

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра прикладної математики і механіки

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МГІСТРА

на тему: «АНАЛІТИЧНИЙ ПІДХІД ДО  
НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ  
ГІРОСКОПІЧНИХ СИСТЕМ»

Виконав: студент 2 курсу, групи 8.1138

напряму підготовки 6.040301 прикладна математика  
(шифр і назва напряму підготовки)

О.О.Орлов

(ініціали та прізвище)

Керівник завідувач кафедри прикладної математики і  
механіки, професор, д.т.н. Грищак В.З.  
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент завідувач кафедри фундаментальної математики,  
доцент, д.т.н. Гребенюк С.М.  
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Факультет Математичний

Кафедра загальної математики

Рівень вищої освіти Магістр

Напрямок підготовки 6.040301 прикладна математика

(шифр і назва)

Освітня програма \_\_\_\_\_

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач кафедри загальної математики, к.ф.-м.н., доцент

Зіновєєв І.В.

(підпис)

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2020 р.

**ЗАВДАННЯ**  
**НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ**

Орлову Олександрю Олеговичу

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Аналітичний підхід до наближеного розв'язку задач динаміки гіроскопічних систем

керівник роботи (проекту) завідувач кафедри прикладної математики і механіки, професор, д.т.н. Грищак В.З.

(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 15 » Грудня 2017 року № 2142-с

2. Строк подання студентом роботи \_\_\_\_\_

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.

2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) \_\_\_\_\_

Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 05.09.2019

**КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН**

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	07.09.2019	
2.	Збір вихідних даних.	17.09.2019	
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	10.10.2019	
4.	Розробка першого розділу.	13.10.2019	
5.	Розробка другого розділу.	18.10.2019	
6.	Розробка третього розділу	13.11.2019	
7.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	02.12.2019	
8.	Захист кваліфікаційної роботи.	16.01.2020	

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

**О.О. Орлов** \_\_\_\_\_  
(ініціали та прізвище)

Керівник роботи \_\_\_\_\_  
(підпис)

**В.З. Грицак** \_\_\_\_\_  
(ініціали та прізвище)

**Нормоконтроль пройдено**

Нормоконтролер \_\_\_\_\_  
(підпис)

**В.В. Леонтєва** \_\_\_\_\_  
(ініціали та прізвище)

## РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Аналітичний підхід до наближеного розв'язку задач динаміки гіроскопічних систем»: 57 с., 15 рис., 53 джерела, 1 додаток.

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ, ГІРОСКОПІЧНІ СИСТЕМИ, ГІРОСКОПІЧНІ СИСТЕМИ ЗІ ЗМІННОЮ МАСОЮ У ЧАСІ, КОЛИВАННЯ КОНСТРУКЦІЙ, МЕТОД ФАЗНИХ ІНТЕГРАЛІВ, НЕПЕРІОДИЧНА ЗАЛЕЖНІСТЬ.

Об'єктом дослідження є наближений аналітичний метод аналізу коливань гіроскопічних систем.

Мета роботи: застосування сучасних методів дослідження коливань систем, які обертаються, з масою залежною від часу, зокрема наближеного аналітичного підходу на базі асимптотичного методу.

Методи дослідження – аналітичний, чисельний.

У кваліфікаційній роботі розглядаються коливання конструкцій, маса яких неперіодично залежить від часу. Проаналізовано методи аналізу даних коливань. Наведено приклади основні рівняння вимушених коливань. Показано розрахунок коливання конструкцій методом фазних інтегралів. Проведено чисельний аналіз на базі наближеного аналітичного підходу та чисельний аналіз вимушених коливань гіроскопічних системи з масою залежною від часу. Результати можуть бути використані при викладанні та вивченні курсів математичної фізики та аналізу проблем механіки деформованого твердого тіла.

## SUMMARY

Master's Qualification Thesis "Analytical Approach to the Approximate Solution of the Problems of the Dynamics of Gyroscopic Systems": 57 pages, 15 figures, 53 references, 1 supplement.

INDUCED VIBRATIONS, GYROSCOPIC SYSTEMS, VARIABLE GYROSCOPE SYSTEMS IN TIME, STRUCTURAL VIBRATIONS, PHASE INTEGRAL METHODS, NON-PERIODIC DEPENDENCE.

The object of the study is an approximate analytical method for the analysis of oscillations of gyroscopic systems.

Purpose: to apply modern methods of study of oscillations of rotating systems with time-dependent mass, in particular the approximate analytical approach based on the asymptotic method.

Research methods are analytical, numerical.

Qualification work deals with fluctuations in structures whose mass is periodically dependent on time. Methods of analysis of data of oscillations are analyzed. Examples of basic equations of forced oscillations are given. The calculation of the oscillation of structures by the method of phase integrals is shown. Numerical analysis is performed on the basis of approximate analytical approach and numerical analysis of forced oscillations of gyroscopic system with time dependent mass. The results can be used to teach and study mathematical physics courses and to analyze the problems of deformed solid mechanics.

## ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	2
Реферат .....	4
Summary .....	5
Зміст.....	6
Вступ.....	7
1 Аналітичний огляд сучасного стану проблеми.....	10
1.1 Загальне поняття теорії гіроскопічних систем. Вібраційні динамічно настроювані гіроскопи (ДНГ).....	10
1.2 Аналіз коливань конструкцій, маса яких залежить від часу .....	12
1.3 Існуючі методи досліджень коливань систем з масою залежною від часу .....	19
1.4 Якісний результат коливань систем з масою залежною від часу .....	23
2 Наближений аналітичний метод розв'язку задачі про вимушені коливання систем з масою залежною від часу.....	27
2.1 Основні рівняння вимушених коливань .....	27
2.2 Метод фазних інтегралів (ВКБ) і його застосування до розв'язку задачі динаміки гіроскопічної системи.....	35
2.3 Чисельний аналіз на базі наближеного аналітичного підходу.....	41
3 Чисельний аналіз вимушених коливань гіроскопічної системи з масою неперіодично залежною від часу.....	44
Висновки .....	48
Перелік посилань.....	49
Додаток А Програмний код на Maple 18 .....	55

## ВСТУП

На сучасному етапі технічного прогресу промисловість вимагає розробки нового високоефективного та економічно обґрунтованого обладнання. Розробка ефективних методів розв'язання задач, які виникають при розрахунку конструкцій різноманітних об'єктів, може значно зменшити час аналізу, а це, у свою чергу, зменшить час роботи над проектами, їх вартість і збільшить якість, дасть реальну можливість за невеликий час оцінити велику кількість конструктивних рішень.

Визначення взаємодії різноманітних конструкції актуальна і важлива науково–технічна проблема, оскільки пов'язана з багаточисельним використанням різних конструкцій. Зокрема, удосконалення методики розрахунку коливань конструкцій з масою, неперіодично залежної від часу є також актуальною практичною задачею.

Тому у науковій літературі досліджено чимало питань, що стосуються сучасних технологій [1]. Зокрема, у наукових працях детально висвітлені питання коливань конструкцій та розрахунку коливань різноманітних механічних систем, що описуються лінійними диференційними рівняннями з постійними параметрами [1]. Проте лінійні диференційні рівняння з'являються зазвичай у процесі спрощення математичної моделі системи, хоч і часто нелінійні диференційні рівняння більш точно описують поведінку реальних об'єктів і конструкцій. Параметри реальної системи часто також не є постійними за часом. Тому вважаємо за необхідне глибше дослідити методи аналізу коливань конструкцій з масою, неперіодично залежною від часу.

Аналіз публікацій з теми дослідження. При виконанні даного дослідження будемо керуватися деякими роботами науковців. Так, задача про вільні коливання нелінійних механічних систем з параметрами, залежними від часу, була досліджена у роботі Грищака В. З. та

Головань О. А. «Asymptotic Solution for Nonlinear Dynamic of Mechanical Systems with Time Dependent Parameters» [2]; у роботах Грищака В. З. та Кабака В. Н. розглянуто задачу про вимушені коливання нелінійних механічних систем з параметрами, залежними від часу, під дією детерміністичної змушуючої сили [3; 4]. Задачу про вимушені коливання нелінійних механічних систем з параметрами, не залежними від часу, під дією випадкової змушуючої сили розв'язано у роботі Болотіна В. В. «Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений» [5].

