

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**Кафедра прикладної математики та механіки**

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА**

**на тему: «АНАЛІТИКО-ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ДО  
РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ СТАТИКИ КРУГЛИХ  
ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ»**

Виконав(ла): студент(ка) 2 курсу, групи 8.1138

спеціальності 113 прикладна математика  
(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми прикладна математика  
(назва освітньої програми)

Онопрієнко А. А.

(ініціали та прізвище)

завідувач кафедри прикладної математики  
і механіки, професор, д.т.н.

Керівник Гришак В. З.  
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

доктор технічних наук, доцент, завідувач  
кафедри фундаментальної математики

Рецензент Гребенюк С. М.  
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Факультет математичний

Кафедра прикладної математики та механіки

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 113 прикладна математика

Освітня програма Прикладна математика

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач кафедри прикладної математики, д.т.н., професор  
Грищак В.З.

(підпис)

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2019 р.

**З А В Д А Н Н Я**  
**НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ**

Онопрієнку Антону Андрійовичу

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Аналіко-чисельний метод розв'язання задач статички круглих пластин складної конфігурації

керівник роботи (проекту) Завідувач кафедри прикладної математики, д.т.н., професор Грищак В.З.

затверджені наказом ЗНУ від « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2019 року № \_\_\_\_\_

2. Строк подання студентом роботи 15.01.2020

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.

2. Метод розрахунку.

3. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) \_\_\_\_\_

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 15.05.2019

**КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН**

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	09.09.2019	
2.	Збір вихідних даних.	16.09.2019	
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	25.09.2019	
4.	Розробка першого розділу.	15.10.2019	
5.	Розробка другого розділу.	10.11.2019	
6.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	27.12.2019	
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	15.01.2020	

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

А. А. Онопрієнко  
(ініціали та прізвище)

Керівник роботи \_\_\_\_\_  
(підпис)

В. З. Грищак  
(ініціали та прізвище)

**Нормоконтроль пройдено**

Нормоконтролер \_\_\_\_\_  
(підпис)

В. В. Леонтєва  
(ініціали та прізвище)

## РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Аналіко-чисельний метод розв'язання задач статички круглих пластин складної конфігурації»: 78с., 12 рис., 7 табл., 45 джерел, 2 додатки.

АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД, МЕТОД ФАЗНИХ ІНТЕГРАЛІВ, КІЛЬЦЕВА ПЛАСТИНА, КРУГЛА ПЛАСТИНА, НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН, СТАТИЧНЕ ДЕФОРМУВАННЯ.

Об'єкт дослідження – статичне деформування складених круглих пластин.

Мета роботи: дослідити статичне деформування складених круглих пластин при змішаних крайових умовах.

Метод дослідження – аналітичний, чисельний.

У кваліфікаційній роботі досліджуються напружено-деформований стан складних круглих пластин при змішаних крайових умовах та різних варіантах навантаження.

Розглянуто клас круглих пластин дискретно-змінної товщини. Розв'язано задачу про визначення статичного деформування такої пластини, яка знаходиться під дією зовнішнього нормального навантаження. Застосовано асимптотичний метод до розв'язування напружено-деформованого стану круглих пластин змінної жорсткості.

## SUMMARY

Master's Qualification Thesis «Analytical Numerical Method for Solving Problems of Statics of Round Plated of Complex »: 78 pages, 12 figures, 7 tables, 45 references, 2 supplements.

ASYMPTOTIC METHOD, METHOD OF PHASE INTEGRAL, KILTSEV PLATE, ROUND PLASTINE, STRESS-DEFORMATION STAN, STATIC DEFORMATION.

The object of study is the research of the static deformation of composite circular plates.

The aim of study is the research is to investigate the static deformation of composite circular plates under mixed boundary conditions.

The method of research is analytical, numerical.

Stress-deformed state of complex circular plates under the mixed boundary conditions and different loading variants are investigated in the qualification work. The class of circular plates of discrete-variable thickness are considered studied. The problem of determining the static deformation of such a plate, which is under the influence of the external normal load, is reviewed dealt with. Also, the asymptotic method has been stitched to the release of a strained-deformed mill of circular plates of varying degrees of rigidity.

## ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	2
Реферат.....	4
Summary.....	5
Вступ.....	7
1 Аналітичний огляд сучасного стану досліджуваної проблеми.....	9
1.1 Огляд сучасного стану проблеми згину пластин.....	9
1.2 Основні етапи в розвитку асимптотичних методів.....	15
1.3 Гібридний асимптотичний метод на базі методу фазних інтегралів.....	17
1.4 Розв'язання задачі для кільцевої пластини змінної товщини.....	23
1.5 Розв'язання задачі для круглої пластини змінної товщини.....	29
2 Розрахунок статичного деформування складених круглих пластин .....	34
2.1 Розрахунок напружено-деформованого стану круглих пластин при крайових умовах жорсткого затиснення .....	34
2.1 Розрахунок напружено-деформованого стану круглих пластин при крайових умовах шарнірного спирання.....	41
2.3 Застосування асимптотичного методу до розв'язку напружено-деформованого стану круглих пластин змінної жорсткості.....	46
Висновок.....	53
Перелік посилань.....	54
Додаток А.....	58
Додаток Б.....	66

## ВСТУП

Пластини змінної товщини різних обрисів знаходять широке застосування в будівельній техніці і в машинобудуванні. В даний час зводиться багато різних спеціальних споруд, що мають в плані кругову форму. Серед подібних споруд можна назвати телевізійні вежі, димові і вентиляційні труби, вежі радіорелейних ліній, циліндричні резервуари, опорні башти вітрових електростанцій. Значна кількість питань, пов'язані з проектуванням круглих фундаментних плит подібних споруд, їх міжповерхових перекриттів, а також днищ резервуарів і їх покриттів, призводять до розрахунку круглих пластин змінної товщини. Елементи сучасних цивільних будівель, що мають складні обриси, найчастіше представляють собою пластини змінної товщини, що мають форму прямокутника, сектора, сегмента, кругового прямокутника.

Задачі про вивчення роботи пластин змінної товщини виникають також при розрахунку конструкцій, що примикають до льодового покриву і при розрахунку льодового покриву водойм в місцях, прилеглих до ополонки.

Великий інтерес для зниження небажаного рівня вібрацій будівель і споруд є тарілчасті віброізолятори і гасителі коливань, основними конструктивними елементами яких в ряді випадків є круглі, а іноді і прямокутні пластини змінної товщини і їх системи.

Подібні завдання часто зустрічаються в машинобудуванні при розрахунку турбінних дисків, лопатей гідромашин, гнучких з'єднань валів, різних клапанів і засувок, дискових пружин.

До теперішнього часу виконано великий обсяг досліджень, що дозволили сформулювати сучасну теорію пластин і оболонки, в розвиток якого великий внесок внесли С.П.Тимошенко, Л.І.Лур'є, С.Г.Лехніцькій, В.В.Новожілов, Г.Л. Колмогоров та інші.

Але існуючі дослідження про симетричні вигини круглих пластин змінної товщини відрізняються недостатнім використанням відомих результатів з теорії спеціальних функцій та методів їх дослідження. Несиметричний вигин круглих пластин змінної товщини досліджений ще менше; тут, крім рішень для пластин гіперболічного профілю, майже не має розв'язків для будь-яких інших профілів.

Основна мета данної роботи полягає у дослідженні несучої здатності круглих пластин змінної товщини асимптотичним та прямим чисельним методами. Зокрема обговорюється аналітико-чисельний підхід до розв'язку статичних задач круглих пластин змінної жорсткості.

Особлива увага приділяється застосуванню існуючих обчислювальних комплексів на базі сучасних комп'ютерних технологій та обговорюється у ряді випадків застосування наближених, зокрема асимптотичних підходів.



# 1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ДОСЛІДЖУВАНОЇ ПРОБЛЕМИ

## 1.1 Огляд сучасного стану проблеми згину пластин

Проблемам розрахунку пластин змінної товщини присвячена велика кількість літератури, в якій різноманітні питання, що відносяться до вивчення їх поведінки при дії статистичних та динамічних навантажень, що включає, зокрема врахування пружної основи та вивчення проблем стійкості. У відомих курсах та монографіях щодо теорії пластин приділено увагу питанню розрахунку пластин змінної товщини. Зокрема, у монографіях С.П. Тимошенко, С. Войносвського-Кригера [26] та Р. Сциларда [25]. Цьому питанню присвячені й окремі розділи довідкових видань, наприклад довідника Д.В. Вайнберга та Е. Д. Вайнберга [4].

Зупинимося на теорії розрахунку круглих пластин змінної товщини. Диференціальне рівняння, що описує вигин круглої пластини радіально-змінної товщини без урахування зусиль в серединній площині, було вперше отримано О. Піхлером, а потім в іншій формі воно було виведено А.І. Лур'є. У монографії А.Д. Коваленко [12] отримано диференціальне рівняння вигину ізотропної круглої пластини змінної товщини, виведене з урахуванням дії поперечних сил і сил в серединній площині, а також впливу нерівномірного нагрівання.

Дослідження, присвячені статичному розрахунку круглих пластин змінної товщини в пружній постановці, істотно розрізняються за методами їх вирішення.

Значний розвиток отримали методи розрахунку, засновані на тому, що безперервна зміна товщини пластини замінюється ступінчастою моделлю. Таким чином, розрахунок пластин змінної товщини ґрунтується на використанні теорії згину пластин постійної товщини на кожному інтервалі її

зміни. Зазначений метод знайшов застосування в роботах Р.С. Кінасошвілі [5], М.М. Малініна [16 – 18], С.Д. Пономарьова [6], А.С. Тумаркіна [27] та ін.

Метод інтегральної матриці, розроблений в [19] стосовно широкого кола завдань будівельної механіки, був застосований і до вирішення задачі згину круглої пластини змінної товщини.

У літературі можна відзначити більшу кількість робіт, присвячених вирішенню вісесиметричних задач вигину круглих пластин змінної товщини, які зводяться до інтегрування диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами.

Найбільш простою є задача про вигин пластини при жорсткості, що змінюється за степеневим законом

$$D = D_0 r^{\alpha_0},$$

в цьому випадку дозволяюче рівняння інтегрується в елементарних функціях.

Одна з перших робіт такого напрямку належить А. Стодолу [42], який вивчав вигин турбінного диска гіперболічного профілю.

Г. Фавр [32] розглянув вигин круглої пластини, що складається з двох частин: середня частина має постійну товщину, а зовнішня частина являє собою пластину з лінійно-змінної товщиною. Питання про розрахунок пластини гіперболічного профілю при  $\alpha_0 = -n, n > 0$  має широке практичне значення для розрахунку будівельних конструкцій. У монографії Г. Маркуса [33] ця задача розглянута дуже докладно на основі роботи О. Лікара [29].

Велика увага приділялася більш складній задачі про вигин пластин, товщина яких змінюється за експоненціальним законом.

Тут отримано розв'язок у вигляді узагальнених степеневих рядів, які, як зазначено в [13] незручні для практичного застосування. Виняток становить важливий частковий випадок, який докладно розглянуто в книзі О. Піхлера:

У монографії [13] А.Д. Коваленко розглянув вигин круглих пластин з жорсткістю  $D = D_0 |1 - x|, x = \pm \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\alpha_0}$ , де  $\alpha_0, r_0, D_0$  – сталі. Там же була

розв'язана задача для пластини з лінійно-змінною товщиною. Обидві названі задачі вирішувалися в результаті пониження порядку рівняння пружної поверхні пластини. Було отримано розв'язання в гіпергеометричних функціях.

Я.М. Григоренко в [7] вдалося привести задачу про антисиметричний вигин круглої пластини змінної товщини до інтегрування диференціального рівняння другого порядку, яке він отримав, ввівши в якості шуканої функції  $\alpha_0 = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{w}{r^2}$ . У цій роботі для пластини з лінійно-змінною товщиною було отримано розв'язок, який виражено в гіпергеометричних функціях другого порядку.

У монографії А.Д. Коваленко, Я.М. Григоренко та Л.А. Ільїна [14] наводяться дозволяючі диференціальні рівняння другого порядку для пластин змінної товщини і як приклад розглянута пластина лінійно-змінної товщини.

Подальший розвиток вирішення зазначеної задачі було отримало в роботі Я.М. Григоренко та І.Ф. Лацінніка [8], в якій дано повне розв'язання задачі про вигин пластини лінійно-змінної товщини і наведені таблиці частинних розв'язків однорідного рівняння.

У роботі Г. Олсона [41] вивчався антисиметричний і циклічно-симетричний вигин круглої пластини з жорсткістю, що змінюється за параболічним законом  $D = D_0(1 - x^2)$ ,  $x = \frac{r}{r_0}$ . Автор знайшов розв'язок в гіпергеометричних функціях як для антисиметричного, так і для циклічно-симетричного навантаження. Г. Олсон скористався спрощенням, заснованим на тому, що диференціальне рівняння четвертого порядку в даному випадку розпадається на два рівняння другого порядку.

В роботі [31] було дано розв'язання задачі про несиметричний вигин пластини змінного перерізу і в якості окремого випадку розглядався антисиметричний вигин; було знайдено розв'язання для пластини з лінійно-змінною товщиною. Слід згадати про роботу [37], в якій чисельні результати,

отримані авторами методом кінцевих елементів. порівнюються з точними розв'язками; в статті наводяться й дані експериментальних досліджень.

У статті [38] розглянуті різні питання розрахунку пластин змінної товщини, в тому числі і питання розрахунку круглих пластин. Зазначена задача розглянута тільки для пластин зі степеневим законом зміни товщини.

Антисиметрична деформація ортотропних пластин вивчалася Е.Ф. Бурмістровим та Н.М. Масловим. В роботі [19] було отримано точний розв'язок задачі про вигин круглої пластини, яка має циліндричну анізотропію і є ортотропною. Товщина розглянутої пластини змінюється за експоненціальним законом. Автор вищезазначеної статті поряд з дією циклічно-симетричного навантаження вивчав дію антисиметричною навантаження. В [19] задача була зведена до розв'язання диференціального рівняння четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами. Розв'язок було отримано методом Фробеніуса.

У спільній роботі Е.Ф. Бурмістрова та Н.М. Маслова [19] вивчався антисиметричний вигин пластини з жорсткістю, що змінюється за законами

$$D = D_0|x|^\gamma(1 - x)^\beta \text{ та } D = D_0|x|^\gamma e^{-\beta x}.$$

Автори припускали, що матеріал володіє циліндричної анізотропією і є ортотропним. Розв'язання задачі отримано в гіпергеометричних функціях; в роботі показано, що окремим випадком отриманого розв'язку є вигин ізотропної пластини.

Задачі циклічно-симетричного вигину в загальному випадку не вдається звести до розв'язання диференціальних рівнянь другого порядку. В цьому випадку розв'язок в елементарних функціях виходять при статичному законі зміни жорсткості. Розв'язання рівняння четвертого порядку зводиться до інтегрування двох рівнянь другого порядку, якщо жорсткість пластини змінюється за параболічним законом.

Задачі про дію зосереджених сил, прикладених по контуру, розглядалися Л.Д. Коваленко [13], Г. Олсоном [34], Е.С. Уманським [28].

Питання про вигин круглих пластин змінної товщини, що покоюються на пружній основі, поки не отримав достатньо повного відображення в літературі. А.Д. Коваленко у своїй монографії [13] присвятив один з параграфів вирішення задачі про вісесиметричний вигин пластини лінійно-змінної товщини, що лежить на вінклеровській основі. Вирішальним рівнянням в цьому випадку є рівняння класу Фукса четвертого порядку. Розв'язок отримано за допомогою методу Фробеніуса.

Задачі про коливання пластин змінної товщини вивчалися дуже детально, так як питання коливань таких пластин мають дуже велике значення для розрахунку роторів турбомашин. Характерною рисою виконаних досліджень є велика увага до розв'язання задач про вільні коливання.

Близькі за методом розв'язання задачі розглянуті Р.К. Джайном, який в [34], використовуючи метод Фробеніуса, вирішував завдання про вільні та вимушені коливання пластини, товщина яких змінюється за законом  $h = h_0(1 - \beta x^2)$ . У [34] він вивчав коливання пластини, товщина якої змінюється за законом  $h = h_0(1 - \beta x^n)$ .

Г.Харріс в [33] розглянув задачу про вільні коливання затиснутою круглої пластини з жорсткістю  $D = D_0(1 - \rho^2)^3$ .

С. Такахасі, К. Сузукі, І. Накамура в [42] вивчали вільні коливання пластини експоненціального профілю з отвором в центрі. В цій роботі також був використаний метод Фробеніуса.

Н.М. Маслов в роботі [20] дав розв'язання у разі вісесиметричних коливань конструктивно-ортотропної кільцеподібної пластини для двох законів зміни товщини: 1)  $h = h_0 x^2$ ; 2)  $h = h_0(1 - x)$ . Для першого закону зміни товщини рішення дано в степеневих функціях, в другому випадку рішення отримано методом Фробеніуса. При цьому було проведено аналіз умови існування логарифмічних розв'язків.

В [21] Н.М. Маслов розглянув питання ортогональності власних форм коливань кільцеподібної пластини з ортотропного матеріалу: там ж їм була вирішена невісесиметрична задача для пластини з лінійно-змінною товщиною, розвивається розв'язання вісесиметричної задачі при  $h = h_0 x^2$  наводяться числові приклади.

М. Тромбскі в роботі [44] методом Фробеніуса отримав розв'язання задачі про коливання ортотропної пластини зі змінною жорсткістю. Цим же автором в статті [44] була вирішена задача про невісесиметричні коливання круглої конструктивно-ортотропної пластини лінійно-змінної товщини.

В роботі В.П. Арістова. М.І. Терещенко. А.Б. Мамонова [1] розглянуто коливання диска. Ця задача описується диференціальним рівнянням другого порядку зі змінними коефіцієнтами.

Велике значення має питання про визначення температурних напружень, детально вивчають, зокрема, в монографії [12].

У довідкових посібниках Г. Маркуса [39], [40] приділено велику увагу практичній стороні розрахунку круглих пластин змінної товщини. У цих книгах розглядаються відповідно симетричний і антисиметричний вигин круглих пластин. Однак Г. Маркус використовував лише невелику частину робіт, названих в цьому огляді; він детально розглянув пластину з жорсткістю  $D = D_0 x^2$  і, використовуючи розв'язання О. Піхлера, розглянув вісесиметричний вигин пластини з експоненціальним законом зміни товщини. Крім того, в книгах Г. Маркуса викладається питання про застосування методу скінченних різниць.

Узагальнюючи аналітичний огляд сучасного стану деформування круглих пластин змінної жорсткості необхідно зазначити, що аналітичні і чисельні розв'язки статичного деформування круглих пластин складної конфігурації потребують вдосконалення. В даній роботі обговорюється аналітико-чисельний підхід до розв'язку статичних задач круглих пластин змінної жорсткості. Особлива увага приділяється застосуванню існуючих обчислювальних комплексів на базі сучасних комп'ютерних технологій та

обговорюється у разі випадків застосування наближених, зокрема асимптотичних підходів.

## 1.2 Основні етапи в розвитку асимптотичних методів

В процесі створення детальної картини процесів, виникає потреба в побудові досить складних математичних моделей, для яких потрібен універсальний обґрунтований математичний апарат. Аналізуючи ускладнені моделі, дослідник часто отримує системи диференціальних рівнянь, які, в більшості випадків, неможливо розв'язати точно. Для знаходження розв'язку подібних задач використовують асимптотичні методи.

