

$$0\le\alpha\le\varphi\le\beta\le\pi,\ \ 0\le\rho\le\rho(\varphi),$$

(φ і ρ – полярні координати) (вивести формулу *самостійно* ✍!)

$$V=\frac{2\pi}{3}\int\limits_\alpha^\beta\rho^3\left(\varphi\right)\sin\varphi\,d\varphi.$$

Отже, в цьому випадку отримаємо:

$$V=\frac{2\pi}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^3 3\varphi\sin\varphi\,d\varphi\ =\frac{2\pi}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(-3\sin2\varphi+3\sin4\varphi-\sin8\varphi+\sin10\varphi\right)d\varphi=\ =\frac{19\pi}{960}.\ \blacksquare$$

б) Здійснимо поворот заданої кривої так, щоб нова полярна вісь пройшла через пряму $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Для цього її потрібно повернути на кут $\frac{\pi}{6}$ за рухом годинникової стрілки. В результаті такої дії крива $\rho = a\cos 3\varphi$ при $-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$ перейде в криву $\rho = a\cos 3\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) = \rho_1(\varphi)$ при $-\frac{\pi}{3} \le \varphi \le 0$.

Враховуючи те, що $\sin\varphi \le 0$ при $-\frac{\pi}{3} \le \varphi \le 0$, знаходимо

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\left(\rho_1(\varphi)\right)^3|\sin\varphi|d\varphi - \frac{2\pi}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\cos^3 3\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)\sin\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\sin^3 3\varphi \sin\varphi d\varphi = \frac{\pi}{12}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\left(3\cos 2\varphi - 3\cos 4\varphi - \cos 8\varphi + \cos 10\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{27\pi\sqrt{3}}{320}. \blacksquare$$

в) Аналогічно попередньому прикладу розглянемо криву $\rho = a\cos 3\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \rho_2(\varphi)$ при $-\frac{5\pi}{6} \le \varphi \le -\frac{\pi}{3}$, яку отримуємо поворотом кривої $\rho = a\cos 3\varphi$ при $-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$ на кут $\frac{\pi}{2}$ за рухом годинникової стрілки. В результаті об'єм шуканого тіла обертання навколо прямої $\varphi = \frac{\pi}{2}$ стає рівним об'єму тіла, утвореного обертанням області, обмеженої кривою $\rho = a\cos 3\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ при $-\frac{2\pi}{3} \le \varphi \le -\frac{\pi}{3}$, навколо полярної осі.

Враховуючи те, що $\sin\varphi \le 0$ при $-\frac{2\pi}{3} \le \varphi \le -\frac{\pi}{3}$, знаходимо

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}}\left(\rho_2(\varphi)\right)^3|\sin\varphi|d\varphi - \frac{2\pi}{3}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}}\cos^3 3\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{2\pi}{3}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}}\sin^3 3\varphi \sin\varphi d\varphi = -\frac{\pi}{12}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}}\left(3\cos 2\varphi - 3\cos 4\varphi - \cos 8\varphi + \cos 10\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{27\pi\sqrt{3}}{160}. \blacksquare$$

4. Площі поверхонь обертання

Приклад 6.160. Область, обмежена частиною спіралі $\rho = e^{\varphi}$, де $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{7\pi}{6}$, та відрізком, що з'єднує її кінці, обертається навколо прямої, що містить цей відрізок. Знайти площу поверхні отриманого тіла обертання.

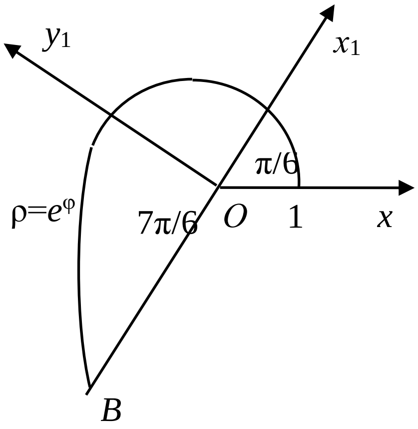


Рис. 6.17.

Розв'язання. Область, зазначена в умові задачі, наведена на рис. 6.17. Виберемо декартову систему координат таким чином, щоб початок координат збігався з полюсом, а додатній напрямок осі Ox – з променем $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Переходячи до введеної таким чином декартової системи координат, отримуємо:

$$x=\rho\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)=e^{\varphi-\frac{\pi}{6}}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right),$$

$$y=\rho\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)=e^{\varphi-\frac{\pi}{6}}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right).$$

Далі використовуємо формулу для знаходження площі поверхні тіла обертання (випадок полярних координат), наведену у теоретичній частині посібника (розділ 1, §3, п. 5):

$$P_\rho=2\pi\cdot\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho(\varphi)\cdot\sin\varphi\cdot\sqrt{\rho^2+\left(\rho'_\varphi\right)^2}\,d\varphi\,.$$

Для заданої спіралі $\sqrt{\rho^2+\left(\rho'_\varphi\right)^2}=e^{\varphi}\cdot\sqrt{2}$. Віссю обертання є вісь Ox, тому вираз $\rho(\varphi)\cdot\sin\varphi$ у формулі для P_ρ ми повинні замінити на відстань від точки кривої до осі обертання для даного випадку, тобто $\left|y(\varphi)\right|$. Отже,

$$P_\rho=2\pi\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\sqrt{2}\cdot e^{2\varphi+\frac{\pi}{6}}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)\cdot d\varphi=\left\|\begin{array}{l}\varphi-\frac{\pi}{6}=t,\ d\varphi=dt;\\ \varphi=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=0,\ \varphi=\frac{7\pi}{6}\Rightarrow t=\pi\end{array}\right\|=$$

$$=2\pi\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\pi}e^{2t+\frac{\pi}{6}}\sin t\,dt.$$

Останній інтеграл знаходимо, двічі інтегруючи частинами. Отримуємо:

$$P_\rho=\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}\left(2\sin t-\cos t\right)\cdot e^{2t}\Big|_0^{\pi}=e^{\pi/6}\cdot 2\pi\sqrt{2}\cdot\frac{e^{2\pi}+1}{5}.$$

■

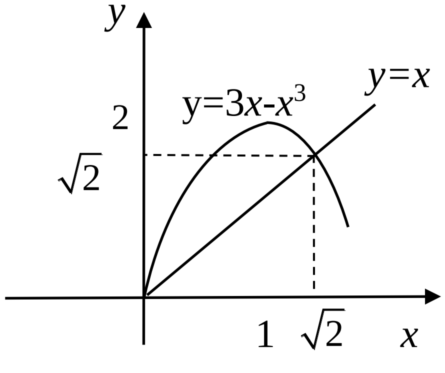


Рис. 6.18.

Приклад 6.161. Знайти площу поверхні тіла, утвореного обертанням частини кривої $y=3x-x^3$, що знаходиться у правій півплощині $(x\geq 0)$ над прямою $y=x$ (рис. 6.18) навколо осі абсцис.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину кривої $y=3x-x^3$ та прямої $y=x$, для яких $x\geq 0$:

$$\begin{cases} y = 3x - x^3, \\ y = x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 = 0, \\ x_2 = y_2 = \sqrt{2}, \\ x_3 = y_3 = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Оскільки $x \geq 0$, то для заданої частини кривої $0 \leq x \leq \sqrt{2}$. Використаємо формулу для обчислення площі бічної поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі обертання Ox області, заданої в декартових координатах (розділ 1, §3, п. 4):

$$P_x = 2\pi \cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

У нашому випадку віссю обертання є пряма $y = x$, тому множник $f(x)$ у підінтегральному виразі ми повинні замінити на відстань від кривої до осі обертання, тобто:

$$\frac{\left|3x - x^3 - x\right|}{\sqrt{2}} = \frac{2x - x^3}{\sqrt{2}}.$$

Враховуючи, що $\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} = \sqrt{1 + 9\left(1 - x^2\right)^2}$, отримуємо:

$$P_x = \pi\sqrt{2} \cdot \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 9\left(1 - x^2\right)^2}\left(2 - x^2\right) x\, dx.$$

Виконуючи в останньому інтегралі заміну $t = 1 - x^2,\ dt = -2x dx,$ знаходимо:

$$P_x = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 9t^2}\,(1 + t)\, dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\left[\frac{t}{2}\sqrt{1 + 9t^2} + \frac{1}{6}\ln\left|3t + \sqrt{1 + 9t^2}\right|\right]\Bigg|_{-1}^{1} +$$

$$+ \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^{1} t\sqrt{1 + 9t^2}\, dt.$$

Оскільки функція $t\sqrt{1 + 9t^2}$ непарна, то інтеграл від неї на відрізку $[-1{,}1]$ із симетричними межами інтегрування дорівнює нулю. Отже,

$$P_x = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}\left(3\sqrt{10} + \ln\left(3 + \sqrt{10}\right)\right). \blacksquare$$

5. Деякі фізичні застосування визначеного інтеграла

Розглянемо спочатку задачі на знаходження центра мас. Тут будемо вважати густину кривої чи області сталою та одиничною.

Приклад 6.162. Знайти координати центра мас дуги ланцюгової лінії $y = \mathrm{ch}\, x$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(b; \mathrm{ch}\, b)$.

Розв'язання. Довжина дуги заданої кривої знайдена в прикладі 6.214, де отримано $|L| = \mathrm{sh}\, b$. Для знаходження координат центра мас даної дуги використаємо формулу, наведену в теоретичній частині цього посібника (ч. 2, розділ 1, §3, п. 7):

$$x_{ц.м.} = \frac{1}{|L|}\cdot \int_a^b x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\ ,$$

$$y_{ц.м.} = \frac{1}{|L|}\cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\ .$$

Враховуючи, що $\sqrt{1+f'^2(x)}=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}=\operatorname{ch} x$, отримаємо значення інтегралів у цих формулах:

$$\int_0^b x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\ =\int_0^b x\cdot\operatorname{ch} x\,dx = x\cdot\operatorname{sh} x\Big|_0^b-\int_0^b \operatorname{sh} x\,dx = b\cdot\operatorname{sh} b-\operatorname{ch} b+1,$$

$$\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_0^b \operatorname{ch}^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^b\left(1+\operatorname{ch}2x\right)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\operatorname{sh}2x}{2}\right)\Bigg|_0^b=$$

$$=\frac{b}{2}+\frac{\operatorname{sh}2b}{4}.$$

Підставляючи ці значення у формули для обчислення центра мас, отримаємо:

$$x_{ц.м.}=\frac{b\cdot\operatorname{sh} b-\operatorname{ch} b+1}{\operatorname{sh} b},\ y_{ц.м.}=\frac{2b+\operatorname{sh}2b}{4\operatorname{sh}\mathrm{b}}.\ ■$$

Приклад 6.163. Знайти центр мас фігури, обмеженої еліпсом $4x^2+9y^2=36$ та колом $x^2+y^2=9$, що знаходиться в першій чверті координатної площини.

Розв'язання. Побудуємо дуги кола радіуса 3 з центром у початку координат та еліпса з цим же центром та півосями 3 та 2, розташовані у першій чверті, які разом із координатними осями обмежують задану фігуру (рис. 6.19).

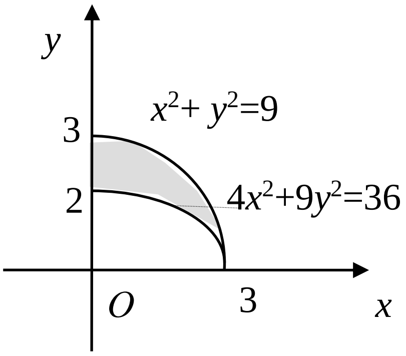


Рис. 6.19.

Спочатку знаходимо статичні моменти цієї фігури. У теоретичній частині (розділ 1, §3, п. 8) наведено формули для обчислення статичних моментів криволінійної трапеції

$$\left\{(x,y): a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\right\}.$$

З них можна отримати формули для знаходження статичних моментів узагальненої криволінійної трапеції $\left\{(x,y): a\le x\le b,\ f_1(x)\le y\le f_2(x)\right\}$:

$$K_y=\int_a^b x\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx,\ K_x=\frac{1}{2}\cdot\int_a^b\left(f_2^2(x)-f_1^2(x)\right)dx,$$

які застосуємо для розв'язання цієї задачі:

$$K_y=\int_a^b x\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx=\int_0^3 x\left(\sqrt{9-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right)dx=\frac{1}{3}\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}dx=$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^3\sqrt{9-x^2}d\left(9-x^2\right)=-\frac{1}{9}\left(9-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^3=3;$$

$$K_x=\frac{1}{2}\cdot\int_a^b\left(f^2{}_2(x)-f^2{}_1(x)\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\int_0^3\left(\left(9-x^2\right)-\frac{4}{9}\left(9-x^2\right)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_0^3\left(5-\frac{5}{9}x^2\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\left(5x-\frac{5x^3}{27}\right)\Bigg|_0^3=5.$$

Далі знайдемо координати центра мас фігури за формулами:

$$x_{ц.м.}=\frac{K_y}{P},\ y_{ц.м.}=\frac{K_x}{P},$$

де P – площа даної фігури.

Площу криволінійної трапеції знайдемо як різницю площі чверті круга радіуса 3 та чверті еліпса з півосями $a=3, b=2$ (площа еліпса з півосями a, b дорівнює πab):

$$\text{P}=\frac{9\pi}{4}-\frac{3\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}.$$

Отже, отримуємо координати центра мас:

$$x_{ц.м.}=\frac{K_y}{P}=\frac{4}{\pi},\ y_{ц.м.}=\frac{K_x}{P}=\frac{20}{3\pi}.\ \blacksquare$$

Приклад 6.164. Користуючись першою теоремою Гюльдена, знайти центр мас півкола радіуса a.

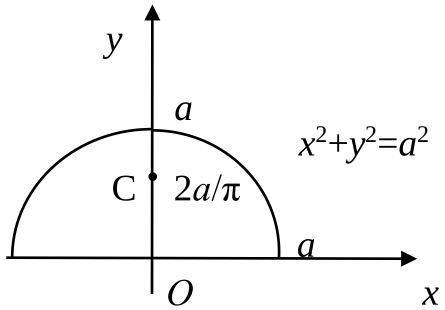


Рис. 6.20.

Розв'язання. Проведемо координатні осі через центр заданого півкола (рис. 6.20). Оскільки крива є симетричною відносно осі Oy, то $x_{ц.м.}=0$. Для знаходження $y_{ц.м.}$ використаємо першу теорему Гюльдена. Площа поверхні P тіла, утвореного обертанням півкола навколо осі Ox, дорівнює $4\pi a^2$ (площа поверхні сфери радіуса a), довжина дуги півкола $|L|=\pi a$. За першою теоремою Гюльдена, маємо:

$$4\pi a^2=\pi a\cdot 2\pi\cdot y_{ц.м.}.$$

Звідси знаходимо $y_{ц.м.}=\dfrac{2a}{\pi}$. ■

Приклад 6.165. Користуючись другою теоремою Гюльдена, знайти координати центра мас фігури, обмеженої віссю Ox та однією аркою циклоїди

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$$

(рис. 6.21).

Розв'язання. Знайдемо об'єм тіла, отриманого обертанням кривої навколо осі Ox:

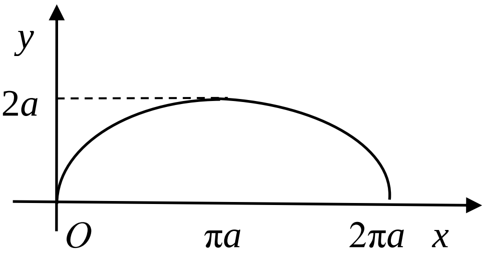


Рис. 6.21.

$$V=\pi\int_0^{2\pi}y^2dx=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt=$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}dt-3\pi a^3\int_0^{2\pi}\cos t dt+$$

$$+\frac{3\pi a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt-\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2 t\right)d(\sin t)=$$

$$=2\pi^2a^3+3\pi^2a^3=5\pi^2a^3.$$

Знайдемо площу фігури:

$$P=\int_0^{2\pi}ydx=\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=3\pi^2a^2\,.$$

Фігура є симетричною відносно прямої $x=\pi a$, тому $x_{ц.м.}=\pi a$.

За другою теоремою Гюльдена маємо:

$$y_{ц.м.}=\frac{V}{2\pi P}=\frac{5\pi^2a^3}{2\pi\cdot 3\pi^2a^2}=\frac{5a}{6\pi}\,.\ ■$$

Приклад 6.166. Електричний заряд e_1, розташований у початку координат, відштовхує заряд e_2 з точки $(x_1;0)$ у точку $(x_2;0)$. Знайти роботу A сили відштовхування F.

Розв'язання. Відомо, що електричні заряди відштовхуються із силою

$$F=\frac{e_1\cdot e_2}{r^2},$$

де e_1 та e_2 – величини зарядів, r – відстань між ними.

Диференціал роботи сили F на переміщенні dx дорівнює :

$$dA=F(x)dx=\frac{e_1e_2}{x^2}dx\,.$$

Звідси знаходимо:

$$A=e_1e_2\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^2}=-e_1e_2\left.\frac{1}{x}\right|_{x_1}^{x_2}=e_1e_2\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right).\ ■$$

Приклад 6.167. Робота, необхідна для того, щоб підняти тіло на певну висоту, дорівнює добутку ваги тіла на цю висоту. Визначити роботу, необхідну для того, щоб викачати воду із циліндричної цистерни, радіус якої дорівнює R, а висота H.

Розв'язання. Поділимо цистерну площинами, паралельними її основі, що знаходяться на відстані dx одна від одної. Об'єм кожного з отриманих при цьому елементарних циліндрів дорівнює:

$$dV=\pi R^2dx\,.$$

Елементарна робота, потрібна для підняття з глибини x отриманого елементарного циліндра вагою $\gamma \cdot g \cdot dV$, де γ – густина води, g – прискорення вільного падіння, дорівнює:

$$dA = \gamma \cdot g \cdot x \cdot \pi R^2 dx.$$

Повна робота дорівнює:

$$A = \pi R^2 \int_0^H x dx = \frac{\pi R^2 H^2}{2}. \blacksquare$$

Приклад 6.168. Знайти тиск, що діє на півкруг, вертикально занурений у рідину, якщо його радіус дорівнює R, а діаметр лежить на вільній поверхні рідини (рис 6.22). Питома вага рідини дорівнює γ.

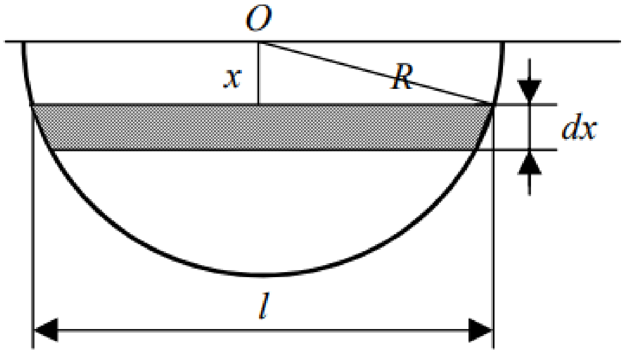


Рис. 6.22

Розв'язання. Проводимо горизонтальну смужку на глибині x. Нехай ширина смужки dx, а довжина l. Приймаючи цю смужку за елемент площі, для диференціала площі одержимо вираз $ds = ldx$, але $x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = R^2$, звідки $l = 2\sqrt{R^2 - x^2}$, отже: $ds = 2\sqrt{R^2 - x^2}dx.$

Сила тиску рідини на елементарну смужку $dP = \gamma x ds = 2\gamma x\sqrt{R^2 - x^2}dx.$ Таким чином

$$P = \gamma\int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}dx = -\gamma\int_0^R \left(R^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(R^2 - x^2\right) =$$

$$= -\gamma\left[\frac{2}{3}\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^R = \frac{3}{2}\gamma R^3. \blacksquare$$

Приклад 6.169. Яку роботу необхідно виконати, щоб розтягнути пружину на 4 см, якщо відомо, що від навантаження в $1H$ вона розтягнулася на 1 см?

Розв'язання. Згідно із законом Гука, сила F, яка розтягнула пружину на xм, дорівнює: $F = kx$. Коефіцієнт пропорційності k знайдемо з умови: якщо $x = 0{,}01$м, то $F = 1\text{Н}$, отже $k = \frac{1}{0{,}01} = 100\left(\frac{\text{Н}}{\text{м}}\right)$ та $F = 100x$. Тоді $A = \int_0^{0{,}04} 100xdx = 50x^2\Big|_0^{0{,}04} = 0{,}08$ (Дж). $\blacksquare$

§ 4. Наближене обчислення інтегралів

Приклад 6.170. Обчислити наближено $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$, застосовуючи формули прямокутників, трапецій, Сімпсона з кроком 0,1. Оцінити похибку обчислень.

Розв'язання. Розбиваємо відрізок [1;2] на 10 рівних частин із кроком $h = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$. Утворюємо таблицю значень функції $y = \frac{1}{x}$ (див. табл. 6.1).

Здійснюючи обчислення за формулою прямокутників (5.36), отримаємо:

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}1 \cdot 6{,}9283536 = 0{,}69283536\,.$$

Підставляючи значення у формулу трапецій (5.38), одержимо:

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}1 \cdot \left(\frac{1+0{,}5}{2} + 6{,}1877139 \right) = 0{,}69377139\,.$$

Застосовуючи формулу Сімпсона (5.41), маємо:

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0{,}1}{6}\left(1 + 0{,}5 + 4 \cdot 6{,}9283536 + 2 \cdot 6{,}1877139\right) = 0{,}69314737\,.$$

Таблиця 6.1 –

i	x_i	$x_{i-\frac{1}{2}}$	y_i	$y_{i-\frac{1}{2}}$
0	1		1	
		1,05		0,9523810
1	1,1		0,9090909	
		1,15		0,8695652
2	1,2		0,8333333	
		1,25		0,8
3	1,3		0,7692308	
		1,35		0,7407407
4	1,4		0,7142857	
		1,45		0,6896552
5	1,5		0,6666667	
		1,55		0,6451613
6	1,6		0,625	
		1,65		0,6060606
7	1,7		0,5882352	
		1,75		0,5714286
8	1,8		0,5555556	
		1,85		0,5405405
9	1,9		0,5263157	
		1,95		0,5128205
10	2,0		0,5	
Сума			7,6877139	6,9283536

Оцінимо похибку кожного із знайдених значень, використовуючи формули залишкових членів у цих формулах (5.37), (5.39) і (5.42).

Обчислимо $f''(x)=\left(\frac{1}{x}\right)''=\left(-\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{2}{x^3}$, звідки $\max\limits_{[1;2]}|f''(x)|=2$. Тоді похибка формули прямокутників

$$|R_n|\leq\frac{2\cdot1}{24}(0{,}1)^2\approx0{,}83\cdot10^{-3};$$

похибка формули трапецій

$$|R_m|\leq\frac{2\cdot1}{12}(0{,}1)^2\approx1{,}7\cdot10^{-3}.$$

Тепер обчислюємо: $f^{IV}(x)=\frac{24}{x^5}$; $\max\limits_{[1;2]}|f^{IV}(x)|=24$. Звідси отримаємо похибку формули Сімпсона:

$$|R_c|\leq\frac{24\cdot1}{2880}(0{,}1)^4\approx0{,}83\cdot10^{-6}.$$

Отже, за формулою прямокутників з урахуванням похибки:

$$\int_1^2\frac{dx}{x}\approx0{,}692\pm0{,}001;$$

за формулою трапецій

$$\int_1^2\frac{dx}{x}\approx0{,}693\pm0{,}002;$$

за формулою Сімпсона

$$\int_1^2\frac{dx}{x}\approx0{,}693147\pm0{,}000001.$$

Точне значення інтеграла: $\int_1^2\frac{dx}{x}=\ln2=0{,}693147189...$

Висновок: найменшу похибку отримуємо при застосуванні квадратурної формули Сімпсона. ■

Приклад 6.171. Обчислити $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ із точністю 0,0001 за формулою Сімпсона.

Розв'язання. Обчислити цей інтеграл досить складно, оскільки первісна підінтегральної функції не виражається через елементарні функції. За умовою дозволена похибка повинна не перевищувати 0,0001, тому кількість частин n розбиття відрізку інтегрування у формулі (5.41) знайдемо, враховуючи формулу (5.42), із нерівності

$$\frac{M_4(b-a)}{2880}\cdot h^4<0{,}0001 \text{ або } \frac{M_4(b-a)^5}{2880\cdot n^4}<0{,}0001. \qquad (6.6)$$

Тут $M_4 = \max\limits_{[0;1]} \left| f^{IV}(x) \right|$. Обчислимо значення M_4 для функції $f(x) = e^{-x^2}$. Функція $f^{IV}(x) = \left(16x^4 - 48x^2 + 12\right) \cdot e^{-x^2}$ монотонно спадає на відрізку [0;1], тому $M_4 = \left| f^{IV}(0) \right| = 12$.

Підставляючи значення $(b-a)=1$ і $M_4 = 12$ в (6.6), отримаємо $\dfrac{12}{2880 \cdot n^4} < 0{,}0001$, звідки $n^4 > \dfrac{125}{3}$. Остання нерівність виконується для всіх $n \geq 3$. Оберемо для розрахунків $n = 5$. Ділимо відрізок [0;1] на 5 рівних частин із кроком $h = \dfrac{1-0}{5} = 0{,}2$ та обчислюємо значення функції $f(x) = e^{-x^2}$ в точках розбиття x_i та в серединах елементарних відрізків $x_{i-\frac{1}{2}}$ (i=1,…,5).

При цьому, щоб забезпечити задану точність (0,0001), обчислення проводимо з п’ятьма знаками після коми (табл. 6.2), округляючи остаточний результат до чотирьох знаків.

Таблиця 6.2 –

i	x_i	$x_{i-\frac{1}{2}}$	y_i		$y_{i-\frac{1}{2}}$
0	0		1		
		0,1			0,99005
1	0,2			0,96079	
		0,3			0,91393
2	0,4			0,85214	
		0,5			0,77880
3	0,6			0,69768	
		0,7			0,61263
4	0,8			0,52729	
		0,9			0,44486
5	1		0,36788		
Сума			1,36788	3,0379	3,74027

Підставляючи отримані значення у формулу (5.41), отримуємо

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{0{,}2}{6}\left(1{,}36788 + 4 \cdot 3{,}74027 + 2 \cdot 3{,}0379\right) = 0{,}74683 \approx 0{,}7468. \ ■$$

§ 5. Невласні інтеграли

У теоретичній частині посібника було наведено означення невласних інтегралів першого та другого роду, їх основні властивості та ознаки збіжності. Розглянемо приклади, пов’язані з обчисленням та дослідженням невласних інтегралів.