При дослідженні використовуються методи аналізу, синтезу та порівнянь уже існуючих наукових праць з теми роботи.

Об'єктом дослідження є наближений аналітичний метод аналізу коливань гіроскопічних систем.

Предмет – коливання гіроскопічних систем з масою, неперіодично залежною від часу.

Мета роботи: застосування сучасних методів дослідження коливань систем, які обертаються, з масою залежною від часу, зокрема наближеного аналітичного підходу на базі асимптотичного методу.

Для досягнення мети були поставлені наступні завдання:

- дослідити сучасний стан проблеми;
- проаналізувати коливання гіроскопічних систем, маса яких залежить від часу;
- розглянути існуючі методи досліджень коливань систем з масою залежною від часу;
- визначити якісний результат коливань систем з масою залежною від часу;
- виявити основні рівняння вимушених коливань;
- розкрити метод фазних інтегралів і показати його застосування до розв'язку задачі;



провести чисельний аналіз на базі наближеного аналітичного підходу та чисельний аналіз вимушених коливань системи з масою залежною від часу.

Структура виконаного дослідження обумовлена його метою та завданнями і складається зі вступу, трьох розділів, висновків, переліку посилань та додатка. У першому розділі проведено аналітичний огляд сучасного стану проблеми, у другому – охарактеризовано наближений аналітичний метод розв’язку задачі про вимушені коливання систем з масою залежною від часу, у третьому – проведено чисельний аналіз вимушених коливань гіроскопічної системи з масою залежною від часу. Список використаних джерел містить список наукових праць різних періодичних видань, присвячених загальних та спеціальних питань обраної теми. У додатку наведений програмний код для графіків побудованих за допомогою програмного продукту Maple 18 для аналізу чисельних розрахунків.

# 1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ

## 1.1 Загальне поняття теорії гіроскопічних систем. Вібраційні динамічно настроювані гіроскопи (ДНГ)

Гіроскопічна система – система, що складається обертових елементів.

Гіроскоп – пристрій, що має здатність вимірювання зміни кутів орієнтації пов'язаного з ним тіла відносно інерціальної системи координат. Найпростіший приклад гіроскопа – дзига [6].

Гіроскоп використовується в приладах навігації в літаках і космічних апаратах, в зброї (куля при стрільбі закручується, це надає їй набагато більшу стійкість і підвищує точність стрільби), колеса велосипеда або подібного пристрою працюють як гіроскопи – це не дає їздцю впасти. Таким чином, будь-який предмет що обертається можна назвати гіроскопом – він протидіє відхиленню осі обертання [7].

Розглянемо вібраційні динамічно настроювані гіроскопи (ДНГ), вони створені на базі вібраційних гіроскопів, але мають кращу точність. Суттєвою відмінністю ДНГ від вібраційних гіроскопів є наявність обертового ротора з пружним торсіонним підвісом, замість торсіонної ручки. Вібраційні ДНГ поділяються на одноступеневі і двоступеневі, принцип дії якого розглянуто в роботі [8].

Основою двоступеневого ДНГ (рис. 1.1) є ротор 1, кінематично зв'язаний з обертовим валом 3 за допомогою торсіонів 4 через проміжне кільце 2. Обертання вала 3 забезпечується електродвигуном 5.

Для зручності будемо розглядати ДНГ на прикладі одноступеневого гіроскопа, коли проміжне кільце відсутнє, а ротор 1 зв'язаний з валом 2 торсіонами 3 (рис. 1.2) [8].

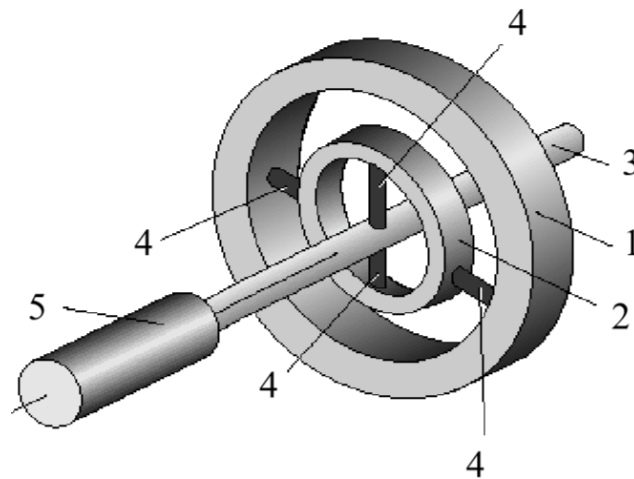


Рисунок 1.1 – Двоступеневий динамічно настроюваний гіроскоп

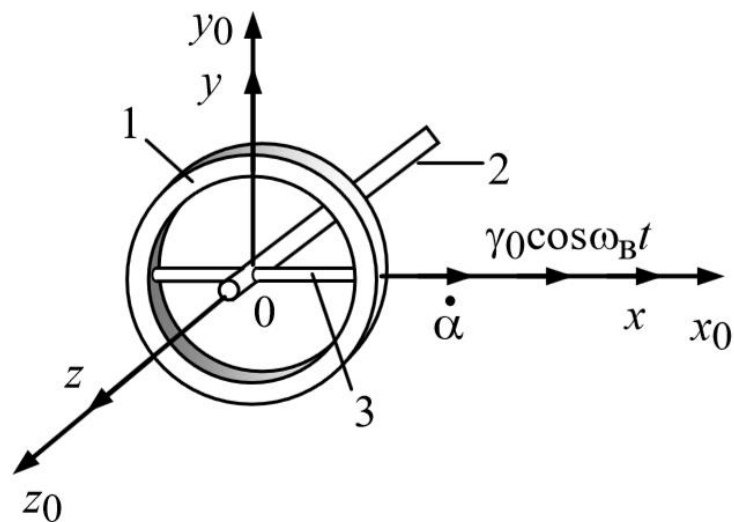


Рисунок 1.2 – Одноступеневий динамічно настроюваний гіроскоп

У розглянутому випадку в осях рухомої системи координат  $Oxy$  рівняння обертового ротора буде мати вигляд [8]

$$\ddot{\alpha} + 2d\Omega\dot{\alpha} + \Omega^2\alpha = N\omega_0 \sin \phi t, \quad (1.1)$$

де  $N = \frac{1}{I_x}(I_z + I_x - I_y)\dot{\phi}$ ;  $d = \mu/(2\omega I_3)$ ;  $\mu$  – сумарний коефіцієнт моменту демпфірування;  $\omega = \sqrt{c/I_3}$  – власна частота поперечних коливань ротора ( $c$  – сумарна крутильна жорсткість торсіонів);  $I_3$  – екваторіальний момент інерції ротора;  $\Omega = \frac{1}{I_x}[c + (I_z - I_y)\dot{\phi}^2]$ ;  $I_x, I_y, I_z$  – моменти інерції ротора і торсіонів у зв'язаній з ним системі координат  $Oxyz$ ;  $\dot{\phi}$  – постійна кутова швидкість.

## 1.2 Аналіз коливань конструкцій, маса яких залежить від часу

Розгляд коливального процесу має фундаментальне значення для побудови різноманітних споруд [9, 10].

Загалом, коливання конструкцій – це стан конструкції, коли її точки виконують під дією змінних у часі сил прямолінійні поворотні рухи (коливання). Коливання, що виникають при відсутності безперервно діючої сили, під впливом якого–небудь початкового впливу, називаються власними коливаннями конструкції. Якщо коливання виникають під безперервним дією вимушених коливань, то вони називаються вимушеними. Величина власних коливань залежить тільки від характеристик самої конструкції (застосовуваних матеріалів, розмірів перекиваються прольотів, геометрії поперечного перерізу і т. д.).

Власні коливання (вільні коливання) системи – це коливання в механічній, електричній або у будь–яких інших фізичних коливальних системах, які здійснюються за відсутністю зовнішнього впливу, за рахунок початкової накопиченої енергії, внаслідок початкового зміщення або початкової швидкості. Характер власних коливань визначається власними параметрами самої коливальної системи – масою, індуктивністю, ємністю, пружністю тощо. У реальних системах, внаслідок дисипації (розсіяння) енергії, власні коливання системи завжди згасають, а за значних втрат енергії власні коливання системи стають аперіодичними [11].