Головною ідеєю асимптотичних підходів є розвинення шуканого розв'язку в формальний ряд по степеням деякого малого параметра. Тим не менш, одержаний наближений розв'язок, який здобувається шляхом обриву рядів на  $m$ -ому члені, є досить придатним для його застосування у практичних розрахунках. Отриманий наближений розв'язок має асимптотичний характер, при чому він наближається до відповідного точного розв'язку не за рахунок збільшення числа  $m$ , а за рахунок наближення до нуля малого параметра, при фіксованому  $m$ . Так як асимптотичні методи дають змогу отримати аналітичний вираз наближеного розв'язку, то їх можна застосовувати для дослідження якісної картини поведінки розв'язку на деякому інтервалі незалежної змінної.

Ж.Фур'є, Ж.Штурм та Ж.Ліувіллє – заклали основи асимптотичних методів. Найбільш вживаним методом для розв'язання змішаних задач математичної фізики є метод Фур'є, запропонований Ж.Фур'є в 1807 р. Застосовувавши цей метод, приходять до крайової задачі, описаної звичайним диференціальним рівнянням, що містить деякий параметр. За рахунок того, що отримані диференціальні рівняння містять змінні коефіцієнти, то вони не інтегруються. Лише в деяких випадках Ж.Фур'є знайшов розв'язок

диференціальних рівнянь. Отримані розв'язки називаються фундаментальними функціями.

В 1838 р. Ж.Ліувілль узагальнив результати Ж. Фур'є, який запропонував метод розвинення довільної функції в ряд по фундаментальним функціям крайової задачі, заданої лінійним диференціальним рівнянням другого порядку, що містить великий параметр. Також Ж.Ліувіллю вдалося розв'язати задачу про побудову асимптотичних формул для фундаментальних функцій диференціального рівняння порядку  $n$  зі змінними коефіцієнтами.

Після публікації цих праць, теорія побудови розв'язків диференціальних рівнянь, що містять параметр, у вигляді асимптотичних формул стала швидко розвиватися. Але її застосовували лише для того, щоб з'ясувати характер збіжності розвинення довільної функції в ряд по фундаментальним функціям. Пізніше з'ясувалося, що цю теорію можна застосовувати для розв'язання більшості практичних задач.

Найбільш значимою працею в розвитку асимптотичного зображення розв'язків диференціальних рівнянь є праця А.Пуанкаре [24], яка систематизувала та значно розвинула асимптотичну теорію. Ідеї науковця дали початок методу деформованих координат, який пізніше був розвинений Лайтхіллом [15] та багатьма іншими вченими.

В 1936 р. вийшла праця Тржітзінського [16], в якій дано повний виклад стану питання про асимптотичне зображення як окремих, так і систем диференціальних рівнянь, що містять великий параметр. Крім того, в цій праці була узагальнена теорія Шлезінгера - Біркгофа - Тамаркіна на лінійні інтегро-диференціальні рівняння. В 1940 – 1945рр. вийшли праці В.С.Пугачева [17], в яких асимптотичне зображення розв'язків дається в більш загальному вигляді, що дозволило розширити область застосування асимптотичних методів і розповсюдити їх на інші класи диференціальних рівнянь.



Асимптотичні методи відіграють важливу роль при розв'язанні задач механіки. Найбільший розвиток сучасні асимптотичні методи одержали в теорії пластин і оболонок, де наявність малого параметра цілком очевидна.

### 1.3 Гібридний асимптотичний метод на базі методу фазних інтегралів

Розглянемо окремий асимптотичний метод – метод фазних інтегралів (або ВКБ [29]). Це достатньо потужний наближений метод розв'язання сингулярних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами з параметром при старшій похідній.

Метод фазних інтегралів застосовують до рівнянь виду[29]:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + h^2 g(x, h)w = 0, \quad (1.1)$$

де  $h$  – великий параметр,  $g(x, h)$  – деяка функція.

Якщо на функцію  $g$  накладаються деякі умови, тоді наближені розв'язки рівняння (1.1) приймають вигляд:

$$w = q^{-\frac{1}{4}} \exp(\pm ih \int_0^x \sqrt{q} dx) \left( 1 + O\left(\frac{1}{h}\right) \right). \quad (1.2)$$

Формули (1.2) перестають бути вірними поблизу точок повороту – значень незалежної змінної  $x$ , в яких функція  $g(x, h)$  обертається на нуль.

Першим застосував наближені розв'язки за методом ВКБ Карліні [11], він розглянув спеціальне рівняння, яке тепер називається рівнянням Бесселя, та отримав наближений розв'язок цього рівняння при великих значеннях незалежної змінної. В 1837 році Ж. Ліувілю та Дж. Гріну [9] вдалося

побудувати асимптотичні розв'язки для більш загальних рівнянь, але їх можна застосовувати лише в областях незалежної змінної, в якій не міститься точок повороту.

Систематично ВКБ - наближення стосовно рівнянь виду (1.1) стали застосовуватись лише після появи робіт Вентцеля, Крамерса, Бріллоена і Джеффріса.

Г.Джеффріс [10] при розгляданні функцій Мат'є, в зв'язку з вивченням вільних коливань води в еліптичному озері, вперше систематизував ВКБ - розв'язки, вивчаючи переважно ефекти, що пов'язані з точками повороту.

Величину похибки ВКБ - розв'язків дослідив вчений Ф.Олвер [23], також він застосував отримані результати до функцій параболічного циліндру і функцій Бесселя великого порядку. Крім того, він розглянув рівняння з двома точками повороту, точний розв'язок якого можна виразити за допомогою функції Вебера. Також вченим були отримані асимптотичні розвинення для розв'язків, що застосовуються у всій комплексній області, використовуючи наближення ВКБ та наближення з функціями Ері. Вченим Хедінгом в роботі [28] були розглянуті рівняння з довільною кількістю точок повороту та досліджено області, в яких асимптотика є рівномірною.

Значний внесок в розвиток методу ВКБ внесли також Шлезінгер [30], Біркгоф [2] та ін., які побудували асимптотичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь і однорідних систем лінійних диференціальних рівнянь в областях, що не містять точок повороту.

Багато цікавих ідей стосовно використання методу ВКБ до систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь міститься в праці М.М.Моїсеєва [22].

В [28], [29] метод ВКБ описаний в застосуванні до лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Існують спроби використання методу ВКБ не тільки для лінійних рівнянь, але також і для ряду нелінійних диференціальних рівнянь. Так, в праці В.П.Маслова [21] пропонується комплексний метод ВКБ для розв'язку

нелінійних задач квантової механіки, рівняння кристалічних ґратів та ін. Одержані розв'язки локалізовані в околі деяких кривих чи поверхнь. Конструкція таких розв'язків опирається на гамільтонів формалізм механіки вузьких жмутків і відомі солітонні розв'язки відповідних двовимірних задач.

Одним з багатьох підходів, який “поліпшує” розв'язки, отримані за допомогою методів збурення, є гібридний асимптотичний метод. Він ґрунтується на поєднанні якого-небудь асимптотичного розвинення і методу Гальоркіна, і опирається на ідеї, опис яких міститься в працях американських дослідників Гіра і Андерсена [34 – 37]. Поєднуючи в собі найкращі сторони методів збурення і методу Гальоркіна, гібридний асимптотичний метод в значній мірі компенсує їх недоліки.

Метод Гальоркіна (або метод Бубнова - Гальоркіна [29]) був добре відомий в російській науковій літературі по працям Бубнова і Гальоркіна, в яких цей метод застосовувався до задач пружної рівноваги стрижнів і тонких пластин. Після цього даний підхід був реалізований в працях Дункана (1937 р.), присвячених динаміці авіаційних конструкцій. Після цього Бірклі застосував метод Гальоркіна до розв'язання задачі про нестационарну теплопередачу шляхом розгляду еквівалентного електричного контура. В наш час існує велика кількість модифікацій методу Гальоркіна [29]. Так, можна виділити метод Гальоркіна з кінцевими елементами, спектральні методи, метод граничних елементів та ін. Велика кількість прикладних задач розв'язується за допомогою методу Гальоркіна. Так, в [39] цей підхід застосований для інтегрування рівнянь руху аероплану. Праця [40] присвячена розв'язанню інтегральних рівнянь циліндричного і плоского вібраторів. Модифікований метод Гальоркіна на основі методу кінцевих елементів застосований в [41] для моделювання напівпровідникових приладів.

Основним недоліком методу Гальоркіна є складності оптимального вибору базисних функцій, які в більшості випадків вибираються інтуїтивно,

бо алгоритму побудови таких функцій в загальному вигляді не існує. Гібридний асимптотичний метод вирішує цю проблему, випереджуючи процес оптимізації по методу Гальоркіна знаходженням базисних функцій по одному із асимптотичних методів.

Основна ідея гібридного асимптотичного методу полягає в наступному.

Розглянемо деяку крайову задачу, яку потрібно розв'язати [29]:

$$L(u, \varepsilon) = 0, \quad (1.3)$$

де  $L$  – диференціальний оператор,  $u(x)$  – шукана функція, визначена в деякій області (інтервалі)  $D$  зміни  $x$ ,  $\varepsilon$  – параметр.

За крайові умови прийmemo однорідні крайові умови.

Будемо застосовувати гібридний асимптотичний метод у два етапи. Спочатку будемо асимптотичне розвинення  $u$  в околі одного чи більше спеціальних значень параметра  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = \varepsilon_p, p = 1, 2, \dots, P$ ).

$$u = \sum_{k=0}^{n_p-1} u_k^p \alpha_k^p(\varepsilon) + O\left(\alpha_{n_p}^p(\varepsilon)\right), \quad (1.4)$$

де  $\{\alpha_k^p(\varepsilon)\}$  – деяка асимптотична послідовність (наприклад,  $\alpha_k^1 = \varepsilon^k$ ).

Для визначення функцій  $u_k^p$  можна скористатися одним із асимптотичних методів, зокрема, Гір и Андерсен використовують формальне асимптотичне розвинення або метод зрощуваних асимптотичних розвинень.

Знайдені функції  $u_k^p$  використовуємо на другому етапі, приймаючи їх як координатні функції для методу Гальоркіна. Для цього апроксимацію розв'язку задачі (1.3) будемо шукати у вигляді

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^N \delta_i u_i, \quad (1.5)$$

де  $\delta_i$  — невідомі параметри.

Застосовуючи метод Гальоркіна визначаємо параметри  $\delta_i$ . Отже, (1.5) підставляється у рівняння (1.3), та ставиться умова ортогональності, одержаного таким чином відхилю, до  $N$  координатних функцій  $u_i$  у всій області  $D$

$$\int_D \Lambda(\sum_{i=1}^N \delta_i u_i, \varepsilon) u_j dx = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.6)$$

Рівняння (1.6) утворюють систему з  $N$  алгебраїчних рівнянь відносно  $N$  невідомих  $\delta_i$ .

Вчені Гір та Андерсен в своїх працях розглянули даний метод на деяких простих прикладах, які допускають точний розв'язок, і застосували до ряду прикладних задач. Так, в роботі [34] розглядається розв'язок задачі визначення енергії негармонічного осцилятора з використанням гібридного асимптотичного методу, причому, крайові умови задаються на нескінченності.

Праця [35] присвячена побудові гібридного наближення розв'язку диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами та малим параметром при старшій похідній. Це наближення будується за допомогою метода зрощуваних асимптотичних розвинень та метода Гальоркіна. За такою ж схемою розв'язуються задачі на знаходження власних значень та власних функцій лінійного диференціального оператора, приймається, що незалежна змінна має нескінченні границі варіювання. Зокрема, у цій праці розглядається розв'язання задачі на визначення частоти простої механічної системи. Математична постановка задачі зводиться до нелінійного диференціального рівняння з малим параметром, який міститься у структурі нелінійного члена.

В роботі [36] розв'язуються задачі математичної фізики, що зводяться до інтегро-диференціальних рівнянь. Для їх розв'язання використовуються гібридний підхід на основі формального асимптотичного розвинення по степеням і логарифмам малого параметра. Представлено розв'язання двох задач теорії тонких оболонки.

Праця [37] присвячена рівнянню Рейнольдса для ковзної опори, до якого зводиться нелінійна задача. В цьому випадку, для одержання гібридного розв'язку застосовують метод зрощуваних асимптотичних розвинень, які отримані для великого та малого значень параметра.

В роботі [38] розглядаються задачі, що зводяться до лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Для отримання гібридного розв'язку застосовують спеціально підібрані асимптотичні функції.

Особливий інтерес для розв'язання крайових задач механіки деформівного твердого тіла становлять диференціальні рівняння з параметром при старшій похідній. При цьому параметр може входити в рівняння з самого початку або вводиться штучно. Наприклад, малими параметрами в теорії оболонок можуть виступати такі величини, як відношення товщини оболонки до радіуса, відношення нормального прогину до радіуса, відношення згинних жорсткостей конструктивно - ортотропної оболонки. Параметр також може характеризувати малий відхил вихідної області від кругової, вихідної змінної товщини від постійної і т.д.

Методом, який досить часто використовують для розв'язання таких задач у випадку, коли параметр малий, є метод фазних інтегралів. Але на практиці досить часто бувають випадки, коли деякий параметр може бути як малим, так і великим.

Тому виникла ідея поєднання достатньо вивченого методу ВКБ з методом Гальоркін [29]. Метод фазних інтегралів дозволяє уловити структуру розв'язку, і тим самим, вигляд апроксимуючих функцій в методі Бубнова-Гальоркіна. Використання критерію ортогональності дозволяє значно "поліпшити" ВКБ-розв'язок тоді, коли параметр перестає бути малим. Одержане таким чином гібридне ВКБ-Гальоркін наближення значно розширює область застосування методу фазних інтегралів.

Багато сучасних наукових теорій будується за допомогою асимптотичних підходів, які дозволяють проникнути в суть явищ, спростити

завдання і створити єдиний підхід до їх розв'язання. Тому розширення області застосування асимптотичних методів є одним з найважливіших завдань сучасної асимптотичної теорії.

Необхідно зазначити, що гібридний ВКБі-Гальоркін метод, дозволяє будувати розв'язок крайових задач механіки деформованого твердого тіла, що зводяться до лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, на широкому інтервалі зміни параметра.

#### 1.4 Розв'язання задачі для кільцевої пластини змінної товщини

Наведемо основні диференціальні рівняння та залежності, що знадобляться для обчислення круглих пластин змінної товщини.

Диференціальне рівняння вигину пластини змінної товщини має в полярних координатах наступний вигляд [4]:

$$D\nabla^2\nabla^2w + \frac{\partial D}{\partial r} \left( 2 \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{2+\nu}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \right. \\ \left. - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - q = 0, \quad (1.7)$$

де

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}. \quad (1.8)$$

Після того, як знайдена функція прогинів  $w(r, \theta)$ , можуть бути визначені зусилля у пластині.

Радіальний згинальний момент на одиницю довжини циліндричного перетину радіуса  $r$

$$M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{dr^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]. \quad (1.9)$$

Окружний згинальний момент на одиницю довжини меридіонального перетину пластини в точці  $r, \theta$

$$M_\theta = -D \left( \nu \frac{\partial^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right). \quad (1.10)$$

Інтенсивність крутного моменту

$$M_{r\theta} = -M_{\theta r} = -D(1 - \nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \quad (1.11)$$

Перерізуючи зусилля на одиницю довжини відповідно циліндричному та меридіональному перетинах пластини визначаються з рівностей:

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w - \frac{dD}{dr} \left[ \frac{\partial^2 w}{dr^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right];$$

$$Q_\theta = -D \frac{\partial}{r \partial \theta} \nabla^2 w - (1 - \nu) \frac{dD}{dr} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \quad (1.12)$$

Опорна реакція на кромці пластини, концентричної контури,

$$V_r = -D \left[ \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial r} + \frac{1 - \nu}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] -$$

$$- \frac{dD}{dr} \left( \frac{\partial^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right). \quad (1.13)$$

Розглянемо задачу про кільцеву пластину товщиною, що спадає від центру за лінійним законом, під дією поперечного навантаження, розподіленого за законом площині, що проходить через центр пластини, при будь-яких умовах на контурі.



Така задача зустрічається, зокрема, при розрахунку дисків, що знаходяться в полі коріолісових сил інерції власної маси. Так, якщо круглий диск здійснює складний рух, що складається з відносного обертального руху навколо осі, що проходить через центр, перпендикулярно до серединної площини, і переносного руху – обертання разом з віссю навколо другої осі, що лежить в серединній площині пластини та перпендикулярної до першої осі, то виникають коріолісові сили інерції, що розподілені за законом площини та спричиняють вигин пластини.

Нижче викладається наближений спосіб розрахунку такої системи, заснований на методі початкових параметрів і на заміні пластини конічного профілю пластиною, що складається з  $n$  кільцевих ділянок постійної товщини в межах кожної ділянки. Довжини ділянок в радіальному напрямку прийняті однаковими.

Вводяться позначення [4]:

$b = r_0$  – радіус внутрішньої окружності пластини;

$a = r_{n+1}$  – радіус зовнішньої окружності пластини;

$r, \theta$  – полярні координати;

$R = \frac{a-b}{1+\delta_a/\delta_b} + b$  – радіус "повної конічної" пластини;

$\delta_0$  – товщина пластини в центрі;

$\delta_b, \delta_a$  – товщина пластини на внутрішньому та зовнішньому контурах;

$\delta_p = \delta_0(1 - \rho)$  – змінна товщина пластини;

$D_0 = \frac{E\delta_0^3}{12(1-\nu^2)}$  – циліндрична жорсткість пластини в центрі;

$w_n, \varphi_n$  – прогин, кут повороту пластини і точці, що лежить на граничній окружності радіуса  $r_n$  при  $\theta = 0$ ;

$V_{r,n}, M_{r,n}$  – інтенсивність зведеного перерізу чого зусилля та радіального згинального моменту, в циліндричному перерізі  $r_n$  при  $\theta = 0$ ;

$M_\theta$  – інтенсивність окружного згинального моменту в меридіональному перерізі на граничній окружності радіуса  $r_n$  при  $\theta = 0$ ;

$w_{n-1}, \varphi_{n-1}, V_{r,n-1}, M_{r,n-1}, M_{\theta,n-1}$  – величини прогину, кута повороту та зусиль на граничній окружності радіуса  $r_{n-1}$  при  $\theta = 0$ ;

$w_0, \varphi_0, V_{r,0}, M_{r,0}, M_{\theta,0}$  – ті ж самі величини на внутрішньому контурі пластини  $\beta = \varrho_0 = \frac{r_0}{R}$  при  $\theta = 0$ ;

$\omega$  – кутова швидкість відносно обертання пластини;

$\omega_1$  – кутова швидкість переносного обертання;

$\gamma$  – об'ємна вага матеріалу пластини;

$g$  – прискорення сили тяжіння;

Позначимо  $\rho = \frac{r}{R}$ ;  $\rho_0 = \beta = \frac{b}{R}$ ;  $\rho_{n+1} = \alpha = \frac{a}{R}$ ;  $\Omega = 2 \frac{\gamma}{g} \omega \omega_1$ .

$$\tilde{w}_n = A_{n-1} \tilde{w}_0 + B_{n-1} \tilde{\varphi}_0 + C_{n-1} \tilde{V}_{r,0} + \Phi_{n-1} \tilde{M}_{r,0} + E_{n-1} \tilde{\Omega}; \quad (1.14)$$

$$\tilde{\varphi}_n = \bar{A}_{n-1} \tilde{w}_0 + \bar{B}_{n-1} \tilde{\varphi}_0 + \bar{C}_{n-1} \tilde{V}_{r,0} + \bar{\Phi}_{n-1} \tilde{M}_{r,0} + \bar{E}_{n-1} \tilde{\Omega}; \quad (1.15)$$

$$\tilde{V}_{r,n} = \bar{\bar{A}}_{n-1} \tilde{w}_0 + \bar{\bar{B}}_{n-1} \tilde{\varphi}_0 + \bar{\bar{C}}_{n-1} \tilde{V}_{r,0} + \bar{\bar{\Phi}}_{n-1} \tilde{M}_{r,0} + \bar{\bar{E}}_{n-1} \tilde{\Omega}; \quad (1.16)$$

$$\tilde{M}_{r,n} = \dot{A}_{n-1} \tilde{w}_0 + \dot{B}_{n-1} \tilde{\varphi}_0 + \dot{C}_{n-1} \tilde{V}_{r,0} + \dot{\Phi}_{n-1} \tilde{M}_{r,0} + \dot{E}_{n-1} \tilde{\Omega}; \quad (1.17)$$

Крім того,

$$M_{\theta,n} = M_{r,n} + \frac{M_{r,n+1} - M_{r,n}}{\rho_{n+1} - \rho_n} \rho_n + V_{r,n} R \rho_n. \quad (1.18)$$

Формули (1.14) – (1.17) містять не дійсні, а «зведені» переміщення та зусилля в пластині, що визначаються наступними залежностями:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{w}_n &= w_n; \quad \tilde{M}_{r,n} = \frac{R^2}{D_0} M_{r,n}; \\ \tilde{\varphi}_n &= R \varphi_n; \quad \tilde{M}_{\theta,n} = \frac{R^2}{D_0} M_{\theta,n}; \\ \tilde{V}_{r,n} &= \frac{R^3}{D_0} V_{r,n}; \quad \tilde{\Omega} = \frac{R^5 \delta_0}{D_0} \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Рекурентні формули (1.14) – (1.17) дозволяють визначити переміщення та зусилля в пластині в точках, що лежать на граничній окружності радіуса  $r_n$  в залежності від аналогічних величин на «початковій» окружності радіуса  $r_0$ .