Приклад 6.172. Обчислити невласні інтеграли першого роду або встановити їх розбіжність:

а) $I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$; **б)** $I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10}$; **в)** $I_3 = \int\limits_0^{+\infty} x\sin x\, dx$.

Розв'язання. **а)** За означенням невласного інтеграла першого роду маємо:

$$I_1 = \int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{a\to+\infty} \int\limits_{e^2}^{a} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\bigg|_{e^2}^{a} \right) = \lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2\ln^2 a} \right) = \frac{1}{8}.$$

б) Знайдемо невласний інтеграл I_2:

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10} = \lim_{b\to-\infty} \int\limits_b^0 \frac{dx}{x^2+2x+10} + \lim_{a\to+\infty} \int\limits_0^a \frac{dx}{x^2+2x+10}.$$

Замість точки $x=0$ за проміжну межу інтегрування можна взяти будь-яку іншу скінченну точку числової прямої.

Знайдемо границі з правої частини останньої рівності:

$$\lim_{b\to-\infty} \int\limits_b^0 \frac{dx}{x^2+2x+10} = \lim_{b\to-\infty} \int\limits_b^0 \frac{dx}{(x+1)^2+9} = \frac{1}{3}\lim_{b\to-\infty} \operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}\bigg|_b^0 = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi}{6},$$

$$\lim_{a\to+\infty} \int\limits_0^a \frac{dx}{x^2+2x+10} = \lim_{a\to+\infty} \int\limits_0^a \frac{dx}{(x+1)^2+9} = \frac{1}{3}\lim_{a\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}\bigg|_0^a = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$$

Підставляючи ці границі у вираз для I_2, отримаємо:

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

в) Використовуючи означення невласного інтеграла першого роду, маємо:

$$I_3 = \int\limits_0^{+\infty} x\sin x\, dx = \lim_{a\to+\infty} \int\limits_0^a x\sin x\, dx = \left\| \begin{matrix} u = x,\ dv = \sin x dx, \\ du = dx,\ v = -\cos x \end{matrix} \right\| =$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\left(-x\cos x\big|_0^a + \int\limits_0^a \cos x\, dx \right) = \lim_{a\to+\infty}\left(-a\cos a + \sin a \right).$$

Останньої границі не існує. Інтеграл I_3 є розбіжним. ■

Приклад 6.173. Обчислити невласний інтеграл першого роду

$$I = \int\limits_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2-3\right)^3}}.$$

Розв'язання. Переходячи до границі, отримаємо:

$$I = \int\limits_2^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{\left(x^2-3\right)^3}} = \lim_{a\to+\infty} \int\limits_2^a \frac{x\,dx}{\sqrt{\left(x^2-3\right)^3}} = -\lim_{a\to+\infty} \left(x^2-3\right)^{-\frac{1}{2}}\bigg|_2^a = = -\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-3}} - 1 \right) = 1.$$

■

У теоретичній частині цього посібника були розглянуті загальна та частинна ознаки порівняння, які дають змогу дослідити на збіжність невласні інтеграли. Розглянемо відповідні приклади.

Приклад 6.174. Дослідити на збіжність інтеграл

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{3x^5+x^3+1}.$$

Розв'язання. Використаємо частинну ознаку порівняння в граничній формі. Оскільки в знаменнику підінтегрального дробу знаходиться многочлен 5 степеня, то порівняємо підінтегральну функцію $f(x)=\dfrac{1}{3x^5+x^3+1}$ з $\dfrac{1}{x^5}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{x^5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{3x^5+x^3+1}=\frac{1}{3}=const\neq 0,$$

Таким чином, $f(x)$ є нескінченно малою порядку $\lambda=5$ у порівнянні з $\dfrac{1}{x}$. Оскільки 5>1, то заданий інтеграл є збіжним. ■

Приклад 6.175. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x+\sin^2 x}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{1}{x+\sin^2 x}$ є неперервною та додатною при $x\geq 1$. При $x\to+\infty$ функція $f(x)$ є нескінченно малою порядку $\lambda=1$ у порівнянні з $\dfrac{1}{x}$, тому, за частинною ознакою порівняння в граничній формі, інтеграл є розбіжним. ■

Приклад 6.176. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\left(1-\cos\dfrac{2}{x}\right)dx$.

Розв'язання. Запишемо підінтегральну функцію у вигляді $f(x)=1-\cos\dfrac{2}{x}=2\sin^2\dfrac{1}{x}$. Вона є додатною та неперервною при $x\geq 1$. Оскільки при $x\to+\infty$ функція $2\sin^2\dfrac{1}{x}$ є нескінченно малою, еквівалентною $\dfrac{2}{x^2}$, то, за частинною ознакою порівняння в граничній формі, інтеграл є збіжним. ■

Приклад 6.177. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\ln\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+(\alpha-1)}{\alpha}dx$, де $\alpha>0$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральну функцію до вигляду $f(x)=\ln\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+(\alpha-1)}{\alpha}=\ln\left(1+\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\alpha}\right)$. Таким чином при $x\to+\infty$ підінтегральна функція є нескінченно малою, еквівалентною $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\alpha}$, яка, у свою чергу, еквівалентна $\frac{1}{\alpha x}$ (див. додаток А). Тому, за частинною ознакою порівняння в граничній формі, інтеграл є розбіжним.

Приклад 6.178. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1-4\sin 2x}{x^3+2\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1-4\sin 2x}{x^3+2\sqrt{x}}$ змінює знак на проміжку інтегрування, тому дослідимо на збіжність $\int\limits_{1}^{+\infty}|f(x)|dx$. Оскільки

$$|f(x)|=\frac{|1-4\sin 2x|}{x^3+2\sqrt{x}}\leq\frac{1+|4\sin 2x|}{x^3+2\sqrt{x}}\leq\frac{5}{x^3},$$

а інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{5}{x^3}dx$ є збіжним, то, за загальною ознакою порівняння, збіжним є і інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}|f(x)|dx$. Таким чином, заданий інтеграл збігається абсолютно. ■

Приклад 6.179. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}$, де $n\in\mathbb{N}$.

Розв'язання. Подамо за означенням невласний інтеграл у вигляді границі:

$$I=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}=\lim_{B\to\infty}\int\limits_{0}^{B}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}.$$

Під знаком визначеного інтеграла застосуємо підстановку $x=\operatorname{tg}t$, де $0\leq t<\frac{\pi}{2}$. Тоді $x=0$ при $t=0$ і $x=B$ при $t=\operatorname{arctg}B$. Виконуючи заміну змінної у визначеному інтегралі, отримаємо:

$$\int\limits_{0}^{B}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}=\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg}B}\cos^{2n-2}t\,dt.$$

Оскільки при $B\to+\infty$ верхня межа інтегрування $\operatorname{arctg}B\to\frac{\pi}{2}-0$, то

$$\lim_{B\to\infty}\int\limits_{0}^{B}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}=\lim_{B\to\infty}\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg}B}\cos^{2n-2}t\,dt=\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos^{2n-2}t\,dt.$$

Таким чином, після заміни змінної отримали визначений інтеграл, обчислений у прикладі 6.140. Підставляючи туди замість n парне $2n-2$, отримаємо:

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}x dx=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2},\ n>1.$$

При $n=1$ $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$. ■

Приклад 6.180. Використовуючи означення, обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_1^e\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$; **б)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos x}$; **в)** $\int\limits_0^1\frac{dx}{1-x^3}$.

Розв'язання. а) Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ є необмеженою в околі точки $x=1$. На будь-якому відрізку $[1+\varepsilon;e]$ $(0<\varepsilon<e-1)$ вона є неперервною, а тому інтегровною. За визначенням невласного інтеграла другого роду маємо:

$$\int\limits_1^e\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{1+\varepsilon}^e\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{3}{2}(\ln x)^{\frac{2}{3}}\Bigg|_{1+\varepsilon}^{e}\right)=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(1-\sqrt[3]{\ln^2(1+\varepsilon)}\right)=\frac{3}{2}.\ ■$$

б) Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ є необмеженою в околі точки $x=\frac{\pi}{2}$ і є інтегровною на будь-якому відрізку $\left[0;\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$, де $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$, оскільки є неперервною на цьому відрізку. Тому отримуємо:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos x}=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{dx}{\cos x}=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\ln\left(\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\right]=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\ln\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right]=+\infty.$$

Інтеграл є розбіжним. ■

в) Розкладемо підінтегральну функцію $f(x)=\frac{1}{1-x^3}$ на суму простих дробів:

$$f(x)=\frac{1}{1-x^3}=\frac{1}{(1-x)(x^2+x+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{x+2}{x^2+x+1}\right).$$

Тоді отримуємо:

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{1-x^3}=\frac{1}{3}\int\limits_0^1\frac{dx}{1-x}+\frac{1}{3}\int\limits_0^1\frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

Другий доданок у правій частині цієї рівності є визначеним інтегралом, тому він не впливає на характер збіжності інтеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$. Збіжність заданого інтеграла визначається збіжністю інтеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x}$.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln(1-x)\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} = +\infty .$$

Таким чином, заданий інтеграл є розбіжним. ■

Приклад 6.181. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx$.

Розв'язання. Цей інтеграл є невласним, оскільки підінтегральна функція є необмеженою в лівому околі точки $x=2$.

Знайдемо невизначений інтеграл $\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx$. Для цього перетворимо підінтегральну функцію:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}=\frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} .$$

$$\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx = 2\arcsin\frac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}+C .$$

Функція $F(x)=2\arcsin\frac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$ неперервна на $[0;2-\varepsilon]$ $(0<\varepsilon<2)$ та $F'(x)=f(x)$ на $(0;2-\varepsilon)$. Тому отримуємо:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{2-\varepsilon} \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\arcsin\frac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}\right)\Bigg|_0^{2-\varepsilon} = \pi+2 . \blacksquare$$

Приклад 6.182. Дослідити на збіжність інтеграл $I=\int\limits_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є необмеженою в околі особливої точки $x=1\in[0;\,2]$, тому (див. *зауваження 1.19*)

$$I=\int\limits_0^2 \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{\substack{\alpha\to+0\\ \beta\to+0}}\left(\int\limits_0^{1-\alpha} \frac{dx}{1-x^2}+\int\limits_{1+\beta}^2 \frac{dx}{1-x^2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{\substack{\alpha\to+0\\ \beta\to+0}}\left(\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_0^{1-\alpha}+\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_{1+\beta}^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\substack{\alpha\to+0\\ \beta\to+0}}\left(\ln\frac{|2-\alpha|}{2+\beta}-\ln\frac{\alpha}{\beta}+\ln 3\right).$$

Такої границі не існує. Пояснимо це. Застосуємо означення границі за Гейне: для $\alpha_1^{(n)}=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}+0, \beta_1^{(n)}=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}+0$ маємо

$$\frac{1}{2}\left[\left(\ln\frac{\left|2-\alpha_1^{(n)}\right|}{2+\beta_1^{(n)}}-\ln\frac{\alpha_1^{(n)}}{\beta_1^{(n)}}+\ln 3\right)\right]\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\ln 3}{2},$$

для $\alpha_1^{(n)}=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}+0, \beta_1^{(n)}=\frac{2}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}+0$ маємо

$$\frac{1}{2}\left[\left(\ln\frac{\left|2-\alpha_2^{(n)}\right|}{2+\beta_2^{(n)}}-\ln\frac{\alpha_1^{(n)}}{\beta_2^{(n)}}+\ln 3\right)\right]\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\ln 6}{2},$$

тому границі не існує. Отже, заданий інтеграл розбігається. ■

Зауваження 6.1. У випадку, коли особлива точка c функції $f(x)$ є внутрішньою точкою відрізка $[a,b]$, а функція $f(x)$ інтегровна на будь-якому відрізку $[\alpha,\beta]\subset\left([a,c)\bigcup(c,b]\right)$, то, за означенням, із розбіжності одного із інтегралів $\int_a^c f(x)dx$ або $\int_c^b f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int_a^b f(x)dx$.

Звідси отримаємо інший спосіб розв'язання прикладу 6.182. Розглянемо інтеграл $\int_0^1\frac{dx}{1-x^2}$ з особливою точкою $x=1$, яка збігається з правим кінцем проміжку інтегрування:

$$\int_0^1\frac{dx}{1-x^2}=\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{1-\alpha}\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to+0}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_0^{1-\alpha}=\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to+0}\ln\frac{|2-\alpha|}{\alpha}=+\infty.$$

Він розбігається. Отже, згідно із зауваженням 6.1, розбігається й інтеграл $I=\int_0^2\frac{dx}{1-x^2}$.

Наступний приклад розв'яжемо також із застосуванням зауваження 6.1.

Приклад 6.183. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[5]{x}}$.

Розв'язання. Цей інтеграл є невласним, оскільки підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{x\sqrt[5]{x}}$ є необмеженою в околі точки $x=0$. Подамо інтеграл у вигляді:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x\sqrt{x}}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x\sqrt[5]{x}}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[5]{x}}.$$

Обидва інтеграли в правій частині останньої рівності є розбіжними, оскільки інтеграл $\int_0^1\frac{dx}{x^\lambda}$ є розбіжним при $\lambda>1$, а у нашому випадку $\lambda=\frac{6}{5}>1$. Таким чином, за частинною ознакою порівняння для невласних інтегралів другого роду інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt[5]{x}}$ є розбіжним, а тому, за зауваженням 6.1, розбіжним є й інтеграл $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x\sqrt[5]{x}}$. ■

Приклад 6.184. Обчислити невласний інтеграл $I_n = \int\limits_0^1 x^m \ln^n x\, dx$, де $m > -1,\ n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання. Знайдемо значення інтеграла при $n = 0$:

$$I_0 = \int\limits_0^1 x^m\ dx = \left.\frac{x^{m+1}}{m+1}\right|_0^1 = \frac{1}{m+1}.$$

При $n > 0$ проінтегруємо I_n частинами, вибираючи $u = \ln^n x,\quad dv = x^m dx$. Тоді $du = \frac{n\ln^{n-1} x\,dx}{x}, v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$. Отримаємо:

$$I_n = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left.\frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x\right|_\varepsilon^1 - \frac{n}{m+1}\int\limits_\varepsilon^1 x^m \ln^{n-1} x\,dx\right) = -\frac{1}{m+1}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln^n \varepsilon}{\varepsilon^{-m-1}} - \frac{n}{m+1}I_{n-1}.$$

Обчислимо границю за правилом Лопіталя. При першому застосування цього правила отримаємо:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln^n \varepsilon}{\varepsilon^{-m-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \left[\text{правило Лопіталя}\right] \overset{?}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{n\ln^{n-1}\varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon}}{(-m-1)\varepsilon^{-m-2}} = -\frac{n}{m+1}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln^{n-1}\varepsilon}{\varepsilon^{-m-1}}.$$

Якщо $n > 1$, то виникає потреба в повторному застосуванні правила Лопіталя:

$$-\frac{n}{m+1}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln^{n-1}\varepsilon}{\varepsilon^{-m-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \left[\text{правило Лопіталя}\right] \overset{?}{=} \frac{n(n-1)}{(m+1)^2}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln^{n-2}\varepsilon}{\varepsilon^{-m-1}}.$$

Правило Лопіталя застосовується загалом n разів. При останньому його застосуванні одержимо:

$$\frac{n(n-1)}{(m+1)^2}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln^{n-2}\varepsilon}{\varepsilon^{-m-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \left[\text{правило Лопіталя}\right] \overset{?}{=} \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^n}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^{-m-1}} = 0.$$

Отже, маємо:

$$I_n = -\frac{n}{m+1}I_{n-1}.$$

Остання рівність визначає рекурентну формулу, за допомогою якої інтеграл I_n приводиться до I_0 при довільному $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = -\frac{n}{m+1}I_{n-1} = \cdots = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^n}I_0 = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}.\ ■$$

Приклад 6.185. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $I = \int\limits_0^{+\infty}\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}dx$.

Розв'язання. Крім того, що інтеграл обчислюється на нескінченному проміжку, підінтегральна функція є необмеженою в околі нижньої межі інтегрування – точки $x = 0$. Розіб'ємо проміжок інтегрування на два проміжки – $(0; \pi)$ та $(\pi; +\infty)$. Маємо:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx + \int_{\pi}^{+\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx = I_1 + I_2.$$

На першому з цих проміжків інтеграл є невласним інтегралом другого роду, на другому проміжку – невласним інтегралом першого роду. Подамо підінтегральну функцію у вигляді:

$$f(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = d\left(\frac{\sin x}{x}\right),$$

тоді

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx = \int_0^{\pi} d\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\varepsilon}^{\pi} d\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{\varepsilon\to+0} \left.\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right|_{\varepsilon}^{\pi} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} = -1.$$

Таким чином, інтеграл I_1 є збіжним, а його значення $I_1 = -1$. Знайдемо інтеграл I_2:

$$I_2 = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{\pi}^{b} d\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{b\to+\infty} \left.\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right|_{\pi}^{b} = \lim_{b\to+\infty} \frac{\sin b}{b} = 0.$$

Ми отримали, що інтеграли I_1 та I_2 є збіжними, тобто збіжним є також інтеграл $I = I_1 + I_2$. ■

Приклад 6.186. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^4 - 2x^2 - 5}{x^6 + 4x^3 + 9}\,dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 - 5}{x^6 + 4x^3 + 9}$ є неперервною на всьому проміжку інтегрування $[0; +\infty)$, тому маємо невласний інтеграл першого роду. Оскільки $f(x)$ є раціональною функцією, то її первісна може бути поданою у вигляді елементарної функції. Проте, оскільки задача обчислення заданого інтеграла не ставиться, то замість знаходження первісної з наступним обчисленням її границі на нескінченності, обмежимося використанням ознаки порівняння для встановлення збіжності чи розбіжності цього інтеграла.

Різниця між степенями многочленів у знаменнику та чисельнику підінтегрального виразу дорівнює 2, тому в якості еталонного інтеграла для порівняння розглянемо $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$, що є збіжним. Оскільки $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = 1 = \text{const} \neq 0$, то інтеграл I також є збіжним. ■

Приклад 6.187. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+x^3}}$ є необмеженою на нижній межі інтегрування – точці $x=0$, тому для дослідження інтеграла на збіжність подамо його у вигляді суми двох інтегралів:

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}=\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}+\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}=I_1+I_2,\ I_1=\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x+x^3}},\ I_2=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}.$$

Для дослідження кожного з інтегралів I_1 та I_2 використаємо ознаку порівняння. Підінтегральна функція в I_1 при $x\to 0+$ є нескінченно великою, еквівалентною $x^{-\frac{1}{2}}$, тому, за частинною ознакою порівняння в граничній формі, інтеграл I_1 є збіжним. У інтегралі I_2 підінтегральна функція при $x\to+\infty$ – нескінченно мала, еквівалентна $x^{-\frac{3}{2}}$, звідки випливає, що цей інтеграл також є збіжним. Оскільки I_1 та I_2 є збіжними інтегралами, то їх сума також є збіжним інтегралом. ■

При дослідженні на умовну збіжність невласних інтегралів від функцій, що змінюють знак на проміжку інтегрування нескінченне число разів доцільно використовувати ознаку Діріхле-Абеля, (*теорема 1.35*).

Приклад 6.188. Дослідити на збіжність інтеграл $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\cos x}{1+x^2}dx$.

Розв'язання. Спочатку подамо заданий інтеграл у вигляді

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\cos x}{1+x^2}dx=\int\limits_0^{1}\frac{x\cos x}{1+x^2}dx+\int\limits_1^{+\infty}\frac{x\cos x}{1+x^2}dx=I_1+I_2.$$

Перший інтеграл $I_1=\int\limits_0^{1}\frac{x\cos x}{1+x^2}dx$ є визначеним інтегралом від неперервної функції, тому він приймає скінченне значення. Тепер дослідимо другий інтеграл на збіжність.

Перевіримо виконання умов ознаки Діріхле-Абеля для інтеграла $I_2=\int\limits_1^{+\infty}\frac{x\cos x}{1+x^2}dx$:

1) функція $f(x)=\cos x$ неперервна на $[1;+\infty)$, її первісна $F(x)=\int\limits_1^{x}\cos tdt=\sin x-\sin 1$ є обмеженою на $[1;+\infty)$;

2) функція $g(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ є неперервною, а також незростаючою на $[1;+\infty)$, оскільки $g'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\le 0$ на $[1;+\infty)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

Тому, за ознакою Діріхле-Абеля, інтеграл I_2 є збіжним.

Для дослідження інтеграла I_2 на абсолютну збіжність застосуємо оцінку $|\cos x|\ge\cos^2 x$. Маємо:

$$\left|\frac{x\cos x}{1+x^2}\right|\ge\frac{\cos^2 x}{1+x^2}=\frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Таким чином, отримуємо:

$$\int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{x\cos x}{1+x^2}\right|dx\ge\int\limits_1^{+\infty}\frac{x\cos 2xdx}{2\left(1+x^2\right)}+\int\limits_1^{+\infty}\frac{xdx}{2\left(1+x^2\right)}=I_{2,1}+I_{2,2}.$$

Збіжність інтеграла $I_{2,1}=\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{x\cos 2xdx}{2\left(1+x^2\right)}$ доводиться аналогічно розглянутому вище інтегралу I_2. Інтеграл $I_{2,2}=\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{x\,dx}{2\left(1+x^2\right)}$ є розбіжним за частинною ознакою порівняння ($\lambda=1$), тому інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\left|\dfrac{x\cos x}{1+x^2}\right|dx$ є розбіжним, а інтеграл I_2 збігається умовно, а разом із ним умовно збігається й цей інтеграл. ■

Приклад 6.189. Дослідити на збіжність інтеграл $I=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}dx$.

Розв’язання. Оскільки підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}$ є необмеженою в околі лівої межі інтегрування $x=0$, то для дослідження заданого інтеграла на збіжність подамо його у вигляді суми двох невласних інтегралів:

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}dx=\int\limits_0^{1}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}dx+\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}dx=I_1+I_2.$$

Оскільки при $x\to 0+$ функція $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}$ є нескінченно великою, еквівалентною $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, то інтеграл I_1, за частинною ознакою порівняння в граничній формі, є абсолютно збіжним (тут підінтегральна функція є додатною на проміжку інтегрування $[0;1]$). Оскільки має місце оцінка

$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x^3+x^5}}$, а функція в правій частині цієї нерівності еквівалентна $\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$, то за частинною ознакою порівняння інтеграл I_2 є абсолютно збіжним. Тому сума інтегралів I_1 та I_2 теж є абсолютно збіжним інтегралом. ■

Приклад 6.190. Дослідити на збіжність інтеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^{\frac{3}{2}}}dx$.

Розв'язання. Здійснимо заміну під знаком інтеграла $\frac{1}{x} = t,\, dx = -\frac{1}{t^2}dt$. Тоді невласний інтеграл другого роду перетвориться в невласний інтеграл першого роду на проміжку $[1;+\infty)$, а саме:

$$I = -\int\limits_{+\infty}^{1} \frac{\cos t}{t^{-\frac{3}{2}}} \cdot \frac{dt}{t^2} = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{1}{2}}}dt .$$

Дослідимо спочатку на звичайну збіжність. Покладемо $f(t) = \cos t$, $g(t) = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$. Отримаємо:

1) функція $f(t)$ – неперервна на $[1,+\infty)$, а її первісна $F(t) = \int\limits_1^t \cos y\, dy = \sin t - \sin 1$ – обмежена на $[1,+\infty)$;

2) $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} = 0$;

3) функція $g(t) = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$ є неперервною, а також незростаючою на $[1,+\infty)$.

Таким чином, за ознакою Діріхле-Абеля інтеграл I збігається.

Дослідимо цей інтеграл на абсолютну збіжність. Застосуємо оцінку

$$\left|\frac{\cos t}{t^{\frac{1}{2}}}\right| \ge \frac{\cos^2 t}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{1+\cos 2t}{2t^{\frac{1}{2}}},$$

з якої випливає, що інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{\cos t}{t^{\frac{1}{2}}}\right|dt$ є розбіжним, оскільки інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2t}{2t^{\frac{1}{2}}}dt$ збігається, а інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dt}{2t^{\frac{1}{2}}}$ розбігається. Отже, інтеграл I збігається умовно. ■

Приклад 6.191. Дослідити на збіжність інтеграл $I=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\ln x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Розв'язання. Спочатку подамо інтеграл у вигляді

$$I=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\ln x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\limits_{1}^{e}\frac{\sin x\cdot\ln x}{\sqrt{x^2+1}}dx+\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\ln x}{\sqrt{x^2+1}}dx=I_1+I_2.$$

Перший інтеграл $I_1=\int\limits_{1}^{e}\frac{\sin x\cdot\ln x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ є визначеним інтегралом від неперервної функції, тому він набуває скінченного значення. Тепер дослідимо другий інтеграл на збіжність.

Для дослідження інтеграла $I_2=\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\ln x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ на збіжність застосуємо ознаку Діріхле-Абеля. Функція $f(x)=\sin x$ неперервна на $[e;+\infty)$, її первісна $F(x)=\int\limits_{e}^{x}\sin t\,dt=\cos e-\cos x$ є обмеженою на $[e;+\infty)$. Розглянемо функцію $g(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}$. Оскільки $0<\frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}<\frac{\ln x}{x}$ на проміжку інтегрування, а $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, то $g(x)$ є нескінченно малою при $x\to+\infty$. Дослідимо $g(x)$ на монотонність за допомогою похідної:

$$g'(x)=\frac{1-x^2(\ln x-1)}{x\left(x^2+1\right)^{3/2}}\le 0,\quad x\in[e;+\infty).$$

Таким чином, функція $g(x)$ не зростає на проміжку $[e;+\infty)$. Умови Діріхле-Абеля виконуються, тому інтеграл I_2 є збіжним.

Здійснимо дослідження інтеграла I_2 на абсолютну збіжність. Для цього використаємо оцінки:

$$\left|\frac{\sin x\cdot\ln x}{\sqrt{x^2+1}}\right|\ge\frac{\ln x\cdot\sin^2 x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\ln x}{2\sqrt{x^2+1}}-\frac{\ln x\cdot\cos 2x}{2\sqrt{x^2+1}}.$$

Інтеграл $\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{\ln x\cdot\cos 2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx$ збігається аналогічно розглянутому вище інтегралу I_2.

Має місце оцінка:

$$\frac{\ln x}{2\sqrt{x^2+1}}\ge\frac{1}{4x},\ x\ge e.$$

Невласний інтеграл $\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{1}{4x}dx$ розбігається, а тому розбігається й інтеграл $\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{\ln x}{2\sqrt{x^2+1}}dx$ (за ознакою порівняння).

Отже, інтеграл $\int\limits_{e}^{+\infty}\left|\frac{\sin x\cdot\ln x}{\sqrt{x^2+1}}\right|dx$ розбігається, а інтеграл I_2 збігається умовно, таким чином, умовно збігається й заданий інтеграл. ■

Для розв'язання наступного прикладу використаємо означення головного значення невласного інтеграла за Коші (*означення 1.51 і 1.52*).