Власні коливання нелінійних систем мало доступні для класифікації. Нелінійність систем з дискретним спектром власних частот призводить до перекачування енергії по спектральним компонентам, при цьому виникають процеси конкуренції мод – виживання одних і придушення інших. Дисперсії можуть стабілізувати ці процеси і принести до формування стійких просторово тимчасових утворень, прикладами яких в системах з безперервним спектром є солітони [12].

Вимушені коливання системи – це коливання, які виникають у будь-якій системі під дією змінної зовнішньої (щодо системи) сили, наприклад, коливання телефонної системи під дією змінного магнітного поля, коливання механічної конструкції під дією змінного навантаження тощо [13; 14].

Найнебезпечніше для конструкції – явище резонансу, що виникає при рівності або кратності частоти вимушених і власних коливань. Різке зростання амплітуди коливань при резонансі може викликати руйнування конструкції. Перша катастрофа такого роду сталася в 1850 р у французькому місті Анже, коли по ланцюговому мосту довжиною 102 м йшла в ногу рота солдатів. Ритм їх кроків збігся з частотою власних коливань мосту, і міст почав розгойдуватися з такою силою, що ланцюга лопнули, і солдати впали в воду разом з мостом, більшість з них потонуло. З тих пір у всіх арміях світу перед входом на міст подається команда: «Збити крок!» Випробування і розрахунок конструкцій на коливання з метою їх зменшення – невід'ємна складова частина проектування будівельних конструкцій [15].

Значні коливання небезпечні для міцності та стійкості конструкцій, прикладом чого є численні руйнування будівель і споруд при землетрусах, поломки валів двигунів, випадок руйнування внаслідок коливань під дією вітру Такомського висячого мосту, спорудженого в США в 1940. Систематичні, навіть помірні коливання конструкцій, безпечні для самої конструкції, можуть шкідливо впливати на здоров'я людей, а також на якість точних виробничих процесів. Шляхом розрахунку конструкцій на коливання

при їх проектуванні та здійснення заходів з метою зменшення коливань конструкцій.

С. П. Тимошенко визначає коливання конструкцій як багаторазове повторення зворотно–поступального або зворотно–обертального руху елементів конструкцій внаслідок їх пружних деформацій під дією сил, досить швидко мінливих в часі. При коливанні конструкції її елементи переміщуються щодо їх сталого положення статичної рівноваги (коливання мостів, висотних споруд, фундаментів машин і т.п.) або загального руху (коливання літальних апаратів, вагонів, автомобілів і т.п.). Коливання конструкцій класифікуються за кількома ознаками. За типом деформацій розрізняють поздовжні (стиснення – розтягнення), поперечні (згибання, зсувні), крутильні і змішані; за характером переміщень в часі – періодичні та неперіодичні (рис. 1.3 – 1.4) [16; 17; 18].

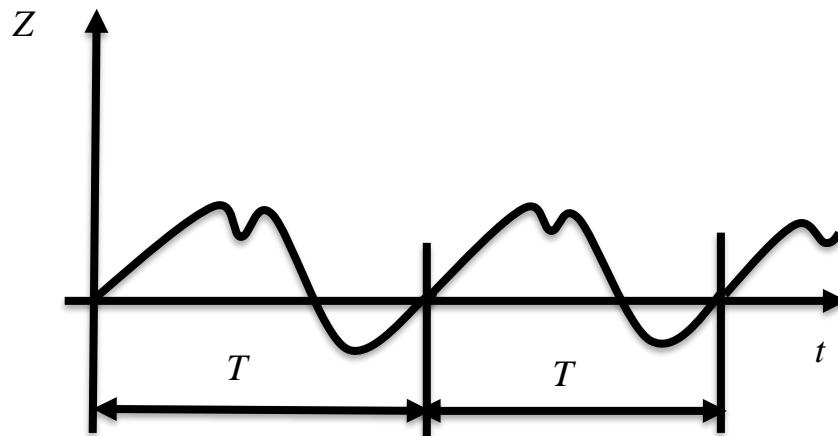


Рисунок 1.3– Періодичні коливання конструкцій

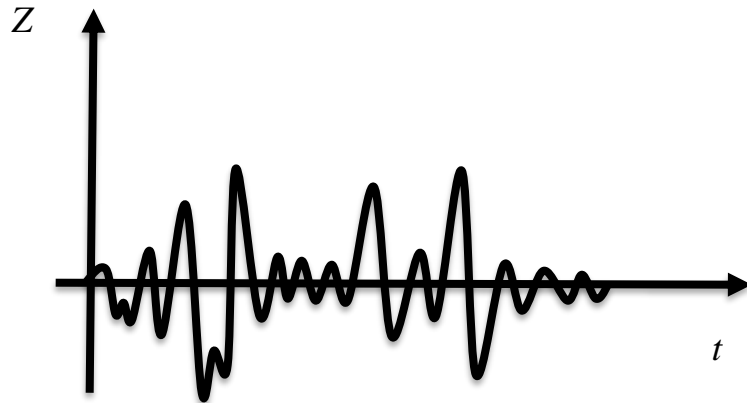


Рисунок 1.4 – Неперіодичні (б) коливання конструкцій

З енергетичної постановки проблеми коливальні конструкції діляться на [19]:

- консервативні системи, в яких немає втрат енергії або, вірніше, які можна з достатньою точністю вважати позбавленими таких втрат (механічні системи без тертя і без випромінювання пружних хвиль);

- електромагнітні системи (без опору і без випромінювання електромагнітних хвиль);

- дисипативні системи, в яких спочатку повідомлена енергія не залишається в процесі коливань постійною, а витрачається на роботу, внаслідок чого коливання затухають;

- автоколивальні системи, в яких відбуваються не лише втрати енергії, але і поповнення її за рахунок наявних в системі постійних джерел енергії [19]. Приклади автоколивних систем – механічний годинник, різноманітні автогенератори синусоїдних та несинусоїдних коливань та ін. Автоколивні системи також описуються нелінійними диференціальними рівняннями [20].

Ця класифікація, зрозуміло, в деякій мірі умовна. Так, наприклад, приливні коливання, викликані Місяцем, можуть розглядатися і як автоколивальні, якщо вони описуються в ізольованій системі Земля – Місяць,

і як вимушені, якщо розглядати Землю як замкнуту систему, на яку впливають зовнішній вплив гравітаційного поля Місяця [21].

У загальному випадку параметри коливальних конструкцій (маса, ємність, пружність і т.п.) залежать від процесів, що відбуваються в них. Такі коливальні конструкції описуються нелінійними рівняннями та відносяться до класу нелінійних систем. Конструкції, параметри яких з достатньою точністю можна вважати не залежними від процесів, що відбуваються в них, і описувати лінійними рівняннями називаються лінійними [19].

Неперіодичні коливання не мають сталого періоду коливань і є процесами, в яких стан системи повторюється через довільні і, як правило, неоднакові інтервали часу [22]. Останні будуть розглянуті докладніше у даній роботі.

Неперіодичні коливання можна розкласти на періодичні, які описуються функцією [23]:

$$f(t) = f(t + nT), \quad (1.2)$$

де  $T$  – період (найменший час повторення),  $n$  – число коливань.

Коливання систем з періодично змінними параметрами останнім часом ґрунтовно досліджувалися на основі рівнянь Матґе. Однак проблеми динаміки багатьох силових конструкцій і систем описуються диференціальними рівняннями з коефіцієнтами, неперіодично змінними в часі. До таких конструкцій належать, наприклад, авіаційні та космічні транспортні засоби, маса яких неперіодично змінюється з часом, конструкції телевізійних веж змінної жорсткості, підводні кабелі змінної в часі довжини та інші. Методи аналізу цих проблем неминуче відрізняються від коливань систем з періодично змінними чи постійними параметрами. Розв’язання зазначених задач базується на окремих випадках зміни маси або жорсткості системи, що допускають точний аналітичний розв’язок, або на використанні



числових методів інтегрування розв'язувальних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами та їх систем [24].