Для полегшення розрахунку складені таблиці коефіцієнтів  $A_{n-1}, B_{n-1}, \dots, E_{n-1}^*$ , що входять в формули (1.14) – (1.17), в припущенні, що кільцева пластина розбивається на чотири кільцевих ділянки однакової ширини в радіальному напрямку.

Коефіцієнти  $A_{n-1}, B_{n-1}, \dots, E_{n-1}^*$  для ряду параметрів  $\rho_0 = \beta$  та  $\rho_0 = a$  наведені в таблиці 1.1.

Розглянемо приклад розв'язання задач за заданими параметрами[4].

**Приклад 2.1:** Кільцевій сталевий диск з радіусом внутрішнього кола  $r_0 = b = 2,25$  см (рис. 1.1), радіусом зовнішнього контура  $r_4 = a = 30$  см, радіусом повного диска  $R = 103,02$  см, товщиною на осі  $\delta_0 = 0,634$  см і на зовнішньому контурі  $\delta_a = 0,45$  см, вільно обпертий по внутрішньому контуру. Визначити переміщення та зусилля в диску при складному його обертанні з відносною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі  $z$ , перпендикулярної до серединної площини, і з переносною кутовою швидкістю  $\omega_1$  навколо осі  $x$ , що лежить в серединній площині і проходить через центр диска.

Таблиця 1.1

Пластина з параметрами $\rho_0 = \frac{r_0}{R} = 0,02$ та $\rho_4 = \frac{r_4}{R} = 0,3$					
$n$	$A_{n-1}$	$B_{n-1}$	$C_{n-1} \cdot 10^3$	$\Phi_{n-1}$	$E_{n-1}$
1	-2,84943	0,15121	-0,36979	-0,02848	0,25018
2	-28,72480	0,78388	-2,84764	-0,16301	2,10739
3	-102,37500	2,45975	-10,00840	-0,51653	44,36370
4	-261,15990	6,00457	-25,62290	-1,27885	195,20400
$n$	$\bar{A}_{n-1}$	$\bar{B}_{n-1}$	$\bar{C}_{n-1} \cdot 10^3$	$\bar{\Phi}_{n-1}$	$\bar{E}_{n-1} \cdot 10^4$
1	-161,479	4,52675	-1,52684	-0,95857	0,15894
2	-648,545	15,16440	-6,25642	-3,21699	2,08348

3	-158,300	35,66710	-15,50050	-7,49705	10,71910
4	-3199,120	70,86900	-31,45300	-14,80620	37,28030
$n$	$\bar{A}_{n-1}$	$\bar{B}_{n-1}$	$\bar{C}_{n-1}$	$\bar{\Phi}_{n-1}$	$\bar{E}_{n-1} \cdot 10^3$
1	4197,12	-91,6661	0,45635	17,28840	-0,26143
2	4083,43	-89,1831	0,41869	17,86010	-0,77913
3	3965,04	-86,5976	0,40078	17,69810	-1,51054
4	3847,18	-84,0369	0,38679	17,17400	-2,40025
$n$	$A^*_{n-1}$	$B^*_{n-1}$	$C^*_{n-1} \cdot 10$	$\Phi^*_{n-1}$	$E^*_{n-1} \cdot 10^4$
1	374,30	-8,1749	0,35349	1,78670	-0,66268
2	639,15	-13,9592	0,62487	2,93504	-3,72222
3	887,63	-19,3860	0,87589	4,03713	-10,60600
4	1120,50	-24,4719	1,10990	5,07615	-22,41810

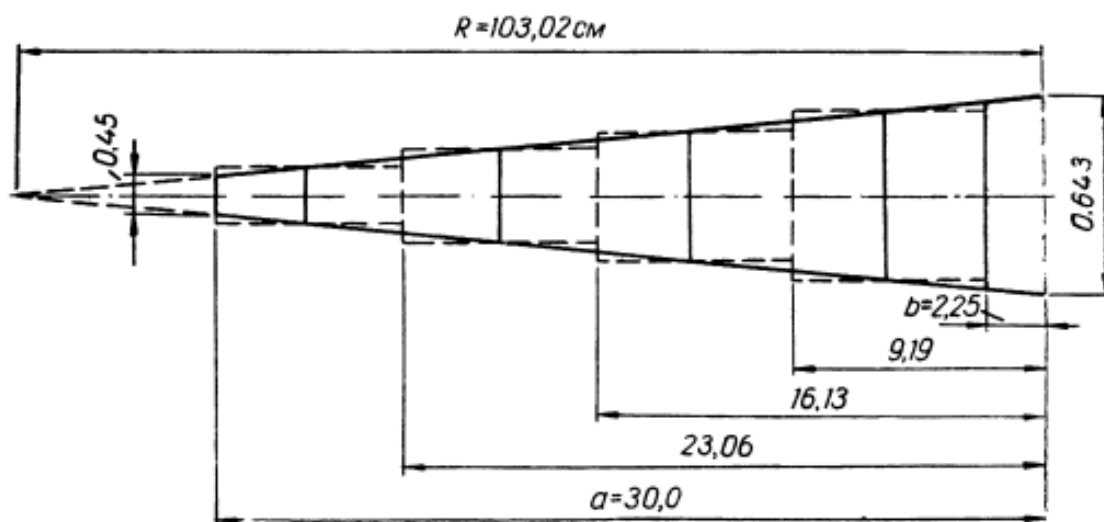


Рисунок 1.1 — поперечный перетин сталевого диска.

**Розв'язання.** Розіб'ємо диск на чотири ділянки, вписуємо у таблицю 1.2 величини відносних граничних радіусів ділянок.

Таблиця 1.2

$n$	0	1	2	3	4
$r_n$	2,250	9,187	16,125	23,062	30,000
$\rho_n = \frac{r_n}{R}$	0,02184	0,08918	0,15652	0,22386	0,29121

Початкові параметри  $\widetilde{w}_0, \widetilde{\varphi}_0, \widetilde{M}_{r,0}, \widetilde{V}_{r,0}$  знаходимо із крайових умов пластини. Враховуючи вільне спирання на внутрішньому контурі  $\varrho_0$ , слід покласти  $\widetilde{w}_0 = \widetilde{M}_{r,0} = 0$ . Два інших початкових параметра  $\widetilde{\varphi}_0$  та  $\widetilde{V}_{r,0}$  визначаємо із умови, що на зовнішньому контурі ( $\varrho = \varrho_4$ )

$$\widetilde{V}_{r,4} = \widetilde{M}_{r,4} = 0,$$

або

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_{r,4} &= \overline{\overline{B}}_3 \widetilde{\varphi}_0 + \overline{\overline{C}}_3 \widetilde{V}_{r,0} + \overline{\overline{E}}_3 \widetilde{\Omega} = 0; \\ \widetilde{M}_{r,4} &= B_3^* \varphi_0 + C_3^* \widetilde{V}_{r,0} + E_3^* \widetilde{\Omega} = 0.\end{aligned}$$

Підставляючи замість коефіцієнтів  $\overline{\overline{B}}_3, \dots, E_3^*$  їх величини, отримаємо:

$$\begin{aligned}-84,0369 \widetilde{\varphi}_0 + 0,386795 \widetilde{V}_{r,0} - 0,0240685 \widetilde{\Omega} &= 0; \\ -24,4719 \varphi_0 + 0,110999 \widetilde{V}_{r,4} - 0,0022418 \widetilde{\Omega} &= 0.\end{aligned}$$

В результаті розв'язання цієї системи знайдено величини початкових параметрів:

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_{r,0} &= 2,719\widetilde{\Omega}; \\ \widetilde{\varphi}_0 &= 1,2236 \cdot 10^{-2}\widetilde{\Omega},\end{aligned}$$

причому  $\widetilde{\Omega}$  задана та визначається формулою (1.12).

Далі, за формулами (1.7 – 1.11) та знайденими значеннями коефіцієнтів з таблиці 1 обчислимо зведені зусилля та переміщення. Їх величини поміщені у таблицю 1.3. Враховуючи абсолютні розміри пластини, визначаємо шукані величини амплітуд зусиль та переміщень, які наведені у таблиці 1.4. Зауважимо, що у розрахунках  $\Omega = 2\frac{\gamma}{g}\omega\omega_1$ .

Таблиця 1.3

$n$	$\widetilde{w}_n \frac{10^*}{\Omega}$	$\widetilde{\varphi}_n \frac{10^*}{\Omega}$	$\widetilde{V}_{r,n} \frac{1}{\Omega}$	$\widetilde{M}_{r,n} \frac{10^3}{\Omega}$
0	0	1,31154	2,91174	0
1	0,90937	1,49284	0,12392	-4,35483
2	1,99543	1,62948	0,04165	-1,50623
3	3,16311	1,75259	0,01609	-0,27964
4	4,34032	1,73816	0	0

Таблиця 1.4

$n$	$w_n \frac{1}{\Omega}$	$\varphi_n \frac{1}{\Omega}$	$V_n \frac{1}{\Omega}$	$M_{r,n} \frac{1}{\Omega}$
0	0	1,70944	19592,300	0
1	12,2105	1,94574	833,828	-3018,730
2	26,7934	2,20594	280,268	-1044,110
3	42,4723	2,28429	108,291	-193,845
4	58,2792	2,26548	0	0

Графіки переміщень та зусиль побудовані на рис. 1.2.

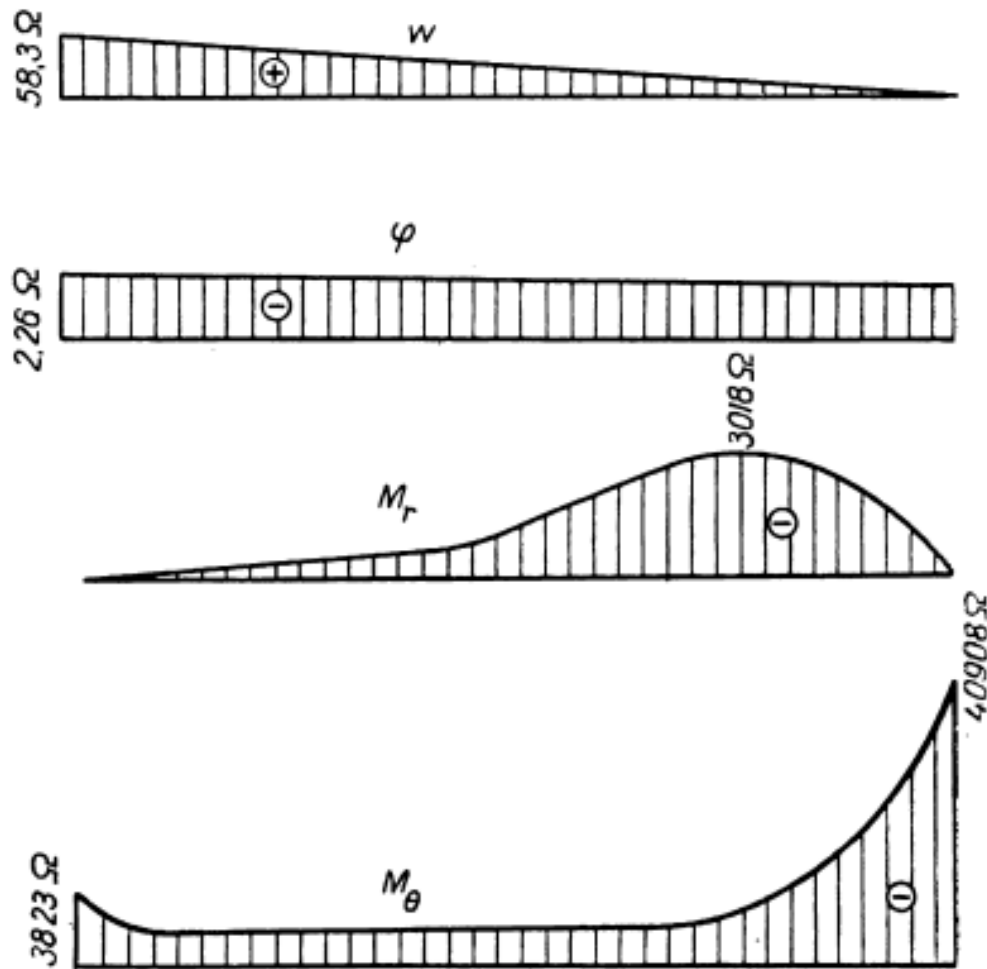


Рисунок 1.2 – графіки переміщень та зусиль.

### 1.5 Розв'язання задачі для круглої пластини змінної товщини

Розглянемо круглу пластину гіперболічного профілю під дією контурного навантаження, що володіє циклічної симетрією, ця пластина закріплена в центрі під дією зосереджених радіальних моментів  $M$ , прикладених до контуру на рівних відстанях (рис. 1.3) [4].

Вводяться позначення

$\delta_a$  – товщина пластини на зовнішньому контурі;

$\delta_\rho$  – товщина пластини на відстані  $\rho = \frac{r}{a}$ ;

$\delta_\rho = \delta_a \rho^{-\frac{\varepsilon}{3}}$  – рівняння, за яким змінюється товщина пластини;

$\varepsilon$  – довільне додатне число;

$w$  – прогин пластини;

$n$  – число моментів  $M$ .

Маємо розрахункові формули:

$$w = B_0 r^{m_0 2} + \sum_{k=1,2}^{\infty} (A_{kn} r^{m_1} + C_{kn} r^{m_1}) \cos kn\theta; \quad (1.20)$$

$$M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{dr^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]; \quad (1.21)$$

$$M_\theta = -D \left( \nu \frac{\partial^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \quad (1.22)$$

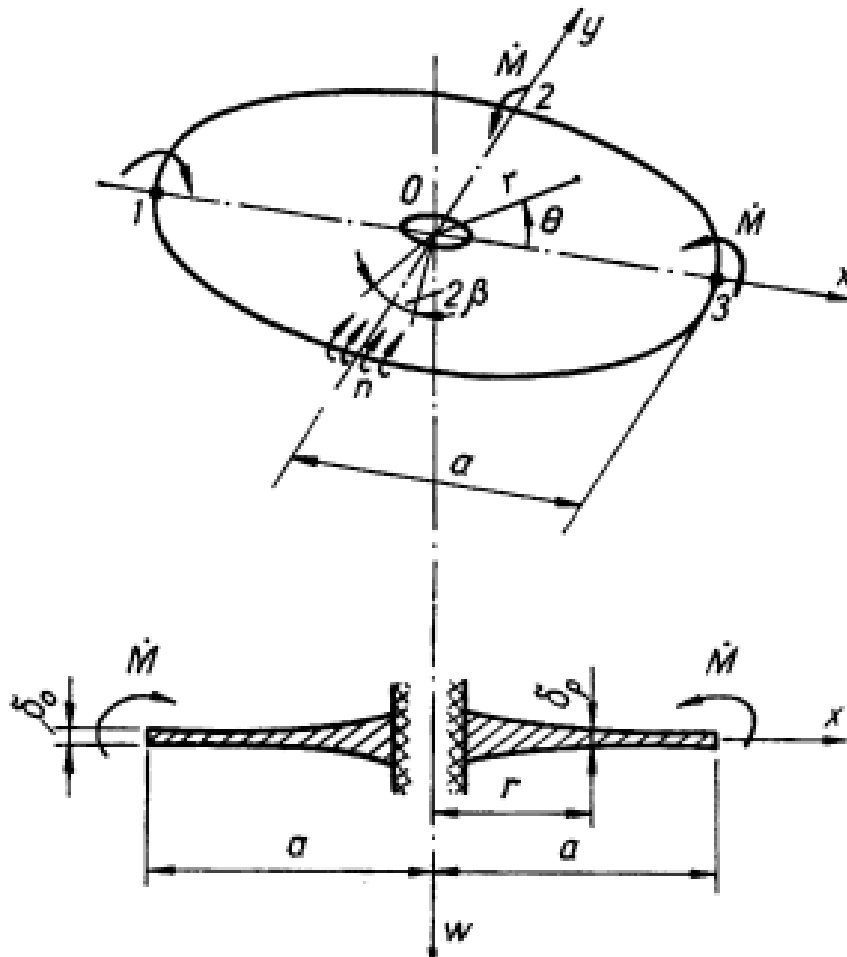


Рисунок 1.3 — кругла пластина гіперболічного профілю закріплена в центрі під дією контурного навантаження.