Приклад 6.192. Знайти головне значення інтеграла за Коші:

а) $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2-2x+5}dx$; **б)** $I=\int\limits_{0,5}^{2}\frac{dx}{x\ln x}$.

Розв'язання. а) Знайдемо первісну підінтегральної функції:

$$\int\frac{x}{x^2-2x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2-2x+5\right)}{x^2-2x+5}+\int\frac{dx}{\left(x-1\right)^2+4}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+5\right)+\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x-1}{2}+C.$$

Тоді

$$I=\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2-2x+5}dx=\lim_{M\to+\infty}\int\limits_{-M}^{M}\frac{xdx}{x^2-2x+5}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{M\to+\infty}\left[\ln\left(x^2-2x+5\right)+\text{arctg}\frac{x-1}{2}\right]\Bigg|_{-M}^{M}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{M\to+\infty}\ln\frac{M^2-2M+5}{M^2+2M+5}+\frac{1}{2}\lim_{M\to+\infty}\left(\text{arctg}\frac{M-1}{2}-\text{arctg}\frac{-M-1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 1+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

б) Первісна підінтегральної функції має вигляд:

$$\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{d\left(\ln x\right)}{\ln x}=\ln\left|\ln x\right|+C,$$

тому

$$I=\text{V.p.}\int\limits_{0,5}^{2}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{0,5}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x\ln x}+\int\limits_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x\ln x}\right]=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln\left|\ln x\right|\Big|_{0,5}^{1-\varepsilon}+\ln\left|\ln x\right|\Big|_{1+\varepsilon}^{2}\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln\left|\left(\ln\left(1-\varepsilon\right)\right)\right|-\ln\ln 2+\ln\ln 2-\ln\left|\left(\ln\left(1+\varepsilon\right)\right)\right|\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{\ln\left(1-\varepsilon\right)}{\ln\left(1+\varepsilon\right)}\right|=\ln 1=0. \ ■$$

Розділ 7. ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

§1. Невизначений інтеграл

1. Варіанти індивідуальних завдань

1. – 9. Обчислити невизначені інтеграли

ВАРІАНТ 1

1. $\int \frac{\sqrt[4]{\operatorname{tg} x}\,dx}{\sin^2 x}$	2. $\int e^{-x^4} x^3 dx$	3. $\int x^3 \operatorname{arctg} x dx$
4. $\int \frac{(x^2-5)dx}{(x^2-4x+5)(x^2+9)}$	5. $\int e^{4x}\cos 4x dx$	6. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$
7. $\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$	8. $\int x^{-2/3}\left(1+x^{1/3}\right)^{-3} dx$	9. $\int \frac{3\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh} x+3\operatorname{ch} x}dx$

ВАРІАНТ 2

1. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^{4x}}}$	2. $\int 2^{x^2} x dx$	3. $\int x^2 \operatorname{arctg} 4x dx$
4. $\int \frac{(x+1)dx}{x(x^4+6x^2+8)}$	5. $\int e^{5x}\sin 5x dx$	6. $\int \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}dx$
7. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$	8. $\int x^{1/2}\left(1+x^{1/3}\right)^{-2} dx$	9. $\int \frac{3}{2\operatorname{sh} x+3\operatorname{ch} x}dx$

ВАРІАНТ 3

1. $\int \frac{\ln\left(\arccos x\right)dx}{\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}$	2. $\int e^{x^2-2} x dx$	3. $\int x^3 \sin 5x dx$
4. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+4)^2}$	5. $\int x^2 e^x \sin x dx$	6. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$
7. $\int \frac{\left(x^3+2x^2+x-1\right)dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}$	8. $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3\left(x-4\right)}}$	9. $\int \frac{7}{2\operatorname{sh} x-4\operatorname{ch} x}dx$

ВАРІАНТ 4

1. $\int \frac{2x-4}{(x^2-4x+5)^3}dx$	2. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$	3. $\int \operatorname{arctg}(7x+2)dx$
4. $\int \frac{\left(3x^3+2x^2+1\right)dx}{x\left(x+1\right)^2\left(x^2+4\right)}$	5. $\int e^{3x}\sin x dx$	6. $\int \frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}dx$
7. $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$	8. $\int x^{1/2}\left(1+x^{1/3}\right)^{-2} dx$	9. $\int \frac{\operatorname{ch} x+2}{2\operatorname{sh} x+3\operatorname{ch} x}dx$

ВАРІАНТ 5

1. $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$	2. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$	3. $\int x \arcsin x\,dx$
4. $\int \frac{\left(x^4-1\right)dx}{\left(x^2+9\right)\left(x^3+x^2\right)}$	5. $\int e^{3x} \cos x dx$	6. $\int x^2 \sqrt[3]{\left(x+1\right)^2} dx$
7. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$	8. $\int x^{1/4}\left(1+x^{1/3}\right)^{-2} dx$	9. $\int \frac{\operatorname{sh} x+2}{2\operatorname{sh} x+5\operatorname{ch} x} dx$

ВАРІАНТ 6

1. $\int \frac{\ln\left(\arcsin x\right)}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}} dx$	2. $\int e^{3x^2-5} x dx$	3. $\int x^2 e^{2x} dx$
4. $\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{x^4+x^3+2x^2} dx$	5. $\int e^x \sin 2x dx$	6. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\left(x+2\right)^5\left(x-1\right)^3}}$
7. $\int \frac{\left(x^3-2x^2+1\right)dx}{\sqrt{x^2-7x+10}}$	8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$	9. $\int \frac{\operatorname{sh} x-2}{2\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x} dx$

ВАРІАНТ 7

1. $\int e^{2x^2+2x-1}(2x+1)dx$	2. $\int \frac{3x^2 dx}{x^6-25}$	3. $\int 2^{-x} x dx$
4. $\int \frac{\left(3x^2+4x-1\right)dx}{\left(x^2+4x+29\right)^2}$	5. $\int e^x \cos 2x dx$	6. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$
7. $\int \frac{\left(x^2+4x\right)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$	8. $\int \sqrt[3]{x+2x^3} dx$	9. $\int \frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x} dx$

ВАРІАНТ 8

1. $\int e^{2x^2+\ln x} dx$	2. $\int \frac{\sin 2x}{3+\sin^2 x} dx$	3. $\int \operatorname{arctg} 2x\,dx$
4. $\int \frac{\left(x+2\right)dx}{\left(x-1\right)^2 x\left(x^2+4\right)}$	5. $\int e^{2x} \cos 3x dx$	6. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx$
7. $\int \frac{\left(x^3-x-1\right)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$	8. $\int \sqrt[3]{x-x^3} dx$	9. $\int \frac{\operatorname{th} x}{2\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x} dx$

ВАРІАНТ 9

1. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x} + \operatorname{ctg} x}{\cos^2 x} dx$	2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$	3. $\int x^2 \ln x dx$
4. $\int \frac{\left(x^4 - 1\right) dx}{\left(x^2 + 9\right)\left(x^3 + x^2\right)}$	5. $\int e^{2x} \sin 3x dx$	6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x^2 + 4x + 1} - \sqrt{2x+1}}$
7. $\int x^2 \sqrt{x^2 + 4} dx$	8. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{2 - x^3}}$	9. $\int \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2 \operatorname{sh} x - 5 \operatorname{ch} x} dx$

ВАРІАНТ 10

1. $\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x dx$	2. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$	3. $\int (x+2) \cos 3x dx$
4. $\int \frac{20 dx}{(x+4)(x^2 + 4x + 20)}$	5. $\int e^{2x+1} \sin x dx$	6. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$
7. $\int \frac{\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right) dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}$	8. $\int x^{-1/2} \left(1 + x^{1/4}\right)^{-10} dx$	9. $\int \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2 \operatorname{sh} x - 5 \operatorname{ch} x} dx$

ВАРІАНТ 11

1. $\int \frac{x^3 dx}{x^8 - 18}$	2. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$	3. $\int (x^2 - 2x + 3) \ln(x+1) dx$
4. $\int \frac{(x+5) dx}{(x+2)^2 \left(x^4 - 1\right)}$	5. $\int e^{2x+1} \cos x dx$	6. $\int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$
7. $\int \frac{\left(1 - x + x^2\right) dx}{\sqrt{1 + x - x^2}}$	8. $\int \frac{dx}{x \sqrt[6]{x^6 + 1}}$	9. $\int \frac{\operatorname{sh} x - 1}{2 \operatorname{sh} x + 5 \operatorname{ch} x} dx$

ВАРІАНТ 12

1. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4 - e^{2x}}}$	2. $\int \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} dx$	3. $\int \arccos(3x - 2) dx$
4. $\int \frac{(2x^3 + 3) dx}{(4x^2 - 1)(x^2 + 6x)}$	5. $\int e^{4x} \sin 4x dx$	6. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-7)^7 (x-5)^5}}$
7. $\int x \sqrt{x^2 + 2x + 2} dx$	8. $\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}$	9. $\int \frac{3 \operatorname{sh} x}{2 \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x} dx$

ВАРІАНТ 13

1. $\int e^x \sin(e^x) dx$	2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x}}$	3. $\int (x^2 - 5) \cos 4x dx$
4. $\int \frac{x-1}{x^2 + 6x + 8} dx$	5. $\int e^x \cos 5x dx$	6. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-1)^6 (x+2)^4}}$
7. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$	8. $\int x^{-2/3} \left(1 + x^{1/3}\right)^{-3} dx$	9. $\int \frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{2 \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x} dx$

2. Приклад виконання індивідуального завдання

У наступних прикладах обчислити невизначені інтеграли.

Приклад 7.1. $I_1 = \int \frac{x^2 + 2x\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}} dx$.

Розв'язання. Цей інтеграл обчислюється безпосереднім інтегруванням і при застосуванні формули (1) розширеної таблиці основних інтегралів:

$$I_1 = \int \frac{x^2 + 2x\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 2x + 3x^{-\frac{1}{2}} \right) dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + x^2 + 6\sqrt{x} + C. \blacksquare$$

Приклад 7.2. $I_2 = \int e^x \sin\left(e^x\right) dx$.

Розв'язання. Внесемо функцію e^x під диференціал:

$$I_2 = \int \sin\left(e^x\right) \cdot e^x dx = \left\| d\left(e^x\right) = e^x dx \right\| = \int \sin\left(e^x\right) \cdot d\left(e^x\right),$$

після чого застосуємо формулу (5) розширеної таблиці основних інтегралів:

$$I_2 = -\cos\left(e^x\right) + C. \blacksquare$$

Приклад 7.3. $I_3 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{3 - 2x^3}}$.

Розв'язання. Оскільки $d\left(3 - 2x^3\right) = -6x^2 dx$, то $x^2 dx = -\frac{1}{6} d\left(3 - 2x^3\right)$.

Звідки отримаємо

$$I_3 = -\frac{1}{6} \int \frac{d\left(3 - 2x^3\right)}{\sqrt{3 - 2x^3}} = -\frac{1}{6} \int \left(3 - 2x^3\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(3 - 2x^3\right) =$$

$$= -\frac{1}{6} \frac{\left(3 - 2x^3\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{3 - 2x^3} + C. \blacksquare$$

Приклад 7.4. $I_4 = \int (x^2 - 5)\cos 4x dx$.

Розв'язання. Цей інтеграл відноситься до першого класу функцій, що інтегруються частинами. Для його обчислення двічі застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$I_4 = \int (x^2 - 5)\cos 4x dx = \left\| \begin{matrix} u = x^2 - 5,\ du = 2x dx, \\ dv = \cos 4x, v = \frac{1}{4}\sin 4x. \end{matrix} \right\| = \frac{1}{4}\left(x^2 - 5\right)\sin 4x -$$

$$-\frac{1}{2}\int x\sin 4x\,dx=\left\|\begin{matrix} u=x, & du=dx,\\ dv=\sin 4x, & v=-\frac{1}{4}\cos 4x.\end{matrix}\right\|=\frac{1}{4}\left(x^2-5\right)\sin 4x-$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}x\cos 4x+\frac{1}{4}\int\cos 4x\,dx\right)=\frac{1}{4}\left(x^2-5\right)\sin 4x+\frac{1}{8}x\cos 4x-\frac{1}{32}\sin 4x+C.\ \blacksquare$$

Приклад 7.5. $I_5=\int\frac{x-1}{x^2-6x+8}dx.$

Розв'язання. Знайдемо похідну від квадратного тричлена в знаменнику: $\left(x^2-6x+12\right)'=2x-6$. Представимо чисельник сумою:

$$x-1=\frac{1}{2}(2x-6)+\left(\frac{1}{2}\cdot 6-1\right)=\frac{1}{2}(2x-6)+2.$$

Тоді

$$I_5=\int\frac{\frac{1}{2}(2x-6)+2}{x^2-6x+8}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-6)\,dx}{x^2-6x+8}+2\int\frac{dx}{x^2-6x+8}=I_{5,1}+I_{5,2}.$$

Перший інтеграл обчислимо за допомогою внесення під диференціал квадратного тричлена, а другий – виділенням повного квадрата в квадратному тричлені:

$$I_{5,1}=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-6)\,dx}{x^2-6x+12}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2-6x+12\right)}{x^2-6x+12}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-6x+12\right|+C,$$

$$I_{5,2}=2\int\frac{dx}{x^2-6x+12}=\left\|\begin{matrix} x^2-6x+12= \\ =\underline{x^2-2\cdot 3x+9}+(-9+12)= \\ =(x-3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2\end{matrix}\right\|=$$

$$=2\int\frac{d(x-3)}{(x-3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{3}}+C.$$

В результаті отримаємо:

$$I_5=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-6x+12\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{3}}+C.\ \blacksquare$$

Приклад 7.6. $I_6=\int\frac{xdx}{\left(x^2+2x+2\right)\left(x-1\right)^2}.$

Розв'язання. Підінтегральна функція являє собою раціональний дріб. Степінь чисельника менша за степінь знаменника, тому цей дріб є правильним. Це означає, що немає потреби у виділенні цілої частини. Розкладемо підінтегральну функцію в суму простих дробів:

$$\frac{x}{\left(x^2+2x+2\right)\left(x-1\right)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{\left(x-1\right)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}=$$

$$=\frac{A(x-1)\left(x^2+2x+2\right)+B\left(x^2+2x+2\right)+(Cx+D)\left(x^2-2x+1\right)}{\left(x^2+2x+2\right)\left(x-1\right)^2}.$$

Коефіцієнти обчислюємо за методом невизначених коефіцієнтів

$$\left.\begin{array}{c|l} x^3 & A+C \;\; =0, \\ x^2 & A+B-2C+D \;\; =0, \\ x^1 & 2B+C-2D \;\; =1, \\ x^0 & -2A+2B+D \;\; =0; \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A \;\; =1/25, \\ B \;\; =1/5, \\ C \;\; =-1/25, \\ D \;\; =-8/25. \end{cases}$$

Таким чином, отримаємо

$$I_6=\int\left(\frac{1}{25(x-1)}+\frac{1}{5\left(x-1\right)^2}-\frac{1}{25}\cdot\frac{x+8}{x^2+2x+2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{25}\ln|x-1|-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{1}{25}\int\frac{1/2(2x+2)+7}{x^2+2x+2}dx=$$

$$=\frac{1}{25}\ln|x-1|-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{1}{50}\int\frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}-\frac{7}{25}\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{5(x-1)}+\frac{1}{50}\ln(x-1)^2-\frac{1}{50}\ln\left(x^2+2x+2\right)-\frac{7}{25}\operatorname{arctg}(x+1)+C=$$

$$=-\frac{1}{5(x-1)}+\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\frac{7}{25}\operatorname{arctg}(x+1)+C.\;\blacksquare$$

Приклад 7.7. $I_7=\int\frac{\left(x^5+x^2-5\right)dx}{\left(x+1\right)^2\left(x^2+4\right)^2}$.

Розв'язання. Підінтегральний раціональний дріб є правильним, розкладемо його в суму простих дробів:

$$\frac{x^5+x^2-5}{\left(x+1\right)^2\left(x^2+4\right)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{\left(x+1\right)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}+\frac{Ex+F}{\left(x^2+4\right)^2}=$$

$$=\frac{A(x+1)\left(x^2+4\right)^2+B\left(x^2+4\right)^2+(Cx+D)(x+1)^2\left(x^2+4\right)+(Ex+F)(x+1)^2}{\left(x+1\right)^2\left(x^2+4\right)^2}=$$

$$=\frac{A(x+1)\left(x^4+8x^2+16\right)+B\left(x^4+8x^2+16\right)}{\left(x+1\right)^2\left(x^2+4\right)^2}+$$

$$+\frac{(Cx+D)\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2+4\right)+(Ex+F)(x^2+2x+1)}{\left(x+1\right)^2\left(x^2+4\right)^2}.$$

Коефіцієнти обчислюємо методом невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{cases} A+C=1, \\ A+B+2C+D=0, \\ 8A+5C+2D+E=0, \\ 8A+8B+8C+5D+2E+F=1, \\ 16A+4C+8D+E+2F=0, \\ 16A+16B+4D+F=-5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{1}{25},\ B=-\dfrac{1}{5}, \\ C=\dfrac{26}{25},\quad D=-\dfrac{46}{25}, \\ E=-\dfrac{6}{5},\quad F=\dfrac{31}{5}. \end{cases}$$

Отже,

$$I_7=\int\left(-\frac{1}{25(x+1)}-\frac{1}{5(x+1)^2}+\frac{26x-46}{25(x^2+4)}+\frac{-6x+31}{5(x^2+4)^2}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{25}\ln|x+1|+\frac{1}{5(x+1)}+\frac{13}{25}\int\frac{2x\,dx}{x^2+4}-\frac{46}{25}\int\frac{dx}{x^2+4}-\frac{3}{5}\int\frac{2x\,dx}{(x^2+4)^2}+$$

$$+\frac{31}{5}\int\frac{dx}{(x^2+4)^2}=-\frac{1}{25}\ln|x+1|+\frac{1}{5(x+1)}+\frac{13}{25}\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4}-\frac{23}{25}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-$$

$$-\frac{3}{5}\int\frac{d(x^2+4)}{(x^2+4)^2}+\frac{31}{5}\int\frac{dx}{(x^2+4)^2}=-\frac{1}{25}\ln|x+1|+\frac{1}{5(x+1)}+\frac{13}{25}\ln(x^2+4)-$$

$$-\frac{23}{25}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{3}{5(x^2+4)}+\frac{31}{5}\int\frac{dx}{(x^2+4)^2}.$$

Для обчислення останнього інтегралу застосуємо рекурентну формулу:

$$K_\lambda=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^\lambda}=\frac{1}{a^2}\left[\frac{2\lambda-3}{2(\lambda-1)}K_{\lambda-1}+\frac{x}{2(\lambda-1)(x^2+a^2)^{\lambda-1}}\right]\ (\lambda\in\mathbb{N}),$$

де $K_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$. Для цього оберемо $\lambda=2$, $a=2$, отримаємо:

$$K_2=\int\frac{dx}{(x^2+2^2)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}K_1+\frac{x}{2(x^2+4)}\right]=\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{x}{8(x^2+4)}+C.$$

В результаті одержуємо:

$$I_7=-\frac{1}{25}\ln|x+1|+\frac{1}{5(x+1)}+\frac{13}{25}\ln(x^2+4)-\frac{23}{25}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+$$

$$+\frac{3}{5(x^2+4)}+\frac{31}{5}\left(\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{x}{8(x^2+4)}\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{25}\ln|x+1|+\frac{1}{5(x+1)}+\frac{13}{25}\ln(x^2+4)+\frac{31x+24}{40(x^2+4)}-\frac{213}{400}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.\blacksquare$$

Приклад 7.8. $I_8 = \int e^x \cos 5x dx$.

Розв'язання. Заданий інтеграл належить до третього класу функцій, що інтегруються частинами. Для його обчислення двічі застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$I_8 = \int e^x \cos 5x dx = \left\| \begin{matrix} u = e^x, & du = e^x dx, \\ dv = \cos 5x, v = \frac{1}{5}\sin 5x \end{matrix} \right\| = \frac{1}{5}e^x \sin 5x - \frac{1}{5}\int e^x \sin 5x dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = e^x, & du = e^x dx, \\ dv = \sin 5x, v = -\frac{1}{5}\cos 5x \end{matrix} \right\| = \frac{1}{5}e^x \sin 5x - \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{5}e^x \cos 5x + \frac{1}{5}\int e^x \cos 5x dx \right) =$$

$$= \frac{1}{5}e^x \sin 5x + \frac{1}{25}e^x \cos 5x - \frac{1}{25}I_8.$$

Звідси

$$I_8 + \frac{1}{25}I_8 = \frac{1}{5}e^x \sin 5x + \frac{1}{25}e^x \cos 5x,$$

$$I_8 = \int e^x \cos 5x dx = \frac{5}{26}e^x \sin 5x + \frac{1}{26}e^x \cos 5x + C. \blacksquare$$

Приклад 7.9. $I_9 = \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-1)^6(x+2)^4}}$.

Розв'язання. Зробимо перетворення з метою виділення під інтегралом дробово-лінійної ірраціональності:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-1)^6(x+2)^4}} = \int \left(\sqrt[5]{\frac{x-1}{x+2}} \right)^4 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

Уведемо заміну $t = \sqrt[5]{\frac{x-1}{x+2}}$, тоді $x = \frac{2t^5+1}{1-t^5}$, $x-1 = \frac{3t^5}{1-t^5}$, $dx = \frac{15t^4 dt}{(1-t^5)^2}$.

Звідси

$$I_9 = \int t^4 \cdot \frac{(1-t^5)^2}{9t^{10}} \cdot \frac{15t^4 dt}{(1-t^5)^2} = \frac{5}{3}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{5}{3t} + C = -\frac{5}{3}\sqrt[5]{\frac{x+2}{x-1}} + C. \blacksquare$$

Приклад 7.10. $I_{10} = \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

Розв'язання. Інтеграл такого типу розглянуто в розділі 1, §1, п.8.1. Оскільки многочлен у чисельнику підінтегральної функції $P(x) = x^4$ має четвертий степінь, тому многочлен $Q(x)$ із невизначеними коефіцієнтами у формулі (1.7) потрібно обирати третього степеня. Отже, представимо цей інтеграл у вигляді:

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)\sqrt{x^2+4x+5}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти. Для цього спочатку продиференціюємо обидві частини останньої рівності:

$$\frac{x^4}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\left(3Ax^2+2Bx+C\right)\sqrt{x^2+4x+5}+$$
$$+\frac{\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)\left(x+2\right)}{\sqrt{x^2+4x+5}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4x+5}},$$

потім помножимо обидві частини на квадратичну ірраціональність $\sqrt{x^2+4x+5}$:

$$x^4=\left(3Ax^2+2Bx+C\right)\left(x^2+4x+5\right)+\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)\left(x+2\right)+\lambda.$$

Коефіцієнти знаходимо методом невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{cases}4A=1,\\ 14A+3B=0,\\ 15A+10B+2C=0,\Rightarrow\\ 10B+6C+D=0,\\ 5C+2D+\lambda=0;\end{cases}\begin{cases}A=\frac{1}{4},\ B=-\frac{7}{6},\\ C=\frac{95}{24},\ D=-\frac{145}{12},\ \lambda=\frac{35}{8}.\end{cases}$$

Таким чином,

$$I_{10}=\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{7}{6}x^2+\frac{95}{24}x-\frac{145}{12}\right)\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{35}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}=$$
$$=\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{7}{6}x^2+\frac{95}{24}x-\frac{145}{12}\right)\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{35}{8}\int\frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+1}}=$$
$$=\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{7}{6}x^2+\frac{95}{24}x-\frac{145}{12}\right)\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{35}{8}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C.\ \blacksquare$$

Приклад 7.11. $I_{11}=\int\frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$.

Розв’язання. Підінтегральна функція є біноміальним диференціалом, тому

$$I_{11}=\int x^{-1}\left(1+x^6\right)^{-1/6}dx=\left\|\begin{array}{ll}a=1,b=1, & p\notin\mathbb{Z},\\ m=-1,n=6, & \frac{m+1}{n}=\frac{0}{6}=0\in\mathbb{Z}\Rightarrow\text{випадок 2}\\ p=-1/6, & \end{array}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{array}{c}1+x^6=t^6\Rightarrow x=\left(t^6-1\right)^{1/6},\\ dx=\frac{t^5dt}{\left(t^6-1\right)^{5/6}}\end{array}\right\|=\int\frac{\frac{t^5dt}{\left(t^6-1\right)^{5/6}}}{\left(t^6-1\right)^{1/6}t}=\int\frac{t^4dt}{\left(t^6-1\right)}=$$

$$=\int\frac{t^4dt}{(t-1)(t+1)\left(t^2+t+1\right)\left(t^2-t+1\right)}=\int\left(\frac{\frac{1}{6}}{t-1}-\frac{\frac{1}{6}}{t+1}+\frac{-\frac{1}{6}t+\frac{1}{6}}{t^2+t+1}+\frac{\frac{1}{6}t+\frac{1}{6}}{t^2-t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{6}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln|t+1|+\int\left(\frac{-\frac{1}{12}(2t+1)+\frac{1}{4}}{t^2+t+1}+\frac{\frac{1}{12}(2t-1)+\frac{1}{4}}{t^2-t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{12}\ln\left(t^2+t+1\right)+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(t+1/2)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}+\frac{1}{12}\ln\left(t^2-t+1\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(t-1/2)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{12}\ln\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+1/2}{\sqrt{3}/2}+$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t-1/2}{\sqrt{3}/2}+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{1+x^6}-1}{\sqrt[6]{1+x^6}+1}\right|+\frac{1}{12}\ln\frac{\sqrt[3]{1+x^6}-\sqrt[6]{1+x^6}+1}{\sqrt[3]{1+x^6}+\sqrt[6]{1+x^6}+1}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[6]{1+x^6}+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[6]{1+x^6}-1}{\sqrt{3}}+C\,.\ ■$$

Приклад 7.12. $I_{12}=\int\frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x}$.

Розв'язання. Оскільки при зміні знаків функцій $\sin x$ та $\cos x$ підінтегральна функція не змінює знака, то застосуємо підстановку $\operatorname{tg}x=t$:

$$I_{12}=\int\frac{dx}{\cos^2 x(\operatorname{tg}^2x+3\operatorname{tg}x)}=\int\frac{d(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}^2x+3\operatorname{tg}x}=$$

$$=\left\|t=\operatorname{tg}x\right\|=\int\frac{dt}{t^2+3t}=\int\frac{dt}{t(t+3)}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+3}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln|t|-\ln|t+3|\right)+C==\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t}{t+3}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x+3}\right|+C\,.\ ■$$

Приклад 7.13. Обчислити інтеграл $I_{13}=\int\frac{\operatorname{ch}x+5\operatorname{sh}x}{2\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x}dx$.