Під коливальними конструкціями, маса яких залежить від часу, розуміють стержні, балки, пластинки, оболонки і т.п. Наприклад, малий параметр при дослідженні коливань таких конструкцій може бути виражений відношенням товщини до найбільшого розміру, наприклад, довжини. Вимушені коливання з одним ступенем свободи з кубічною не лінійністю під дією випадкової сили описує рівняння:

$$f''(t) + c(t)f'(t) + \omega_0^2 f(t) + \alpha f^3(t) = \gamma(t), \quad (1.3)$$

де  $c(t)$  – функція демпфірування;

$\omega_0^2$  – частота коливань конструкції, пр. чому  $\omega_0 > 1$ ;

$\alpha$  – малий параметр, що лежить у межах від нуля до одиниці;

$\gamma(t)$  – змушуючи випадкова сила з відомими характеристиками [25; 26].

Необхідно відзначити, що в загальному випадку диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами не допускають точні аналітичні рішення. Для вирішення конкретного завдання в цьому випадку використовуються чисельні методи, які, однак, не дають можливість провести якісний аналіз отриманих рішень за характером змінності коефіцієнтів.

Надійні наближені аналітичні рішення на базі асимптотичних підходів дають можливість дати оцінку впливу входять до дозволеного рівняння коефіцієнтів на отриманні розв'язку і вказати область ефективного застосування прямих чисельних методів розрахунку [27]. Особливо це важливо на стадії проектувального розрахунку конструкцій нової техніки [28; 29], або вивчення нових фізичних процесів [30; 31; 32; 33; 34].

Колівальні системи описуються за допомогою диференціальних рівнянь вищого порядку з багатьма невідомими. Скласти такі рівняння можна двома способами. Перший спосіб базується на використанні загального рівняння кінетостатики, який об'єднує принцип можливих переміщень та принцип

Даламбера. Другий спосіб – це скласти диференціальне рівняння Лагранжа другого роду.

При складанні рівнянь першим способом координати є взаємозалежними величинами, тому для громіздких коливальних конструкцій рухливого типу використовувати такий метод досить складно.

За допомогою рівняння Лагранжа другого роду диференціальні рівняння скласти простіше. Замість залежних між собою координат у цьому випадку вводяться незалежні узагальнені координати [35].

В. І. Пожуєв та Д. В. Грищак [24] розглядають спеціальний випадок коливань одновимірної системи, що описується розв'язуючим диференціальним рівнянням зі змінними коефіцієнтами у вигляді

$$\frac{d}{dt} \left[ m(t) \frac{dX(t)}{dt} \right] + K(t)X(t) = P(t). \quad (1.4)$$

Як відомо, коли розв'язок однорідного рівняння (1.3)  $S_1(t)$  і  $S_2(t)$  знайдено, тоді загальний розв'язок задачі (1.4), відповідно до методу Лагранжа, запишеться так:

$$X(t) = C_1 S_1(t) + C_2 S_2(t) + S_p(t), \quad (1.5)$$

де

$$S_p(t) = -S_1(t) \int \frac{S_2(t)P(t)}{S_1(t)S_2'(t) - S_2(t)S_1'(t)} dt + \frac{S_1(t)P(t)}{S_1(t)S_2'(t) - S_2(t)S_1'(t)} dt \quad (1.6)$$

$$S_i(t) = \frac{dS_i(t)}{dt}, i = 1,2;$$

$S_i(t)$  – частинний розв’язок неоднорідного рівняння (1.4), який може бути отримано іншими методами;  $C_1$  і  $C_2$  – сталі, які визначаються початковими умовами.

Основна проблема полягає в знаходженні наближеного аналітичного розв’язку вихідного рівняння в загальному випадку зі змінними коефіцієнтами у часі [24].

### **1.3 Існуючі методи досліджень коливань систем з масою залежною від часу**

Реальні механічні коливальні системи континуальні, неконсервативні й нелінійні. Дослідження таких систем дуже важке, тому часто в практичних задачах розглядають спрощені коливальні системи.

Дослідження коливань складних елементів конструкцій можна звести до дослідження системи з однією ступінню вільності. Така система дає можливість встановити спільні властивості коливальних процесів [36].

Проте реальні споруди мають розподілені маси і тому мають нескінченне число ступенів вільності. При проведенні інженерних розрахунків розподілені маси, як правило, зводяться до зосереджених. Число зосереджених мас  $i$ , отже, число ступенів вільності залежить від виду конструкції і від необхідного ступеня точності розрахунку [37].

Так, наприклад, методи голографічної інтерферометрії дозволяють досліджувати коливання натурних об’єктів будь-як завгодно складної конструкції. При дослідженні міцності деталей і вузлів енергетичних установок, зокрема, газотурбінних двигунів, особливий інтерес представляють дослідження коливань дисків і коліс компресора і турбіни, як елементів, багато в чому визначають ресурс всієї конструкції [38].

Побудова аналітичних рішень у динаміці конструкцій, є складною і трудомісткою задачею [39; 40; 41]. Незважаючи на добре розроблену теорію

досліджень систем звичайних диференціальних рівнянь з постійними або змінними коефіцієнтами існують значні проблеми при інтегруванні звичайних диференціальних рівнянь. Основні причини цього полягають у відсутності ефективних методів побудови фундаментальних рішень.

Також існує проблема побудови аналітичних рішень відповідних неоднорідних систем рівнянь для довільних правих частин (зовнішніх впливів).

Дані проблеми значно ускладнюються при аналізі нелінійних коливань, зокрема при коливаннях конструкцій з виключаються зв'язками. Коливання таких систем приводять до зміни розрахункової схеми споруди і характеризують систему як конструктивна [42].

Ряд задач нелінійної динаміки механічних систем, зокрема коливань конструкцій, зводиться до отримання моментальних функцій розв'язку неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі змінними параметрами, зокрема зі змінною масою. Більшість таких задач отримати точний розв'язок неможливо. Аналіз поведінки особливо таких нелінійних нестационарних систем при випадкових впливах представляє певні труднощі у порівнянні з відповідним аналізом лінійних задач. Вище зазначені труднощі виникають уже на етапі складання рівнянь відносно моментних функцій вихідного процесу. Одним із засобів одержання деяких характеристик вихідного процесу є використання наближених методів усукупності з методом функцій Гріна [43].

Для безпеки роботи системи, теоретичними методами, враховуючи експериментальні дослідження, визначають амплітуди вимушених коливань (переміщень, внутрішніх зусиль і напружень), що виникають у конструкції від динамічного навантаження, а також частоту і форму власних (вільних) коливань системи. Розрахункові значення коливань порівнюють із допустимими, зумовленими вимогами міцності й стійкості конструкцій, а також необхідністю запобігти шкідливому впливові коливань (від вібрації) на здоров'я людини й певні виробничі процеси. Розроблений на основі методів

динаміки конструкцій динамічний розрахунок дає змогу забезпечувати з мінімальною витратою матеріалів надійність і довговічність конструкцій.

Методи динамічного розрахунку коливань конструкції залежать від виду динамічного навантаження і розрахункової схеми. Динамічні навантаження поділяються на детерміновані (змінюються в часі за певним законом, у нашому випадку з масою змінною у часі) і випадкові (змінюються в часі незакономірно та характеризуються статистичними величинами). Залежно від виду розрахункової схеми конструкції (балка, рама, арка, плита, оболонка) застосовують відповідний метод для визначення амплітуди коливань як функції координат точок конструкції.

У динамічних розрахунках коливання класифікуються за кількістю ступенів вільності, тобто за кількістю незалежних числових параметрів, що однозначно визначають положення усіх точок системи у просторі в будь-який фіксований момент часу. Якщо число ступенів вільності споруди є скінченним, то для його динамічного розрахунку зазвичай використовують метод розкладання рішення за власними функціями (формами коливань). Визначення спектра власних частот і відповідних їм форм власних коливань є важливим етапом динамічного розрахунку коливань конструкції, що дозволяє ще на ранній стадії проектування передбачити якісну картину вимушених коливань, максимально скоротити розрахунок і проаналізувати необхідність виконання можливого коректування проектних рішень [44].