де

$$B_0 = -\frac{n\dot{M}a^{1+\varepsilon-m_{02}}}{2\pi H_1 m_{02}(m_{02}-1+\nu)}; \quad (1.23)$$

$$H_1 = \frac{E\delta_a^3 a^3}{12(1-\nu^2)}; \quad (1.24)$$

$$A_{kn} = \frac{n\dot{M}(m_3^3-l_1 m_3^2-l_2 m_3+l_3)}{\pi H_1 a^{m_1-1-\varepsilon}} \times \frac{1}{[(m_3^2-p_1 m_3-p_2)(m_1^3-l_1 m_1^2-l_2 m_1+l_3)-(m_1^2-p_1 m_1-p_2)]} \times \frac{1}{(m_3^3-l_1 m_3^2-l_2 m_3+l_3)}; \quad (1.25)$$

$$C_{kn} = \frac{n\dot{M}(m_1^3-l_1 m_1^2-l_2 m_1+l_3)}{\pi H_1 a^{m_3-1-\varepsilon}} \times \frac{1}{[(m_1^2-p_1 m_1-p_2)(m_3^3-l_1 m_3^2-l_2 m_3+l_3)-(m_3^2-p_1 m_3-p_2)]} \times \frac{1}{(m_1^3-l_1 m_1^2-l_2 m_1+l_3)}; \quad (1.26)$$

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \alpha + \sqrt{\gamma + k^2 n^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\eta + ck^2 n^2}}; \\ m_2 &= \alpha + \sqrt{\gamma + k^2 n^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\eta + ck^2 n^2}}; \\ m_3 &= \alpha + \sqrt{\gamma + k^2 n^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\eta + ck^2 n^2}}; \\ \alpha &= 1 + \frac{\varepsilon}{2}; \\ \gamma &= \frac{1}{4}\varepsilon^2 + \frac{1+\nu}{2}\varepsilon + 1; \\ \eta &= (1-\nu)^2 \varepsilon^2; \\ c &= 4(2+\varepsilon)(2+\nu\varepsilon); \\ l_1 &= 2 + \varepsilon; \\ l_2 &= (2-\nu)(kn)^2 - (1-\nu)\varepsilon; \\ l_2 &= [3 + \nu(\varepsilon - 1)](kn)^2; \\ p_1 &= (1-\nu); \\ p_2 &= \nu(kn)^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Як зазначено у [4] наведене вище розв'язання може бути використано для визначення згинальних напружень, викликаних в обертовому диску інерційними силами маси лопастей, прикріплених до зовнішнього контуру так, що центри тяжіння їх не лежать в серединній площині диска. Однак в

цьому випадку слід врахувати те обставини, що лопасті мають кінцеву ширину, і радіальні моменти не зосереджені, а розподілені уздовж невеликих дуг контуру, що відповідають центральним кутам  $2\beta$  (рис. 1.3). У цьому випадку формула (1.20) для прогинів залишається без змін. Вирази коефіцієнтів  $A_{kn}$  і  $C_{kn}$  наводимо нижче:

$$\left. \begin{aligned} A_{kn} &= \frac{\dot{M}(m_3^3 - l_1 m_3^2 - l_2 m_3 + l_3) \sin kn\beta}{\pi H_1 \beta n^{m_1 - 1 - \varepsilon k}} \frac{1}{T}; \\ C_{kn} &= \frac{\dot{M}(m_1^3 - l_1 m_1^2 - l_2 m_1 + l_3) \sin kn\beta}{\pi H_1 a^{m^3 - 1 - \varepsilon k}} \frac{1}{T}, \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

де

$$\begin{aligned} T &= (m_3^2 - p_1 m_3 - p_2)(m_1^3 - l_1 m_1^2 - l_2 m_1 + l_3) - \\ &- (m_1^2 - p_1 m_1 - p_2)(m_3^3 - l_1 m_3^2 - l_2 m_3 + l_3). \end{aligned} \quad (1.29)$$

**Приклад 1.2:** Обчислити прогини пластин гіперболічного профілю, обпертих в центрі, при дії на контур 4,8 та 16 радіальних моментів, що визвано інерційними силами лопастей шириною, що відповідає центральному куту  $2\beta = 4^\circ$ . Розглянути два профілі  $\delta_p = \delta_a \rho^{-\frac{5}{3}}$  при  $\varepsilon = 2$  та  $\delta_p = \delta_a \rho^{-\frac{5}{3}}$  при  $\varepsilon = 5$ .

**Розв'язання.** Обчислені значення відносних прогинів

$$\bar{w} = -w \frac{\pi H_1}{M a^3} 10^4,$$

де

$$H_1 = \frac{E \delta_a^3 a^2}{12(1 - \nu)^2},$$

наведені в таблиці 3 для  $n = 4$ ,  $\varepsilon = 2$  та  $\beta = 2^\circ$ . В нижньому рядку таблиці 3 дано величини відносних прогинів

$$\overline{w_{\text{сим}}} = -w_{\text{сим}} \frac{\pi H_1}{Ma^3} 10^4,$$

які знайдені у випадку, коли навантаження розподілено рівномірно в окружному напрямку.

Таблиця 1.5

$\theta$ , град	$\rho = \frac{r}{a}$				$\theta$ , град	$\rho = \frac{r}{a}$			
	0,25	0,5	0,75	1,0		0,25	0,5	0,75	1
Значення $\bar{w}$					25	13,56	159,2	603,5	1524
0	15,02	197,1	920,6	3990	30	13,15	148,6	524,7	1248
5	14,94	195,1	903,7	3474	35	12,82	140,1	463,5	1051
10	14,73	189,5	854,7	2866	40	12,60	134,6	424,9	930
15	14,40	180,9	720,3	2323	45	12,53	132,5	411,8	899
20	13,99	170,4	692,2	1893	Значення $\bar{w}_{\text{сим}}$				
22,5	13,77	164,6	647,2	1694	—	13,77	164,8	657,1	1973

Як бачимо із таблиці, найбільший прогин  $w_{\text{max}}$  має місце на кромці диску  $\rho = 1$ ; він перевищує на 120% прогин при відповідному симетричному навантаженню  $w_{\text{сим}}$ . Відношення найбільшого прогину до найменшого  $\left(\frac{w_{\text{max}}}{w_{\text{min}}}\right)$  на кромці складає 4,4. Для точок, віддалених від ободу, степінь нерівномірності прогинів швидко зменшується. Так, при

$$\rho = 0,75: w_{\text{max}} > w_{\text{сим}} \text{ на } 40\%, \frac{w_{\text{max}}}{w_{\text{min}}} = 2,25;$$

$$\rho = 0,5: w_{max} > w_{сим} \text{ на } 19,6\%, \frac{w_{max}}{w_{min}} = 1,5;$$

$$\rho = 0,25: w_{max} > w_{сим} \text{ на } 9\%, \frac{w_{max}}{w_{min}} = 1,2;$$

Зі збільшенням числа лопаток нерівномірність у величинах прогинів та зусиль швидко зменшується.

Таблиця 1.6

$\theta$ , град	$\rho = \frac{r}{a}$			
	0,25	0,5	0,75	1,0
Значення $\bar{w}$				
0	13,77	164,8	666,2	2445
5	13,77	164,8	662,4	2202
10	13,77	164,8	659,1	1959
15	13,77	164,8	652,5	1785
20	13,77	164,8	648,0	1708
22,5	13,77	164,8	647,2	1694
Значення $\bar{w}_{сим}$				
-	13,77	164,8	657,1	1973

На колах  $\rho = 0,25$  та  $\rho = 0,5$  прогини диска майже не відрізняються від відповідних величин при симетричному навантаженні. В точках  $\rho = 0,75$  прогин  $w_{max} > w_{сим}$  всього на 1,4%, а на кромці при  $\rho = 1$   $w_{max} > w_{сим}$  на 24%.

У випадку 16 лопаток найбільший прогин на кромці диска перевищує прогин при симетричному навантаженні всього на 4,9%.

Далі розраховано диск, товщина якого змінюється більш різко:

$$\delta_p = \delta_a \rho^{-\frac{5}{3}}.$$

Величини прогинів серединної площини диска при  $n = 4, \varepsilon = 5$  та  $\beta = 2^\circ$  наведені в таблиці 1.7.

Як і слід було очікувати, нерівномірність у величині прогинів в цьому випадку має більш різкий характер. Так, на кромці при  $\rho = 1$   $w_{max} > w_{сим}$  на 247%, при  $\rho = 0,75$  на 104% та в точках  $\rho = 0,5$  – більше на 91%.

Однак і тут зі збільшення лопаток нерівномірність прогинів та зусиль швидко зменшується. Вже при 8 лопатках максимальні прогини диска в зазначених точках перевищують величини прогинів при симетричному навантаженні відповідно на 78,8% та 1%. У випадку 16 лопаток максимальний прогин на ободі перевищує прогин при симетричному навантаженні лише на 19%.

Таблиця 1.7

$\theta$ , град	$\rho = \frac{r}{a}$			
	0,25	0,5	0,75	1,0
Значення $\bar{w}$				
0	0,151	12,30	177,4	1919
5	0,147	11,93	170,8	1402
10	0,133	10,88	152,1	990
15	0,113	9,29	124,9	678
20	0,088	7,37	94,5	445
22,5	0,075	6,45	86,88	336
Значення $\bar{w}_{сим}$				
–	0,075	6,45	86,88	550

## 2 РОЗАХУНОК СТАТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ СКЛАДЕНИХ КРУГЛИХ ПЛАСТИН

У даному розділі здійснюється розрахунок статичного деформування складених круглих пластин, а також наведено характеристику отриманих значень у вигляді графіків.

### 2.1 Розрахунок напружено-деформованого стану круглих пластин при крайових умовах жорсткого затиснення

Основне рівняння НДС круглої пластини (1.7) [4]:

$$D\nabla^2\nabla^2w + \frac{\partial D}{\partial r} \left( 2 \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{2+v}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - q = 0$$

Для розрахунків нам знадобляться наступні формули:

$$W_2 \Big|_{r=R_2} = 0: C_3 + C_4 \ln(R_2) + C_5 R_2^2 + C_6 R_2^2 \ln(R_2) + \frac{R_2^4}{64} F_2 = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{dW_2}{dr} \Big|_{r=R_2} = 0: C_4 \frac{1}{R_2} + 2C_5 R_2 + C_6 (2R_2 \ln(R_2) + R_2) + \frac{R_2^3}{16} F_2 = 0, \quad (2.2)$$

$$W_1 \Big|_{r=R_1} = W_2 \Big|_{r=R_1} :$$

$$C_1 + C_2 R_1^2 + \frac{R_1^4}{64} F_1 = C_3 + C_4 \ln(R_1) + C_5 R_1^2 + C_6 R_1^2 \ln(R_1) + \frac{R_1^4}{64} F_2, \quad (2.3)$$

$$\frac{dW_1}{dr} \Big|_{r=R_1} = \frac{dW_2}{dr} \Big|_{r=R_1} :$$

$$2C_2 R_1 + \frac{R_1^3}{16} F_1 = C_4 \frac{1}{R_1} + 2C_5 R_1 + C_6 (2R_1 \ln(R_1) + R_1) + \frac{R_1^3}{16} F_2, \quad (2.4)$$

$$M_1 \Big|_{r=R_1} = M_2 \Big|_{r=R_1} : \\ \frac{Eh_1^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ 2C_2(1+\nu) + \frac{R_1^2}{16}(3+\nu)F_1 \right\} = \frac{Eh_2^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \left\{ \frac{\nu-1}{R_1^2} C_4 + \right. \\ \left. + 2C_5(1+\nu) + C_6(3+2\ln R_1 + 2\nu \ln R_1 + \nu) + \frac{R_1^2}{16}(3+\nu)F_2 \right\}, \quad (2.5)$$

$$Q_1 \Big|_{r=R_1} = Q_2 \Big|_{r=R_1} : \\ \frac{Eh_1^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{R_1}{2} F_1 \right\} = \frac{Eh_2^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{4}{R_1} C_6 + \frac{R_1}{2} F_2 \right\}. \quad (2.6)$$

Та оберемо наступні значення вхідних параметрів:

$$R_1 = 0,1 \text{ м}; R_2 = 0,2 \text{ м}; h_1 = 0,01 \text{ м}; h_2 = 0,02 \text{ м}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \\ \nu = 0,25; q_1 = q_2 = 0,1 \text{ МПа} \left( F_i = \frac{q_i}{D_i}, D_i = \frac{Eh_i^3}{12(1-\nu^2)}, i = 1,2 \right).$$

Тоді знайдемо  $D_1, D_2$  і  $F_1, F_2$ :

$$D_1 = \frac{Eh_1^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{200 \cdot 1^3}{12(1-0,25^2)} = \frac{200}{12(1-0,0625)} = \frac{200}{12 \cdot 0,9375} = \frac{200}{11,25} = \\ = 17,7778;$$

$$D_2 = \frac{Eh_2^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{200 \cdot 2^3}{12(1-0,0625)} = \frac{200 \cdot 8}{11,25} = \frac{1600}{11,25} = 142,2222;$$

$$F_1 = \frac{q_1}{D_1} = \frac{1}{17,7778} = 0,0562;$$

$$F_2 = \frac{q_2}{D_2} = \frac{1}{142,2222} = 0,007.$$

Для рівняння (2.1) запишемо часткові розрахунки:

$$\ln(R_2) = \ln(20) = 2,9957;$$

$$R_2^2 \ln(R_2) = 400 \cdot 2,9957 = 1198,2929;$$

$$\frac{R_2^4}{64} F_2 = \frac{160000}{64} \cdot 0,007 = 2500 \cdot 0,007 = 17,5,$$

підставимо отримані значення у (2.2), отримаємо:

$$C_3 + 2,9957C_4 + 400C_5 + 1198,2929C_6 + 17,5 = 0.$$

Для рівняння (2.2) запишемо часткові розрахунки:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{20} = 0,05; 2R_2 = 40; 2R_2 \ln(R_2) = 40 \cdot 2,9957 = 119,829;$$

$$\frac{R_2^3}{16} F_2 = \frac{8000}{16} \cdot 0,007 = 3,5.$$

підставимо отримані значення у (2.2), отримаємо:

$$0,05C_4 + 40C_5 + C_6(119,829 + 20) + 3,5 = 0.$$

Для рівняння (2.3) запишемо часткові розрахунки:

$$R_1^2 = 100; \frac{R_1^4}{64} F_1 = \frac{10000}{64} \cdot 0,0562 = 156,25 \cdot 0,0562 = 8,75;$$

$$\ln(R_1) = \ln(10) = 2,30258; R_1^2 \ln(R_1) = 100 \cdot 2,30258 = 230,258;$$

$$\frac{R_1^4}{64} F_2 = \frac{10000}{64} \cdot 0,007 = 156,25 \cdot 0,007 = 1,0937.$$

підставимо отримані значення у (2.3), отримаємо:

$$C_1 + 100C_2 + 8,75 = C_3 + 2,302C_4 + 100C_5 + 230,258C_6 + 1,0937.$$

Для рівняння (2.4) запишемо часткові розрахунки:



$$\frac{R_1^3}{16} F_1 = \frac{1000}{16} \cdot 0,0562 = 3,5125;$$

$$2R_1 \ln(R_1) = 20 \cdot 2,30258 = 46,0516;$$

$$\frac{R_1^3}{16} F_2 = \frac{1000}{16} \cdot 0,007 = 0,4375.$$

підставимо отримані значення у (2.4), отримаємо:

$$20C_2 + 3,5125 = 0,1C_4 + 20C_5 + C_6(46,0516 + 10) + 0,4375.$$

Для рівняння (2.5) запишемо часткові розрахунки:

$$8 \cdot \frac{Eh_1^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{Eh_2^3}{12(1-\nu^2)}; 2(1+\nu) = 2,5;$$

$$\frac{R_1^2}{16} (3+\nu)F_1 = \frac{100}{16} \cdot 3,25 \cdot 0,0562 = 1,1375;$$

$$\frac{\nu-1}{R_1^2} = \frac{0,25-1}{100} = -0,0075;$$

$$3 + 2 \ln R_1 + 2\nu \ln R_1 + \nu = 3 + 2 \cdot 2,30258 + 0,5 \cdot 2,30258 + 0,25 = 9,0064;$$

$$\frac{R_1^2}{16} (3+\nu)F_2 = \frac{100}{16} \cdot 3,25 \cdot 0,007 = 0,14218.$$

підставимо отримані значення у (2.5), отримаємо:

$$2,5C_2 + 1,1375 = 8 \cdot (-0,0075C_4 + 2,5C_5 + 9,006C_6 + 0,142).$$

Для рівняння (2.5) запишемо часткові розрахунки:

$$8 \cdot \frac{Eh_1^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{Eh_2^3}{12(1-\nu^2)}; \frac{R_1}{2} F_1 = 5 \cdot 0,0562 = 0,281;$$

$$\frac{4}{R_1} = 0,4; \frac{R_1}{2} F_2 = 5 \cdot 0,007 = 0,05,$$

підставимо отримані значення у (2.5), отримаємо:

$$0,28 = 8 \cdot (0,4C_6 + 0,035) \quad | \cdot \frac{1}{8},$$

$$0,035 = 0,4C_6 + 0,035;$$

$$0,4C_6 = 0 \Rightarrow C_6 = 0.$$

Запишемо отримані рівняння у систему:

$$\begin{cases} C_3 + 2,9957C_4 + 400C_5 + 1198,2929C_6 + 17,5 = 0; \\ 0,05C_4 + 40C_5 + 139,829C_6 + 3,5 = 0; \\ C_1 + 100C_2 + 8,75 = C_3 + 2,302C_4 + 100C_5 + 230,258C_6 + 1,0937; \\ 20C_2 + 3,5125 = 0,1C_4 + 20C_5 + 56,0516C_6 + 0,4375; \\ 2,5C_2 + 1,1375 = 8 \cdot (-0,0075C_4 + 2,5C_5 + 9,006C_6 + 0,142); \\ C_6 = 0. \end{cases}$$

Перетворимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, отримаємо:

$$\begin{cases} C_3 + 2,9957C_4 + 400C_5 + 1198,2929C_6 + 17,5 = 0; \\ 0,05C_4 + 40C_5 + 139,829C_6 + 3,5 = 0; \\ C_1 + 100C_2 - C_3 - 2,302C_4 - 100C_5 - 230,258C_6 + 7,6563 = 0; \\ 20C_2 - 0,1C_4 - 20C_5 - 56,0516C_6 + 3,075 = 0; \\ 2,5C_2 + 0,06C_4 - 20C_5 - 72,048C_6 + 0,0015 = 0; \\ C_6 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, застосовуючи комп'ютерну програму Maple 18, (текст програми наведено у Додатку А):

$$\begin{cases} C_1 = 33,659788; \\ C_2 = -0,28688; \\ C_3 = 47,868206; \\ C_4 = -12,16821; \\ C_5 = -0,07228; \\ C_6 = 0. \end{cases}$$

Таблиця результатів (табл. 2.1):

Таблиця 2.1 – Залежність  $W(r)$ ,  $M(r)$ ,  $Q(r)$  від  $r$

	$r \cdot 10^2, м$	$W(r) \cdot 10^6, м$	$M(r), Н \cdot м$	$Q(r), Н$
$W_1(r)$	0	33,6597	12,7502	0
	2	32,5263	11,9384	-1
	4	29,2944	9,50314	-2
	6	24,2401	5,44425	-3
	8	18,8962	-0,23818	-4
$W_1(r) = W_2(r)$	10	13,7529	-7,49863	-5
$W_2(r)$	12	9,4896	-12,43047	-6
	14	5,7885	-20,55469	-7
	16	2,7925	-31,13596	-8
	18	0,7574	43,82297	-9
	20	0	-58,43072	-10

Залежності  $W(r)$ ,  $M(r)$ ,  $Q(r)$  від  $r$  представлені на мал. 2.1 — 2.3:

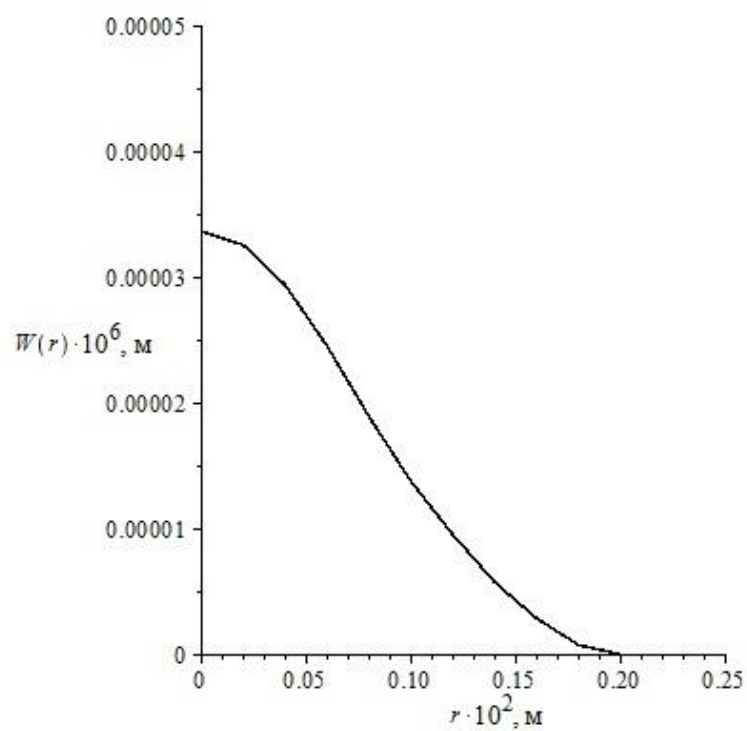


Рисунок 2.1 – Графік залежності  $W(r)$  від  $r$

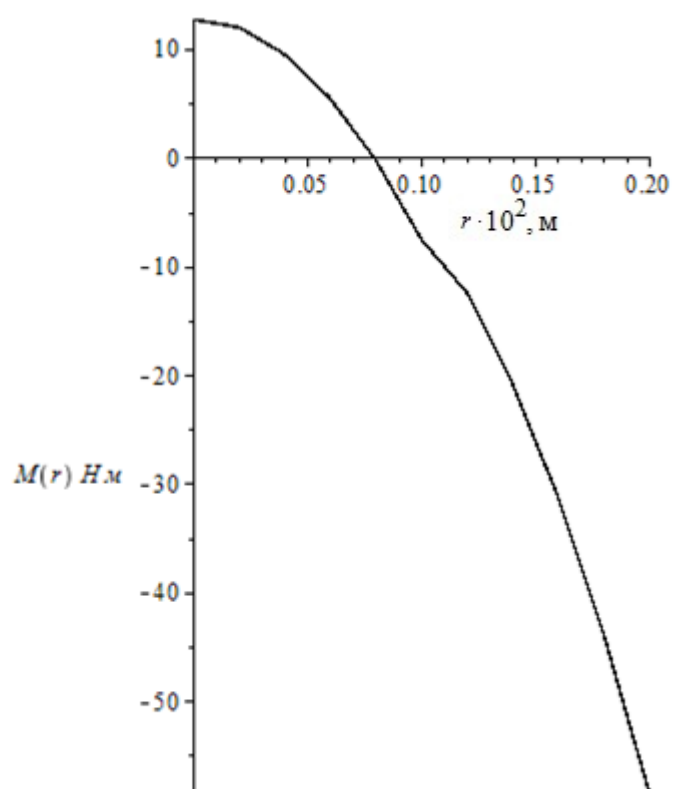


Рисунок 2.2 – Графік залежності  $M(r)$  від  $r$

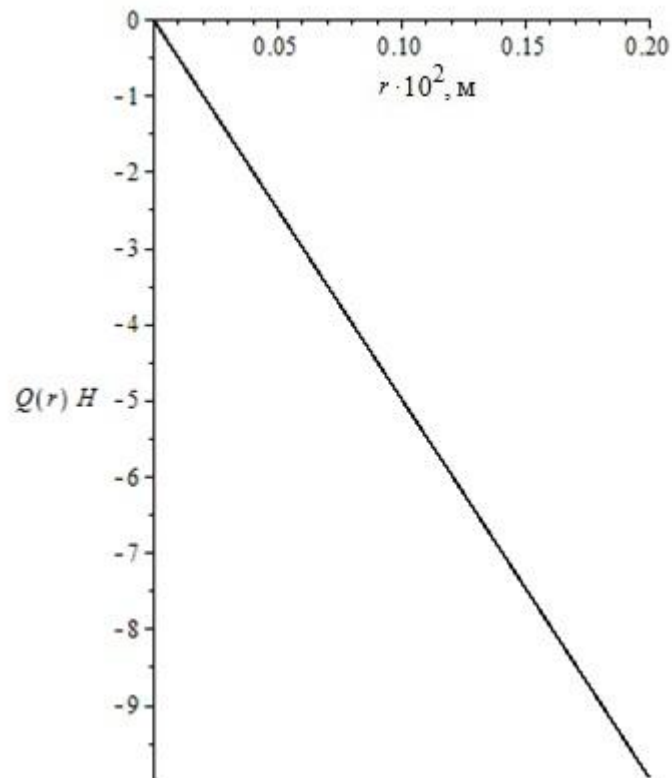


Рисунок 2.3 – Графік залежності  $Q(r)$  від  $r$

З графіка 2.1 можна спостерігати, що при збільшенні довжини  $r$  прогин круглих пластин  $W(r)$  спадає за косинусоїдальним законом. На графіку 2.2 бачимо, що згинальні моменти  $M(r)$  також спадають із збільшенням довжини  $r$ , за параболічним законом. Та поперечні сили  $Q(r)$  спадають за лінійним законом при збільшенні довжини  $r$  на графіку 2.3.

## 2.2 Розрахунок напружено-деформованого стану круглих пластин при крайових умовах шарнірного спирання

Розглянемо випадок, коли межі складеної круглої пластини шарнірно оперті. Загальні розв'язки неоднорідного рівняння (1.7) можуть бути записані у вигляді:

$$W_1(r) = C_1 + C_2 r^2 + \frac{r^4}{64} F_1,$$

$$W_2(r) = C_3 + C_4 \ln(r) + C_5 r^2 + C_6 r^2 \ln(r) + \frac{r^4}{64} F_2,$$

де  $W_i = W_i(r)$  – нормальний прогин  $i$ -ої секції ( $i = 1, 2$ ).

У цьому випадку крайові умови мають наступний вигляд:

$$W_2 \Big|_{r=R_2} = 0, \quad \frac{d^2 W_2}{dr^2} \Big|_{r=R_2} = 0 \quad (2.7)$$

Тоді

$$W_2 \Big|_{r=R_2} = 0: C_3 + C_4 \ln(R_2) + C_5 R_2^2 + C_6 R_2^2 \ln(R_2) + \frac{R_2^4}{64} F_2 = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{d^2 W_2}{dr^2} \Big|_{r=R_2} = 0: -C_4 \frac{1}{R_2^2} + 2C_5 + C_6(2 \ln R_2 + 3) + \frac{3R_2^2}{16} F_2 = 0, \quad (2.9)$$

$$W_1 \Big|_{r=R_1} = W_2 \Big|_{r=R_1} :$$

$$C_1 + C_2 R_1^2 + \frac{R_1^4}{64} F_1 = C_3 + C_4 \ln(R_1) + C_5 R_1^2 + C_6 R_1^2 \ln(R_1) + \frac{R_1^4}{64} F_2, \quad (2.10)$$

$$\frac{dW_1}{dr} \Big|_{r=R_1} = \frac{dW_2}{dr} \Big|_{r=R_1} :$$

$$2C_2 R_1 + \frac{R_1^3}{16} F_1 = C_4 \frac{1}{R_1} + 2C_5 R_1 + C_6(2R_1 \ln(R_1) + R_1) + \frac{R_1^3}{16} F_2, \quad (2.11)$$

$$M_1 \Big|_{r=R_1} = M_2 \Big|_{r=R_1} :$$

$$\frac{Eh_1^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ 2C_2(1+\nu) + \frac{R_1^2}{16}(3+\nu)F_1 \right\} = \frac{Eh_2^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \left\{ \frac{\nu-1}{R_1^2} C_4 + \right. \\ \left. + 2C_5(1+\nu) + C_6(3+2 \ln R_1 + 2\nu \ln R_1 + \nu) + \frac{R_1^2}{16}(3+\nu)F_2 \right\}, \quad (2.12)$$

$$Q_1 \Big|_{r=R_1} = Q_2 \Big|_{r=R_1} :$$

$$\frac{Eh_1^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{R_1}{2} F_1 \right\} = \frac{Eh_2^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{4}{R_1} C_6 + \frac{R_1}{2} F_2 \right\}. \quad (2.13)$$

У цьому випадку буде змінюватися лише рівняння (2.9), запишемо для нього часткові розрахунки:

$$R_2^2 = 20^2 = 400; \frac{1}{R_2^2} = \frac{1}{400} = 0,0025; \ln(R_2) = 2,9957;$$

$$2\ln(R_2) + 3 = 8,9914; \frac{3R_2^2}{16} F_2 = \frac{1200}{16} \cdot 0,007 = 0,525;$$

Запишемо нову систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_3 + 2,9957C_4 + 400C_5 + 1198,2929C_6 + 17,5 = 0; \\ -0,0025C_4 + 2C_5 + 8,9914C_6 + 0,525 = 0; \\ C_1 + 100C_2 - C_3 - 2,302C_4 - 100C_5 - 230,258C_6 + 7,6563 = 0; \\ 20C_2 - 0,1C_4 - 20C_5 - 56,0516C_6 + 3,075 = 0; \\ 2,5C_2 + 0,06C_4 - 20C_5 - 72,048C_6 + 0,0015 = 0; \\ C_6 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, застосовуючи комп'ютерну програму Maple 18, текст програми наведено у додатках:

$$\begin{cases} C_1 = 236,0969; \\ C_2 = -0,9361; \\ C_3 = 378,26455; \\ C_4 = -83,1777; \\ C_5 = -0,36472; \\ C_6 = 0. \end{cases}$$

Результати чисельного розрахунку представлені у таблиці 2.2.

Таблиця 2.2 – Залежність  $W(r)$ ,  $M(r)$ ,  $Q(r)$  від  $r$

	$r \cdot 10^2, м$	$W(r) \cdot 10^6, м$	$M(r), Н \cdot м$	$Q(r), Н$
$W_1(r)$	0	236,0969020	41,60493	0
	2	232,3665078	40,79316	-1
	4	221,3439244	38,35782	-2

	6	203,5349522	34,29893	-3
	8	179,7825911	28,61649	-4
$W_1(r) = W_2(r)$	10	151,2670411	21,31049	-5
$W_2(r)$	12	121,0715447	39,56806	-6
	14	91,1268281	45,39886	-7
	16	60,9979003	43,87938	-8
	18	30,594608	37,397604	-9
	20	0	27,231604	-10

Залежності  $W(r)$ ,  $M(r)$ ,  $Q(r)$  від  $r$  зображені на рис. 2.4-2.6:

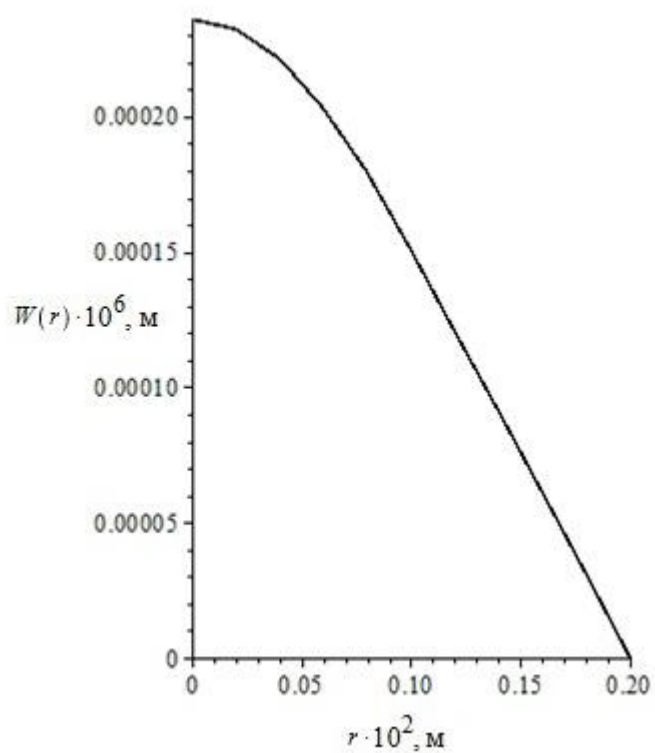


Рисунок 2.4 – Графік залежності  $W(r)$  від  $r$



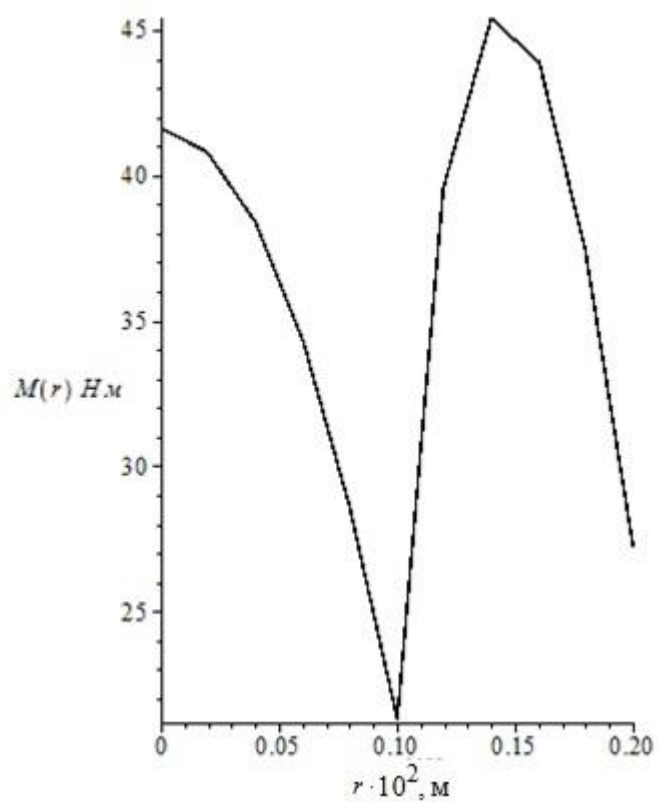


Рисунок 2.5 – Графік залежності  $M(r)$  від  $r$

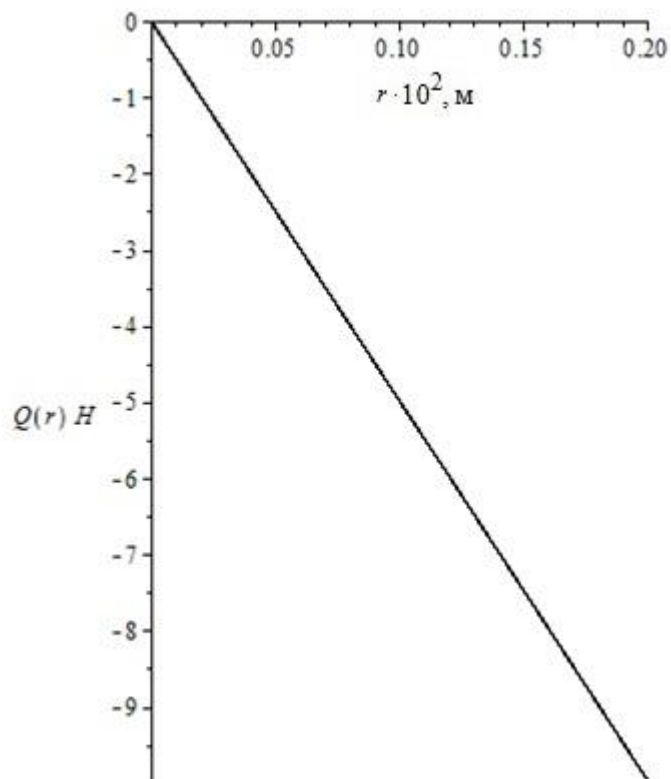


Рисунок 2.6 – Графік залежності  $Q(r)$  від  $r$

З графіка 2.4 можна спостерігати, що при збільшенні довжини  $r$  прогин круглих пластин  $W(r)$  спадає параболічним законом. На графіку 2.5 бачимо, що згинальні моменти  $M(r)$  поводять себе досить не однозначно, спочатку спадають, до  $r = 0,1 \cdot 10^2$  м, потім зростають до  $r = 0,15 \cdot 10^2$ , та знову спадають також спадають із збільшенням довжини  $r$ , за параболічним законом. Та поперечні сили  $Q(r)$  спадають за лінійним законом при збільшенні довжини  $r$  на графіку 2.6.

### 2.3 Застосування асимптотичного методу до розв'язку напружено-деформованого стану круглих пластин змінної жорсткості

Застосуємо асимптотичний метод до розв'язування напружено-деформованого стану круглих пластин змінної жорсткості:

В якості основного рівняння згину пластини змінної товщини візьмемо рівняння:

$$D\nabla^4 w + b(r)w = q, \quad (2.14)$$

За умови малої змінної товщини можна взяти рівняння:

$$Dw^{IV}(r) + b(r)w(r) = q. \quad (2.14)^*$$

Вводячи безрозмірні параметри, отримуємо:

$$w = u \cdot h_0, r = x \cdot R, D = \frac{Eh^3(r)}{12(1-\nu^2)}, h(r) = h_0 f(r) \quad (2.15)$$

Поділимо обидві частини рівняння на  $D = \frac{Eh^3(r)}{12(1-\nu^2)}$ , отримаємо:

$$w^{IV}(r) + \frac{b(r) \cdot 12(1-\nu^2)}{Eh^3(r)} w = \frac{q \cdot 12(1-\nu^2)}{Eh^3(r)}. \quad (2.16)$$

Позначимо

$$\frac{d^4 w}{dr^4} \rightarrow \frac{h_0 d^4 u}{R^4 d^4 x'} \quad (2.17)$$

та перепишемо рівняння (2.16) у вигляді, враховуючи рівняння (2.15):

$$\frac{h_0}{R^4} \frac{d^4 u}{d^4 x} + \frac{b(x) \cdot 12(1-\nu^2) h_0}{E h_0^3 \cdot (f(x))^3} \cdot u = \frac{q \cdot 12(1-\nu^2)}{E h_0^3 \cdot (f(x))^3}. \quad (2.18)$$

Помножимо обидві частини рівняння (2.18) на  $\frac{R^4}{h_0}$ , отримаємо:

$$\frac{d^4 u}{d^4 x} + b(x) \cdot \frac{12(1-\nu^2)}{E} \cdot \frac{R^4 h_0}{h_0 \cdot h_0^3 \cdot (f(x))^3} \cdot u = q \cdot \frac{R^4}{h_0} \cdot \frac{12(1-\nu^2)}{E h_0^3} \cdot \frac{1}{(f(x))^3}. \quad (2.19)$$

$$\frac{d^4 u}{d^4 x} + \frac{R^4}{h_0^4} \cdot b(x) \cdot \frac{h_0 \cdot 12(1-\nu^2)}{E} \cdot \frac{1}{(f(x))^3} \cdot u = q \cdot \frac{R^4}{h_0^4} \cdot \frac{12(1-\nu^2)}{E} \cdot \frac{1}{(f(x))^3}. \quad (2.20)$$

Помножимо обидві частини рівняння (2.20) на  $\frac{h_0^4}{R^4}$ :

$$\frac{h_0^4}{R^4} \frac{d^4 u}{d^4 x} + \bar{b}(x) \cdot \frac{1}{(f(x))^3} \cdot u = \bar{q} \cdot \frac{1}{(f(x))^3}, \quad (2.21)$$

де

$$\bar{b}(x) = b(x) \cdot \frac{h_0 \cdot 12(1-\nu^2)}{E}, \quad (2.22)$$

$$\bar{q} = q \cdot \frac{12(1-\nu^2)}{E}. \quad (2.23)$$

Позначимо  $\frac{h_0^4}{R^4} = \varepsilon^4$ , та помножимо рівняння (2.21) на  $\frac{R^4}{h_0^4}$ , отримаємо:

$$\varepsilon^4 u^{IV}(x) + \tilde{b}(x) \cdot \frac{1}{(f(x))^3} \cdot u = \tilde{q} \cdot \frac{1}{(f(x))^3}, \quad (2.24)$$

де

$$\tilde{b}(x) = \bar{b}(x) \cdot \frac{R^4}{h_0^4} = \bar{b}(x)\varepsilon^4, \quad (2.25)$$

$$\tilde{q} = \bar{q} \cdot \frac{R^4}{h_0^4} = \bar{q}\varepsilon^4. \quad (2.26)$$

Зауважимо, що параметр  $\varepsilon \ll 1$ .