Розв'язання. Представимо чисельник підінтегральної функції $\left(\operatorname{ch}x+5\operatorname{sh}x\right)$ у вигляді лінійної комбінації знаменника $\left(2\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x\right)$ та його похідної $\left(2\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x\right)$, тобто

$$\operatorname{ch}x+5\operatorname{sh}x=A\left(2\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x\right)+B\left(2\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x\right).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\operatorname{sh}x$ та $\operatorname{ch}x$ у обох частинах заданого рівняння, маємо:

$$\begin{cases} 2A - B = 5, \\ -A + 2B = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{11}{3}, \\ B = \dfrac{7}{3}. \end{cases}$$

$$I = \frac{11}{3}\int \frac{2\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x}dx + \frac{7}{3}\int \frac{d\left(2\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x\right)}{2\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x} = \frac{11}{3}x + \frac{7}{3}\ln\left|2\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x\right| + C. ■$$

Приклад 7.14. $I_{14} = \int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos^3 x dx$.

Розв'язання. $I_{14} = \int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos^2 x(\cos x dx) =$

$$= \int \sqrt[3]{\sin^2 x}\left(1 - \sin^2 x\right)d(\sin x) = \left\| t = \sin x \right\| = \int \sqrt[3]{t^2}\left(1 - t^2\right)dt =$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{t^5}}{5} - \frac{3\sqrt[3]{t^{11}}}{11} + C = \frac{3\sqrt[3]{\sin^5 x}}{5} - \frac{3\sqrt[3]{\sin^{11} x}}{11} + C. ■$$

Приклад 7.15. $I_{15} = \int x^2\sqrt{a^2 + x^2}dx$.

Розв'язання. Обчислимо цей інтеграл методом інтегрування частинами:

$$I_{15} = \int x \cdot x\sqrt{a^2 + x^2}dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = x, & du = dx, \\ dv = x\sqrt{a^2 + x^2}dx = \dfrac{1}{2}d\left(a^2 + x^2\right)\sqrt{a^2 + x^2}, & v = \dfrac{1}{3}\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^3 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{x}{3}\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^3 - \frac{1}{3}\int \left(a^2 + x^2\right)\sqrt{a^2 + x^2}dx =$$

$$= \frac{x}{3}\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^3 - \frac{a^2}{3}\int \sqrt{a^2 + x^2}dx - \frac{1}{3}\int x^2\sqrt{a^2 + x^2}dx =$$

$$= \frac{x}{3}\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^3 - \frac{a^2}{3}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right|\right) - \frac{1}{3}I_{15}.$$

Звідки одержимо

$$I_{15} = \int x^2\sqrt{a^2 + x^2}dx = \frac{x\left(a^2 + 2x^2\right)}{8}\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C.$$

Зауважимо, що цей інтеграл також можна інтегрувати тригонометричними або гіперболічно-тригонометричними підстановками. ■

§2. Визначений та невласний інтеграли

1. Варіанти індивідуальних завдань

1. Для заданої функції $f(x)$ знайти верхню та нижню суми Дарбу на відрізку $[a,b]$, розділяючи його на n рівних частин та знайти їх границі при $n \to \infty$.

2. Знайти значення інтеграла.
3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій.
4. Обчислити довжину дуги кривої.
5. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ($Ox - V_x$, $Oy - V_y$) фігури, обмеженої графіками функцій.
6. Чи є функція $f(x)$ інтегровною на $[0,1]$?
7. Довести, використавши теорему про середнє.

8, 9. Обчислити невласний інтеграл.

10, 11. Дослідити невласний інтеграл на збіжність.

ВАРІАНТ 1

1. $f(x) = (x-1)(x+2)x$, $a = -1,\ b = 0$.	2.а) $\int\limits_0^{\pi} \left(8x^2 + 16x + 17\right)\cos 4x dx$	2. б) $\int\limits_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{37}}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{6\,\mathrm{tg}\, x dx}{3\sin 2x + 5\cos^2 x}$
2. в) $\int\limits_2^9 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}$	2. г) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x dx$	2. д) $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$
3. $y = \mathrm{arctg}\sqrt{x}$, $y + x^2 = 0$, $x = 1$.	4. а) $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$, $c^2 = a^2 - b^2$ (еволюта еліпса)	
4. б) $\rho = \frac{a}{\cos^4 \frac{\phi}{4}}$ (довжина петлі)		5. $y = e^x + 6$, $y = e^{2x}$, $x = 0$. Знайти V_y
6. $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, x \neq 0, \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$	7. $\lim\limits_{n} \int\limits_{n}^{n+\ln n} \frac{\sin x}{x} dx = 0$	8. $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{(x-1)\sqrt[3]{x+1}}$
9. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sqrt[3]{x}} dx$	10. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln x dx}{\sqrt{\sin x}}$	11. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(\ln x)^n}$

ВАРІАНТ 2

1. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $a = 0,\ b = 2$.	2. а) $\int\limits_{-3}^{0} \left(x^2 + 6x + 9\right)\sin 2x dx$	2. б) $\int\limits_{\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}}^{0} \frac{3\mathrm{tg}^2 x - 50}{2\,\mathrm{tg}\, x + 7}dx$
2. в) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}$	2. г) $\int\limits_0^{\pi} 2^4 \sin^2\frac{x}{2}\cos^6\frac{x}{2}dx$	2. д) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\left(9 + x^2\right)^{3/2}}$
3. $y = \frac{10}{x^2+4}$, $y = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4}$.	4. а) $x = \int\limits_0^t \cos\varphi^2 d\varphi$, $y = \int\limits_0^t \sin\varphi^2 d\varphi$, $0 \le t \le t_0$ (клотоїда)	

<table>
<tr><td colspan="2">4. б) $\rho = a\sin^4\frac{\phi}{4}$</td><td colspan="2">5. $y = 3x - x^2$, $y = 0$. Знайти V_x</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. $f(x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } \exists n \in \mathbb{N} : x = \frac{1}{n}; \\ 0, \text{ якщо } \forall\, n \in \mathbb{N}\ x \neq \frac{1}{n} \end{cases}$</td><td colspan="2">7. $\lim\limits_{n} \int\limits_{\sin\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\cos x}{x} dx = 0$</td></tr>
<tr><td>8. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x} + x}$</td><td>9. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{xdx}{x^3 - 1}$</td><td>10. $\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{\arcsin x}$</td><td>11. $\int\limits_0^{+\infty} \cos\left(x + \frac{1}{x}\right)\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$</td></tr>
</table>

ВАРІАНТ 3

<table>
<tr><td>1.
$f(x) = (x+1)(x^2+1)$,
$a = 3$, $b = 4$.</td><td>2. а)
$\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \cdot \ln\cos x\, dx$</td><td>2. б)
$\int\limits_{\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}}^{\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}} \frac{(2\operatorname{tg} x + 5)dx}{(5 - \operatorname{tg} x)\sin 2x}$</td></tr>
<tr><td>2. в) $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 xdx}{\sqrt[3]{x^2}}$</td><td>2. г) $\int\limits_{-\pi/2}^{0} 2^8 \sin^4 x \cos^8 xdx\, 2.$</td><td>2. д) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}$</td></tr>
<tr><td>3. $y = 4^{-x}$,
$y = -\log_4 x$,
$y = 0$, $x = 0$.</td><td colspan="2">4. а) $x = a\left(\cos t + \ln tg\frac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$, $0 < t_0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
(трактриса).</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. б) $\rho = a(1 - \sin\phi)$, $-\frac{\pi}{2} \le \phi \le -\frac{\pi}{6}$</td><td>5. $y = \sin x$, $y = 0$,
$0 \le x \le \pi$. Знайти V_y</td></tr>
<tr><td>6. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, x \neq 0, \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$</td><td>7. $\lim\limits_{n} \int\limits_1^e \frac{e^x \ln x}{\sin x} dx \le \frac{e^e - e}{\sin e}$</td><td>8. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x} - 2x + \sqrt{x}}$</td></tr>
<tr><td>9. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(x^3+1)^4}$</td><td>10. $\int\limits_0^1 \frac{\ln xdx}{\sqrt{x(1-x)^3}}$</td><td>11. $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x}\right)dx$</td></tr>
</table>

ВАРІАНТ 4

1. $f(x) = 2^x + x^3$, $a = 1$, $b = 2$.	2. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2 + 17{,}5)\sin 2xdx$	2.б) $\int\limits_{-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}}^{0} \frac{3\operatorname{tg} x + 1}{2\sin 2x - 5\cos 2x + 1} dx$
2. в) $\int\limits_0^1 \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx$	2. г) $\int\limits_{-\pi/2}^{0} 2^8 \sin^2 x \cos^6 xdx$	2. д) $\int\limits_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5 - x^2)^3}}$
3. $y = 2x^2 e^x$, $y = -x^3 e^x$.	4. а) $x = t - \frac{\operatorname{sh} 2t}{2}$, $y = 2\operatorname{ch} t$, $0 \le t \le t_0$	4. б) $\rho = a \operatorname{th}\frac{\varphi}{2}$, $0 \le \phi \le \phi_0$

5. $y=x$, $y=x+\sin^2 x$, $0\le x\le\pi$. Знайти V_y		6. $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$
7. Довести існування границі $\lim\limits_{n}\int_1^n \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ за допомогою критерію Коші		8. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{\lvert x^2-1\rvert}}$
9. $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2}dx$	10. $\int_0^1 \frac{\ln\frac{1}{x}}{1+x}dx$	11. $\int_0^{+\infty} x^{-2}\operatorname{arcrtg}\frac{x^3}{1+x^2}dx$

ВАРІАНТ 5

1. $f(x)=x^3-x^2+1$, $a=-2$, $b=-1$.	2. а) $\int_{\pi/4}^{\pi/3}(3x-x^2)\sin 2xdx$	2.б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}3}\frac{1+\operatorname{ctg}x}{(\sin x+2\cos x)^2}dx$
2. в) $\int_{\pi/4}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx$	2. г) $\int_0^{\pi}2^4\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)dx$	2. д) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$
3. $x=y^2(y-1)$, $x=0$.	4. а) $x=\sin^4 t$, $y=\cos^2 t$, $0\le t\le\pi/2$	4. б) $\rho=\frac{a}{\sin^3(\phi/3)}$ (довжина петлі)
5. $y=\frac{a^3}{x^2+a^2}$, $y=\frac{a}{2}$. Знайти V_y	6. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, \text{ якщо } \exists n\in\mathbb{N}: x=\frac{1}{n};\\ 0, \text{ якщо } \forall\ n\in\mathbb{N}\ x\ne\frac{1}{n}.\end{cases}$	
7. Нехай $\phi(b)=\int_1^b e^{\cos x}\ln xdx$. Довести, що $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{\varphi(b)}{b^2}=0$		8. $\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{x}+x}$
9. $\int_2^{+\infty}\frac{xdx}{x^3-1}$	10. $\int_0^1\frac{dx}{\arccos x}$	11. $\int_0^{+\infty}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$

ВАРІАНТ 6

1. $f(x)=2x^3+1$, $a=-3$, $b=-1$.	2. а) $\int_0^2(x+1)^2\ln^2(x+1)dx$	2.б) $\int_{-\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}}^{0}\frac{(11-3\operatorname{tg}x)dx}{\operatorname{tg}x+3}$
2. в) $\int_{-\pi}^{0}2^8\sin^6 x\cos^2 xdx$	2. г) $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x-(\operatorname{arctg}x)^4}{1+x^2}dx$	2. д) $\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{x^4dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$

3. $y=3^x$, $y=9$, $y=\frac{9}{4}\left(3^{-x}+1\right)+\frac{8}{3}$.	4. а) $x=a\left(\operatorname{sh}t-t\right)$, $y=a\left(\operatorname{ch}t-1\right)$, $0\le y\le 7a$, $x\ge 0$	4. б) $\rho=\frac{p}{1+\cos\phi}$, $\lvert\phi\rvert\le\frac{\pi}{2}$, $p>0$
5. $y=\sqrt{\frac{x^2-1}{x-3}}$, $-1\le x\le 1$, $y=0$. Знайти V_x	6. $f(x)=\begin{cases}0, \text{для } x=0\vee x=\frac{2}{\pi(2n+1)}, \\ \operatorname{tg}\frac{1}{x}, \text{у іншому випадку,}\end{cases}$ $n\in\mathbb{N}$	
7. Нехай $\phi(b)=\int\limits_1^b e^{\sin x}\ln x dx$. Довести, що $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{\varphi(b)}{b}=\infty$		8. $\int\limits_0^{\pi} tg\, x\, dx$
9. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+9\right)\sqrt{x^2+9}}$	10. $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}dx, \alpha>0$	11. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2\sin^2 x}$

ВАРІАНТ 7

1. $f\left(x\right)=e^x+x$, $a=1$, $b=e$.	2.а) $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}}\frac{\left(\arccos x\right)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	2.б) $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{x^4dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$
2. в) $\int\limits_{-\pi/2}^{0} 2^8\sin^2 x\cos^4 xdx$	2. г) $\int\limits_0^{\pi/4}\frac{(7+3\operatorname{tg}x)dx}{\left(\sin x+2\cos x\right)^2}$	2. д) $\int\limits_1^{e^2}\frac{\ln^2 xdx}{\sqrt{x}}$

3. $x^2+y^2=2$, $y^2=2x-1$, $x\ge\frac{1}{2}$.	4. а) $x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t$, $y=\left(t^2-2\right)\cos t-2t\sin t$, $0\le t\le\pi$
4. б) $\rho=a\phi^3$, $0\le\phi\le 4$	5. $y=e^{\alpha x}\sin\pi x$, $n-1\le x\le n$, $y=0$, $n\in N$. Знайти V_x
6. $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$ (ціла частина)	7. Нехай $f(x)$ не зростає на $[1;+\infty)$ і $f(n)=\frac{1}{\ln n}$ при $n\in N\setminus\{1\}$. Довести: $\frac{1}{2}\le\int\limits_n^{n^2}\frac{f(x)}{x}dx\le 1\,\forall n\in N$

8. $\int\limits_0^{\pi}\frac{\lvert\cos x\rvert dx}{\sqrt{\sin x}}$	9. $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$	10. $\int\limits_0^1\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}dx$	11. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^{5)}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}dx$

ВАРІАНТ 8

1. $f\left(x\right)=1+x+2^{-x}$, $a=1$, $b=2$.	2. а) $\int\limits_1^e\frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$	2. б) $\int\limits_0^{\pi/4}\frac{2\operatorname{tg}^2 x-11\operatorname{tg}x-22}{4-\operatorname{tg}x}dx$

2. в) $\int\limits_0^{\pi} 2^4 \sin^2 2x \cos^6 2x dx$	2. г) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx$	2. д) $\int\limits_0^1 (x+1)\ln^2(x+1)dx$

3. $y = x^2$, $y = x^2 + x - 1$, $y = \frac{5x}{2}$, $y \le x^2$.	4. а) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le t_0 \le \frac{\pi}{2}$
4. б) $\rho = a\phi^4$, $0 \le \phi \le 3$.	5. $y = \arcsin x$, $y = 0$, $x = 1$. Знайти V_y
6. $f(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\}$ (дробова частина)	7. Нехай $f(x)$ не зростає на $[1;+\infty)$ і $f(n) = \frac{1}{n}$ при $n \in N$. Довести: $\lim\limits_n \int\limits_n^{n^2} \frac{f(x)}{x} dx = 0$

8. $\int\limits_0^e \frac{dx}{e^x - 1}$	9. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\left(x^2+12\right)dx}{\left(x^2+1\right)^2}$	10. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}} dx$	11. $\int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{1}{x}} - e^{-\frac{4}{x^2}}\right) dx$

ВАРІАНТ 9

1. $f\left(x\right) = x^3 + x^2 + 1$, $a = 1$, $b = 2$.	2. а) $\int\limits_1^e \sqrt{x} \ln^2 x dx$	2. б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4 - 7 \operatorname{tg} x}{2 + 3 \operatorname{tg} x} dx$
2. в) $\int\limits_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x dx$	2. г) $\int\limits_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$	2. д) $\int\limits_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$

3. $y = 2 - 4x^2 + 4x^3 - x^4$, $y = 0$, $x = x_1$, $x = x_2$, де x_1 і x_2 – т. максимуму функції.	4. а) $x = 2t^3\left(1-t^2\right)$, $y = t^4 \cdot \sqrt{15}$ (довжина петлі)
4. б) $\rho = a\cos^5 \frac{\phi}{5}$	5. $\left(x-R\right)^2 + \left(y-R\right)^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $x \le R$, $y \le R$. Знайти V_x
6. $f(x) = \begin{cases} sh\frac{1}{x}, x \ne 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$	7. Нехай $f(x)$ не зростає на $[1;+\infty)$ і $f(n) = \frac{1}{\ln(\ln n)}$ при $n \in N \setminus \{1,2\}$. Довести: $\lim\limits_n \int\limits_n^{n^2} \frac{f(x)}{x} dx = +\infty$

8. $\int\limits_{-1}^0 e^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^3}$	9. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1-x)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$	10. $\int\limits_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}}$	11. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

ВАРІАНТ 10

1. $f\left(x\right) = \left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x+3\right)$, $a = 0$, $b = 1$.	2. а) $\int\limits_2^3 \left(x-1\right)^3 \ln^2\left(x-1\right)dx$	2. б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5 \operatorname{tg} x + 2}{2\sin 2x + 5} dx$

2. в) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}}dx$	2. г) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^2\sin^2 x\cos^2 xdx$	2. д) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$
3. $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=0$.	4. а) $x=\sqrt{3}t^2/2$, $y=t\left(\frac{1}{4}-t^2\right)$ (довжина петлі)	

4. б) Знайти довжину дуги кардіоїди $\rho=2\ (1-\cos\phi)$, яка знаходиться всередині кола $\rho=1$	5. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, $x^2-\frac{y^2}{15}=1$, $x\geq 1$. Знайти V_x.
6. $f(x)=\begin{cases}\mathrm{arctg}\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$	7. Нехай $f(x)$ не зростає на $[1;+\infty)$ і $f(n)=\frac{1}{\sqrt{n}}$ при $n\in\mathbb{N}$. Довести: $\lim\limits_n\int\limits_n^{n^2} f(x)\ln x\,dx=+\infty$

8. $\int\limits_0^1 e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^3}$	9. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}$	10. $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x\left(e^x-e^{-x}\right)}}$	11. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(1/x)}{\left(x-\cos(\pi/x)\right)^2}dx$

ВАРІАНТ 11

1. $f(x)=x^3-x+1$, $a=1$, $b=3$.	2. а) $\int\limits_{-2}^{0}\left(x^2+3\right)e^{3x}dx$	2. б) $\int\limits_0^{\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}}\frac{3\mathrm{tg}^2x+1}{\mathrm{tg}^2x+4}dx$
2. в) $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{8}}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$	2. г) $\int\limits_0^{\pi}2^8\sin^2 x\cos^6 xdx$	2. д) $\int\limits_0^{1/3}\frac{12x-\mathrm{arctg}3x}{1+9x^2}dx$
3. $y=\sin 2x$, $y=2x$, $0\leq x\leq\pi$.	4. а) $x=\cos^4 t$, $y=\sin^4 t$	

4. б) Знайти довжину дуги логарифмічної спіралі $\rho=e^{a\phi}$, яка знаходиться всередині кола $\rho=1$, $(a>0)$	5. $y=x\sqrt{\frac{3+3x}{3-x}}$, $0\leq x\leq 2$, $y=6$, $x=0$. Знайти V_y.
6. $f(x)=\begin{cases}\mathrm{sgn}\left(\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right), x\neq 0\\ 1, \quad x=0\end{cases}$	7. Нехай $f(x)$ не зростає на $[1;+\infty)$ і $f(n)=\frac{1}{n^3}$ при $n\in\mathbb{N}$. Довести: $\lim\limits_n\int\limits_n^{n^2} f(x)\ln x\,dx=0$

8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^3}$	9. $\int\limits_0^1 x\ln xdx$	10. $\int\limits_0^{\pi}\frac{\ln(\sin x)}{x\sqrt{\sin x}}dx$	11. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1+\arcsin(1/x)}{1+x\sqrt{x}}dx$

ВАРІАНТ 12

1. $f(x)=(x-2)^2(x+1)$, $a=2$, $b=4$.

2. а) $\int\limits_{-1}^{1} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$

2. б) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^2 x dx}{4+3\cos 2x}$

2. в) $\int\limits_{1}^{4} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+1}{(\sqrt{x}+x)^2} dx$

2. г) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx$

2. д) $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

3. $y=|\log_a x|$, $y=0$, $x=1/a$, $x=a$, $a>1$.

4. а) $x=a(\cos\phi+\phi\sin\phi)$, $y=a(\sin\phi-\phi\cos\phi)$, $0\le\phi\le\phi_0$ (евольвента круга)

4. б) Знайти довжину дуги спіралі Архімеда $\rho=5\phi$, яка знаходиться всередині кола $\rho=10\pi$

5. $y=\sqrt{\frac{9+x}{9-3x}}$, $0\le x\le\frac{3}{2}$, $y=0$.
Знайти V_x.

6. $f(x)=\begin{cases}\ln\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$

7. Нехай $f(x)$ не зростає на $[1;+\infty)$ і $f(n)=\frac{1}{\ln n}$ при $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Довести:
$\lim\limits_{n}\int\limits_{n}^{n+1} f(x)\ln x\, dx=1$

8. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}} dx$

9. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\ln x dx}{\left(x^2+1\right)^2}$

10. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{sh} x\, dx}{e^{x^2}-\cos x}$

11. $\int\limits_{2}^{+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)dx$

ВАРІАНТ 13

1. $f(x)=(x^2-2x+1)(x+2)$, $a=-1$, $b=1$.

2.а) $\int\limits_{-1}^{0}(x+2)^3\ln^2(x+2)dx$

2.б) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8\sin^4 x\cos^4 x dx$

2.в) $\int\limits_{0}^{\sin 1}\frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

2.г) $\int\limits_{\pi/4}^{\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}}\frac{4tgx-5}{4\cos^2 x-\sin 2x+1}dx$

2.д) $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}}\frac{x^4 dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$

3. $y=3^x$, $y=9$, $y=\frac{9}{4}\left(3^{-x}+1\right)+\frac{8}{3}$.

4. а) $x=t^2$, $y=t\left(\frac{1}{3}-t^2\right)$ (довжина петлі)

4. б) $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$

5. $y^2(x-a)+x^2(x+a)=0$, $0\le x\le\frac{a}{2}$, $x=\frac{a}{2}$. Знайти V_x.

6. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}, x\neq 0 \text{ і } x\neq\frac{1}{\pi n}\\ 0, \text{у іншому випадку}\end{cases}$

8. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)dx}{\sqrt[3]{x}}$

7. Нехай $f(x)$ не зростає на $[1;+\infty)$ і $f(n)=\frac{1}{n^{3/2}}$ при $n\in\mathbb{N}$.
Довести: $\lim\limits_{n}\int\limits_{n}^{n^2}\frac{f(x)}{x}dx=0$.

9. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{2-x^2}{x\sqrt[3]{x^2-1}}dx$	10. $\int\limits_0^1 \ln\left|1-4\sin^2 x\right|dx$	11. $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}dx$

2. Приклад виконання індивідуального завдання

Приклад 7.16. Для функції $f(x)=\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(x+2\right)$ знайти верхню та нижню суми Дарбу на відрізку $\left[-1,0\right]$, розділяючи його на n рівних частин та знайти їх границі при $n\to\infty$.

Розв'язання. Для того, щоб дізнатися, в яких точках відрізків розбиття функція приймає найбільше та найменше значення, дослідимо її на монотонність на відрізку $\left[-1,0\right]$:

$$f(x)=x^3+x^2-x+2,$$

$$f'(x)=3x^2+2x-1,$$

$$3x^2+2x-1=0,$$

$$x_1=-1,\ x_2=\frac{1}{3},$$

$f'(x)<0$ на відрізку $\left[-1,0\right]$ $\Rightarrow$ на відрізку $\left[-1,0\right]$ функція спадає.