Для дослідження вимушених коливань, зокрема коливань систем залежних від маси, застосовують й наступні методи розрахунку: повний, редукування і метод накладення форм. Ще один, дещо трудомісткий метод, полягає в застосуванні дослідження динамічних перехідних процесів при навантаженнях, гармонійно змінних у часі і отриманні якісно залежних результатів від історії навантаження.

Даний підхід є найбільш простим з усіх вищезазначених методів. Даний метод використовує для обчислення коливань конструкцій систему

повних матриць (не застосовує редукування матриць). Матриці можуть бути симетричними і несиметричними [45].

Перевагами цього підходу є:

- зручність застосування, оскільки немає необхідності у виборі керуючих ступенів свобод чи виду форм;
- метод використовує повні матриці, і тому наближені матриці не застосовуються;
- метод допускає використання несиметричних матриць, що притаманно для таких завдань, як акустика і розрахунок підшипникових опор;
- метод дозволяє обчислювати все переміщення і напруження в одному загальному кроці обчислень;
- метод використовує всі типи навантажень: вузлові зусилля, покладені на (ненульові) переміщення і елементарні навантаження (тиску і температури);
- метод геометричної моделі.

Незручністю методу є його підвищена по відношенню до інших методів обчислювальна трудомісткість при використанні фронтального методу розв'язання системи рівнянь [46].

Редукований метод дозволяє зменшити об'єм розрахунків завдання шляхом застосування керуючих ступенів свобод і редукування матриць. Після обчислення переміщень для набору керуючих ступенів свобод рішення повинно бути розширено до повного набору ступенів вільностей.

Метод накладення форм підсумовує факторізовано форми коливань (власні вектори), отримані в розрахунку власних коливань [45].

Метод фазних інтегралів – це асимптотичний метод Вентцеля – Крамерса – Бріллюена (і Джефрісу) рішення звичайних диференціальних рівнянь виду [47]

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 x}{dt^2} - q(t)x = 0.$$

Також для дослідження нелінійних дискретних динамічних систем з великою кількістю ступенів свободи ефективні напіваналітичні методи аналізу можуть бути більш розвинені. Такий метод може бути розроблений на основі сумісного застосування методу нелінійних нормальних форм Шоу–П’єра і методу багатьох масштабів [48].

#### 1.4 Якісний результат коливань систем з масою залежною від часу

Як відомо, коливання досить значної кількості технічних систем описуються диференціальними рівняннями зі змінними коефіцієнтами, які не допускають точного аналітичного розв’язку. Так, наприклад, у задачах динаміки космічних транспортних системах маса є функцією часу. Аналогічні проблеми виникають при дослідженні коливань підводних кабелів зі змінною за часом довжиною та в інших машинах і апаратах.

Для прикладу розглянемо коливання прямокутної тришарової шарнірно опертої пластини ( $a \times b$ ), з товщиною  $h$ , враховуючи змінну за часом питому вагу матеріалу  $\gamma(t)$ .

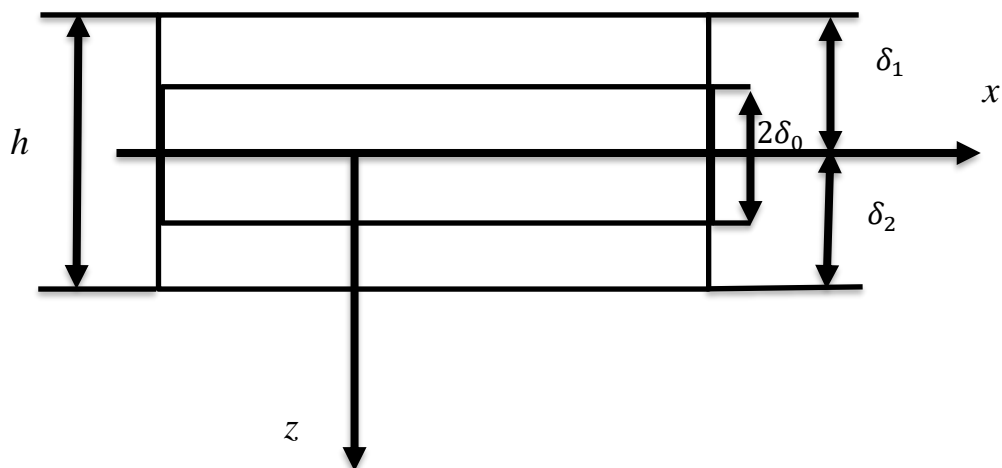


Рисунок 1.5 – Ортотропна симетрично зібрана пластина

Для розглянутої пластини (рис. 1.5), згідно з роботою Амбарцумяна С. А. [49], розглядається випадок, коли

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta, B'_{ik} = B''_{ik} = B_{ik}, \quad (1.7)$$

а відповідні жорсткості мають вигляд:

$$\begin{aligned} K_{ik} &= 0, \\ C_{ik} &= 2[\delta_0 B_{ik}^0 (\delta - \delta_0) B_{ik}], \\ D_{ik} &= \frac{2}{3} [\delta_0^3 B_{ik}^0 + (\delta^3 - \delta_0^3) B_{ik}]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

У загальному випадку динамічне навантаження зображується у формі

$$Z = q(t) \sin \frac{\pi y}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - 2 \frac{\gamma(t)}{g} h \varepsilon(t) \frac{dw}{dt} - \frac{\gamma(t)}{g} h \frac{d^2 w}{dt^2}, \quad (1.9)$$

де  $g$  – прискорення сили тяжіння,  $t$  – час.

Згідно з класичною теорією багатошарових пластин, можна отримати таке рівняння:

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \\ = q(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - 2 \frac{\gamma(t)}{g} h \varepsilon(t) \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\gamma(t)}{g} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Використовуючи апроксимацію, яка задовільняє граничним умовам

$$w(t) = f(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (1.11)$$



рівняння (1.10) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} & \left[ D_{11} \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 + 2 \frac{\pi^4}{a^2 b^2} (D_{12} + 2D_{66}) + D_{22} \left( \frac{\pi}{b} \right)^4 \right] f(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = \\ & = \left[ q(t) - 2 \frac{\gamma(t)}{g} h \varepsilon(t) f'(t) - \frac{\gamma(t)}{g} h f''(t) \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Позначивши

$$\tilde{D}(t) = \frac{\tilde{D}g}{a\gamma(t)}; \tilde{q}(t) = \frac{gq(t)}{a\gamma(t)}; \tilde{\varepsilon}(t) = \frac{h\varepsilon(t)}{a}; \lambda^2 = \frac{h}{a} \quad (1.13)$$

та враховуючи, що

$$\tilde{D} = D_{11} \left( \frac{\pi}{a} \right)^4 + 2 \frac{\pi^4}{a^2 b^2} (D_{12} + 2D_{66}) + D_{22} \left( \frac{\pi}{b} \right)^4$$

рівняння (1.12) можна записати у формі

$$\lambda^2 f''(t) + 2\tilde{\varepsilon}(t)f'(t) + \tilde{D}(t)f(t) = \tilde{q}(t). \quad (1.14)$$

Розв'язок цього рівняння, яке описує вимушені коливання досліджуваної системи, можна навести як суму однорідного та часткового розв'язку неоднорідного рівняння. Основна теоретична проблема полягає в одержанні розв'язку однорідного диференціального рівняння, яке відповідає за дослідження власних коливань системи

$$\lambda^2 f''(t) + 2\tilde{\varepsilon}(t)f'(t) + \tilde{D}(t)f(t) = 0, \quad (1.15)$$

де  $\lambda$  – безрозмірний параметр при старшій похідній.