Розв'язок рівняння (2.24) будемо шукати у вигляді:

$$u(x) = u_0(x) + \bar{u}(x), \quad (2.27)$$

де  $u_0(x)$  – загальний розв'язок однорідного рівняння,  $u(x)$  – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Спочатку розв'яжемо однорідне рівняння, яке отримаємо прирівнявши праву частину рівняння (2.24) до нуля:

$$\varepsilon^4 u_0^{IV}(x) + \tilde{b}(x) \cdot \frac{1}{(f(x))^3} \cdot u_0 = 0. \quad (2.28)$$

Зробимо заміну:

$$\varepsilon^4 u_0^{IV}(x) + Q^4(x) \cdot u_0 = 0, \quad (2.29)$$

де

$$Q^4(x) = \tilde{b}(x) \cdot \frac{1}{(f(x))^3}. \quad (2.30)$$

Розв'язок однорідного рівняння (2.28) будується за методом фазних інтегралів:

$$u_0(x) = \exp \int \varphi(x) dx \quad (2.31)$$

е функція  $\varphi(x)$  є асимптотичним розв'язанням за обратним степенем параметра  $\varepsilon$ :

$$\varphi(x) = \varepsilon^{-1}\varphi_0(x) + \varepsilon^0\varphi_1(x) + \dots + \varepsilon^{i-1}\varphi_i(x),$$

$$i = 0, \dots, n \quad (2.32)$$

Підінтегральна функція представляється у вигляді розкладу за оберненими степенями малого параметру.

$$u'_0 = \varphi(x) \exp \int \varphi(x) dx,$$

$$u''_0 = (\varphi' + \varphi^2) \exp \int \varphi(x) dx,$$

$$u'''_0 = (\varphi'' + 2\varphi\varphi') \exp \int \varphi(x) dx + (\varphi' + \varphi^2) \exp \int \varphi(x) dx,$$

$$u^{IV}_0 = (\varphi''' + 2(\varphi')^2 + 2\varphi\varphi'') \exp \int \varphi(x) dx + (\varphi\varphi'' + 2\varphi^2\varphi') \exp \int \varphi(x) dx +$$

$$+ ((\varphi')^2 + \varphi\varphi'' + 3\varphi^2\varphi') \exp \int \varphi(x) dx +$$

$$+ (\varphi^2\varphi' + \varphi^4) \exp \int \varphi(x) dx. \quad (2.33)$$

Підставимо в рівняння (2.29) та обмежимося в розкладів першим членом рядом

$$\varepsilon^4[\varepsilon^{-4}\varphi_0^4(x)] + Q^4(x) = 0, \quad (2.34)$$

$$\varepsilon^0\varphi_0^4(x) + Q^4(x) = 0, \quad (2.35)$$

$$\varphi_0^4(x) + Q^4(x) = 0. \quad (2.36)$$

Знаходимо нетривіальні розв'язки рівняння (2.36):

$$\varphi_{0,1,2,3,4} = \begin{matrix} \text{sink}(x) \\ \text{cosk}(x) \\ \text{shk}(x) \\ \text{chk}(x) \end{matrix} \rightarrow k(x) = \varepsilon^{-1} \int Q(x) dx. \quad (2.37)$$

Представимо рівняння (2.36) у вигляді:

$$[\varphi_0^2 + iQ^2][\varphi_0^2 - iQ^2] = \varphi_0^4 + Q^4 = 0.$$

Тоді розв'язок однорідного рівняння буде мати вигляд:

$$u_0(x) = C_1 \text{sink}(x) + C_2 \text{cosk}(x) + C_3 \text{shk}(x) + C_4 \text{chk}(x). \quad (2.38)$$

Знайдемо розв'язок диференціального рівняння за заданим виглядом правої частини.

$$\tilde{q} \cdot \frac{1}{(f(x))^3} = \tilde{q} \cdot x, \quad (2.39)$$

З рівняння (2.39) виразимо  $f(x)$ :

$$(f(x))^3 = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = x^{-\frac{1}{3}},$$

$$\tilde{u}(x) = \tilde{q} \frac{x^5}{120}.$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння (2.24) буде мати вигляд:

$$u(x) = u_0(x) + \tilde{q} \frac{x^5}{120} \quad (2.40)$$

або

$$u(x) = C_1 \operatorname{sink}(x) + C_2 \operatorname{cosk}(x) + C_3 \operatorname{shk}(x) + C_4 \operatorname{chk}(x) + \tilde{q} \frac{x^5}{120}. \quad (2.41)$$

З рівняння (2.37) виразимо  $k(x)$ :

$$k(x) = \varepsilon^{-1} \int Q(x) dx = \varepsilon^{-1} \int [\tilde{b} \cdot x] dx = \varepsilon^{-1} \tilde{b} \frac{x^2}{2}, \quad (2.42)$$

$$k(x) = \frac{\tilde{b} x^2}{2\varepsilon}. \quad (2.43)$$

Покладемо,

$$\tilde{b} = 1, \varepsilon = 0.1, \quad (2.44)$$

$$k(x) = 5x^2. \quad (2.45)$$

Тоді рівняння (2.31) приймає наступний вигляд:

$$u(x) = C_1 \sin 5x^2 + C_2 \cos 5x^2 + C_3 \operatorname{sh} 5x^2 + C_4 \operatorname{ch} 5x^2 + \tilde{q} \frac{x^5}{120}. \quad (2.46)$$

Маємо крайові умови:

$$\left. \begin{aligned} u(0) &= 0, & u(1) &= 0 \\ u'(0) &= 0, & u'(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

Знайдемо похідну функції (2.36) та з крайових умов (2.47) запишемо рівняння для відшукування коефіцієнтів  $C_1, C_2, C_3, C_4$ :

$$\begin{aligned} u'(x) &= C_1 k' \operatorname{cosk}(x) - C_2 k' \operatorname{sink}(x) + C_3 k' \operatorname{chk}(x) + \\ &+ C_4 k' \operatorname{shk}(x) + \tilde{q} \frac{x^4}{24}, \\ C_2 + C_4 &= 0, \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$u'(0) = C_1 + C_3 = 0, \quad (2.49)$$

$$u(1) = C_1[\sin 5 - sh 5] + C_2[\cos 5 - ch 5] + \tilde{q} = 0, \quad (2.50)$$

$$u'(1) = C_1[\cos 5 - ch 5] - C_2[\sin 5 + sh 5] + \tilde{q} \frac{x^4}{1200} = 0, \quad (2.51)$$

$$\tilde{q} = 10^3, \quad (2.52)$$

$$C_1[-0.9589 - 74.2] + C_2[0.2837 - 74.21] = 0,$$

$$-75C_1 - 74C_2 = 0,$$

$$C_2 = -1.013C_1, \quad (2.53)$$

$$C_1[0.2837 - 74.21] - C_2[-1 - 74.2] + 0.83 = 0,$$

$$-74C_1 + 75C_2 + 0.83 = 0,$$

$$-74C_1 - 76C_1 + 0.83 = 0.$$

Отримали значення коефіцієнтів  $C_1, C_2, C_3, C_4$ :

$$C_2 = -0.0061$$

$$C_1 = 0.006$$

$$C_3 = -0.006$$

$$C_4 = 0.0061$$

(2.54)

Отже, розв'язком рівняння (2.24) буде функція:

$$u(x) = 0.006[\sin 5x^2 - \cos 5x^2 - sh 5x^2 + ch 5x^2]. \quad (2.55)$$



Залежність функції (2.55) у математичному пакеті Maple:

```
plot(0.006*(sin(5*x^2)-cos(5*x^2)-sinh(5*x^2)+cosh(5*x^2)), x=0..1)
```

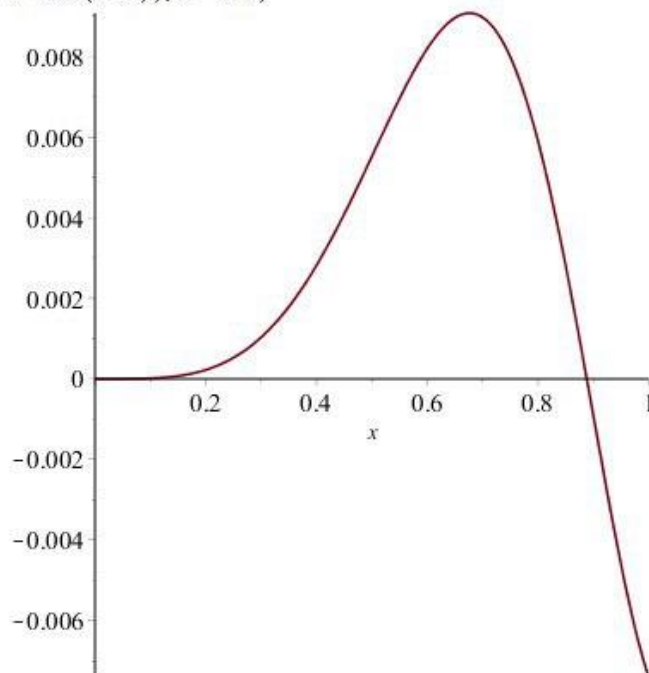


Рисунок 2.7 – Графік функції  $u(x)$

## ВИСНОВКИ

Кваліфікаційна робота присвячена дослідженню аналітико–чисельного методу розв’язання задач статички круглих пластин складної конфігурації, а саме круглих пластин змінної товщини при дії статистичних та динамічних навантажень.

У даній роботі особлива увага приділяється застосуванню асимптотичного підходу на базі методу фазних інтегралів. Наведені розв’язки задач про напружено–деформований стан круглих пластин змінної жорсткості.

Отриманні рішення можуть використовуватись для застосування прямих чисельних методів інтегрування за методом кінцевих елементів і за методом граничних елементів.

Програми розрахунків у математичному пакеті Maple 18 наведені у додатках А, В.

**ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ**

1. Арістов В. П., Терещенко М. І. Мамонов А.В. Про розрахунок плоских коливань дисків за методом Фробеуса-Латишева // *Вісник КГУ*. 1971. С. 40 – 43.
2. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. Москва : Мир, 1976. 400с.
3. Бурмистров Е. Ф. Маслов Н. М. Антисимметричный изгиб круглой ортотропной пластины переменной толщины // *Изв. АН. МТТ*. 1973. №3. С. 170 – 174.
4. Вайнберг Д. В., Вайнберг Е. Д. Расчет пластин. Киев : Будівельник, 1973. 488 с.
5. Кинасошвили Р. С. Расчет на прочность дисков турбомашин. Москва : Оборонгиз, 1954. 357 с.
6. Пономарев С. Д. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. Ленинград : Машгиз, 1952. 802 с.
7. Григоренко Я. М. Про антисимметричну деформацію в круглій пластині змінної товщини // *Доповіді АН УРСР*. 1962. № 5. С. 760 – 764.
8. Григоренко Я. М., Лацинник Н.Ф. Изгиб круглой пластинки линейно-переменной толщины под действием антисимметричной нагрузки // *Прикладная механика*. 1965. № 1. С. 67 – 76.
9. Грин Д., Кнут Д. Математические методы анализа алгоритмов. Москва : Мир, 1987. 120 с.
10. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. Москва : Мир, 1969. 424 с.
11. Карлин С. Основы теории случайных процессов. Москва : Мир, 1971. 537 с.

12. Коваленко А. Д. Введение в термоупругость. Киев : Наукова Думка, 1965. 202 с.
13. Коваленко А. Д. Круглые пластины переменной толщины. Москва : Физ-матгиз, 1959. 294 с.
14. Коваленко А. Д., Григоренко Я. М., Ильин Л. А. Теория тонких конических оболочек линейно-переменной толщины. Киев : АН УССР, 1963. 287 с.
15. Лайтхилл Дж. Математическая биогиродинамика. Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2014. 508 с.
16. Малинин Н. Н. Расчет круглых и кольцевых симметрично нагруженных пластин переменной толщины // *Сб. научных трудов МВТУ «Расчёты на прочность, жёсткость и ползучесть элементов машиностроительных конструкций»*. 1958. С. 38 – 63.
17. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. Москва : Машиностроение, 1975. 325 с.
18. Малинин Н. Н. Прочность турбомашин, 1962. 403 с.
19. Маслов Н. М. Колебания круглой конструктивно-ортотропной пластинки переменной толщины. // *Сб. научных трудов «Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформаций упругих тел»*; Изд-во Саратовского ун-та. Саратов, 1965. № 2. С. 112 – 122.
20. Маслов Н. М. Колебания круглых цилиндрически-ортотропных пластин переменной толщины // *Сб. научных трудов «Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформаций упругих тел»*; Изд-во Саратовского ун-та. Саратов, 1965. № 2. С. 101 – 118.
21. Маслов Н. М. Несимметричный изгиб круглой ортотропной пластинки переменной толщины // *Сб. научных трудов Ульяновского Политехнического нн-та «Машиностроение, электроприборостроение»*; Из-во Саратовского ун-та. Саратов, 1968. № 2 С. 74 – 88.
22. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. Москва : Наука, 1969. 380 с.

23. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. Москва : Наука, 1978. 375 с.
24. Пуанкаре А. Наука и гипотеза. Санкт-Петербург : Слово, 1906. 238 с.
25. Сцилард Р. Численные методы строительной механики, 1984. 306 с.
26. Тимошенко С. П., Войновский–Кригер С. Пластинки и оболочки. Москва : Физматгиз, 1963. 636 с.
27. Тумаркин А. С. Расчет вентиляторов на прочность. // *Труды ЦАГИ*. 1940. № 496.
28. Уманский Э. С. Изгиб пластинки переменной жёсткости, опёртой в нескольких точках внешнего контура // *Сборник трудов института строительной механики АН УССР*; Изд-во АН УССР. Киев, 1952. № 17. С. 83 – 93.
29. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). Москва : Мир, 1965. 237 с.
30. Шлезингер А. Е. Региональная сейсмостратиграфия. Москва : Научный мир, 1998. 138 с.
31. Cossu P. Sulle pilastre circolari a spessore variable secondo il raggio in regime flessionale non simmetrico // *Meccanica delle costruzioni Institute Lombardo*. 1969. № 5. Pp. 1081 – 1126.
32. Favre H. Sur un type de plaque circulaire encastree d'epaisseur lineaire-mend variable // *Bull. Tech. Suisse romande*. 1949. 75 p.
33. Harries G. Z. The normal modes of a circular plate of variable thickness // *The Quarterly J. of Meeh, and Applied Math*. 1968. № XXL. Pp.321 – 327.
34. Jam R. K. Response of circular plates of vanable thickness to time-dependent loads // *J. of Sound and Vibration*. 1973. Pp. 129 – 135.
35. Jam R. K. Vibrations of circular plates of variable tliickness under an inplane force // *J. of Sound and Vibration*. 1972. № 4. Pp. 407 – 414.

36. Likar O. Die kreisplatte mit hyperbolischen Querschnitt unter zentral symmetrischer Belastung // *Beton-und Stahlbetonbau*. 1956. № 10. Pp. 228 – 234.
37. Lord H. W., Yousef S.S. Elastic bending of circular plates of variable thickness: an analytical and experimental study // *Int. J. Of Mech. Sci.* 1970. № 5. Pp. 417 – 434.
38. Mansfield E. II. On the analysis of elastic plates of variable thickness // *The Quarterly J. of Mech. and Applied Math.* 1962. № XV. Pp.167 – 192.
39. Marcus G. kreis-und kreisringplatten unter antisymmetrischer Belastung. Budapest : Academiai kiado. 1973. 294 p.
40. Marcus G. Theorie und Berechnung rotationssymmetrischer Bauwerke. Budapest : Academiai kiado. 1967. 598 p.
41. Olsson G. R. Unsymmetrische Biegung der kreisringplatte von quadratisch veranderlicher Steifigkeit // *Ing. Archiv.* 1939. №X. Pp. 14 – 27.
42. Stodola A. Dampf-und Gasturbinen. Berlin. 1955. 39 p.
43. Takahashi S., Suzuki K., Nakamura Y. The vibrations of a circular plate with uniformly distributed load around the outer periphery // *Bulletin of the JSME.* 1973. № 16. Pp. 714 – 723.
44. Trombski M. Drgania kolowich plyt ortotropowych o zmiennej sztywnosci // *Arhiwum Budowy Maszyn.* 1968. № XV. Pp. 393 – 406.
45. Trombski M. Drgania wlasne kolowej plyty ortotropowej o zmiennej liniowo grubosci // *Archiwum Budowy Maszyn.* 1968. № IV. Pp. 279 – 292.