Поділимо відрізок $\left[-1,0\right]$ на n рівних частин. Отримаємо n елементарних відрізків $\left[x_k;x_{k+1}\right]$, де точки поділу мають вигляд $x_k=-1+\frac{k}{n}, k=0,1,2,...,n$. Оскільки $f(x)$ монотонно спадає на проміжку інтегрування, то на кожному елементарному відрізку $\left[x_k;x_{k+1}\right]$

$$\min_{\left[x_k;\,x_{k+1}\right]} f(x)=f\left(x_{k+1}\right)=f\left(-1+\frac{k+1}{n}\right)=$$

$$=\left(-1+\frac{k+1}{n}\right)^3+\left(-1+\frac{k+1}{n}\right)^2-\left(-1+\frac{k+1}{n}\right)+2=$$

$$=\frac{(k+1)^3}{n^3}-2\cdot\frac{(k+1)^2}{n^2}+3=m_k.$$

Оскільки

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},\ \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

то отримуємо нижню інтегральну суму Дарбу:

$$\underline{S_n}=\sum_{k=0}^{n-1}m_k\Delta x_k=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{(k+1)^3}{n^3}-2\cdot\frac{(k+1)^2}{n^2}+3\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^3-\frac{2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2+3n\right)=\frac{(n+1)^2}{4n^2}-\frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2}+3.$$

Функція $f(x)$ на кожному з елементарних відрізків $[x_k; x_{k+1}]$ досягає свого максимального значення в точці x_k. Тут

$$\max_{[x_k;\, x_{k+1}]} f(x) = f(x_k) = f\left(-1+\frac{k}{n}\right) = \left(-1+\frac{k}{n}\right)^3 + \left(-1+\frac{k}{n}\right)^2 - \left(-1+\frac{k}{n}\right) + 2 =$$

$$= \frac{k^3}{n^3} - 2\cdot\frac{k^2}{n^2} + 3 = M_k.$$

Застосовуючи формули

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4},\quad \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

знайдемо верхню інтегральну суму Дарбу:

$$\overline{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k^3}{n^3} - 2\cdot\frac{k^2}{n^2} + 3\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^3 - \frac{2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 + 3n\right) = \frac{(n-1)^2}{4n^2} - \frac{(n-1)(2n-1)}{3n^2} + 3.$$

Знайдемо границі верхньої та нижньої сум Дарбу при $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{4n^2} - \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2} + 3\right) = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + 3 = \frac{31}{12}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n-1)^2}{4n^2} - \frac{(n-1)(2n-1)}{3n^2} + 3\right) = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + 3 = \frac{31}{12}.$$

Таким чином, у цьому прикладі $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{S_n} = \dfrac{31}{12}$. ■

Приклад 7.17. Знайти значення інтеграла

а) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\, dx$, **б)** $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{2-x^2}}$, **в)** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^8 x \cos^4 x dx$,

г) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}} \frac{4\operatorname{tg} x - 5}{4\cos^2 x - \sin 2x + 1} dx$, **д)** $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

Розв'язання. а) Для обчислення заданого інтеграла застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\, dx = \left\| \begin{matrix} \ln x \ge 0, & \ln x < 0, \\ x \ge 1, & x < 1, \\ |\ln x| = \ln x, & |\ln x| = -\ln x \end{matrix} \right\| = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (-\ln x) dx + \int_{1}^{e} \ln x dx =$$

$$=\left\|\begin{matrix} u=\ln x, & du=\dfrac{dx}{x}, \\ dv=dx, & v=x \end{matrix}\right\|=-\left(x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}-\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1}x\cdot\frac{dx}{x}\right)+\left(x\ln x\Big|_{1}^{e}-\int\limits_{1}^{e}x\cdot\frac{dx}{x}\right)=$$

$$=-\left(\ln 1-\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}-x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}\right)+\left(e\ln e-\ln 1-x\Big|_{1}^{e}\right)=-\left(\frac{1}{e}-\left[1-\frac{1}{e}\right]\right)+$$

$$+\left(e-\left[e-1\right]\right)=2\left[1-\frac{1}{e}\right].\ \blacksquare$$

б) Застосовуємо формулу заміни змінної під знаком визначеного інтеграла:

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{(x+2)\sqrt{2-x^2}}=\left\|\begin{matrix} t=\dfrac{1}{x+2}, & dx=-\dfrac{dt}{t^2}, \\ x=\dfrac{1}{t}-2, & \dfrac{x}{t}\Big|\dfrac{-1}{1}\Big|\dfrac{0}{0,5} \end{matrix}\right\|=\int\limits_{1}^{0,5}\frac{-\dfrac{dt}{t^2}}{\dfrac{1}{t}\sqrt{2-\left(\dfrac{1}{t}-2\right)^2}}=$$

$$=-\int\limits_{0,5}^{1}\frac{-dt}{t\sqrt{-\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{4}{t}-2}}=\int\limits_{0,5}^{1}\frac{dt}{\sqrt{-1+4t-2t^2}}=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dt}{\sqrt{2\left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-(t-1)^2\right]}}=$$

в) Під знаком інтеграла $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2^8\sin^8 x\cos^4 x dx$ спочатку здійснимо заміну, яка зведе інтегрування в першу чверть, потім застосуємо формули зведення й основну тригонометричну тотожність:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2^8\sin^8 x\cos^4 x dx=\left\|\begin{matrix} t=x-\dfrac{\pi}{2}, \quad x=t+\dfrac{\pi}{2}, \quad dt=dx; \\ x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=0, \quad x=\pi\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2} \end{matrix}\right\|=$$

$$=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}2^8\sin^8\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\cos^4\left(t+\frac{\pi}{2}\right)dt=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}2^8\cos^8 t\sin^4 t\,dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}2^8\cos^8 t\left(1-\cos^2 t\right)^2 dt=2^8\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^8 t\left(1-2\cos^2 t+\cos^4 t\right)dt=$$

$$=2^8\left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^8 t\,dt-2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10} t\,dt+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{12} t\,dt\right).$$

Для подальшого обчислення застосовуємо формулу *з приклада 3.140*:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot D_n,\quad D_n = \begin{cases}1, & n-\text{непарне},\\ \frac{\pi}{2}, & n-\text{парне},\end{cases}\quad n\in\mathbb{N}, \tag{7.1}$$

за допомогою якої отримаємо:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8\sin^8 x\cos^4 x dx = 2^8\left(\frac{7!!}{8!!}-2\cdot\frac{9!!}{10!!}+\frac{11!!}{12!!}\right)\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{7\pi}{8}.\ ■$$

г) Застосуємо формулу заміни змінної:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}} \frac{4\operatorname{tg}x-5}{4\cos^2 x-\sin 2x+1}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}} \frac{4\operatorname{tg}x-5}{5\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x}dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}} \frac{4\operatorname{tg}x-5}{5-2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \left\| \begin{array}{l} t=\operatorname{tg}x,\ dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x};\ \ x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=1,\ x=\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow \\ t=\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{\sin\left(\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)}}=\dfrac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}=2 \end{array}\right\| =$$

$$=\int_1^2 \frac{4t-5}{5-2t+t^2}dt = 2\int_1^2\frac{2t-2}{t^2-2t+5}dt-\int_1^2\frac{d(t-1)}{(t-1)^2+2^2}=\left(2\ln\left|t^2-2t+5\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t-1}{2}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=2\ln\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.\ ■$$

д) Під знаком інтеграла $\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x^4dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$ зручно здійснити тригонометричну підстановку $x=2\sin t$. А саме:

$$\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x^4dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}=\left\|\begin{array}{l} x=2\sin t, dx=2\cos t\,dt, 4-x^2=4\cos^2 t; \\ x=0\Rightarrow t=0,\ \ x=\sqrt{2}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right\|=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{16\sin^4 t}{8\cos^3 t}\cdot 2\cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\left(1-\cos^2 t\right)^2}{\cos^2 t}dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 t}-2+\cos^2 t\right)dt=$$

$$=\left(4\operatorname{tg}t-8t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\cos 2t\right)dt == 4-2\pi+2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=5-\frac{3\pi}{2}.\ ■$$

Приклад 7.18. Знайти площу фігури, що обмежена кривими:

а) $y=(x+1)^2$, $x=\sin\pi y$, $y=0$ $(0\le y\le 1)$; **б)** $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=2t^2-t^3. \end{cases}$

Розв'язання. а) Задану фігуру D зображено на рис. 7.1. Її площу можна обчислювати двома способами:

Перший спосіб полягає в необхідності розбиття області на дві частини віссю ординат. Ліва з цих частин є криволінійною трапецією, що обмежена віссю абсцис, графіком функції $y=(x+1)^2$ і вертикальними прямими $x=-1$ і $x=0$. Права частина обмежена знизу гілкою синусоїди, що виражається через обернену тригонометричну функцію за формулою $y=\frac{1}{\pi}\arcsin x$, а зверху іншою гілкою – $y=1-\frac{1}{\pi}\arcsin x$, а також вертикальними прямими $x=0$ і $x=1$. Площа області D буде дорівнювати сумі площ двох утворених частин, тому

$$S=\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx+\int_{0}^{1}\left[\left(1-\frac{1}{\pi}\arcsin x\right)-\frac{1}{\pi}\arcsin x\right]dx.$$

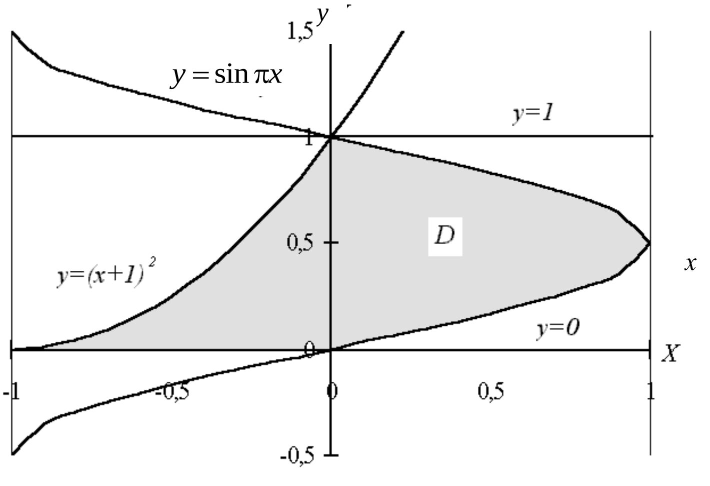


Рис. 7.1.

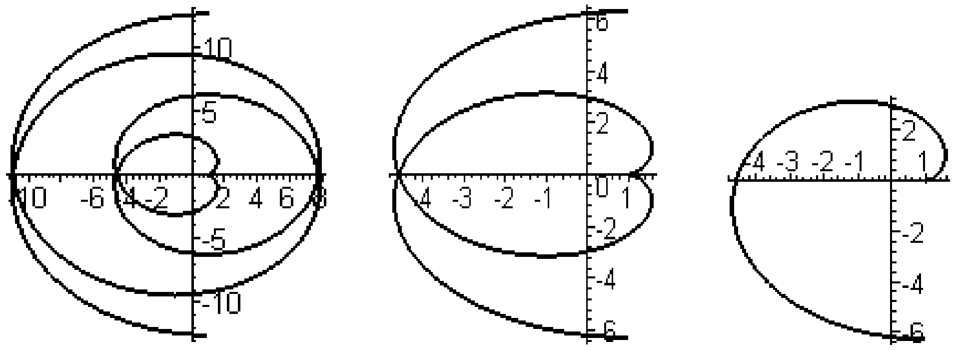
Перший інтеграл обчислюється як інтеграл від степеневої функції, а другий – частинами. Не будемо зупинятися на його обчисленні й запропонуємо це зацікавленому читачеві.

Наведемо більш простий *другий спосіб*. Оскільки ця фігура зліва обмежена гілкою (правою) параболи, справа – синусоїдою, а також горизонтальними прямими $y=0$ і $y=1$, то її площу можна обчислити також за формулою $S=\int_c^d(x_1(y)-x_2(y))dy$, де $c=0$, $d=1$, $x_1(y)=\sin\pi y$, рівняння правої гілки параболи, в якому x виражене через y, утворює рівняння кривої $x_2(y)$. Якщо $y=(x+1)^2$, то звідси $x=\pm\sqrt{y}-1$. Знак „+" дає праву гілку параболи, а „–" – ліву, тому $x_2(y)=\sqrt{y}-1$. Таким чином,

$$S=\int_0^1(\sin\pi y-\sqrt{y}+1)dy=\left.\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi y-\frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+y\right)\right|_0^1=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}+\frac{2}{\pi}.\ \blacksquare$$

Для допомоги студентові у виконанні індивідуальних завдань на рис. 7.2 –7.5 наведено графіки деяких кривих, що задані параметрично:

1) на рис. 7.2 зображено графік розгортки кола $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$ при $-4\pi \le t \le 4\pi$ (рис. 7.2 а), $-2\pi \le t \le 2\pi$ (рис. 7.2 б), $0 \le t \le 2\pi$ (рис. 7.2 в);
2) на рис. 7.3 – графік циклоїди $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ при $-4\pi \le t \le 4\pi$;
3) на рис. 7.4 – графік астроїди $\begin{cases} x = \sin^3 t, \\ y = \cos^3 t \end{cases}$ при $0 \le t \le 2\pi$;
4) на рис. 7.5 – графік кривої $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 2t^2 - t^3 \end{cases}$ при $0 \le t \le 2$.



а б в

Рис. 7.2.

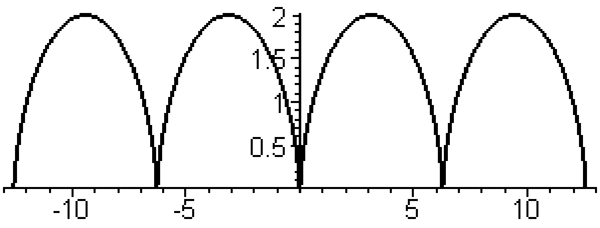


Рис. 7.3.

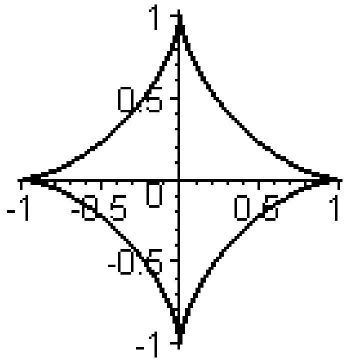


Рис. 7.4.

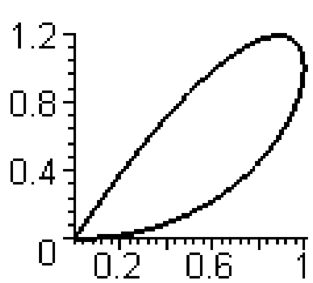


Рис. 7.5.

б) Щоб дізнатись, яким значенням параметра t відповідає петля $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 2t^2 - t^3, \end{cases}$ потрібно знайти точку (x^*, y^*) самоперетину графіка цієї функції і два значення t_1 і t_2 параметра t, що їй відповідають, тобто

$$\begin{cases} x^* = x(t_1) = x(t_2), \\ y^* = y(t_1) = y(t_2). \end{cases}$$

У нашому випадку це точка (0,0), і їй відповідають два значення параметра t_1=0 і t_2=2. Коли значення параметра збільшується від 0 до 2, петля оббігає область, яку обмежує, проти руху стрілки годинника. Графік цієї кривої зображено на рис. 7.5. Отже, маємо:

$$S = -\int_0^2 (2t^2 - t^3)(2t - t^2)' dt = -\int_0^2 (2t^2 - t^3)(2 - 2t) dt = -\int_0^2 (4t^2 - 6t^3 + 2t^4) dt =$$

$$= -\left(\frac{4t^3}{3} - \frac{6t^4}{4} + \frac{2t^5}{5} \right)\Bigg|_0^2 = -\left(\frac{32}{3} - 24 + \frac{64}{5} \right) = \frac{8}{15}. \blacksquare$$

Приклад 7.19. Обчислити довжину дуги кривої.

а) $y = e^x \ (0 \le x \le x_0)$**;** **б)** $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$**;** **в)** $\rho = \sin^5 \frac{\varphi}{5}, \frac{3\pi}{2} \le \varphi \le \frac{7\pi}{2}$**.**

Розв'язання. **а)** Крива визначається функцією $y = e^x \ (0 \le x \le x_0)$, що задана явно. Тому

$$|L| = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + e^{2x}} dx = \left\| \begin{matrix} t = \sqrt{1 + e^{2x}}, \ dx = \dfrac{2tdt}{2(t^2 - 1)}, \ x = \dfrac{1}{2}\ln(t^2 - 1); \\ x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2}, \quad x = x_0 \Rightarrow t = \sqrt{1 + e^{2x_0}} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2xo}}} \frac{t \cdot tdt}{t^2 - 1} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x_0}}} \frac{(t^2 - 1) + 1}{t^2 - 1} dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x_0}}} \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt =$$

$$= \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| \right) \Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x_0}}} = \sqrt{1 + e^{2x_0}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + e^{2x_0}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2x_0}} + 1} -$$

$$- \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right) = \sqrt{1 + e^{2x_0}} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\left(\sqrt{1 + e^{2x_0}} - 1 \right)^2}{e^{2x_0}} - \ln\left(\sqrt{2} - 1 \right) =$$

$$= \sqrt{1 + e^{2x_0}} - \sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{1 + e^{2x_0}} - 1 \right) - x_0 - \ln\left(\sqrt{2} - 1 \right). \blacksquare$$

б) Розглянемо криву, що визначається рівнянням $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Потрібно ввести таку тригонометричну параметризацію, яка після підстановки в ліву частину виділяє в ній тригонометричну одиницю. Такою параметризацією буде $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$ При зростанні параметра t від 0 до 2π крива робить повний оббіг проти руху стрілки годинника і замикається в точці $(a, 0)$. Ця крива називається астроїдою; при $a = 1$ її графік зображено на рис. 7.4. Скористаємось симетрією кривої, отримаємо

$$|L| = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left[a\cos^3 t\right]'^2 + \left[a\sin^3 t\right]'^2}\,dt =$$

$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2 + (3\sin^2 t\cos t)^2}\,dt = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\,dt =$$

$$= 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt = -3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a. \blacksquare$$

Для допомоги студентові у виконанні індивідуальних завдань на рис. 7.6 –7.10 наведено графіки деяких кривих, що задані в полярній системі координат:

1) на рис. 7.6 зображено графік кардіоїди $\rho = 1 + \cos\phi$;
2) на рис. 7.7 – графік трилисника $\rho = \sin 3\varphi$;
3) на рис. 7.8 – графіки лемніскат а) $\rho = \sqrt{\sin 2\phi}$, б) $\rho = \sqrt{\cos 2\phi}$;
4) на рис. 7.9 – графік кривої $\rho = \cos^4\frac{\varphi}{4}$ при а) $-2\pi \le \varphi \le 2\pi$; б) $-\pi \le \varphi \le \pi$, в) $\pi \le \varphi \le 3\pi$;
5) на рис. 7.10 – графіки кривих а) $\rho = \dfrac{1}{\cos^4\frac{\varphi}{4}}$ при $-\pi \le \varphi \le \pi$; б) $\rho = \sin^5\frac{\varphi}{5}$ при $\frac{3\pi}{2} \le \varphi \le \frac{7\pi}{2}$; в) $\rho = \dfrac{1}{\cos^5\frac{\varphi}{5}}$ при $-\pi \le \varphi \le \pi$.

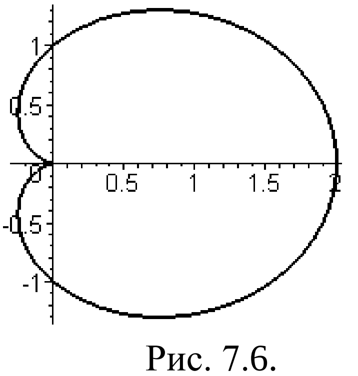


Рис. 7.6.

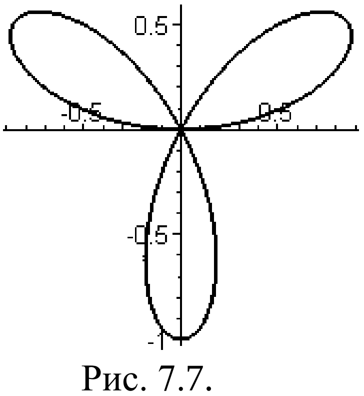
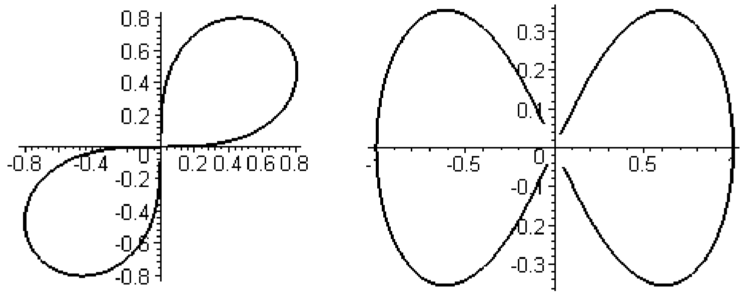
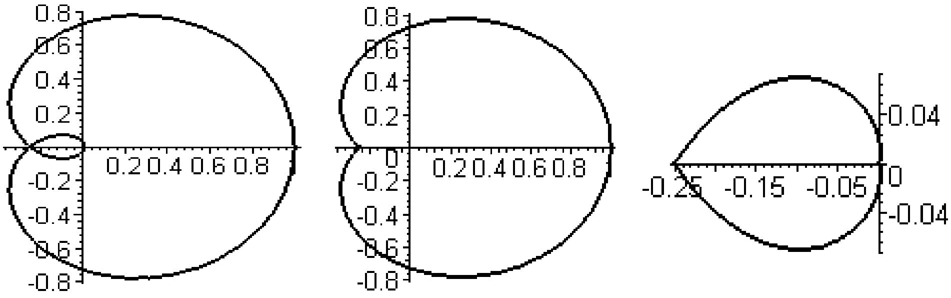


Рис. 7.7.



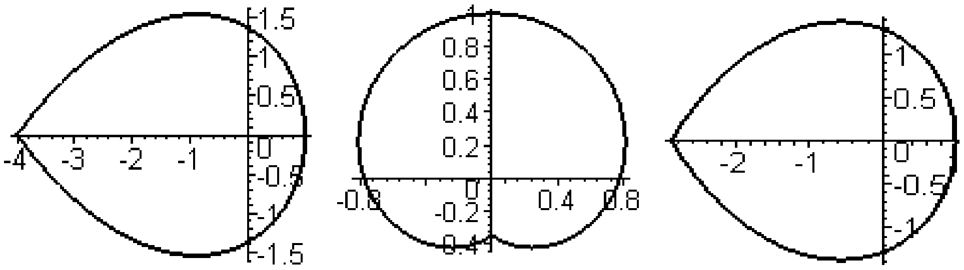
а б

Рис. 7.8.



а б в

Рис. 7.9.



а б в

Рис. 7.10.

в) Задану петлю кривої $\rho=\sin^5\frac{\varphi}{5}$ при $\frac{3\pi}{2}\le\varphi\le\frac{7\pi}{2}$ зображено на рис. 7.10, б. Скористаємось симетрією цієї петлі , отримаємо

$$|L|=2\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\sqrt{\left[\rho(\varphi)\right]^2+\left[\rho'(\varphi)\right]^2}d\varphi=2\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\sqrt{\left[\sin^5\frac{\varphi}{5}\right]^2+\left[\sin^4\frac{\varphi}{5}\cos\varphi\right]^2}d\varphi=$$

$$=2\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\sin^4\frac{\varphi}{5}d\varphi=\frac{1}{4}\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\left(\cos\frac{4\varphi}{5}-4\cos\frac{2\varphi}{5}+3\right)d\varphi=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}\sin\frac{4\varphi}{5}-10\sin\frac{2\varphi}{5}+3\varphi\right)\Bigg|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}$$

$$=-\frac{5}{16}\sin\frac{6\pi}{5}+\frac{5}{2}\sin\frac{3\pi}{5}+\frac{3\pi}{4}.\ \blacksquare$$

Приклад 7.20. Знайти об’єм тіла, що обмежене поверхнею, утвореною обертанням ділянок кривих:

а) $y=\sin x,\ y=0\ (0\le x\le\pi)$ навколо осі Ox;

б) $y = \sin x,\ \ y = 0\ \ (0 \le x \le \pi)$ навколо осі *Oy*;

в) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ навколо осі *Ox*;

г) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ навколо осі *Oy*.

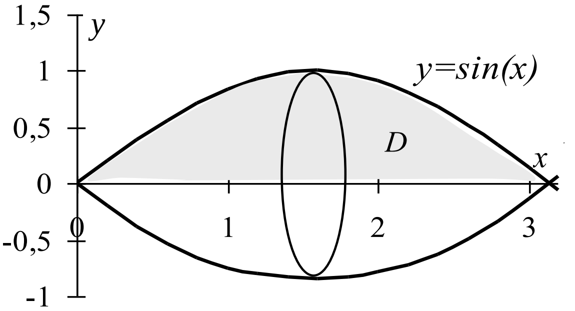


Рис. 7.11.

Розв'язання. а) На рис. 7.11. зображено відповідну криволінійну трапецію *D*, що обертається навколо осі *Ox* і схему цього обертання. Об'єм утвореного тіла дорівнює

$$V_x = \pi\int_0^{\pi} y^2(x)dx = \pi\int_0^{\pi} \sin^2 xdx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1 - \cos 2x)dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}. \ ■$$

б) Відповідну криволінійну трапецію і схему її обертання навколо осі *Oy* зображено на рис. 4.12, а об'єм утвореного тіла дорівнює

$$V_y = 2\pi\int_0^{\pi} xy(x)dx = 2\pi\int_0^{\pi} x\sin xdx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin xdx & v = -\cos x \end{matrix} \right\| =$$

$$= 2\pi\left(-x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos xdx\right) =$$

$$= 2\pi\left(\pi + \sin x\Big|_0^{\pi}\right) = 2\pi^2. \ ■$$

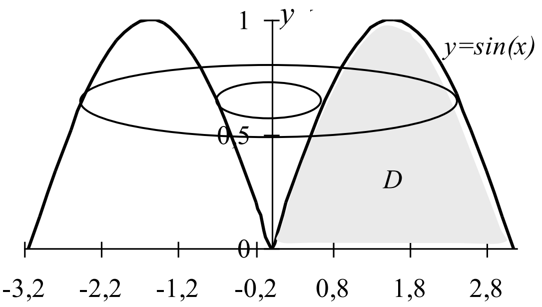


Рис. 4.12.

в) При $a = 1$ графік циклоїди зображено на рис. 3.7. Знайдемо об'єм тіла, що утворюється обертанням криволінійної трапеції, яка обмежена циклоїдою і віссю абсцис навколо осі *Ox*. При обчисленні застосуємо формулу (4.1).

$$V_x = \pi\int_0^{2\pi} y^2(t)x'(t)dt = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1 - \cos t)^3 dt = 8\pi a^3\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{t}{2}dt =$$

$$= \left\| \begin{matrix} z = t/2,\ dt = 2dz,\ t = 2z; \\ t = 0 \Rightarrow z = 0,\ t = 2\pi \Rightarrow z = \pi \end{matrix} \right\| = 16\pi a^3\int_0^{\pi}\sin^6 zdz = 32\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 zdz \overset{(4.1)}{=}$$

$$= 32\pi a^3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{5!!}{6!!} = 5\pi^2 a^3. \ ■$$

г) Знайдемо об'єм тіла, що утворюється обертанням криволінійної трапеції, яка обмежена циклоїдою й віссю абсцис навколо осі *Oy*:

$$V_y = 2\pi\int_0^{2\pi} x(t)y(t)x'(t)dt = 2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2 dt =$$

$$= 2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-2t\cos t + t\cos^2 t - \sin t + 2\sin t\cos t - \sin t\cos^2 t)dt =$$

$$= 2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-2t\cos t + \frac{t}{2} + \frac{t}{2}\cos 2t - \sin t + \sin 2t - \sin t\cos^2 t)dt = 2\pi a^3 \times$$

$$\times\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{t^2}{2} - 2(t\sin t + \cos t) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t\right) + \cos t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi a^3\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{(2\pi)^2}{2} = 6\pi^3 a^3. \ \blacksquare$$

Приклад 7.21. Чи є функція $f(x)$ інтегровною на $[0,1]$?

а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}}, \text{ якщо } x \neq 0 \wedge x \neq \dfrac{1}{\pi n}, & (n\in\mathbb{N}), \\ 0, \text{ у іншому випадку} \end{cases}$

б) $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}}\right)$, **в)** $f(x) = \left\{\sin\dfrac{1}{x}\right\}$, **г)** $f(x) = \left\{\dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}}\right\}$.

Тут $\{x\} = x - [x]$ – дробова частина дійсного числа x, де $[x]$ – ціла частина дійсного числа x, тобто найбільше ціле число, що не перевищує x.

Розв'язання. Перші дві функції мають на відрізку $[0,1]$ розриви в точках, де $\sin\frac{1}{x} = 0$, тобто в точках $x = \frac{1}{\pi n}$ $(n\in\mathbb{N})$, і в точці $x = 0$.