Провівши відповідні підстановки, розв'язок, отриманий за гібридним ВКБ–Гальоркін методом може бути записаний у формі

$$\tilde{f}(t, \lambda) = \exp \left[ \int_a^t [\delta_{01}(\lambda) + i\delta_{02}(\lambda)] f_0(t) \right] dt. \quad (1.16)$$

враховуючи

$$\begin{cases} f_1 = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ln f_0, \\ f_0 = \pm i \left[ 2 \int \frac{e^{2 \int \frac{\tilde{D}(t) dt}{\bar{\varepsilon}(t)}}}{\bar{\varepsilon}(t)} dt \right]^{-\frac{1}{2}} e^{\int \frac{\tilde{D}(t) dt}{\bar{\varepsilon}(t)}}, \end{cases}$$

та

$$\begin{cases} \delta_{01} = \frac{\sqrt{4BW - A^2}}{2B}, \\ \delta_{01} = \pm \frac{A}{2B}. \end{cases}$$

Слід відзначити, що отриманий гібридний розв'язок є однорідним розв'язком рівняння (1.15). Для отримання часткового розв'язку зазвичай застосовують метод варіації параметрів [25].

## 2 НАБЛИЖЕНИЙ АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ СИСТЕМ З МАСОЮ ЗАЛЕЖНОЮ ВІД ЧАСУ

### 2.1 Основні рівняння вимушених коливань

Вимушеними називаються коливання, що виникають у системі під дією періодичного зовнішнього фактору. Це може бути періодична сила, змінна напруга і т. ін [50].

Коливання реальних коливальних систем через наявність сил тертя або опору є згасаючими. Однак у техніці бувають випадки, коли потрібні незгасаючі коливання. Наприклад, у годинниках, у коливальних контурах генераторів (передавачів). Тому використовуються вимушені коливання – коливання під дією періодичної сили, яка поповнює втрати енергії, що йдуть на подолання опору.

Нехай вимушуюча сила змінюється за законом косинуса:

$$F_{\text{вим}} = F_0 \cos \omega t. \quad (2.1)$$

Повна сила, яка діє на точку з масою  $m$ , що коливається, дорівнює алгебраїчній сумі квазіпружної сили, сили тертя і вимушуючої сили. Рівняння руху точки буде:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -r \frac{dx}{dt} - kx + F_0 \cos \omega t. \quad (2.2)$$

Розділимо ліву і праву частини на  $m$  і перенесемо доданки, що містять  $x$ , в ліву частину рівняння; одержимо шукане диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (2.3)$$

Замінивши

$$\frac{r}{m} = 2\beta, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad (2.4)$$

дістанемо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (2.5)$$

Це неоднорідне диференціальне рівняння в загальному вигляді даної постановки задачі.

Визначимо вплив параметрів  $\omega$  та  $\beta$  на вимушені коливання рівняння (2.5). Для цього розв'яжемо рівняння (2.5) з початковими умовами  $x(0) = 0, x'(0) = 1$  та зобразимо рішення, отримане прямим чисельним методом, на графіках з різними значеннями параметрів  $\omega$  та  $\beta$  (рис. 2.1 – 2.2).

З рис. 2.1 бачимо, що параметр  $\omega$  майже не впливає на згасання вимушених коливань за часом. З рис. 2.2, навпаки, зі зростанням параметру  $\beta$ , зростає швидкість згасання вимушених коливань.

Розв'язком диференціального рівняння вимушених коливань у загальному вигляді даної постановки задачі є гармонічна функція.

З рис. 2.3 видно, що різниця фаз  $\Delta\psi = \psi$  між вимушеними коливаннями тіла і коливаннями сили, яка змінюється від нуля (у фазі) до  $\pi$  (у протифазі), залежить від частоти. При резонансі ( $\omega = \omega_0$ )  $\psi = \frac{\pi}{2}$  [5].

Відомо, що якщо на систему крім пружної сили  $F = -kx$  та сили опору  $F_o = -rv$  діє зовнішня періодична змушуюча сила  $F_{\text{вим}} = F_0 \cos \omega_1 t$ , то коливання в системі, що існують впродовж тривалого часу, є вимушеними.

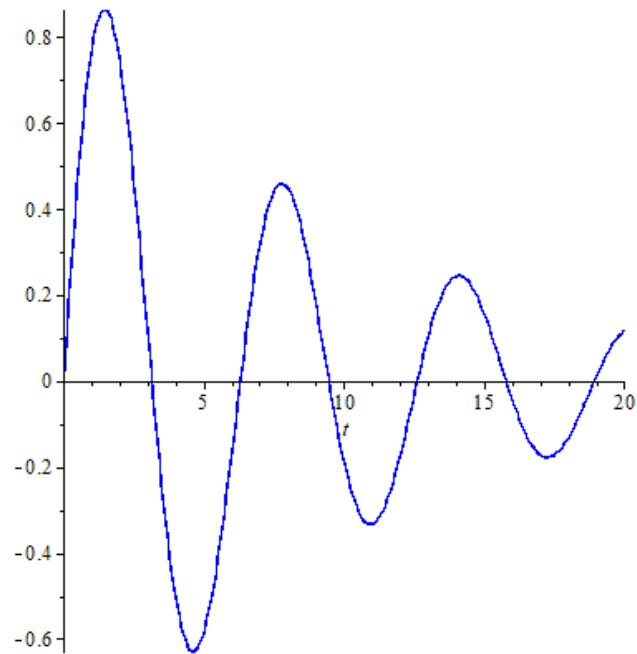


Рисунок 2.1 – Розв’язок рівняння (2.5) з вхідними параметрами  
 $\beta = 0.1, \omega_0 = 1, \frac{F_0}{m} = 1, \omega = 100$  (чорний),  $\omega = 500$  (червоний),  
 $\omega = 1000$  (синій)

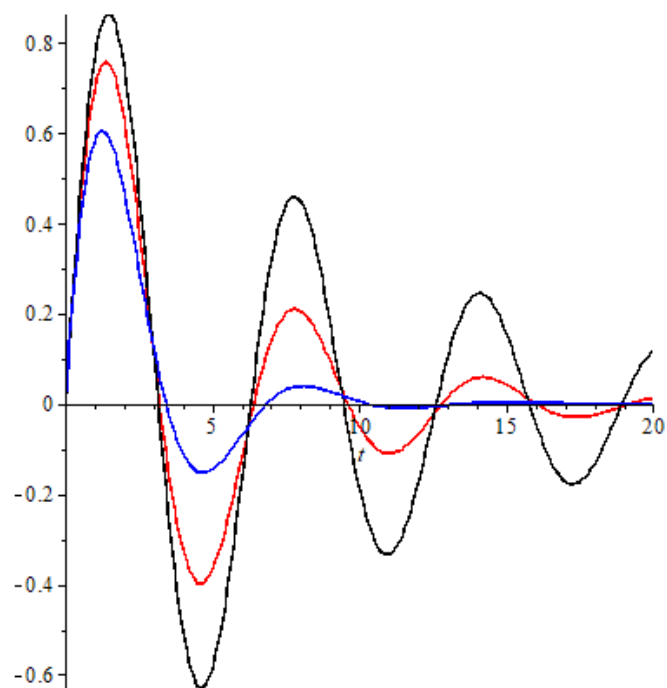


Рисунок 2.2 – Розв’язок рівняння (2.5) з вхідними параметрами  
 $\omega = 100, \omega_0 = 1, \frac{F_0}{m} = 1, \beta = 0.1$  (чорний),  $\beta = 0.2$  (червоний),  
 $\beta = 0.4$  (синій)

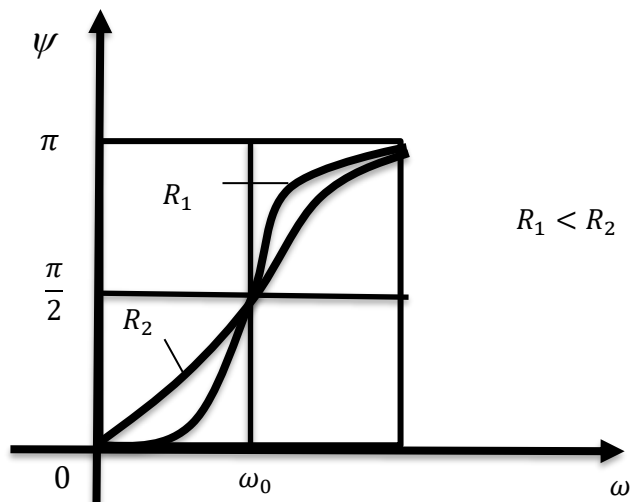


Рисунок 2.3 – Залежність різниці фаз  $\psi$  від частоти  $\omega$

Рівняння руху одновірної коливної системи в даному випадку запишемо в наступному вигляді [5]:

$$m\bar{a} = \bar{F} + F_0 + F_{\text{вим}}$$

або

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega_1 t. \quad (2.6)$$

Ввівши позначення  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ ;  $\frac{r}{m} = 2\beta$ ;  $\frac{F_0}{m} = f_0$ , кінцево отримаємо рівняння руху системи:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega_1 t. \quad (2.7)$$

Рівняння (2.7) називають неоднорідним нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку. Загальний розв'язок такого рівняння складається з загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і часткового розв'язку неоднорідного рівняння (2.7). Загальний розв'язок однорідного

рівняння (тобто рівняння, в якому права частина дорівнює нулю) дає вираз  $x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos \omega t$ . Ці власні коливання системи виникають у початковий проміжок часу дії вимушуючої сили, однак за тривалої дії вимушуючої сили ( $t \gg \tau$ , де  $\tau = \frac{1}{\beta}$ ) власні коливання практично згасають.