## ДОДАТОК А

### Розрахунок напружено-деформованого стану круглих пластин, які жорстко затиснені

```

> restart;
> with(linalg)
  [BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol,
  addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat,
  charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto,
  crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals,
  eigenvalues, eigenvectors, eigenvects, entermatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim,
  fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord, geneqns, genmatrix, grad,
  hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis,
  inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve,
  matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace,
  orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim,
  rowspace, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector,
  subbasis, swapcol, swaprow, sylvester, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent,
  vectdim, vector, wronskian]

> R1 := 1 : # Значення  $R_1 = 0,1$  м #
> R2 := 2 : # Значення  $R_2 = 0,2$  м #
> h1 := 1 : # Значення  $h_1 = 0,01$  м #
> h2 := 2 : # Значення  $h_2 = 0,02$  м #
> E := 200 : # Значення  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа #
> v := 0.25 : # Значення  $\nu = 0.25$  #
> q1 := 1 : # Значення  $q_1 = 0,1$  МПа #
> q2 := 1 : # Значення  $q_2 = 0,1$  МПа #
> F1 := 0.0562 :
> F2 := 0.007 :
>
> #Розв'яжемо отримані шість рівнянь, за допомогою команди solve,
  відносно невідомих змінних  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  #
>
> U1 := C3 + 2.9957·C4 + 400·C5 + 1198.2929·C6 + 17.5 = 0 :
> U2 := 0.05·C4 + 40·C5 + C6·139.829 + 3.5 = 0 :
> U3 := C1 + 100·C2 - C3 - 2.302·C4 - 100·C5 - 230.258·C6 + 8.75 - 1.0937 = 0 :
> U4 := 20·C2 + 3.5125 - 0.1·C4 - 20·C5 - 56.0516·C6 - 0.4375 = 0 :
> U5 := 2.5·C2 + 1.1375 - 8·(-0.0075·C4 + 2.5·C5 + 9.006·C6 + 0.142) = 0 :
> U6 := C6 = 0 :
> solve({U1, U2, U3, U4, U5, U6}, {C1, C2, C3, C4, C5, C6})

```

{C1 = 33.65978861, C2 = -0.2868807947, C3 = 47.86820649, C4 = -12.16821192, C5 = -0.07228973510, C6 = 0.}

> C1 := 33.65978861

C1 := 33.65978861

> C2 := -0.2868807947

C2 := -0.2868807947

> C3 := 47.86820649

C3 := 47.86820649

> C4 := -12.16821192

C4 := -12.16821192

> C5 := -0.07228973510

C5 := -0.07228973510

> C6 := 0

C6 := 0

>

> #Знайдемо значення W, користуючись знайденими C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub>, C<sub>4</sub>, C<sub>5</sub>, C<sub>6</sub>, при r ∈ [0, 2]  
.Отримаємо :#

>

> r := 0

r := 0

> W0 := C1 + C2·r<sup>2</sup> +  $\frac{r^4}{64}$ ·F1

W0 := 33.65978861

> r := 2

r := 2

> W2 := C1 + C2·r<sup>2</sup> +  $\frac{r^4}{64}$ ·F1

W2 := 32.52631543

> r := 4

r := 4

> W4 := C1 + C2·r<sup>2</sup> +  $\frac{r^4}{64}$ ·F1

W4 := 29.29449590

> r := 6

r := 6

> W6 := C1 + C2·r<sup>2</sup> +  $\frac{r^4}{64}$ ·F1

W6 := 24.47013000

> r := 8

r := 8

> W8 := C1 + C2·r<sup>2</sup> +  $\frac{r^4}{64}$ ·F1

W8 := 18.89621775

> r := 10

r := 10

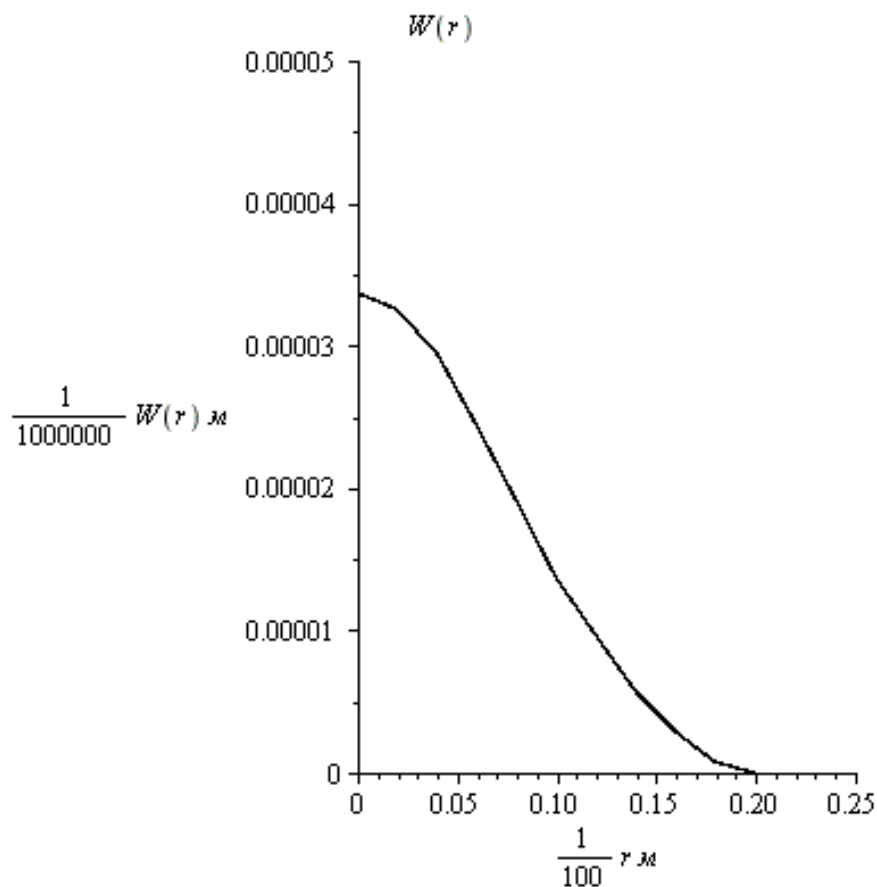


```

> W10 := C1 + C2·r2 +  $\frac{r^4}{64}$ ·F1
                                     W10 := 13.75295914
> W := C3 + C4·ln(r) + C5·r2 + C6·r2·ln(r) +  $\frac{r^4}{64}$ ·F2
                                     W := 41.73298298 - 12.16821192ln(10)
> evalf(W)
                                     13.71463960
> r := 12
                                     r := 12
> W12 := C3 + C4·ln(r) + C5·r2 + C6·r2·ln(r) +  $\frac{r^4}{64}$ ·F2
                                     W12 := 39.72648464 - 12.16821192ln(12)
> evalf(W12)
                                     9.48961392
> r := 14
                                     r := 14
> W14 := C3 + C4·ln(r) + C5·r2 + C6·r2·ln(r) +  $\frac{r^4}{64}$ ·F2
                                     W14 := 37.90116841 - 12.16821192ln(14)
> evalf(W14)
                                     5.78855955
> r := 16
                                     r := 16
> W16 := C3 + C4·ln(r) + C5·r2 + C6·r2·ln(r) +  $\frac{r^4}{64}$ ·F2
                                     W16 := 36.53003430 - 48.67284768ln(2)
> evalf(W16)
                                     2.79258716
> r := 18
                                     r := 18
> W18 := C3 + C4·ln(r) + C5·r2 + C6·r2·ln(r) +  $\frac{r^4}{64}$ ·F2
                                     W18 := 35.92808232 - 12.16821192ln(18)
> evalf(W18)
                                     0.75742624
> r := 20
                                     r := 20
> W20 := C3 + C4·ln(r) + C5·r2 + C6·r2·ln(r) +  $\frac{r^4}{64}$ ·F2
                                     W20 := 36.45231245 - 12.16821192ln(20)
> evalf(W20)
                                     -0.00039272
>
> #Побудуємо графік, відносно знайдених значень:#
>

```

> `plot([[0, W0·10-6], [0.02, W2·10-6], [0.04, W4·10-6], [0.06, W6·10-6], [0.08, W8·10-6],  
[0.1, W10·10-6], [0.12, W12·10-6], [0.14, W14·10-6], [0.16, W16·10-6], [0.18, W18  
·10-6], [0.2, W20·10-6]], x = 0..0.25, y = 0..0.00005, color = black, labels = ['r'10-2 м,  
'W(r)10-6 м'], title = 'W(r)')`



>  
> #Знайдемо значення M, користуючись знайденими C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub>, C<sub>4</sub>, C<sub>5</sub>, C<sub>6</sub> при r ∈ [0, 2]  
.Отримаємо :#

>  
> r := 0

r := 0

$$> M0 := -\frac{E \cdot h I^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( 2 \cdot C2 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot FI + 2 \cdot \nu \cdot C2 + \frac{\nu \cdot r^2}{16} \cdot FI \right)$$

M0 := 12.75025755

> r := 2

r := 2

$$> M2 := -\frac{E \cdot h I^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( 2 \cdot C2 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot FI + 2 \cdot \nu \cdot C2 + \frac{\nu \cdot r^2}{16} \cdot FI \right)$$

M2 := 11.93847977

> r := 4

r := 4

$$> M4 := -\frac{E \cdot h I^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( 2 \cdot C2 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot FI + 2 \cdot \nu \cdot C2 + \frac{\nu \cdot r^2}{16} \cdot FI \right)$$

M4 := 9.503146436

> r := 6

r := 6

$$> M6 := -\frac{E \cdot h l^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( 2 \cdot C2 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot F1 + 2 \cdot \nu \cdot C2 + \frac{\nu \cdot r^2}{16} \cdot F1 \right)$$

M6 := 5.444257543

> r := 8

r := 8

$$> M8 := -\frac{E \cdot h l^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( 2 \cdot C2 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot F1 + 2 \cdot \nu \cdot C2 + \frac{\nu \cdot r^2}{16} \cdot F1 \right)$$

M8 := -0.2381869013

> r := 10

r := 10

$$> M10 := -\frac{E \cdot h l^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( 2 \cdot C2 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot F1 + 2 \cdot \nu \cdot C2 + \frac{\nu \cdot r^2}{16} \cdot F1 \right)$$

M10 := -7.544186901

$$> M := -\frac{E \cdot h 2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( -\frac{C4}{r^2} + 2 \cdot C5 + 2 \cdot C6 \cdot \ln(r) + 3 \cdot C6 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot F2 + \frac{C4 \cdot \nu}{r^2} + 2 \cdot C5 \cdot \nu + 2 \cdot C6 \cdot \nu \cdot \ln(r) + C6 \cdot \nu + \frac{r^2 \cdot \nu}{16} \cdot F2 \right)$$

M := -7.498631344

> r := 12

r := 12

$$> M12 := -\frac{E \cdot h 2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( -\frac{C4}{r^2} + 2 \cdot C5 + 2 \cdot C6 \cdot \ln(r) + 3 \cdot C6 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot F2 + \frac{C4 \cdot \nu}{r^2} + 2 \cdot C5 \cdot \nu + 2 \cdot C6 \cdot \nu \cdot \ln(r) + C6 \cdot \nu + \frac{r^2 \cdot \nu}{16} \cdot F2 \right)$$

M12 := -12.43047340

> r := 14

r := 14

$$> M14 := -\frac{E \cdot h 2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( -\frac{C4}{r^2} + 2 \cdot C5 + 2 \cdot C6 \cdot \ln(r) + 3 \cdot C6 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot F2 + \frac{C4 \cdot \nu}{r^2} + 2 \cdot C5 \cdot \nu + 2 \cdot C6 \cdot \nu \cdot \ln(r) + C6 \cdot \nu + \frac{r^2 \cdot \nu}{16} \cdot F2 \right)$$

M14 := -20.55469477

> r := 16

r := 16

$$> M16 := -\frac{E \cdot h 2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( -\frac{C4}{r^2} + 2 \cdot C5 + 2 \cdot C6 \cdot \ln(r) + 3 \cdot C6 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot F2 + \frac{C4 \cdot \nu}{r^2} + 2 \cdot C5 \cdot \nu + 2 \cdot C6 \cdot \nu \cdot \ln(r) + C6 \cdot \nu + \frac{r^2 \cdot \nu}{16} \cdot F2 \right)$$

M16 := -31.13596027

> r := 18

r := 18

$$M18 := -\frac{E \cdot h^2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( -\frac{C4}{r^2} + 2 \cdot C5 + 2 \cdot C6 \cdot \ln(r) + 3 \cdot C6 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot F2 + \frac{C4 \cdot \nu}{r^2} + 2 \cdot C5 \cdot \nu + 2 \cdot C6 \cdot \nu \cdot \ln(r) + C6 \cdot \nu + \frac{r^2 \cdot \nu}{16} \cdot F2 \right)$$

$$M18 := -43.82297876$$

$$r := 20$$

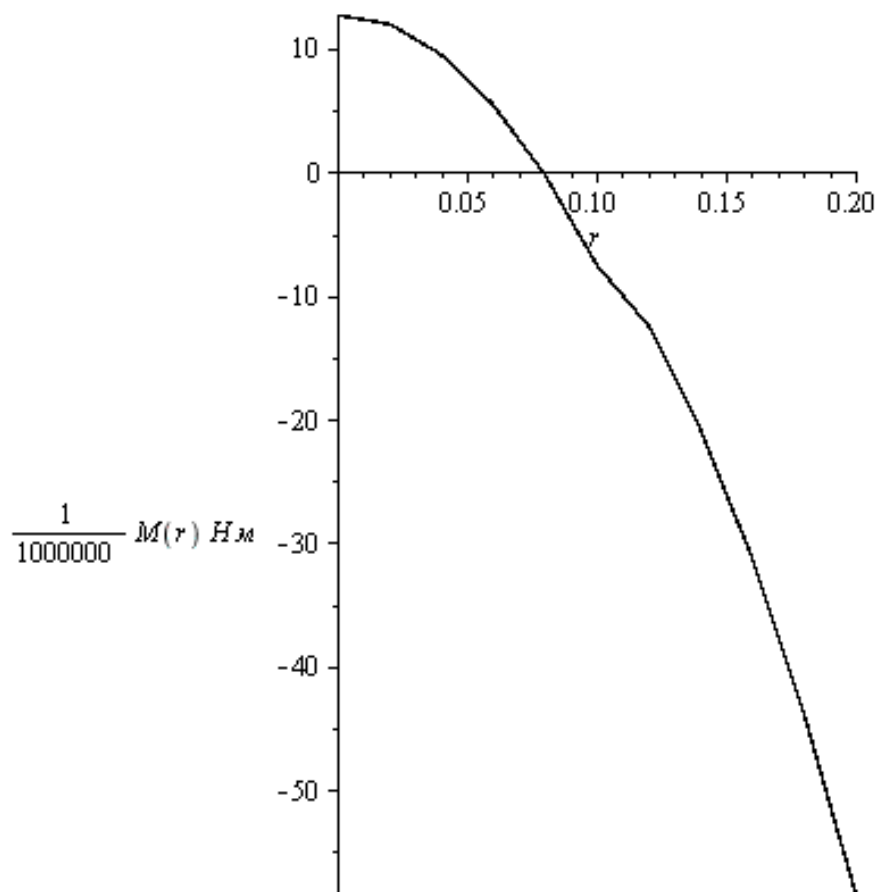
$$r := 20$$

$$M20 := -\frac{E \cdot h^2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( -\frac{C4}{r^2} + 2 \cdot C5 + 2 \cdot C6 \cdot \ln(r) + 3 \cdot C6 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot F2 + \frac{C4 \cdot \nu}{r^2} + 2 \cdot C5 \cdot \nu + 2 \cdot C6 \cdot \nu \cdot \ln(r) + C6 \cdot \nu + \frac{r^2 \cdot \nu}{16} \cdot F2 \right)$$

$$M20 := -58.43072848$$

>

> `plot([ [0, M0], [0.02, M2], [0.04, M4], [0.06, M6], [0.08, M8], [0.1, M10], [0.12, M12], [0.14, M14], [0.16, M16], [0.18, M18], [0.2, M20]], color = black, labels = ['r', M(r) · 10-6 Н·м'])`



>

> #Знайдемо значення Q, користуючись знайденими C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub>, C<sub>4</sub>, C<sub>5</sub>, C<sub>6</sub> при r ∈ [0, 2]  
 .Отримаємо :#

>

$$r := 0$$

$$r := 0$$

$$> Q0 := -\frac{E \cdot h l^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{r}{2} F1$$

$$Q0 := -0.$$

$$> r := 2$$

$$r := 2$$

$$> Q2 := -\frac{E \cdot h l^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{r}{2} F1$$

$$Q2 := -0.9991111110$$

$$> r := 4$$

$$r := 4$$

$$> Q4 := -\frac{E \cdot h l^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{r}{2} F1$$

$$Q4 := -1.998222222$$

$$> r := 6$$

$$r := 6$$

$$> Q6 := -\frac{E \cdot h l^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{r}{2} F1$$

$$Q6 := -2.997333334$$

$$> r := 8$$

$$r := 8$$

$$> Q8 := -\frac{E \cdot h l^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{r}{2} F1$$

$$Q8 := -3.996444444$$

$$> r := 10$$

$$r := 10$$

$$> Q10 := -\frac{E \cdot h l^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{r}{2} F1$$

$$Q10 := -4.995555556$$

$$> Q := -\frac{E \cdot h^2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( \frac{4 \cdot C6}{r} + \frac{r}{2} \cdot F2 \right)$$

$$Q := -4.977777778$$

$$> r := 12$$

$$r := 12$$

$$> Q12 := -\frac{E \cdot h^2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( \frac{4 \cdot C6}{r} + \frac{r}{2} \cdot F2 \right)$$

$$Q12 := -5.973333333$$

$$> r := 14$$

$$r := 14$$

$$> Q14 := -\frac{E \cdot h^2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( \frac{4 \cdot C6}{r} + \frac{r}{2} \cdot F2 \right)$$

$$Q14 := -6.968888889$$

$$> r := 16$$

$$r := 16$$

$$> Q16 := -\frac{E \cdot h^2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( \frac{4 \cdot C6}{r} + \frac{r}{2} \cdot F2 \right)$$

$$Q16 := -7.964444444$$

>  $r := 18$

$r := 18$

$$> Q18 := -\frac{E \cdot h^2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( \frac{4 \cdot C6}{r} + \frac{r}{2} \cdot F2 \right)$$

$Q18 := -8.960000000$

>  $r := 20$

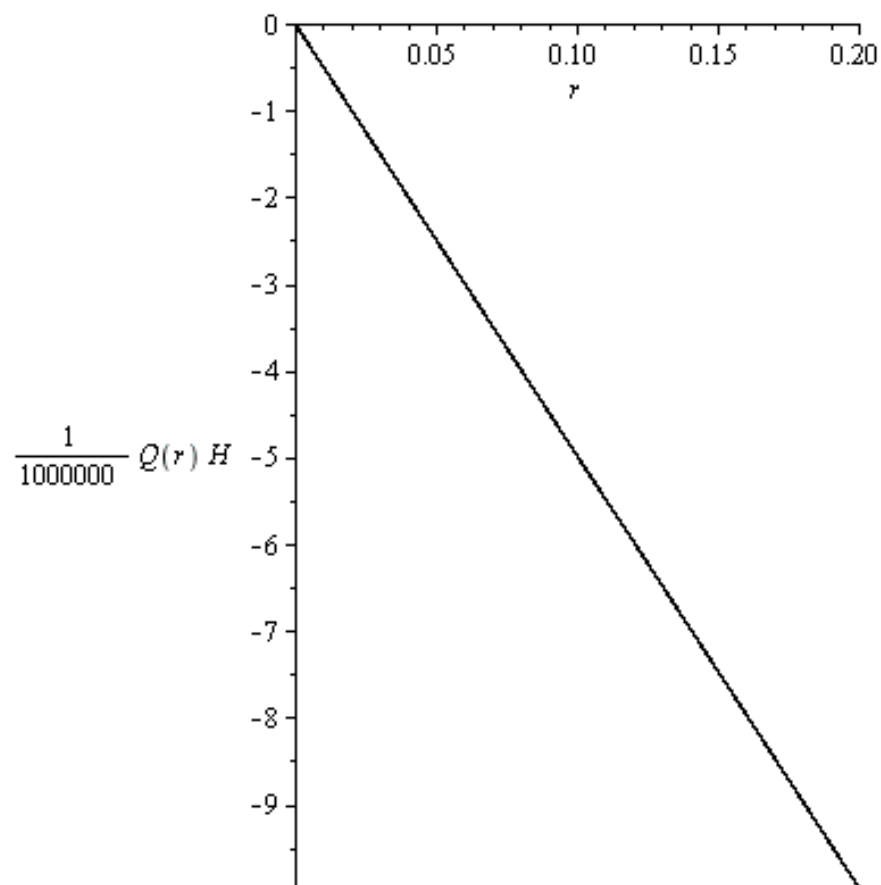
$r := 20$

$$> Q20 := -\frac{E \cdot h^2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( \frac{4 \cdot C6}{r} + \frac{r}{2} \cdot F2 \right)$$