а) Функція цього прикладу є необмеженою, наприклад, у околі точки $x = \frac{1}{\pi}$, оскільки $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\pi}}\sin\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{1}{\pi}}\dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}} = \infty$. Звідси випливає, що функція не задовольняє *необхідну умову інтегровності функції*, тому не є інтегровною на відрізку $[0,1]$.

б) Функція $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}}\right)$ набуває трьох значень –1, 0 і 1, звідки випливає її обмеженість на відрізку $[0,1]$.

Визначимо множину точок розриву даної функції. Ця функція на відрізку $[0,1]$ має розриви першого роду в точках, де $\sin\frac{1}{x}=0$, тобто в точках $x=\frac{1}{\pi n}$ $\left(n\in\mathbb{N}\right)$, і при переході через ці точки вона змінює значення з -1 на 1 або навпаки. Крім того, вона має розрив у точці $x=0$. Отже, множина точок розриву цієї функції $A=\left\{\frac{1}{\pi n}:n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$. Ця множина є зчисленною, тому має лебеґову міру нуль (див. *приклад 5.17* випадок 3). Застосовуючи критерій Лебеґа інтегровності функції на відрізку, приходимо до висновку про інтегровність цієї функції на $[0,1]$.

в) Функція $f(x)=\left\{\sin\frac{1}{x}\right\}$ набуває значення з півінтервалу $[0,1)$, тому є обмеженою. Вона має розрив у точці $x=0$ і може мати розриви в точках, де $\sin\frac{1}{x}$ набуває цілих значень, а саме:

$\sin\frac{1}{x}=0$, тобто в точках $x=\frac{1}{\pi n}$ $\left(n\in\mathbb{N}\right)$,

$\sin\frac{1}{x}=\pm1$, тобто в точках $x=\frac{2}{\pi(2n+1)}$ $\left(n\in\mathbb{N}\right)$.

Позначимо через $B=\left\{\frac{1}{\pi n},\frac{2}{\pi(2n+1)}:n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$ множину знайдених вище точок, а через A множину всіх точок розриву заданої функції на відрізку $[0,1]$. Множина B є зчисленною, тому має лебеґову міру нуль. Множина A, як підмножина множини лебеґової міри нуль, також має лебеґову міру нуль; це безпосередньо випливає із означення лебеґової міри нуль (доведіть це ✍!).

Отже, виконуються всі умови критерія Лебеґа, звідки випливає інтегровність цієї функції на відрізку $[0,1]$.

У цьому прикладі ми не з'ясовували характер точок розриву функції. Навіть залишили відкритим питання про те, чи всі точки множини B будуть точками розриву. Для відповіді на поставлене питання ці подробиці не знадобилися завдяки властивості повноти міри Лебеґа.

г) Із означення дробової частини випливає, що функція $f(x)=\left\{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\right\}$ є обмеженою, оскільки $0\le f(x)<1\quad\forall x\in[0,1]$. Знайдемо множину можливих точок розриву функції. Для цього потрібно знайти, в яких точках задана функція набуває цілих значень:

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}=m,\quad m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

$$\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{m},\ m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

$$x=\frac{1}{(-1)^n\cdot\arcsin\dfrac{1}{m}+\pi n},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Знаходимо точки, в яких знаменник дорівнює нулю: $x=\dfrac{1}{\pi n}$ $\left(n\in\mathbb{N}\right)$, а також не забудемо про точку $x=0$. Всі ці точки разом утворюють зчисленну множину, як зчисленне об'єднання зчисленних множин, до яких додається одноточкова множина $\{0\}$ [**2**, с.20], тобто

$$B=\bigcup_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left\{\frac{1}{(-1)^n\cdot\arcsin\dfrac{1}{m}+\pi n},\ n\in\mathbb{N}\right\}\bigcup\left\{\frac{1}{\pi n},\ n\in\mathbb{N}\right\}\bigcup\{0\}.$$

Отже, множина B має лебеґову міру нуль, а разом із нею нульову міру має і множина точок розриву цієї функції як підмножина B. Усі умови критерію Лебеґа виконуються, отже, ця функція є інтегровною на відрізку $[0,1]$. ■

Приклад 7.22. Нехай $f(x)$ не зростає на $[1;+\infty)$ і $f(n)=\dfrac{1}{n^{3/2}}$ при $n\in\mathbb{N}$.

Довести: $\lim\limits_{n}\displaystyle\int_n^{n^2}\frac{f(x)}{x}dx=0$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x)$ не зростає на $[1;+\infty)$, то вірною є імплікація: $n\le x\le n^2\ \Rightarrow\ f\left(n^2\right)\le f(x)\le f(n)$ для будь-якого $n\in\mathbb{N}$.

Застосовуючи умову $f(n)=\dfrac{1}{n^{3/2}}$, отримаємо

$$\frac{1}{n^3}\le f(x)\le\frac{1}{n^{3/2}}\quad\forall x\in\left[n,n^2\right].$$

Розглянемо підінтегральну функцію. Подамо її у вигляді добутку $\dfrac{f(x)}{x}=f(x)\cdot g(x)$, де $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

Функція $g(x)=\dfrac{1}{x}$ невід'ємна на відрізку інтегрування, також вона неперервна на ньому, тому інтегровна (*теорема 5.9*). Функція $f(x)$ не зростає й обмежена на відрізку $\left[n,n^2\right]$, отже, інтегровна на ньому (*теорема 5.12*). Оскільки всі припущення властивості 11° виконуються, має місце оцінка інтеграла:

$$\frac{1}{n^3}\cdot\int_n^{n^2}\frac{dx}{x}\le\int_n^{n^2}\frac{f(x)}{x}dx\le\frac{1}{n^{3/2}}\cdot\int_n^{n^2}\frac{dx}{x}.$$

Тепер застосуємо *принцип двостороннього обмеження* (про «двох поліціантів») [**2**, с. 102], отримаємо при $n\to\infty$

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\ln n}{n^3} \le & \displaystyle\int_n^{n^2} \frac{f(x)}{x}dx & \le \dfrac{\ln n}{n^{3/2}} \\ \searrow & \Downarrow & \swarrow \\ & 0 & \end{array}$$

Таким чином, $\lim\limits_{n} \int_n^{n^2} \frac{f(x)}{x}dx = 0$, що й треба було довести. ■

Приклад 7.23. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

а) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$; **б)** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Розв'язання. **а)** Розглянемо інтеграл $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$. Знаменник підінтегральної функції на множині інтегрування в жодній точці проміжку $[2;+\infty)$ не дорівнює нулю, тому скінченних особливих точок ця функція не має. Обчислення проведемо згідно з означенням невласного інтеграла першого роду:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{A\to+\infty} \int_2^{A} \frac{dx}{(x+0,5)^2-(1,5)^2} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x+0,5-1,5}{x+0,5+1,5}\right|\Bigg|_2^A =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{3}\left(\ln\left|\frac{A-1}{A+2}\right| - \ln\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}(\ln 1+\ln 4) = \frac{\ln 4}{3}.$$

б) Розглянемо інтеграл $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx$. З урахуванням того, що особливою є точка $x=0$, яка є внутрішньою точкою відрізка інтегрування, інтеграл подамо у вигляді:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{\varepsilon_1\to0} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx + \lim_{\varepsilon_2\to0} \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx.$$

Знайдемо невизначений інтеграл з урахуванням множини визначення підінтегральної функції: $2+\sqrt[3]{x}>0$. Отримаємо:

$$\int \frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx = \left\|\begin{matrix} t=\sqrt[3]{x},\ x=t^3, \\ dx=3t^2dt \end{matrix}\right\| = \int \frac{\ln(2+t)}{t}\cdot 3t^2dt = 3\int t\ln(2+t)dt =$$

$$= \left\|\begin{matrix} u=\ln(2+t),\ du=\dfrac{dt}{2+t}, \\ dv=t\,dt, \qquad v=\dfrac{t^2}{2} \end{matrix}\right\| = \frac{3t^2}{2}\ln(2+t) - \frac{3}{2}\int \frac{t^2dt}{2+t} = \frac{3t^2}{2}\ln(2+t) -$$

$$-\frac{3}{2}\int\left(t-2+\frac{4}{2+t}\right)dt=\frac{3t^2}{2}\ln(2+t)-\frac{3}{2}\left(\frac{t^2}{2}-2t+4\ln(2+t)\right)+C=$$

$$=\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}-2\sqrt[3]{x}+4\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)\right)+C.$$

Після чого одержимо:

$$I=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}-2\sqrt[3]{x}+4\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)\right)\right)\Bigg|_{-1}^{\varepsilon_1}+$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}-2\sqrt[3]{x}+4\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)\right)\right)\Bigg|_{\varepsilon_2}^{1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\frac{3\sqrt[3]{(\varepsilon_1)^2}}{2}\ln\left(2+\sqrt[3]{\varepsilon_1}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{(\varepsilon_1)^2}}{2}-2\sqrt[3]{\varepsilon_1}+4\ln\left(2+\sqrt[3]{\varepsilon_1}\right)\right)\right)+\frac{3}{4}+3-$$

$$-\frac{9}{2}\ln 3-\frac{3}{4}+3-\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(\frac{3\sqrt[3]{(\varepsilon_2)^2}}{2}\ln\left(2+\sqrt[3]{\varepsilon_2}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{(\varepsilon_2)^2}}{2}-2\sqrt[3]{\varepsilon_2}+4\ln\left(2+\sqrt[3]{\varepsilon_2}\right)\right)\right)=$$

$$=-\frac{9}{2}\ln 3+6. \blacksquare$$

Приклад 7.24. Дослідити невласні інтеграли на збіжність:

а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}dx$, **б)** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$, **в)** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)dx}{x^3}$.

Розв'язання. а) Інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}dx$ розбиваємо на суму невласних інтегралів першого й другого роду:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}dx=\int\limits_0^{1}\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}dx+\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}dx.$$

Нехай $x\to+0$, тоді, застосовуючи наслідок із першої істотної границі, отримаємо $\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}\sim\frac{ax}{x^n}\sim\frac{a}{x^{n-1}}$. З ознаки порівняння в граничній формі отримаємо, що перший із інтегралів суми (він є невласним інтегралом другого роду) збігається, якщо $n-1<1$, тобто $n<2$.

Нехай $x\to+\infty$, тоді з нерівності $\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}\le\frac{\pi/2}{x^n}$ і ознаки порівняння отримаємо, що із збіжності інтеграла від функції, яка стоїть в цій нерівності справа буде випливати збіжність інтеграла від функції, що стоїть зліва.

Оскільки невласний інтеграл першого роду $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n}$ збігається за умови $n>1$, то за тією ж умовою буде збігатися й інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}dx$.

Для збіжності заданого інтеграла потрібно, щоб обидва інтеграли суми збігалися одночасно, тобто повинна задовольнятися система нерівностей $\begin{cases} n>1, \\ n<2. \end{cases}$ Її розв'язком є подвійна нерівність $1<n<2$. ■

б) Невласний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$ записуємо у вигляді суми $\int\limits_0^{+\infty}\ldots=\int\limits_0^{1}\ldots+\int\limits_1^{+\infty}\ldots$.

Нехай $x\to+0$, тоді $\frac{1}{\sqrt{x^3+x}}=\frac{1}{\sqrt{x(x^2+1)}}\sim\frac{1}{\sqrt{x}}$ і в ознаці порівняння (для невласного інтеграла другого роду) $\lambda=1/2<1$, тому перший інтеграл суми збігається.

Нехай $x\to+\infty$, тоді $\frac{1}{\sqrt{x^3+x}}\sim\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ і в ознаці порівняння (для невласного інтеграла першого роду) $\lambda=3/2>1$, тому другий інтеграл суми збігається.

Висновок: заданий інтеграл збігається. ■

в) Невласний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)dx}{x^3}$ записуємо у вигляді суми $\int\limits_0^{+\infty}\ldots=\int\limits_0^{1}\ldots+\int\limits_1^{+\infty}\ldots$.

Нехай $x\to+0$, тоді, використовуючи наслідок з другої істотної границі $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, отримаємо: $\frac{\ln(1+x)}{x^3}\sim\frac{x}{x^3}=\frac{1}{x^2}$. В ознаці порівняння для невласного інтеграла другого роду $\lambda=2\geq1$, тому перший інтеграл суми розбігається.

Оскільки перший інтеграл суми розбігається, то даний невласний інтеграл розбігається. ■

Приклад 7.25. Дослідити невласні інтеграли на збіжність:

а) $\int\limits_0^1\ln\left|1-4\sin^2 x\right|dx$, **б)** $\int\limits_0^{+\infty}x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}dx$.

Розв'язання. а) Інтеграл $\int\limits_0^1\ln\left|1-4\sin^2 x\right|dx$ на відрізку інтегрування містить одну особливу точку $x=\frac{\pi}{6}$, яка є внутрішньою точкою відрізка $[0,1]$.

Тому подамо інтеграл сумою двох невласних інтегралів другого роду: $\int\limits_0^1 \ldots = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \ldots + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^1 \ldots$.

Розглянемо перший інтеграл суми. Перепишемо його у вигляді:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \ln\left|1-4\sin^2 x\right| dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \ln(1+2\sin x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}-\varepsilon} \ln(1-2\sin x)\,dx.$$

Перший інтеграл у правій частині є визначеним інтегралом від неперервної функції на відрізку інтегрування, тому він існує (*теорема 5.9*). Розглянемо другий доданок. Зробимо перетворення

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}-\varepsilon} \ln(1-2\sin x)\,dx = \left\| \begin{array}{l} t=\dfrac{\pi}{6}-x,\;\; x=\dfrac{\pi}{6}-t,\;\; dx=-dt, \\ x=0 \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6},\;\; x=\dfrac{\pi}{6}-\varepsilon \Rightarrow t=\varepsilon \end{array} \right\| =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{6}} \ln\left(1-2\sin\left(\frac{\pi}{6}-t\right)\right)dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{6}} \ln\left(4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{2}\right)\cdot\sin\frac{t}{2}\right)dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \ln\left(4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{2}\right)\cdot\sin\frac{t}{2}\right)dt.$$

Розглянемо границю:

$$A = \lim_{t\to+0}\frac{\ln\left(4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{2}\right)\cdot\sin\frac{t}{2}\right)}{\ln t} = \lim_{t\to+0}\left(\frac{\ln\left(4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{2}\right)\right)}{\ln t} + \frac{\ln\left(\sin\frac{t}{2}\right)}{\ln t}\right);$$

$$\lim_{t\to+0}\frac{\ln\left(4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{2}\right)\right)}{\ln t} = 0;$$

$$\lim_{t\to+0}\frac{\ln\left(\sin\frac{t}{2}\right)}{\ln t} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = [\text{правило Лопіталя}] \overset{?}{=} \lim_{t\to+0}\frac{\left(\ln\left(\sin\frac{t}{2}\right)\right)'}{(\ln t)'} = \lim_{t\to+0}\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\cdot t}{\sin\frac{t}{2}} = 1;$$

$$\exists \qquad\qquad\qquad\qquad \Leftarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \exists$$

Отже, шукана границя $A=1$. Тоді, за ознакою порівняння в граничній формі, інтеграли $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \ln\left(4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{2}\right)\cdot\sin\frac{t}{2}\right)dt$ і $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \ln t\,dt$ збігаються або розбігаються одночасно. Розглянемо інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\ln t\,dt=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{6}}\ln t\,dt=\left\|\begin{matrix}u=\ln t,\ du=\dfrac{dt}{t},\\ dv=dt,\ v=t\end{matrix}\right\|=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(t\ln t\Big|_\varepsilon^{\frac{\pi}{6}}-\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{6}}dt\right)=$$

$$=\frac{\pi}{6}\ln\frac{\pi}{6}-\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\ln\varepsilon-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\ln\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}-\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\ln\varepsilon}{\varepsilon^{-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=[\text{правило Лопіталя}]\overset{?}{=}$$

$$=\frac{\pi}{6}\ln\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}-\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon^{-1}}{-\varepsilon^{-2}}=\frac{\pi}{6}\ln\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}-\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon=\frac{\pi}{6}\ln\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}.$$

Отже, інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\ln t\,dt$ збігається, а разом із ним збігається й інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\ln\left(4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{2}\right)\cdot\sin\frac{t}{2}\right)dt.$ Таким чином, інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\ln\left|1-4\sin^2 x\right|dx$ збігається. Аналогічно доводиться збіжність інтеграла $\int_{\frac{\pi}{6}}^{1}\ln\left|1-4\sin^2 x\right|dx$. В результаті приходимо до висновку про збіжність цього інтеграла.

б) Подамо інтеграл $\int_0^{+\infty}x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}dx$ сумою $\int_0^{+\infty}\ldots=\int_0^1\ldots+\int_1^{+\infty}\ldots.$

Нехай $x\to+\infty$. Для оцінки підінтегральної функції застосуємо нерівність $e^x\geq x^p$, яка є вірною для кожного показника степеня $p>0$ при достатньо великих $x>0$. Покажемо справедливість цього твердження. Для цього до границі $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}$ застосуємо правило Лопіталя $[p]+1$ разів (тут $[p]-$ ціла частина числа p), отримаємо:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{px^{p-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{p(p-1)x^{p-2}}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1-[p]-p}e^x}{p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-[p])}=+\infty.$$

Тепер застосуємо означення границі за Коші:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty\Rightarrow\text{ для }E=1\,\exists\Delta>0:\forall x>0:\quad x>\Delta\Rightarrow\frac{e^x}{x^p}>E=1.$$

Це означає, що при $x>\Delta$ виконується нерівність $e^x\geq x^p$.

Застосовуючи доведену нерівність, отримаємо при $x>\Delta$:

$$x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{x^n}{e^{x^2+\frac{1}{x^2}}}\leq\frac{x^n}{e^x}\leq\frac{x^n}{x^p}=\frac{1}{x^{p-n}}.$$

Оскільки $p>0$ може набувати будь-якого значення, то обираючи $p=|n|+2$, одержимо

$$x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\leq\frac{1}{x^{|n|-n+2}}\leq\frac{1}{x^2}.$$

Звідки випливає, що, за частковою ознакою порівняння, інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}dx$ збігається при будь-яких n.

Розглянемо інтеграл

$$\int\limits_{0}^{1} x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}dx = \left\| \begin{array}{l} t=\dfrac{1}{x},\ x=\dfrac{1}{t}, \\ dx=-\dfrac{dt}{t^2},\ \dfrac{x}{t}\left|\dfrac{0}{+\infty}\right|\dfrac{1}{1} \end{array} \right\| = \int\limits_{1}^{+\infty} t^{-n-2} e^{-\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)}dt .$$

Із оцінки

$$t^{-n-2}e^{-\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)} = \frac{t^{-n-2}}{e^{t^2+\frac{1}{t^2}}} \le \frac{t^{-n-2}}{e^t} \le \frac{t^{-n-2}}{t^p} = \left\| p=|n|+2>0 \right\| = \frac{1}{t^{|n|+n+4}} \le \frac{1}{t^4}$$

випливає, що він збігається при будь-яких $n \in \mathbb{R}$.

Висновок: заданий інтеграл збігається для будь-яких $n \in \mathbb{R}$. ■

§ 3. Наближене обчислення інтегралів

1. Варіанти індивідуальних завдань

Обчислити визначений інтеграл із точністю до 10^{-3} методом прямокутників (варіанти 1-10); методом трапецій (варіанти 11-20); методом Сімпсона (варіанти 21-30). Оцінити похибку.

1. $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$ 2. $\int_0^2 \sqrt{1+x^3}dx$ 3. $\int_0^2 x^2e^{3x}dx$ 4. $\int_0^1 e^{x^2}dx$

5. $\int_2^3 \frac{dx}{\ln x}$ 6. $\int_2^4 x^4 \ln x dx$ 7. $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x+1}}dx$ 8. $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x dx$

9. $\int\limits_0^{\pi} x^2 \sin x dx$ 10. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ 11. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$ 12. $\int_0^1 x\cos x dx$

13. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5+x^6}}$ 14. $\int_1^{1,5} \frac{dx}{x\sqrt{3+2x}}$ 15. $\int_0^1 e^{3x}\cos^3 x dx$ 16. $\int_1^2 \sin^2 x \cos^3 x\, dx$

17. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x^3}}{x^2}dx$ 18. $\int_2^3 e^{5x}\sin^2 x dx$ 19. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{4x-2}}$ 20. $\int_1^4 x^2\sqrt{6-x^2}dx$

21. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x}$ 22. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1-\sin 2x}$ 23. $\int_2^{\pi} \sin^4 5x\, dx$ 24. $\int_0^{\pi} \frac{\sin 2x}{5x}dx$

25. $\int_1^{\pi} \frac{xdx}{1+\sin 3x}$ 26. $\int_{0,5}^1 \frac{\cos \pi x}{x^3}dx$ 27. $\int_2^{\pi} \frac{dx}{2+3\cos x}$ 28. $\int_0^2 \frac{dx}{5+2e^{3x}}$

29. $\int_1^2 \frac{3^{2x}}{x}dx$ 30. $\int_{1/4}^{1/3} \frac{dx}{\cos^3 \pi x \sin^2 \pi x}$.

2. Приклад виконання індивідуального завдання

Приклад 7.26. Обчислити наближено $\int\limits_0^2 \frac{e^{-x}}{1+x}dx$, застосовуючи формули прямокутників, трапецій, Сімпсона з похибкою $\varepsilon = 0,05$.

Розв'язання. Спочатку визначимо крок h, з яким необхідно розбити відрізок [0;2], щоб отримати задану точність. З огляду на формули (1.37), (1.38), (1.42) знайдемо максимальні значення другої та четвертої похідної підінтегральної функції $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+x}$ на відрізку [0;2].

Друга похідна дорівнює $f''(x)=e^{-x}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{(1+x)^2}+\dfrac{2}{(1+x)^3}\right)$, вона матиме екстремуми, якщо $f'''(x)=0$. Маємо

$$f'''(x)=-e^{-x}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{3}{(1+x)^2}+\frac{6}{(1+x)^3}+\frac{6}{(1+x)^4}\right).$$

Тут множник $-e^{-x}\neq 0$ для будь-яких значень $x\in[0;2]$. А вираз у дужках являє собою суму додатних доданків на відрізку [0;2], тому вираз у дужках не дорівнює 0. Таким, чином, на відрізку [0;2] $f'''(x)\neq 0$. Тому максимального за модулем значення на [0;2] функція $f''(x)$ досягає на кінцях відрізка. Маємо $f''(0)=5$, $f''(2)=\dfrac{17}{27e^2}$, звідки $M_2=\max\limits_{[0;2]}|f''(x)|=5$.

З формули (1.34) та враховуючи, що $h=\dfrac{b-a}{n}$, маємо

$$n_{\text{п}}\geq\sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{24\varepsilon}},\ n_{\text{п}}\geq\sqrt{\frac{5(2-0)^3}{24\cdot 0,05}}\approx 5,77,$$

приймаємо $n_{\text{п}}=6$, тоді $h_{\text{п}}=0,3333$.

З формули (1.37) маємо

$$n_{\text{т}}\geq\sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{12\varepsilon}},\ n_{\text{т}}\geq\sqrt{\frac{5(2-0)^3}{12\cdot 0,05}}\approx 8,16,$$

візьмемо $n_{\text{т}}=9$, тоді $h_{\text{т}}=0,2222$.

Четверта похідна дорівнює

$$f^{IV}(x)=e^{-x}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{4}{(1+x)^2}+\frac{12}{(1+x)^3}+\frac{24}{(1+x)^4}+\frac{24}{(1+x)^5}\right).$$

вона матиме локальні екстремуми, якщо $f^{V}(x)=0$. Маємо:

$$f^{V}(x)=-e^{-x}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{5}{(1+x)^2}+\frac{20}{(1+x)^3}+\frac{60}{(1+x)^4}+\frac{120}{(1+x)^5}+\frac{120}{(1+x)^6}\right).$$

Тут множник $-e^{-x}\neq 0$ при всіх значеннях $x\in[0;2]$. Вираз у дужках є сумою додатних доданків на відрізку [0;2], тому вираз у дужках не дорівнює нулю. Таким, чином, $f^{V}(x)\neq 0$ на відрізку [0;2]. Тому максимального за модулем значення на [0;2] функція $f^{IV}(x)$ досягає на кінцях відрізка. Маємо $f^{IV}(0)=65$, $f^{IV}(2)=\dfrac{131}{81e^2}$, звідки $M_4=\max\limits_{[0;2]}|f^{IV}(x)|=65$.

З формули (1.42) маємо

$$n_\text{С} \geq \sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{2880\varepsilon}},\ n_\text{С} \geq \sqrt[4]{\frac{65\cdot(2-0)^5}{2880\cdot 0,05}} \approx 1,95,$$

обираємо $n_\text{С} = 2$, тоді $h_\text{С} = 1$.

Складемо таблиці значень для $y = \dfrac{e^{-x}}{1+x}$ при $n_\text{п} = 6$, $n_\text{т} = 9$ и $n_\text{С} = 2$ (див. табл. 7.1).

Таблиця 7.1 –

i	x_i	$x_{i-\frac{1}{2}}$	$y_{i-\frac{1}{2}}$
0	0		
		0,167	0,726
1	0,333		
		0,5	0,404
2	0,667		
		0,833	0,237
3	1		
		1,167	0,144
4	1,333		
		1,5	0,089
5	1,667		
		1,833	0,056
6	2		
Σ			1,656

i	x_i	y_i	
0	0	1	
1	0,222		0,655
2	0,444		0,444
3	0,667		0,308
4	0,889		0,218
5	1,111		0,156
6	1,333		0,113
7	1,556		0,083
8	1,778		0,061
9	2	0,045	
Σ		1,045	2,038

i	x_i	$x_{i-½}$	y_i	$y_{i-½}$
0	0		1	
		0,5		0,404
1	1		0,184	
		1,5		0,089
2	2		0,045	
Σ				0,493

Проведемо обчислення за формулою прямокутників (1.36), отримуємо:

$$\int_0^2 \frac{e^{-x}}{1+x}dx \approx 0,333\cdot 1,656 = 0,552.$$

Використовуючи формулу трапецій (1.37), маємо:

$$\int_0^2 \frac{e^{-x}}{1+x}dx \approx 0,222\cdot\left(\frac{1,045}{2} + 2,038\right) = 0,568.$$

Застосовуючи формулу Сімпсона (1.41), отримуємо:

$$\int_0^2 \frac{e^{-x}}{1+x}dx \approx \frac{1}{6}\left(1 + 0,045 + 4\cdot 0,494 + 2\cdot 0,184\right) = 0,564.$$

Розділ 8. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

§ 1. Теоретичні питання

1. Поняття первісної функції, невизначеного інтеграла. Основні властивості невизначеного інтеграла.
2. Таблиця інтегралів.
3. Інтегрування підстановкою (заміною змінної) під знаком невизначеного інтеграла. Приклади. Розширена таблиця основних інтегралів.
4. Інтегрування частинами під знаком невизначеного інтеграла. Основні групи функцій, що інтегруються частинами. Рекурентна формула обчислення інтеграла $K_\lambda = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^\lambda}$.
5. Інтегрування раціональних функцій. Приклади. Метод невизначених коефіцієнтів і метод закреслювання.
6. Поняття раціональної функції двох аргументів. Інтегрування функції $R(\sin x, \cos x)$ основною тригонометричною підстановкою. Приклад.
7. Інтегрування дробово-лінійної ірраціональності.
8. Інтегрування квадратичних ірраціональностей підстановками Ейлера.
9. Зведення інтегралів від квадратичних ірраціональностей до інтегралів типу $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.
10. Обчислення інтегралів типу $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Приклад.
11. Обчислення інтегралів типу $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Приклад.
12. Обчислення інтегралів вигляду $\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^{(2\lambda+1)/2}}dx$, підстановка Абеля. Приклад.
13. Обчислення інтегралів типу $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Приклади.
14. Обчислення інтегралів вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx, \int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)dx$, $\int \sin^\nu x \cdot \cos^\mu x dx, \int \operatorname{sh}^\nu x \cdot \operatorname{ch}^\mu x dx \quad (\nu, \mu \in \mathbb{Q})$.
15. Інтегрування біноміальних диференціалів. Приклад.
16. Метод Остроградського інтегрування раціональних функцій.
17. Поняття визначеного інтеграла Рімана. Необхідна умова інтегровності функції.