На початку своєї дії вимушуюча сила перевищує силу опору, а тому робота цієї сили сприяє збільшенню кінетичної енергії коливань та їхньої амплітуди. Із зростанням енергії коливань сила опору поступово збільшується, її величина пропорційна швидкості) і кінцево настає стабілізація вимушених коливань, у випадку якої дія сили тертя зрівноважується вимушуючою силою і коливання стають стабільними [5].

Процес встановлення вимушених коливань схематично показано на рис. 2.4.

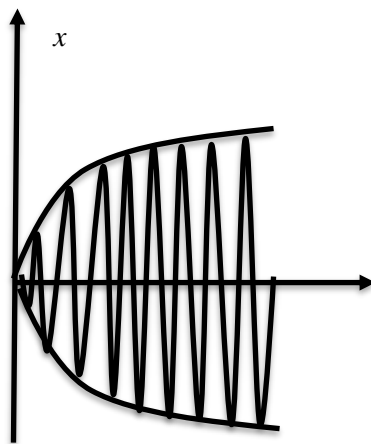


Рисунок 2.4 – Встановлення вимушених коливань

Знайдемо амплітуду  $A$  установлених (стабільних) вимушених коливань та їхній зсув фази по відношенню до фази вимушуючої сили. Вважаємо, що вимушене коливання відстає за фазою від вимушуючої сили на кут  $\varphi$ . Частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$x_2 = A \cos(\omega t - \varphi)$$

Підставимо цей розв'язок у рівняння руху (2.7) і розв'яжемо рівняння, використавши метод векторних діаграм:

$$\dot{x}_2 = -A\omega_1 \sin(\omega_1 t - \varphi) = A\omega_1 \cos\left(\omega_1 t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\ddot{x}_2 = -A\omega_1^2 \cos(\omega_1 t - \varphi) = A\omega_1^2 \cos(\omega_1 t - \varphi + \pi).$$

Після підстановки  $x_2$ ,  $\dot{x}_2$  та  $\ddot{x}_2$  отримаємо:

$$\begin{aligned} A\omega_1^2 \cos(\omega_1 t - \varphi + \pi) + 2\beta\omega_1 \cos\left(\omega_1 t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + A\omega_0^2 \cos(\omega_1 t - \varphi) = \\ = f_0 \cos \omega_1 t \end{aligned}$$

Таким чином, гармонійна функція  $f \cos \omega_1 t$  виражена як сума трьох гармонійних коливань, які можна зобразити як три вектори, повернуті один відносно одного на кут  $\frac{\pi}{2}$ . Вектор амплітуди вимушуючої сили  $\bar{f} = \bar{A}_1$  дорівнює векторній сумі векторів:

$$A_2 = A\omega_0^2 \text{ (зсунутий по фазі відносно } \bar{A}_1 \text{ на кут } -\varphi \text{)}$$

$$A_3 = 2A\beta\omega_1 \text{ (випереджає } \bar{A}_2 \text{ на кут } \frac{\pi}{2} \text{) і}$$

$$A_4 = A\omega_1^2 \text{ (випереджає } \bar{A}_2 \text{ на кут } p \text{)}.$$

У прямокутному трикутнику ОВД (рис. 2.5) вектор  $\bar{A} = \bar{f}_0$  є гіпотенузою:

$$f_0^2 = |A_3|^2 + |\bar{A}_2 + \bar{A}_4|$$

$$f_0^2 = (2A\beta\omega_1)^2 + [A(\omega_0 - \omega_1)]^2$$



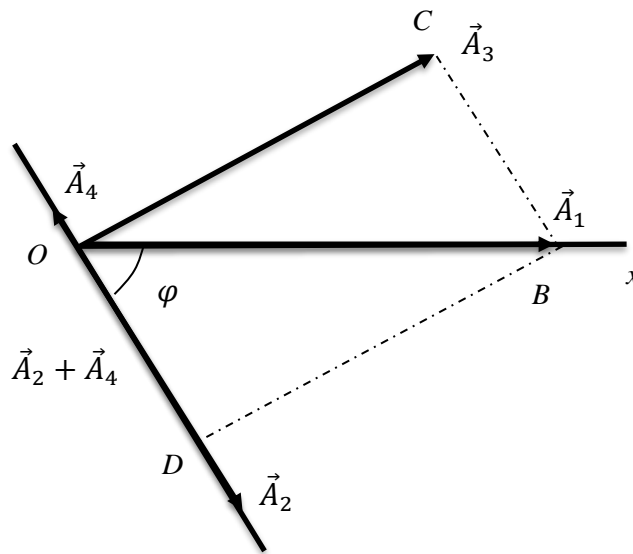


Рисунок 2.5 – Векторний розв’язок рівняння руху для вимушених коливань

З цього виразу амплітуда вимушених коливань:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta^2 \omega_1^2}} \quad (2.8)$$

$$\tan \varphi = \frac{|A_3|}{|A_1 + A_4|} = \frac{2\beta\omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \quad (2.9)$$

Таким чином, рівняння вимушених коливань має наступний вигляд:

$$x_2 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta^2 \omega_1^2}} \cos(\omega_1 t - \varphi), \quad (2.10)$$

в якому відставання за фазою вимушених коливань  $\varphi$  (2.8).

Проаналізуємо детальніше залежність виразу (2.9) від частоти вимушуючої сили  $\omega_1$ .

За умови  $\omega_1 = 0$  на систему діє стаціонарна сила  $F_0$ . Тоді

$$A = A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}.$$

Зміщення системи під дією стаціонарної сили аналогічне зміщенню під час статичної деформації

$$x = A_0 = \frac{F_0}{m\frac{k}{m}} = \frac{F_0}{k}. \quad (2.11)$$

За умови відсутності сил опору середовища ( $\beta = \frac{r}{2m} = 0$ ) вираз (2.8) набуває вигляду:

$$A = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)}. \quad (2.12)$$

На підставі (2.11) бачимо, що із збільшенням частоти  $\omega_1$  від  $\omega_1 = 0$  амплітуда коливань зростає, прямуючи до нескінченості при  $\omega_1 = \omega_0$ .

Коли  $\omega_1$  перевищує  $\omega_0$  збільшення кругової частоти  $\omega_1$  вимушуючої сили веде до зменшення амплітуди коливань (рис. 2.6).

За наявності сил опору ( $\beta = \frac{r}{2m} \neq 0$ ) графік залежності амплітуди вимушених коливань  $A$  від частоти  $\omega_1$  матиме максимум, що відповідає мінімальному значенню підкореневого виразу в (2.8). Щоб знайти умову, за якої амплітуда досягає максимального значення, прирівняємо до нуля похідну від підкореневого виразу по  $\omega_1$  отримаємо:

$$-4(\omega_0^2 - \omega_{1p}^2)\omega_{1p} + \delta\beta\omega_{1p} = 0, \quad (2.13)$$

де  $\omega_{1p}$  – частота вимушуючої сили, за якої амплітуда вимушених коливань набуває максимального значення  $A = A_{max}$ .