$Q20 := -9.955555556$

>

>  $plot([ [0, Q0], [0.02, Q2], [0.04, Q4], [0.06, Q6], [0.08, Q8], [0.1, Q10], [0.12, Q12], [0.14, Q14], [0.16, Q16], [0.18, Q18], [0.2, Q20]], color = black, labels = [ 'r', 'Q(r) \cdot 10^{-6} H'])$



## ДОДАТОК Б

## Розрахунок напружено-деформованого стану круглих пластин, які шарнірно оперті

```

> restart:
> with(linalg):
>
> R1 := 1: # Значення  $R_1 = 0,1$  м #
> R2 := 2: # Значення  $R_2 = 0,2$  м #
> h1 := 1: # Значення  $h_1 = 0,01$  м #
> h2 := 2: # Значення  $h_2 = 0,02$  м #
> E := 200: # Значення  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа #
> v := 0.25: # Значення  $\nu = 0.25$  #
> q1 := 1: # Значення  $q_1 = 0,1$  МПа #
> q2 := 1: # Значення  $q_2 = 0,1$  МПа #
> F1 := 0.0562:
> F2 := 0.007:
>
> #Розв'яжемо нову систему рівнянь, за допомогою команди solve,
    відносно невідомих змінних  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  #
>
> U1 := C3 + 2.9957·C4 + 400·C5 + 1198.2929·C6 + 17.5 = 0:
> U2 := -0.0025·C4 + 2·C5 + C6·8.9914 + 0.525 = 0:
> U3 := C1 + 100·C2 - C3 - 2.302·C4 - 100·C5 - 230.258·C6 + 8.75 - 1.0937 = 0:
> U4 := 20·C2 + 3.5125 - 0.1·C4 - 20·C5 - 56.0516·C6 - 0.4375 = 0:
> U5 := 2.5·C2 + 1.1375 - 8·(-0.0075·C4 + 2.5·C5 + 9.006·C6 + 0.142) = 0:
> U6 := C6 = 0:
> solve({U1, U2, U3, U4, U5, U6}, {C1, C2, C3, C4, C5, C6})
    {C1 = 236.0969022, C2 = -0.9361111111, C3 = 378.2645578, C4 = -83.17777778, C5 =
    -0.3664722222, C6 = 0.}
>
> C1 := 236.0969022:
> C2 := -0.9361111111:
> C3 := 378.2645578:
> C4 := -83.17777778:
> C5 := -0.3664722222:
> C6 := 0:
>
> #Знайдемо значення  $W$ , користуючись знайденими  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  при  $r \in [0, 2]$ 
    .Отримаємо :#
>
>
> r := 0

```

$r := 0$

>  $W0 := C1 + C2 \cdot r^2 + \frac{r^4}{64} \cdot F1$   
 $W0 := 236.0969022$

>  $r := 2$   
 $r := 2$

>  $W2 := C1 + C2 \cdot r^2 + \frac{r^4}{64} \cdot F1$   
 $W2 := 232.3665078$

>  $r := 4$   
 $r := 4$

>  $W4 := C1 + C2 \cdot r^2 + \frac{r^4}{64} \cdot F1$   
 $W4 := 221.3439244$

>  $r := 6$   
 $r := 6$

>  $W6 := C1 + C2 \cdot r^2 + \frac{r^4}{64} \cdot F1$   
 $W6 := 203.5349522$

>  $r := 8$   
 $r := 8$

>  $W8 := C1 + C2 \cdot r^2 + \frac{r^4}{64} \cdot F1$   
 $W8 := 179.7825911$

>  $r := 10$   
 $r := 10$

>  $W10 := C1 + C2 \cdot r^2 + \frac{r^4}{64} \cdot F1$   
 $W10 := 151.2670411$

>  $W := C3 + C4 \cdot \ln(r) + C5 \cdot r^2 + C6 \cdot r^2 \cdot \ln(r) + \frac{r^4}{64} \cdot F2$   
 $W := 342.7110856 - 83.17777778 \ln(10)$

>  $evalf(W)$   
 $151.1871744$

>  $r := 12$   
 $r := 12$

>  $W12 := C3 + C4 \cdot \ln(r) + C5 \cdot r^2 + C6 \cdot r^2 \cdot \ln(r) + \frac{r^4}{64} \cdot F2$   
 $W12 := 327.7605578 - 83.17777778 \ln(12)$

>  $evalf(W12)$   
 $121.0715447$

>  $r := 14$   
 $r := 14$

>  $W14 := C3 + C4 \cdot \ln(r) + C5 \cdot r^2 + C6 \cdot r^2 \cdot \ln(r) + \frac{r^4}{64} \cdot F2$   
 $W14 := 310.6377522 - 83.17777778 \ln(14)$

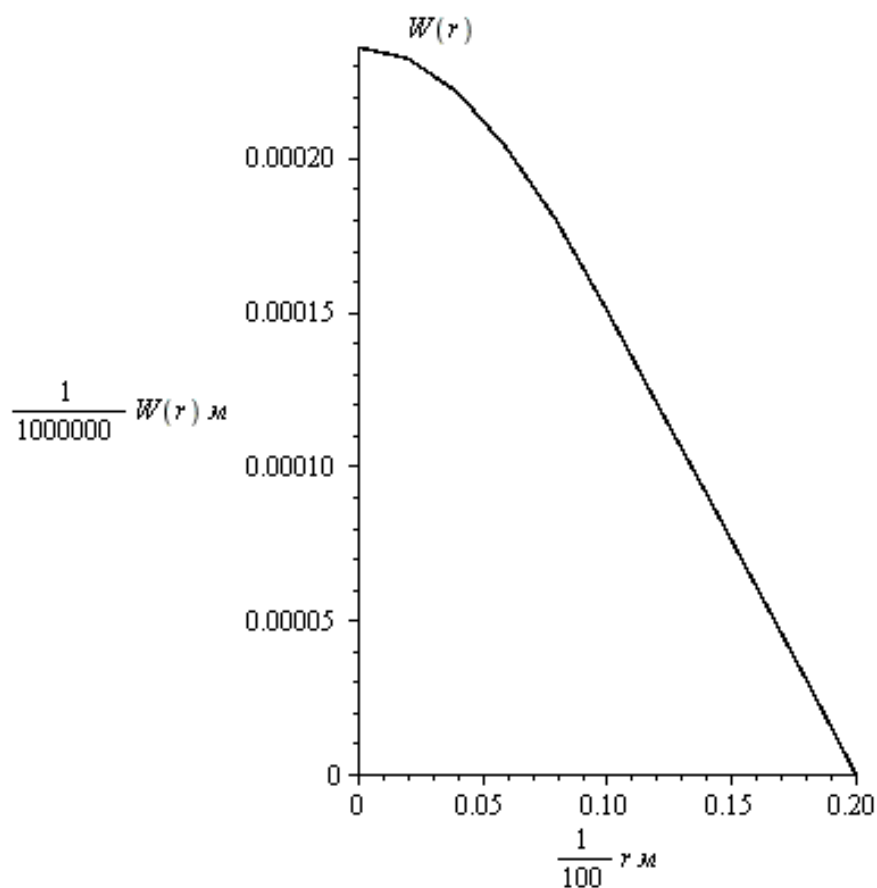
>  $evalf(W14)$   
 $91.1268281$



```

> r := 16
                                     r := 16
> W16 := C3 + C4·ln(r) + C5·r2 + C6·r2·ln(r) +  $\frac{r^4}{64}$ ·F2
                                     W16 := 291.6156689 – 332.7111111ln(2)
> evalf(W16)
                                     60.9979003
> r := 18
                                     r := 18
> W18 := C3 + C4·ln(r) + C5·r2 + C6·r2·ln(r) +  $\frac{r^4}{64}$ ·F2
                                     W18 := 271.0093078 – 83.17777778ln(18)
> evalf(W18)
                                     30.5946080
> r := 20
                                     r := 20
> W20 := C3 + C4·ln(r) + C5·r2 + C6·r2·ln(r) +  $\frac{r^4}{64}$ ·F2
                                     W20 := 249.1756689 – 83.17777778ln(20)
> evalf(W20)
                                     -0.0026845
>
> #Побудуємо графік, відносно знайдених значень:#
>
> plot([[0, W0·10-6], [0.02, W2·10-6], [0.04, W4·10-6], [0.06, W6·10-6], [0.08, W8·10-6],
        [0.1, W10·10-6], [0.12, W12·10-6], [0.14, W14·10-6], [0.16, W16·10-6], [0.18, W18
        ·10-6], [0.2, W20·10-6]], color = black, labels = ['r'10-2 м, 'W(r)10-6 м'], title = 'W(r)')

```



>

> #Знайдемо значення  $M$ , користуючись знайденими  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ , при  $r \in [0, 2]$ .  
Отримаємо :#

>

>  $r := 0$

$r := 0$

$$> M0 := -\frac{E \cdot h I^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( 2 \cdot C2 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot F1 + 2 \cdot \nu \cdot C2 + \frac{\nu \cdot r^2}{16} \cdot F1 \right)$$

$$M0 := 41.60493828$$

>  $r := 2$

$r := 2$

$$> M2 := -\frac{E \cdot h I^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( 2 \cdot C2 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot F1 + 2 \cdot \nu \cdot C2 + \frac{\nu \cdot r^2}{16} \cdot F1 \right)$$

$$M2 := 40.79316050$$

>  $r := 4$

$r := 4$

$$> M4 := -\frac{E \cdot h I^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( 2 \cdot C2 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot F1 + 2 \cdot \nu \cdot C2 + \frac{\nu \cdot r^2}{16} \cdot F1 \right)$$

$$M4 := 38.35782716$$

>  $r := 6$

$r := 6$

$$> M6 := -\frac{E \cdot h I^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( 2 \cdot C2 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot F1 + 2 \cdot \nu \cdot C2 + \frac{\nu \cdot r^2}{16} \cdot F1 \right)$$

$$M6 := 34.29893828$$

>  $r := 8$

$r := 8$

$$> M8 := -\frac{E \cdot h l^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( 2 \cdot C2 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot F1 + 2 \cdot \nu \cdot C2 + \frac{\nu \cdot r^2}{16} \cdot F1 \right)$$

$M8 := 28.61649383$

>  $r := 10$

$r := 10$

$$> M10 := -\frac{E \cdot h l^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( 2 \cdot C2 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot F1 + 2 \cdot \nu \cdot C2 + \frac{\nu \cdot r^2}{16} \cdot F1 \right)$$

$M10 := 21.31049383$

$$> M := -\frac{E \cdot h^2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( -\frac{C4}{r^2} + 2 \cdot C5 + 2 \cdot C6 \cdot \ln(r) + 3 \cdot C6 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot F2 + \frac{C4 \cdot \nu}{r^2} + 2 \cdot C5 \cdot \nu + 2 \cdot C6 \cdot \nu \cdot \ln(r) + C6 \cdot \nu + \frac{r^2 \cdot \nu}{16} \cdot F2 \right)$$

$M := 21.35604937$

>  $r := 12$

$r := 12$

$$> M12 := -\frac{E \cdot h^2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( -\frac{C4}{r^2} + 2 \cdot C5 + 2 \cdot C6 \cdot \ln(r) + 3 \cdot C6 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot F2 + \frac{C4 \cdot \nu}{r^2} + 2 \cdot C5 \cdot \nu + 2 \cdot C6 \cdot \nu \cdot \ln(r) + C6 \cdot \nu + \frac{r^2 \cdot \nu}{16} \cdot F2 \right)$$

$M12 := 39.56806583$

>  $r := 14$

$r := 14$

$$> M14 := -\frac{E \cdot h^2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( -\frac{C4}{r^2} + 2 \cdot C5 + 2 \cdot C6 \cdot \ln(r) + 3 \cdot C6 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot F2 + \frac{C4 \cdot \nu}{r^2} + 2 \cdot C5 \cdot \nu + 2 \cdot C6 \cdot \nu \cdot \ln(r) + C6 \cdot \nu + \frac{r^2 \cdot \nu}{16} \cdot F2 \right)$$

$M14 := 45.39886117$

>  $r := 16$

$r := 16$

$$> M16 := -\frac{E \cdot h^2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( -\frac{C4}{r^2} + 2 \cdot C5 + 2 \cdot C6 \cdot \ln(r) + 3 \cdot C6 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot F2 + \frac{C4 \cdot \nu}{r^2} + 2 \cdot C5 \cdot \nu + 2 \cdot C6 \cdot \nu \cdot \ln(r) + C6 \cdot \nu + \frac{r^2 \cdot \nu}{16} \cdot F2 \right)$$

$M16 := 43.87493826$

>  $r := 18$

$r := 18$

$$> M18 := -\frac{E \cdot h^2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( -\frac{C4}{r^2} + 2 \cdot C5 + 2 \cdot C6 \cdot \ln(r) + 3 \cdot C6 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot F2 + \frac{C4 \cdot \nu}{r^2} + 2 \cdot C5 \cdot \nu + 2 \cdot C6 \cdot \nu \cdot \ln(r) + C6 \cdot \nu + \frac{r^2 \cdot \nu}{16} \cdot F2 \right)$$

$M18 := 37.39760401$

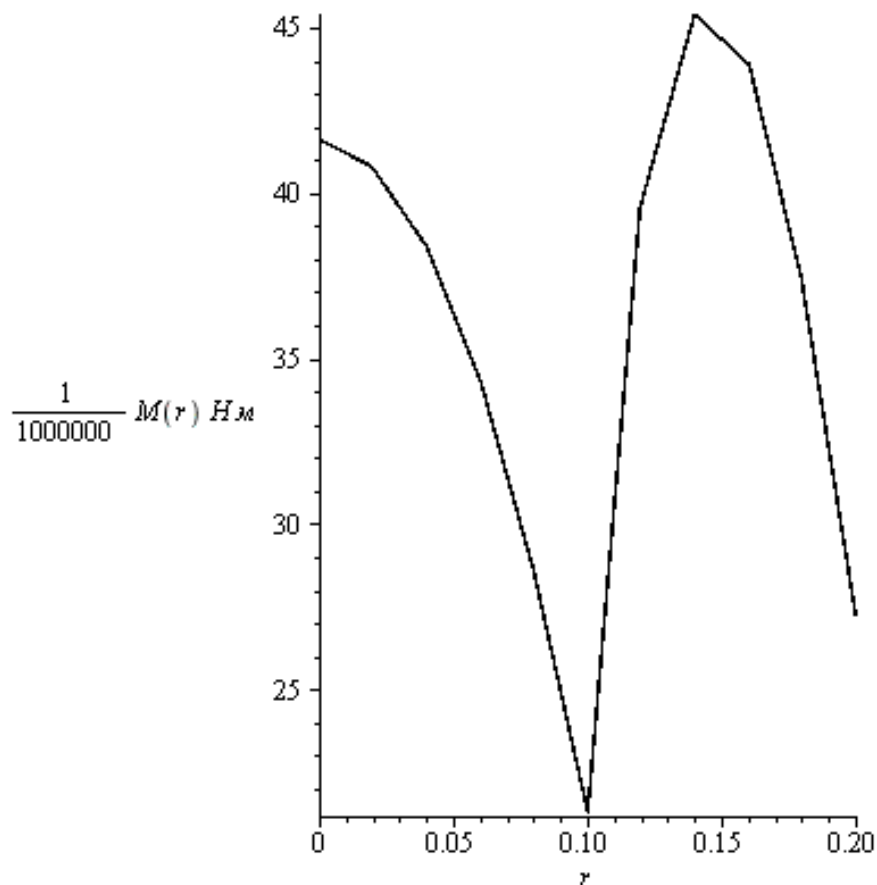
>  $r := 20$

$r := 20$

$$M20 := -\frac{E \cdot h^2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( -\frac{C4}{r^2} + 2 \cdot C5 + 2 \cdot C6 \cdot \ln(r) + 3 \cdot C6 + \frac{3 \cdot r^2}{16} \cdot F2 + \frac{C4 \cdot \nu}{r^2} + 2 \cdot C5 \cdot \nu + 2 \cdot C6 \cdot \nu \cdot \ln(r) + C6 \cdot \nu + \frac{r^2 \cdot \nu}{16} \cdot F2 \right)$$

$M20 := 27.23160493$

>  
>  $plot([ [0, M0], [0.02, M2], [0.04, M4], [0.06, M6], [0.08, M8], [0.1, M10], [0.12, M12], [0.14, M14], [0.16, M16], [0.18, M18], [0.2, M20]], color = black, labels = ['r', 'M(r) \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{M}'])$



>  
> #Знайдемо значення Q, користуючись знайденими C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub>, C<sub>4</sub>, C<sub>5</sub>, C<sub>6</sub>, при r ∈ [0, 2]  
.Отримаємо :#

>  
>  $r := 0$

$r := 0$

$$Q0 := -\frac{E \cdot h l^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{r}{2} F1$$

$Q0 := -0.$

>  $r := 2$

$r := 2$

$$Q2 := -\frac{E \cdot h l^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{r}{2} F1$$

$Q2 := -0.9991111110$

>  $r := 4$   

$$Q4 := -\frac{E \cdot h l^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{r}{2} F1$$

$$Q4 := -1.998222222$$

$$r := 4$$

>  $r := 6$   

$$Q6 := -\frac{E \cdot h l^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{r}{2} F1$$

$$Q6 := -2.997333334$$

$$r := 6$$

>  $r := 8$   

$$Q8 := -\frac{E \cdot h l^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{r}{2} F1$$

$$Q8 := -3.996444444$$

$$r := 8$$

>  $r := 10$   

$$Q10 := -\frac{E \cdot h l^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{r}{2} F1$$

$$Q10 := -4.995555556$$

$$r := 10$$

>  $Q := -\frac{E \cdot h 2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( \frac{4 \cdot C6}{r} + \frac{r}{2} \cdot F2 \right)$   

$$Q := -4.977777778$$

$$r := 12$$

>  $Q12 := -\frac{E \cdot h 2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( \frac{4 \cdot C6}{r} + \frac{r}{2} \cdot F2 \right)$   

$$Q12 := -5.973333333$$

$$r := 14$$

>  $Q14 := -\frac{E \cdot h 2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( \frac{4 \cdot C6}{r} + \frac{r}{2} \cdot F2 \right)$   

$$Q14 := -6.968888889$$

$$r := 16$$

>  $Q16 := -\frac{E \cdot h 2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( \frac{4 \cdot C6}{r} + \frac{r}{2} \cdot F2 \right)$   

$$Q16 := -7.964444444$$

$$r := 18$$

>  $Q18 := -\frac{E \cdot h 2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( \frac{4 \cdot C6}{r} + \frac{r}{2} \cdot F2 \right)$   

$$Q18 := -8.960000000$$

$$r := 20$$

$$> Q20 := -\frac{E \cdot h^2^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( \frac{4 \cdot C6}{r} + \frac{r}{2} \cdot F2 \right)$$

$$Q20 := -9.955555556$$

>

> `plot([[0, Q0], [0.02, Q2], [0.04, Q4], [0.06, Q6], [0.08, Q8], [0.1, Q10], [0.12, Q12], [0.14, Q14], [0.16, Q16], [0.18, Q18], [0.2, Q20]], color = black, labels = ['r', 'Q(r) · 10-6 H'])`