18. Верхні та нижні інтегральні суми Дарбу, їх властивості та геометричний зміст.
19. Критерій Дарбу інтегровності функції за Ріманом.
20. Класи інтегровних за Ріманом функцій.
21. Приклад інтегровної за Ріманом функції, що має нескінченну кількість точок розриву.
22. Множини лебеґової і жорданової міри нуль. Критерій Лебеґа інтегровності функції.
23. Властивості інтеграла Рімана, що виражаються рівностями. Адитивність інтеграла Рімана.
24. Властивості інтеграла Рімана, що виражаються нерівностями. Перша теорема про середнє.
25. Друга теорема про середнє.
26. Визначений інтеграл як функція верхньої межі.
27. Формула Ньютона-Лейбніца. Формула заміни змінної під знаком визначеного інтеграла. Приклад.
28. Формули інтегрування частинами під знаком визначеного інтеграла. Формула для обчислення інтеграла $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$. Формула Валліса.
29. Поняття простої плоскої кривої, параметризовної кривої, зімкненої кривої, напрямку на кривій, гладкої кривої. Спрямлювані криві та їх властивості.
30. Спрямлюваність і довжина простої гладкої кривої. Випадок лінії, що задана явно. Випадок лінії, що задана в полярній системі координат. Приклади. Диференціал дуги.
31. Поняття квадровної плоскої області. Критерії квадровності.
32. Обчислення площі криволінійної трапеції й криволінійного сектора (випадок полярних координат).
33. Поняття кубовного тіла. Критерії кубовності тіл.
34. Кубовність і об’єм циліндра, східчастого тіла, тіла обертання.
35. Площі поверхонь обертання.
36. Загальна схема застосування визначеного інтеграла. Статичні моменти та центр мас плоскої кривої. Перша теорема Гюльдена .
37. Статичні моменти та центр мас криволінійної трапеції. Друга теорема Гюльдена.
38. Механічна робота.
39. Наближене обчислення визначених інтегралів за формулою прямокутників. Точність формули.
40. Наближене обчислення визначених інтегралів за формулою трапецій. Точність формули.
41. Наближене обчислення визначених інтегралів за формулою Сімпсона.
42. Невласні інтеграли I роду. Критерій Коші.

43. Достатні ознаки збіжності невласних інтегралів I роду: ознаки порівняння.
44. Абсолютна й умовна збіжності невласних інтегралів I роду. Ознака Дирихле-Абеля .
45. Невласні інтеграли II роду (означення, критерій Коші, зведення невласного інтеграла II роду до невласного інтеграла I роду, ознаки порівняння).
46. Головне значення невласних інтегралів. Приклади.

§ 2. Задачі для самоперевірки практичних навичок

8.1–8.20. Використовуючи таблицю й властивості, знайти невизначені інтеграли:

8.1. $\int \frac{\left(x^2-2\right)^2}{x}dx$. **8.2.** $\int\left(x^4-3x^2+2x+1\right)dx$.

8.3. $\int \frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}dx$. **8.4.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$. **8.8.** $\int \frac{dx}{5x+2}$.

8.6. $\int \sqrt{1+4x}dx$. **8.8.** $\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx$. **8.8.** $\int \frac{dx}{4x^2+1}$.

8.9. $\int\left(3^x+4^x\right)^2 dx$. **8.10.** $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}dx$. **8.11.** $\int \sqrt{1+\sin 2x}dx, x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

8.12. $\int \sqrt[15]{(2x-3)}dx$. **8.13.** $\int \mathrm{ctg}^2 x dx$. **8.14.** $\int \sin^2\frac{x}{4}dx$.

8.18. $\int \frac{4+2x}{x-1}dx$. **8.16.** $\int 2^x\cdot 4^x\cdot 8^x dx$. **8.18.** $\int\left(\frac{1+x}{x}\right)^3 dx$.

8.18. $\int \frac{1}{(3x+7)^{2024}}dx$. **8.19.** $\int \frac{4^x-1}{2^x-1}dx$. **8.20.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

8.21–8.40. Знайти інтеграли:

8.21. $\int \sin^3 x\cos x dx$. **8.22.** $\int \frac{x^3dx}{x^4+9}$. **8.23.** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$.

8.24. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$. **8.28.** $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5\cos x+1}}dx$. **8.26.** $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.

8.28. $\int \frac{(\arcsin 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx$. **8.28.** $\int x\left(5x^2-3\right)^7 dx$. **8.29.** $\int x\sqrt{x^2-4}dx$.

8.30. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-5}}$. **8.31.** $\int \frac{\cos ax\, dx}{\sqrt{a^2+\sin^2 ax}}$. **8.32.** $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}$.

8.33. $\int \frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}}}\cos\sqrt{x}\, dx$. **8.34.** $\int (x+3)\sqrt{x-3}\, dx$.

8.38. $\int x\sin(x^2)dx$. **8.36.** $\int \sin 2x\cdot e^{\sin^2 x}dx$. **8.38.** $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x\cdot \mathrm{ch}^2 x}$.

8.38. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{2\mathrm{tg}x+1}{\mathrm{tg}x+2}dx$. **8.39.** $\int \frac{x-\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$. **8.40.** $\int \frac{dx}{\sin x}$.

8.41–8.60. Знайти інтеграли, застосовуючи метод інтегрування частинами:

8.41. $\int \ln x\, dx$. **8.42.** $\int \mathrm{arctg}x dx$. **8.43.** $\int \left(x^2-4\right)\sin 2x dx$.

8.44. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$. **8.48.** $\int x\ln^2 x dx$. **8.46.** $\int x^2 e^{3x}dx$.

8.48. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$. **8.48.** $\int x\arcsin x dx$. **8.49.** $\int \sin\left(\ln x\right)dx$.

8.50. $\int 3^x\cos 2x dx$. **8.51.** $\int e^{2x}\sin 3x dx$. **8.52.** $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

8.53. $\int \frac{x\cdot\arcsin x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **8.54.** $\int \sqrt{x}\ln x\, dx$. **8.55.** $\int \frac{x\cdot\cos x dx}{\sin^3 x}$.

8.56. $\int \arcsin^2 x\, dx$. **8.57.** $\int x^2\mathrm{arctg}4x\, dx$. **8.58.** $\int e^{-x}\sin^2 xdx$.

8.59. $\int \mathrm{arct}g\ x\cdot\frac{x^4}{x^2+1}dx$. **8.60.** $\int x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$.

8.61. Використовуючи формулу узагальненого інтегрування частинами, обчислити інтеграли:

а) $\int\left(3x^2+x-2\right)\sin^2\left(3x+1\right)dx$; б) $\int \frac{x^2-7x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$.

8.62. Обчислити методом невизначених коефіцієнтів інтеграли:

а) $\int\left(x^2+x-2\right)e^{-3x}dx$; б) $\int\left[\left(x^2+1\right)\cos 2x-\left(x^2+4\right)\sin 2x\right]dx$.

8.63. Отримати рекурентні формули для обчислення інтегралів:

а) $\int x^n e^{-x}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin^n x}$; в) $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2+a}}dx$.

8.64. Застосовуючи рекурентні співвідношення, обчислити інтеграли:

а) $\int x^4 e^{-2x}dx$; б) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^2+4}}$; в) $\int \frac{dx}{\left(x^2+8\right)^4}$.

8.65–8.76. Знайти інтеграл від дробу, знаменник якого містить квадратний тричлен:

8.68. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$. **8.66.** $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$. **8.68.** $\int \frac{x\, dx}{x^2-7x+13}$.

8.68. $\int \frac{\left(3x-2\right)dx}{x^2-4x+5}$. **8.69.** $\int \frac{x^2dx}{x^2-6x+10}$. **8.70.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+9}}$.

8.71. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$. **8.72.** $\int \frac{\left(2x-8\right)dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$. **8.73.** $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-5e^x+6}}$.

8.74. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-4\sin x+\cos^2 x}}dx$. **8.75.** $\int \frac{\ln x+2}{x\sqrt{1-\ln x-\ln^2 x}}dx$. **8.76.** $\int \frac{x^3dx}{x^4-x^2+5}$.

8.77–8.96. Знайти інтеграли від раціональних дробів:

8.77. $\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}dx$. **8.78.** $\int \frac{x-1}{x^3+4x^2+4x}dx$. **8.79.** $\int \frac{3x+1}{x^3+4x}dx$.

8.80. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$. **8.81.** $\int \frac{x^3+3}{x^2-4}dx$. **8.82.** $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$.

8.83. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$. **8.84.** $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$. **8.88.** $\int \frac{x^3+x-1}{\left(x^2+2\right)^2}dx$.

8.86. $\int \frac{7x+3}{\left(x^2-4x+3\right)\left(x^2+4x+5\right)}dx$. **8.87.** $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^4}$.

8.88. $\int \frac{x^9}{\left(x^4-1\right)^2}dx$. **8.89..** $\int \frac{x^5dx}{(x-1)^2\left(x^2-1\right)}$. **8.90.** $\int \frac{\left(x^5+x^4-8\right)dx}{x^3-4x}$.

8.91. $\int \frac{\left(x^2-1\right)^2dx}{(x+1)\left(x^2+1\right)^3}$. **8.92.** $\int \frac{dx}{x^4\left(x^3+1\right)^2}$. **8.93.** $\int \frac{dx}{x^4\left(x^6+1\right)}$.

8.94. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx$. **8.95.** $\int \frac{x^9}{\left(x^4-1\right)^2}dx$. **8.96.** $\int \frac{dx}{x^4\left(x^2+2x+2\right)^2}dx$.

8.97–8.116. Знайти інтеграли від тригонометричних функцій:

8.98. $\int \sin 2x\cos 5x\,dx$. **8.98.** $\int \sin^3 xdx$. **8.99.** $\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx$.

8.100. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}dx$. **8.101.** $\int \cos^4 x\,dx$. **8.102.** $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x}$.

8.103. $\int \mathrm{tg}^5 xdx$. **8.104.** $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}$. **8.105.** $\int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{tg}\,x}}$.

8.106. $\int \cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x\,dx$. **8.107.** $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$.

8.108. $\int \frac{\cos x\cdot\sin xdx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$. **8.109.** $\int (\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)^3\,dx$ **8.110.** $\int \frac{\cos xdx}{2-\cos x}$.

8.111. $\int \frac{dx}{\left(a^2+b^2\right)-\left(a^2-b^2\right)\cos x}$. **8.112.** $\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x+6}$.

8.113. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$. **8.114.** $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x+1)^2}$.

8.115. $\int \frac{\sin x\,dx}{2\sin x+3\cos x}$. **8.116.** $\int \frac{(\sin x+\cos x)\,dx}{2\sin x+3\cos x}$.

8.117–8.128. Знайти інтеграли від ірраціональних функцій:

8.118. $\int \frac{(3x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+4x+6}}$. **8.118.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$. **8.119.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

8.120. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-1}}$. **8.121.** $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+9\right)^3}}$. **8.122.** $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$.

8.123. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}}$. **8.124.** $\int \frac{\sqrt[4]{x-3}\,dx}{\sqrt{x-3}+\sqrt[3]{x-3}}$. **8.125.** $\int (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$.

8.126. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$. **8.127.** $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1}$. **8.128.** $\int x \cdot \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}\,dx$.

8.129–8.134. Знайти інтеграли за допомогою підстановок Ейлера:

8.129. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$. **8.130.** $\int \frac{dx}{x-\sqrt{4+2x+x^2}}$.

8.131. $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$. **8.132.** $\int \sqrt{x^6-x^4}\,dx$.

8.133. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$. **8.134.** $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(2x-x^2\right)^3}}$.

8.135–8.142. Знайти інтеграли від біноміальних диференціалів:

8.135. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$. **8.136.** $\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$. **8.137.** $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$.

8.138. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+x^{-1}}}$. **8.139.** $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx$. **8.140.** $\int \frac{\sqrt{1-x^{-\frac{1}{3}}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

8.141. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}\,dx$. **8.142.** $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^{15}+x^{14}}}$.

8.143. Методом невизначених коефіцієнтів знайти інтеграли:

а) $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx$; б) $\int \frac{3x^3+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}}\,dx$.

8.144. – 8.163. Використовуючи різні методи, знайти інтеграли:

8.144. $\int (2x+1)e^{\operatorname{arctg} x}\,dx$. **8.145.** $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$. **8.146.** $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x\,dx}{1+x^2}$.

8.147. $\int \frac{\ln\left(e^x+1\right)dx}{e^x}$. **8.148.** $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$. **8.149.** $\int \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\,dx$.

8.150. $\int \frac{\ln(x+2)\,dx}{\sqrt{x+1}}$. **8.151.** $\int \frac{dx}{\left(x^2+3\right)^{\frac{5}{2}}}$. **8.152.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}$.

8.153. $\int \frac{dx}{\sin x - 5\cos x}$. **8.154.** $\int \frac{dx}{x^5\left(1+x^8\right)}$. **8.155.** $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$.

8.156. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-2)^3(x+1)^5}}$. **8.157.** $\int \left|1-4x^2\right|dx$. **8.158.** $\int \min\left(\sqrt{x}, 2\right)dx$.

8.159. $\int \max\left(|x|, 4\right)dx$. **8.160.** $\int \frac{e^x\,dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}$. **8.161.** $\int \sqrt{\operatorname{th} x}dx$.

8.162. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\operatorname{sh}^4 x}$. **8.163.** $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch}^2 x}$.

8.164. Знайти нижню та верхню інтегральні суми Дарбу для функції $f(x) = x^2 - 4x + 9$ на $[1; 3]$.

8.165. За допомогою граничного переходу від інтегральних сум обчислити інтеграл $I = \int\limits_1^4 x^3 dx$, розбиваючи відрізок інтегрування: а) на рівні частини; б) точками, що утворюють геометричну прогресію. Для кожного з випадків за проміжні точки вибрати середини елементарних відрізків.

8.166. Обчислити інтеграли, використовуючи означення визначеного інтеграла як границі інтегральних сум:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$; б) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$; в) $\int\limits_0^{10} 2^x dx$; в) $\int\limits_0^1 x\left(1-x^2\right)dx$; г) $\int\limits_1^e \ln x dx$.

Зауваження. В останньому випадку доцільно поділити відрізок інтегрування на частини точками, що утворюють геометричну прогресію.

8.167. Оцінити інтеграли:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{10 + 7\sin x}$; б) $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$; в) $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arctg} x\,dx$.

8.168. Знайти похідні функцій:

а) $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\sqrt{x}} \cos\left(t^2\right)dt$; б) $\int\limits_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos 2t}{t}dt$; в) $\int\limits_{\sqrt{\ln x}}^{2} e^{-x^2} dx$.

8.169. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^{x^2} \sin\sqrt{t}dt}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\int\limits_0^x \operatorname{arctg}^2 t\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^{2x^2} \left(1+\sin 3t\right)^{\frac{1}{t}}dt}{x\sin x}$.

8.170–8.188. Застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, обчислити інтеграли.

8.170. $\int\limits_1^2 \left(x^3 + 3x^2 + 1\right)dx$. **8.171.** $\int\limits_0^2 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right)dx$. **8.172.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$.

8.173. $\int\limits_0^1 \frac{y^3}{y+1}dy$. **8.174.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$. **8.178.** $\int\limits_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

8.176. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{2+3x+x^2}$. **8.177**. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2\frac{x}{2}dx$. **8.178.** $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$.

8.179. $\int\limits_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{5x+1}}$. **8.180.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$. **8.181.** $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}dx$.

8.182. $\int\limits_0^8 |4-x|dx$. **8.183.** $\int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. **8.184.** $\int\limits_{-1}^1 \frac{4}{3}\sqrt{x^{\frac{2}{3}}}dx$.

8.185. $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx$. **8.186.** $\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$. **8.187.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$.

8.188 – 8.191. Знайти границі послідовностей $\{S_n\}$:

8.188. $S_n=\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.

8.189. $S_n=\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

8.190. $S_n=\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$.

8.191. $S_n=n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$.

8.192. Провести дослідження та побудувати графіки функцій:

а) $f(x)=\int\limits_0^1 t|x-t|dt$; б) $f(x)=\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{1+2x\cos t+x^2}dt$.

8.193–8.202. Застосовуючи заміну змінної, обчислити інтеграли:

8.193. $\int\limits_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$. **8.194.** $\int\limits_0^{0,75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$. **8.198.** $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

8.196. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$. **8.198.** $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$. **8.198.** $\int\limits_2^3 \frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+3}dx$.

8.199. $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$. **8.200.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$. **8.201.** $\int\limits_0^6 \sqrt{6x-x^2}dx$. **8.202.** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x(1+x^4)}dx$.

8.203–8.209. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, обчислити визначені інтеграли:

8.203. $\int_1^e \ln x dx$. **8.204.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$. **8.208.** $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$. **8.206.** $\int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx$.

8.207. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\operatorname{tg} x\right) dx$. **8.208.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot \operatorname{arctg}\, (\sin x) dx$. **8.209.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

8.210–8.228. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

8.210. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$. **8.211.** $\int_1^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4} dx$. **8.212.** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+3}$.

8.213. $\int_0^1 x \ln x dx$. **8.214.** $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$. **8.215.** $\int_3^{+\infty} \frac{2xdx}{\left(x^2-1\right)^2}$.

8.216. $\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{\left(x+1\right)^3}$. **8.217.** $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\left(1-x\right)\left(2x-1\right)}$. **8.218.** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-4x+11}$.

8.219. $\int_2^{+\infty} \frac{3x-1}{x^2+5x-7} dx$. **8.220.** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}, ab \neq 0$.

8.221. $\int_0^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$. **8.222.** $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx$. **8.223.** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

8.224. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$. **8.225.** $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}\, dx}{\sqrt{1-x}}$. **8.226.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x\, dx}{\sqrt[7]{\cos^5 x}}$. **8.227.** $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

8.228–8.238. Дослідити на збіжність інтеграли від невід’ємних функцій:

8.228. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$. **8.229.** $\int_0^2 \frac{x^{\alpha-1}}{\left|1-x\right|} dx$. **8.230.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$.

8.231. $\int_0^1 \frac{dx}{x-\sin x}$. **8.232.** $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln^p x} dx$. **8.233.** $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^3 x}{x^2} dx$.

8.234. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$. **8.235.** $\int_0^2 \frac{x}{\left|1-x\right|^{\alpha}} dx$. **8.236.** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{\left|x-3\right|}} dx$. **8.237.** $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{\sqrt{x^5+2x^3}} dx$.

8.238–8.245. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграли:

8.238. $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 4x}{k^2+x^2} dx$. **8.239.** $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x^3+3x}} dx$. **8.240.** $\int_0^{+\infty} x^2 \cos\left(e^x\right) dx$.

8.241. $\int_0^{+\infty} \sin\left(x^2+\sin x\right) dx$. **8.242.** $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x} dx$. **8.243.** $\int_0^1 \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{x\left(1-x\right)^p} dx$.

8.244. $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x+\sin x}dx.$ **8.248.** $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x+1}{x^{\alpha}}\cdot\sin x\,dx.$

8.246–8.249. Знайти головні значення заданих невласних інтегралів:

8.246. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx.$ **8.248.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2-2x+5}dx.$

8.248. $\int\limits_{0,5}^{2}\frac{dx}{x\ln x}dx.$ **8.249.** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\alpha-\sin x}dx,\quad 0<\alpha<1.$

8.250. Знайти площу області, обмеженої кривими $y=\frac{2a}{3}\cos x$, $y=a\,\operatorname{tg}x$ та $y=0$.

8.251. Знайти площу області, обмеженої кривими $y=x\ln^2 x$ та $y=x\ln x$.

8.252. Знайти площу області, обмеженої кривими $y=4x-x^2$, $y=|x-2|+4$ та $x=0$.

8.253. Переходячи до полярних координат, знайти площу фігури, обмеженої кривою $\left(x^2+y^2\right)^2=\left(x^2-y^2\right)a^2$.

8.254. Знайти площу фігури, обмеженої віссю Ox та трактрисою

$$\begin{cases} x=a\left(-\cos t+\ln\frac{1+\cos t}{\sin t}\right),\\ y=a\sin t.\end{cases}$$

8.255. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\rho=\sin^2\frac{\varphi}{2}$, що знаходиться справа від променя $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

8.256. Знайти площу фігури, обмеженої заданою кривою, попередньо зводячи її рівняння $(x+y)^3=axy$ до параметричного вигляду.

8.257. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої синусоїдою $y=\sin x$ та прямою $y=\frac{2}{\pi}x$.

8.258. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox кривої $y=e^{2x},-\infty<x\le 0$.

8.259. Знайти об'єм тіла, отриманого при обертанні фігури, що є спільною частиною кругів $x^2+y^2=2ax$ та $x^2+y^2=2ay$ навколо: а) осі Ox; б) прямої $y=x$.

8.260. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі фігури, обмеженої кривою $\rho=a\cos^3\varphi$.

8.261. Знайти об'єм тіла, отриманого при обертанні області, обмеженої кривою $x = 2a\sin 2t,\, y = 2a\cos t$: а) навколо осі Ox; б) навколо осі Oy.

8.262. Знайти площу поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox трактриси (задача 8.254).

8.263. Знайти площу поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y = a\cos\frac{\pi x}{2b},\, |x| \le b$.

8.264. Знайти площу поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox кола $\rho = 4\sin\varphi$.

8.265. Знайти периметр фігури, обмеженої лініями $y = 4$ та $x^2 = (y+1)^3$.

8.266. Знайти довжину евольвенти кола

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$$

8.267. Знайти довжину дуги кривої $\rho = \cos^4\frac{\varphi}{4}$.

8.268. Знайти периметр фігури, обмеженої лініями $y = e^x$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 1$.

8.269. Знайти центр мас однорідної дуги ланцюгової лінії $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ від точки з абсцисою $x = 0$ до точки з абсцисою $x = x_0$.

8.270. Знайти статичні моменти однорідної дуги параболи $y^2 = 2x$ при $y > 0$ від точки з абсцисою $x = 0$ до точки з абсцисою $x = 2$ відносно координатних осей.

8.271. Знайти координати центра мас однорідної фігури, обмеженої еліпсом $x^2 + 4y^2 = 4$ та колом $x^2 + y^2 = 4$, розташованої в першій чверті.

8.272. Знайти координати центра мас однорідної фігури, обмеженої прямою $y = \frac{2x}{\pi}$ та синусоїдою $y = \sin x$ при $x \ge 0$.

8.273. Котел, що має форму півкулі радіуса R, заповнено водою. Знайти роботу, яку потрібно витратити, щоб викачати воду з цього котла.

8.274. Матеріальна точка рухається по прямій під дією сили, пропорційної відстані від точки до місця початку руху. Визначити роботу цієї сили щодо переміщення точки на 15 м від її початкового положення, якщо на відстані 3 м сила дорівнює 1 Н.

8.275. Яку роботу потрібно докласти для зупинки залізної кулі радіуса R, яка обертається з кутовою швидкістю ω навколо свого діаметра?

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. Аршава О. О., Харченко А. П., Щелкунова Л. І. Інтегральне числення функцій однієї змінної : навчальний посібник. 2- ге вид. перероб. і допов. Харків : Цифрова типографія, 2018. 194 с.
2. Д’яченко Н. М., Стреляєв Ю. М. Математичний аналіз – I: Вступ до аналізу : навч. посіб. для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра освітньо-професійних програм «Математика», «Середня освіта (Математика)». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2018. 221 с.
3. Математичний аналіз : збірник завдань до самостійної роботи для студентів освітнього рівня «бакалавр» напрямів підготовки «Прикладна математика», «Математика» / Н. М. Д’яченко, І. В. Красікова, О. О. Тітова, Ю. М. Стреляєв. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2015. 76 с.
4. Фіхтенгольц Г. М. Курс диференціального та інтегрального числення / перекл. С. Зінов’єв, А. Груша, О. Галганов, А. Рогова Р. Путятін, А. Чередник О. Телемко. Одеса, 2022. 1753 с.

Додаткова

1. Давидов М. О. Курс математичного аналізу : підручник : у 3 ч. Частина 3 : Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. Київ : Вища школа, 1992. 359 с.
2. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: Частина 1 : навч. посіб. (Рекомендовано МОН України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів) / С. М. Гребенюк, Н. М. Д’яченко, М. І. Клименко, І. В. Красікова, О. О. Тітова, В. В. Леонтьєва. Запоріжжя : ЗНУ, 2014. 231 с.
3. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: Частина 2 : навчальний посібник (Рекомендовано МОН України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів) / С. М. Гребенюк, М. І. Клименко, Н. М. Д’яченко, І. В. Красікова, О. О. Тітова, В. В. Леонтьєва. Запоріжжя : ЗНУ, 2013. 499 с.
4. Дзядик В. К. Математичний аналіз. у 2 т. Т. 1. Київ : Вища школа, 1995. 495 с.
5. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз : підруч. для студ. вищ. навч. закл., що вивч. дисцип. "Математичний аналіз" : у 2 ч. Ч. 1. Київ : Либідь, 1993. 320 с.
6. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз : підруч. для студ. вищ. навч. закл., що вивч. дисцип. «Математичний аналіз» : у 2 ч. Ч. 2. Київ : Либідь, 1994. 304 с.
7. Дюженкова Л. І., Колесник Т. В., Лященко М. Я. та ін. Математичний аналіз у задачах і прикладах : навч. посіб. для студ. вищ. пед. навч. закл. доп. МОНУ. : у 2 ч. Ч. 1. Київ : Вища школа, 2003. 463 с.; Ч. 2. Київ : Вища школа, 2003. 470 с.
8. Заболоцький М. В., Сторож О. Г., Тарасюк С. І. Математичний аналіз : підруч.. затвердж. МОНУ. Київ : Знання, 2008. 424 с.
9. Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз: У 2 ч. Ч. 1. Київ : Вища школа, 1992. 494 с.; Ч. 2. 1993. 375 с.
10. Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз : підруч. для мат. спец. ун-тів. У 2-х ч. Ч. 1. Київ : Вища школа, 1992 .495 с.
11. Боярчук О. К., Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф. Математичний аналіз : підручник. У 2-х ч. Ч. 2. Київ : Вища школа, 1993 376 с.
12. Практикум з математичного аналізу : навч. посіб. затвердж. МОНУ / М. В. Заболоцький, С. І. Фединяк, П. В. Філевич, К. А. Червінка. Львів : ВЦ ЛНУ ім. І. Франка, 2009. 313 с.
13. Шкіль М. І. Математичний аналіз : У 2 ч. : підруч. для студ. мат. спец. вузів затв. МОНУ. Ч. 1. Київ : Вища школа, 2005. 447 с.
14. Шкіль М. І. Математичний аналіз : у 2 ч. : підруч. для студ. мат. спец. вузів затв. МОНУ. Ч. 2. Київ : Вища школа, 1995. 510 с.; Київ : Вища школа, 2005. 510 с.

15. Шунда Н. М.,Томусяк А. А. Практикум з математичного аналізу: Інтегральне числення. Ряди : навч. посібник для студ. пед. навч. Закладів. Київ : Вища шк., 1995. 541 с.
16. Mathematical Analysis and Applications II / H. M. Srivastava (ed.). Basel : MDPI, 2020. 226 p.
17. Mathematical Analysis of Continuum Mechanics and Industrial Applications : Proceedings of the International Conference CoMFoS15 / edited by H. Itou [et al.]. Singapore : Springer, 2017. 231 p.

Інформаційні ресурси

1. Система електронного забезпечення навчання ЗНУ. URL: http://moodle.znu.edu.ua/course/view.php?id=3340 ; https://moodle.znu.edu.ua/course/view.php?id=14486 (звернення: 10.04.2024).
2. Наукова бібліотека Запорізького національного університету. URL: http://library.znu.edu.ua/ (звернення: 10.04.2024).
3. Література з математичного аналізу. URL: http://www.mat.net.ua/mat/index-mat-analiz-tf.htm (звернення: 10.04.2024).
4. Навчальні курси з математичного аналізу. URL: https://www.classcentral.com/subject/calculus?page=2 (звернення: 10.04.2024).
5. Сайт Khan Academy. URL: https://www.khanacademy.org/math/calculus-1 (звернення: 10.04.2024).
6. Онлайн курси з математичного аналізу. URL: https://www.edx.org/learn/calculus (звернення: 10.04.2024).
7. Збірник типових задач з математичного аналізу : функції однієї змінної / О. Н. Нестеренко, Т. О. Петрова, А. В. Чайковський. 2019. 59 с. URL: https://www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2019/05/zbirnykma.pdf (звернення: 10.04.2024).
8. Музиченко С., Філон Л.. Практикум з математичного аналізу. Частина 1. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної : навчальний посібник. Чернігів : НУЧК ім. Т. Г. Шевченка, 2022. 92 с. URL: http://surl.li/pfjxh (звернення: 10.04.2024).
9. Bartle R. G. The elements of Real Analysis. URL: https://tatimasriyati.files.wordpress.com/2015/02/bartle-the-elements-of-real-analysis-1964.pdf (звернення: 10.04.2024).
10. Rudin W. Princiles of Mathematical Analysis. URL: https://web.math.ucsb.edu/~agboola/teaching/2021/winter/122A/rudin.pdf (звернення: 10.04.2024).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: Частина 1 : навч. посіб. (Рекомендовано МОН України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів) / С. М. Гребенюк, Н. М. Д’яченко, М. І. Клименко, І. В. Красікова, О. О. Тітова, В. В. Леонтьєва. Запоріжжя : ЗНУ, 2014. 231 с. (Лист МОН України №1/11-1162 від 29.01.2014)
2. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: Частина 2 : навчальний посібник (Рекомендовано МОН України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів) / С. М. Гребенюк, М. І. Клименко, Н. М. Д’яченко, І. В. Красікова, О. О. Тітова, В. В. Леонтьєва. Запоріжжя : ЗНУ, 2013. 499 с. (Лист МОН України №1/11-10197 від 17.06.2013)
3. Математичний аналіз: збірник завдань до самостійної роботи для студентів освітнього рівня «бакалавр» напрямів підготовки «Прикладна математика», «Математика» / Н. М. Д’яченко, І. В. Красікова, О. О. Тітова, Ю. М. Стреляєв. Запоріжжя : ЗНУ, 2015. 76 с.

Додаток А

Деякі тригонометричні формули

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x},\qquad \operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x},\qquad \sec x=\frac{1}{\cos x},$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\qquad 1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad 1+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Функції кратних кутів

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\qquad \sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x,\qquad \operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x},$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x,\qquad \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x,\qquad \operatorname{ctg}2x=\frac{\operatorname{ctg}^2 x-1}{2\operatorname{ctg} x}.$$

Функції суми й різниці кутів

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y,\qquad \operatorname{tg}(x\pm y)=\frac{\operatorname{tg} x\pm\operatorname{tg} y}{1\mp\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y},$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y,\qquad \operatorname{ctg}(x\pm y)=\frac{\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{ctg} y\mp 1}{\operatorname{ctg} y\pm\operatorname{ctg} x}.$$

Формули зниження степеня

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\qquad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),$$

$$\sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x),\qquad \cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x),$$

$$\sin^4 x=\frac{1}{8}(\cos 4x-4\cos 2x+3),\qquad \cos^4 x=\frac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3).$$

Сума й різниця тригонометричних функцій

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\qquad \cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},\qquad \cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\operatorname{tg} x\pm\operatorname{tg} y=\frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cdot\cos y},\qquad \operatorname{ctg} x\pm\operatorname{ctg} y=\pm\frac{\sin(x\pm y)}{\sin x\cdot\sin y}.$$

Добуток тригонометричних функцій

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)],\qquad \cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)],$$

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x-y)+\sin(x+y)].$$

Зв'язок між оберненими тригонометричними функціями

$$\arcsin x=-\arcsin(-x)=\frac{\pi}{2}-\arccos x=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$\operatorname{arctg} x=-\operatorname{arctg}(-x)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg} x=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Нескінченно малі (великі) функції $f(x)$ і $g(x)$ в точці $x=a$ еквівалентні, якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. Позначення: $f(x)\overset{x\to a}{\sim} g(x)$ або $f(x)\sim g(x)$ при $x\to a$.

Дві істотні границі й наслідки з них [**2**, с. 127-134]	Еквівалентні нескінченно малі функції
$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1;$	$\sin x\sim x,\quad \operatorname{tg} x\sim x\quad (x\to 0);$
$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1;$	$\arcsin x\sim x,\quad \operatorname{arctg} x\sim x\quad (x\to 0);$
$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2};$	$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\quad (x\to 0);$
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\quad \lim\limits_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e;$	
$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1,\qquad \lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;$	$e^x-1\sim x,\quad \ln(1+x)\sim x\quad (x\to 0);$
$\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$	$a^x-1\sim x\ln a\quad (x\to 0).$

Таблиця похідних

$\left(x^\alpha\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$, $x>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$;	$C'=0$, $(x)'=1$, $\left(x^2\right)'=2x$, $\left(x^3\right)'=3x^2$;
$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, $x\neq0$;	$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$; $\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x\neq0$;
$(a^x)'=a^x\ln a$, $0<a\neq1$;	$(e^x)'=e^x$;
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $x>0$;	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$, $x>0,0<a\neq1$;
$(\sin x)'=\cos x$;	$(\cos x)'=-\sin x$;
$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$, $x\neq\pi n, n\in\mathbb{Z}$;	$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$, $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$;
$(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$;	$(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$;
$(\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;	$(\operatorname{cth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$, $x\neq0$;
$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$;	$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$;
$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert<1$;	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert<1$;

Таблиця похідних вищих порядків

$P_m(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1x+a_0 \;\Rightarrow\; \left(P_m(x)\right)^{(n)}=\begin{cases}a_m m!, & n=m\\ 0, & n>m\end{cases}$;	
$\left(x^{\alpha}\right)^{(n)}=\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)\cdot x^{\alpha-n}$, $x>0,\alpha\in\mathbb{R}$;	$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$, $x\neq 0$;
$\left(a^x\right)^{(n)}=a^x\cdot\ln^n a$, $0<a\neq 1$;	$\left(e^x\right)^{(n)}=e^x$;
$\left(\log_a x\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{x^n\cdot\ln a}$, $0<a\neq 1,\ x>0$;	$\left(\ln x\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{x^n}$, $x>0$;
$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$.	$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$

Таблиця розвинень елементарних функцій за формулою Маклорена із залишковим членом у формі Пеано

$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)$;
$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o\left(x^{2m}\right)$;
$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o\left(x^{2m+1}\right)$;
$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$;
$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n)$;
$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$.

Деякі скінченні суми

$x+x^2+\ldots+x^n=\frac{x-x^{n+1}}{1-x}$;
$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, $x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$;
$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$, $x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$;
$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$, $x\neq 2^n k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Додаток Б

Розширена таблиця основних інтегралів. Нехай $a>0$

№ пп	$\int f(x)dx=F(x)+C$	№ пп	$\int f(x)dx=F(x)+C$
1.	$\forall\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$, $x\in(0;+\infty)$,		$\forall n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ $\int x^{n}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $x\in\mathbb{R}$,
	$\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$ $\int x^{n}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ на кожному з проміжків $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$,	2.	$\int\frac{dx}{x-a}=\ln\lvert x-a\rvert+C$ на кожному з проміжків $(-\infty;a)$, $(a;+\infty)$,
3.	$\int e^{x}dx=e^{x}+C$, $x\in\mathbb{R}$,	4.	$\forall a>0, a\neq 1$ $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C$, $x\in\mathbb{R}$,
5.	$\int\sin x dx=-\cos x+C$, $x\in\mathbb{R}$,	6.	$\int\cos x dx=\sin x+C$, $x\in\mathbb{R}$,
8.	$\int\frac{dx}{\cos^{2}x}=\operatorname{tg}x+C$ на кожному з проміжків $\left(-\pi/2+\pi n;\pi/2+\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$,	8.	$\int\frac{dx}{\sin^{2}x}=-\operatorname{ctg}x+C$ на кожному з проміжків $\left(\pi n;\pi+\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$,
9.	$\int\operatorname{sh}x dx=\operatorname{ch}x+C$, $x\in\mathbb{R}$,	10.	$\int\operatorname{ch}x dx=\operatorname{sh}x+C$, $x\in\mathbb{R}$,
11.	$\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^{2}x}=\operatorname{th}x+C$, $x\in\mathbb{R}$,	12.	$\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^{2}x}=-\operatorname{cth}x+C$ на кожному з проміжків $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$,
13.	$\int\frac{dx}{x^{2}+a^{2}}=\begin{cases}\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C, \\ -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}+C,\end{cases}$ $x\in\mathbb{R}$	14.	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=\begin{cases}\arcsin\frac{x}{a}+C, \\ -\arccos\frac{x}{a}+C,\end{cases}$ $x\in(-a;a)$
15.	$\int\frac{dx}{x^{2}-a^{2}}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$ на кожному з проміжків $(-\infty;-a)$, $(a;+\infty)$,	16.	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}\right\rvert+C$ (для знака мінус на кожному з проміжків $(-\infty;-a)$, $(a;+\infty)$; для знака плюс $x\in\mathbb{R}$),
18.	$\int\sqrt{a^{2}-x^{2}}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^{2}-x^{2}}+\frac{a^{2}}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$ $\left(\lvert x\rvert\le a\right)$, $x\in[-a;a]$,		
18.	$\int\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}\pm\frac{a^{2}}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}\right\rvert+C$ (для знака мінус на кожному з проміжків $(-\infty;-a]$, $[a;+\infty)$; для знака плюс $x\in\mathbb{R}$).		

Рекурентна формула обчислення інтеграла $K_{\lambda}=\int\frac{dx}{\left(x^{2}+a^{2}\right)^{\lambda}}$:

$$K_{\lambda}=\int\frac{dx}{\left(x^{2}+a^{2}\right)^{\lambda}}=\frac{1}{a^{2}}\left[\frac{2\lambda-3}{2(\lambda-1)}K_{\lambda-1}+\frac{x}{2(\lambda-1)\left(x^{2}+a^{2}\right)^{\lambda-1}}\right]\ (\lambda\in\mathbb{N}),$$

де $K_{1}=\int\frac{dx}{x^{2}+a^{2}}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$.

Інтегрування частинами. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні на X, тоді 1) з існування на X невизначеного інтеграла $\int u(x)d(v(x))$ випливає існування інтеграла $\int v(x)d(u(x))$, 2) має місце формула

$$\boxed{\int u(x)d(v(x)) = u(x)v(x) - \int v(x)d(u(x))}$$

Основні класи функцій, що інтегруються частинами

Клас	Види інтегралів	Перша функція-множник	Друга функція-множник під інтегралом	Заміни	Зауваження
А.	$\int P_n(x)f(x)dx$ та інтеграли, що зводяться до них	$P_n(x)$ – много-член, $\deg P_n = n$	$f(x) = \left[\begin{array}{l} \sin(bx), \\ \cos(bx), \\ e^{bx}, a^{bx}, \\ \dfrac{1}{\cos^2(bx)}, \\ \dfrac{1}{\sin^2(bx)}, \\ \text{і т.п.} \end{array}\right]$	$u = P_n(x)$, $dv = f(x)dx$.	Формула інтегрування частинами застосовується n разів
Б.	$\int g(x)P_n[\varphi(x)]dx$ або $\int g(x)\,\varphi[f(x)]dx$ та інтеграли, що зводяться до них	$g(x)$ – дробово-лінійна функція, зокрема многочлен	$\varphi(x) = \left[\begin{array}{l} \arcsin(bx), \\ \arccos(bx), \\ \mathrm{arctg}(bx), \\ \mathrm{arcctg}(bx), \\ \ln(bx),. \end{array}\right]$ $P_n(x)$ – многочлен, $\deg P_n = n$	$u = P_n[\varphi(x)]$, $dv = g(x)dx$, відповідно $u = \varphi[f(x)]$, $dv = g(x)dx$ (або методом підстановки $t = \phi(x)$, відповідно $t = \varphi[f(x)]$)	У першому випадку інтегрувати частинами n разів
В.	$\int e^{ax}\cos bxdx$, $\int e^{ax}\sin bxdx$ та інтеграли, що зводяться до них			Двічі $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx\,dx$ $(dv = \sin bx\,dx)$ або двічі $u = \cos bx$ $(u = \sin bx)$, $dv = e^{ax}dx$	Двічі інтегрувавти частинами. Див. Ч. 2 приклад 2.5, 3)

Деякі інтеграли, що «не беруться» в елементарних функціях
1) *інтеграл Пуассона* (інтеграл помилок) $\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx$,
2) *інтеграли Френеля* $\int \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx,\quad \int \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx$,
3) *інтегральний логарифм* $\int \frac{dx}{\ln x}, x > 0, x \neq 1$,
4) *інтегральні косинус і синус* $\int \frac{\cos x}{x}dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}dx$

Інтегрування підстановкою. Якщо функція $t = \phi(x)$ визначена й диференційовна на множині X і має множину визначення $T = \phi(X)$, а для функції $g(t)$ на множині T існує первісна $G(t)$, тобто $\int g(t)dt = G(t) + C$, тоді на X функція $g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ має первісну, що дорівнює $G(\phi(t))$, тобто

$$\int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + C$$

Інтеграл типу $\int R(\sin x,\cos x)dx$ в загальному випадку знаходиться *універсальною тригонометричною підстановкою:* $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x\in(-\pi,\pi)$.

Окремі випадки:

1) $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ $\Rightarrow$ заміна $t=\cos x$,

2) $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ $\Rightarrow$ заміна $t=\sin x$,

3) $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ $\Rightarrow$ заміна $t=\operatorname{tg} x$.

Інтеграл типу $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}\right)dx$ знаходиться підстановкою $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}$.

Для ***інтеграла типу*** $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ універсальними є *підстановки Ейлера:*

перша підстановка Ейлера $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm x\sqrt{a}+t$, якщо $a>0$;

друга підстановка Ейлера $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}+xt$, якщо $c>0$;

третя підстановка Ейлера $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)$.

Окремі випадки:

Інтеграл типу $\int\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, *де* $\deg P(x)=n$ знаходиться поданням його сумою

$$\int\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

, де $Q(x)-$ многочлен з невизначеними коефіцієнтами такий, що $\deg Q(x)=n-1$, а $\lambda-$ невизначений коефіцієнт.

Інтеграл типу $\int\frac{dx}{(x-\alpha)^k\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $k\in\mathbb{N}$ знаходиться заміною $t=\frac{1}{x-\alpha}$.

Інтеграл типу $\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+pq+q\right)^{\lambda}\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,\lambda\in\mathbb{N}$ знаходиться за допомогою *заміни Абеля* $t=\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)'=\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$ та інших.

Біноміальний диференціал $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, $m,n,p\in\mathbb{Q}$, $a,b\in\mathbb{R}$ знаходиться за допомогою *замін І. Ньютона–П.Л. Чебишева*:

1) якщо $p\in\mathbb{Z}$, λ – спільний знаменник дробів m,n, тоді $t=\sqrt[\lambda]{x}$;

2) якщо $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$, $\nu-$знаменник дробу p, тоді $t=\sqrt[\nu]{a+bx^n}$;

3) якщо $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$, $\nu-$знаменник дробу p, тоді $t=\sqrt[\nu]{ax^{-n}+b}$.

Основна теорема інтегрального числення, ***формула Ньютона-Лейбніца****).* Якщо $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, а $F(x)$ – одна з її первісних, то має місце формула

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$$

Заміна змінної під знаком визначеного інтеграла.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - \text{неперервна на} [a,b]; \\ x=\varphi(t) - \text{неперервно диференційовна на } [\alpha,\beta]; \\ \varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b, \\ \varphi[\alpha,\beta]=[a,b] \text{ (образ відрізка } [\alpha,\beta] \text{ збігається} \\ \text{з відрізком } [a,b]); \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\ .$$

Інтегрування частинами під знаком визначеного інтеграла. Якщо $u(x)$ і $v(x)$ – неперервно диференційовні на $[a,b]$, тоді виконується формула:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

Формули обчислення інтеграла від $\sin^n x$ і $\cos^n x$ на відрізку $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot D_n,\quad D_n = \begin{cases} 1, & n - \text{непарне}, \\ \dfrac{\pi}{2}, & n - \text{парне}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Формули для обчислення довжин кривих:

гладка крива задана параметрично: $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $t\in[t_0, T]$ ($\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервно диференційовні на $[t_0, T]$)	$\lvert L\rvert \ = \ \int_{t_0}^{T}\sqrt{(\varphi'(t))+(\psi'(t))}dt.=$ $=\int_{t_0}^{T}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt;$
гладка крива задана явно: $y=f(x)$ – неперервно диференційовна на $[a,b]$	$\lvert L\rvert=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx;$
гладка крива задана в полярній системі координат: $\rho=\rho(\varphi)$ – неперервно диференційовна на $[\alpha,\beta]$	$\lvert L\rvert=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\varphi.$

Геометричний зміст визначеного інтеграла Рімана. Визначений інтеграл Рімана від неперервної невід’ємної на $[a,b]$ функції $f(x)$ – це площа криволінійної трапеції D, утвореної графіком цієї функції, віссю абсцис і прямими $x=a$, $x=b$ (рис. А.1), тобто

$$S(D)=\int_a^b f(x)dx$$

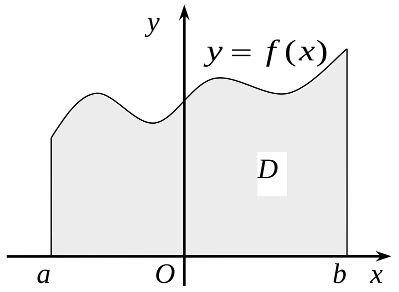


Рис. А.1.

Площа плоскої фігури D, що обмежена на декартовій площині графіками неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, де $f_2(x)\le f_1(x)$, відрізками прямих $x=a$, $x=b$ (рис. А.2), обчислюється за формулою

$$\boxed{S=\int_a^b\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx}$$

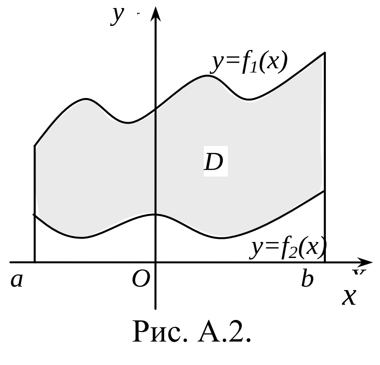


Рис. А.2.

Криволінійний сектор *OAB* (рис. А.3), обмежений графіком неперервної функції $\rho=\rho(\varphi)$ у полярній системі координат і двома півпрямими $\varphi=\alpha$ і $\varphi=\beta$ ($\alpha<\beta$), є квадровною областю, **площа** якого дорівнює

$$\boxed{S(D)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi}$$

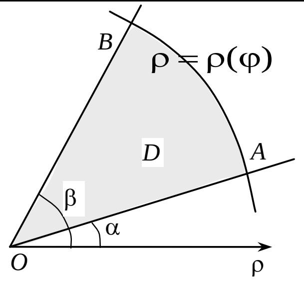


Рис. А.3.

Якщо тіло T утворене обертанням криволінійної трапеції $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b\wedge 0\le y\le f(x)\}$ (тут $f(x)$ – неперервна функція на $[a,b]$) **навколо осі** Ox**,** то це тіло T є кубовним, а його **об'єм** дорівнює

$$V_x=V(T)=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Об'єм тіла, утвореного обертанням **навколо осі** Ox плоскої фігури D, що обмежена на декартовій площині графіками неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, де $0\le f_2(x)\le f_1(x)$, відрізками прямих $x=a$, $x=b$ (фігуру D див на рис. А.2), обчислюється за формулою

$$\boxed{V_x=\pi\int_a^b\left(f_1^2(x)-f_2^2(x)\right)dx}$$

Об'єм тіла, утвореного обертанням **навколо осі** Oy криволінійної трапеції $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b\wedge 0\le y\le f(x)\}$, де $f(x)$ – однозначна неперервна функція на $[a,b]$, дорівнює

$$V_y=2\pi\int_a^b x\cdot f(x)dx$$

Формули для обчислення площ поверхонь обертання навколо осі абсцис гладких кривих ($y\ge 0$):

загальний випадок: $\begin{cases}x=x(s),\\ y=y(s),\end{cases}$ $s\in[0,\lvert L\rvert]$ ($x(s)$ і $y(s)$– неперервно диференційовні на $[0,\lvert L\rvert]$, s – параметр довжини дуги)	$P_x=2\pi\cdot\int\limits_0^{\lvert L\rvert} y(s)ds$;
гладка крива задана параметрично: $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ $t\in[t_0,T]$ ($x(t)$ і $y(t)$ – неперервно диференційовні на $[t_0,T]$)	$P_x=2\pi\cdot\int\limits_{t_0}^{T} y(t)\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt$;
гладка крива задана явно: $y=f(x)$ – неперервно диференційовна на $[a,b]$	$P_x=2\pi\cdot\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$;
гладка крива задана в полярній системі координат: $\rho=\rho(\varphi)$ – неперервно диференційовна на $[\alpha,\beta]$	$P_\rho=2\pi\cdot\int\limits_\alpha^\beta \rho(\varphi)\cdot\sin\varphi\cdot\sqrt{\rho^2+\left(\rho_\varphi'\right)^2}\,d\varphi$

Збіжність невласних інтегралів від степеневих функцій:

$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}$ ($a>0$)	збігається при $\lambda>1$, розбігається при $\lambda\le 1$,	$\int\limits_a^b\frac{dx}{(b-x)^\lambda}$	збігається при $\lambda<1$, розбігається при $\lambda\ge 1$

СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ – позначення, яке слід читати так: «якщо за означенням…» або «називається за означенням…».

$\overset{def}{=}$ – рівність за означенням; величина, що визначається, стоїть в лівій частині рівності

🗐 – повторити

🗁 – означення

■ – завершення доведення твердження чи розв'язання прикладу

☝ – зверніть увагу, запам'ятайте!

✍ – виконати завдання самостійно

$\exists$ – квантор існування

$\forall$ – квантор загальності

$\wedge$ – логічна операція, кон'юнкція

$\vee$ – логічна операція, диз'юнкція

$\left.\begin{matrix}\Rightarrow,\\ \Leftarrow\end{matrix}\right\}$ – логічна імплікація

$\Leftrightarrow$ – логічна еквівалентність (рівносильність)

$\bigcup$ – множинна операція, об'єднання

$\bigcap$ – множинна операція, перетин

$\in$ – символ належності елемента деякій множині

$\varnothing$ - порожня множина

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел

$\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел

т. – точка

непер. – неперервна (функція)

обм. – обмежена (функція)

н.м. або н.м.ф. – нескінченно мала (функція)

інт. – інтегровна (функція)

зб. – збіжний (невласний інтеграл)

$\cup$ – опукла вниз функція

$\cap$ – опукла вгору функція

$loc\, extr$ – локальний екстремум

$loc \max$ – локальний максимум

$loc \min$ – локальний мінімум

$k=\overline{1,n}$ – змінна k приймає значення із множини $\{1,2,3,...,n\}$

$\nearrow$ – зростаюча функція

$\searrow$ – спадна функція

$\deg P(x)$ – степінь многочлена $P(x)$

$\sup M$, $\inf M$ – відповідно точна верхня і нижня межа множини M

D_f або $D(f)$ – множина визначення функції $f(x)$

$x_n \to a$ – послідовність x_n прямує (збігається) до a

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ – границя послідовності x_n дорівнює a

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ – границя функції $f(x)$ в точці a дорівнює b

Навчальне видання
(українською мовою)

Гребенюк Сергій Миколайович
Клименко Михайло Іванович
Д’яченко Наталія Миколаївна
Красікова Ірина Володимирівна
Тітова Ольга Олександрівна
Ткаченко Ірина Григорівна

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ – 1: ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика»

Рецензент *Є.В. Панасенко*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *Н.М. Д’яченко*