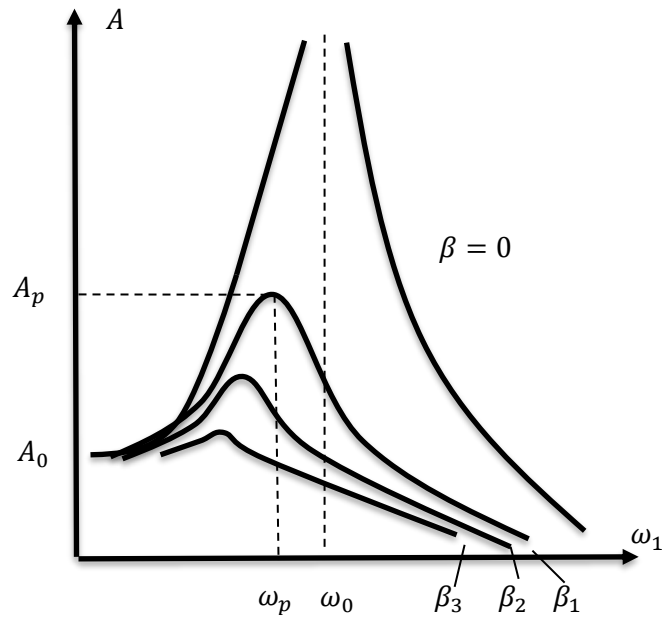


Рисунок 2.6 – Амплітудні резонансні криві

Розв'язавши (2.13) отримуємо [51]:

$$\omega_{1p} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (2.14)$$

## 2.2 Метод фазних інтегралів (ВКБ) і його застосування до розв'язку задачі динаміки гіроскопічної системи

Рівняння (1.1) можна перебудувати у форму

$$\frac{d}{dt} \left[ m(t) \frac{dX(t)}{dt} \right] + K(t)X(t) = 0. \quad (2.15)$$

де  $K(t)$  враховує ефект обертання досліджуваної системи, а саме  $\Omega^2$ , при відсутності зовнішнього навантаження.

Рівняння (2.15) є наближеним аналітичним розв'язком вихідного рівняння (1.4) у загальному випадку зі змінними коефіцієнтами у часі для гіроскопічної динамічної системи та розв'язком (1.4) на основі

методу фазних інтегралів, у випадку вільних коливань,  $P(t) = 0$ , права частина вихідного рівняння перетворюється на нуль.

Виключаючи першу похідну з однорідного рівняння (2.15), маємо

$$Z'(t) + \left[ \tilde{K}(t) - \frac{\tilde{D}(t)}{2} - \frac{\tilde{D}^2(t)}{2} \right] Z = 0, \quad (2.16)$$

де

$$X(t) = Z(t) \exp \int -\frac{\tilde{D}(t)}{2} dt. \quad (2.17)$$

Введемо позначення

$$\varepsilon^2 Z''(t) + F(t)Z = 0, \quad (2.18)$$

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{\Phi_0}, \quad \Phi(t) = \Phi_0 F(t),$$

$$\Phi(t) = \tilde{K}(t) - \frac{\tilde{D}(t)}{2} - \frac{\tilde{D}^2(t)}{2}, \quad F(t) = \frac{\Phi(t)}{\Phi_0}. \quad (2.19)$$

Відповідно до методу фазних інтегралів у першому наближенні отримаємо [52; 53]:

$$Z(t) = C_1 \sin I_1 + C_2 \cos I_1, \quad (2.20)$$

де

$$I_1 = \int \varepsilon^{-1} F(t)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Використовуючи початкові умови.

$$X(0) = 0, X'(0) = 1, \quad (2.21)$$

маємо

$$\begin{aligned} X(0) &= [C_1 \sin I_1|_0 + C_2 \cos I_1|_0] \exp \int -\frac{\bar{D}(t)}{2} dt \Big|_0 = 0; \\ X'(0) &= [C_1 \cos I_1 \cdot I_1' - C_2 \sin I_1 \cdot I_1'] \exp \int -\frac{\bar{D}(t)}{2} dt \Big|_0 + \\ &+ [C_1 \sin I_1|_0 + C_2 \cos I_1|_0] \left(-\frac{\bar{D}(t)}{2}\right) \exp \int -\frac{\bar{D}(t)}{2} dt \Big|_0 = 1. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Із системи (2.22) визначаємо довільні сталі інтегрування.

Розглянемо вплив зміни швидкості маси на характер коливального процесу системи зі сталими характеристиками. У цьому випадку матимемо:

$$\begin{aligned} D(t) &= D_0, K(t) = K_0, P(t) = 0; \quad (2.23) \\ \Phi(t) &= \Phi_0 F(t) = \frac{K_0}{m_0} \left[ \frac{m_0}{m(t)} - \frac{D_0 m_0}{2K_0 m(t)} - \frac{D_0^2 m_0}{4K_0 m^2(t)} \right]. \end{aligned}$$

Розглянемо випадок, коли маса системи зменшується за експоненціальним законом, тобто

$$m(t) = m_0 e^{-\alpha t},$$

тоді

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{K_0}{m_0}, F(t) = \frac{m_0}{m(t)} - \frac{D_0 m_0}{2K_0 m(t)} - \frac{D_0^2 m_0}{4K_0 m^2(t)} = \\ &= e^{\alpha t} - \frac{D_0}{2K_0} e^{\alpha t} - \frac{D_0^2}{4K_0 m_0} e^{2\alpha t} = e^{\alpha t} \left[ 1 - \frac{D_0}{2K_0} - \frac{D_0^2}{4K_0 m_0} e^{\alpha t} \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Для простоти розрахунку розглянемо випадок відсутності демпфування системи,  $D_0 = 0$ , тоді

$$\Phi_0 = \frac{K_0}{m_0}, F(t) = e^{\alpha t}, \varepsilon^2 = \frac{m_0}{K_0}, \varepsilon = \left(\frac{m_0}{K_0}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.25)$$

З урахуванням співвідношення (2.25) розв'язок (2.10) набуде вигляду:

$$Z(t) = C_1 \sin \int \varepsilon^{-1} F(t)^{\frac{1}{2}} dt + C_2 \cos \int \varepsilon^{-1} F(t)^{\frac{1}{2}} dt; \quad (2.26)$$

$$Z(t) = C_1 \sin \left[ \varepsilon^{-1} \frac{2}{\alpha} e^{\frac{1}{2}\alpha t} \right] + C_2 \cos \left[ \varepsilon^{-1} \frac{2}{\alpha} e^{\frac{1}{2}\alpha t} \right]. \quad (2.27)$$

Тоді розв'язок вихідного рівняння можна записати так:

$$X(t) = Z(t) \exp \int -\frac{\tilde{D}(t)}{2} dt,$$

де

$$\tilde{D}(t) = \frac{m'(t)}{m(t)} = \frac{m_0(-\alpha)e^{-\alpha t}}{m_0 e^{-\alpha t}} = -\alpha$$

або

$$X(t) = Z(t) \exp \left[ +\frac{\alpha}{2} t \right]. \quad (2.28)$$

Остаточно матимемо:

$$X(t) = \exp \left[ +\frac{\alpha}{2} t \right] \left\{ C_1 \sin \left[ \frac{2\varepsilon^{-1}}{\alpha} e^{\frac{1}{2}\alpha t} \right] + C_2 \cos \left[ \frac{2\varepsilon^{-1}}{\alpha} e^{\frac{1}{2}\alpha t} \right] \right\};$$

$$X(t) = \exp\left[+\frac{\alpha}{2}t\right] \left\{ C_1 \sin\left[\beta e^{\frac{1}{2}\alpha t}\right] + C_2 \cos\left[\beta e^{\frac{1}{2}\alpha t}\right] \right\}, \quad (2.29)$$

де

$$\beta = \frac{2\varepsilon^{-1}}{\alpha}. \quad (2.30)$$

З урахуванням початкових умов (2.21) отримуємо

$$X(0) = C_1 \sin \beta + C_2 \cos \beta, \quad (2.31)$$

$$X'(0) = \left(-\frac{\alpha}{2}\right) \{C_1 \sin \beta + C_2 \cos \beta\} + \\ + \left\{ \frac{1}{2} \alpha \beta C_1 \cos \beta - \frac{1}{2} \alpha \beta C_2 \sin \beta \right\} = 1. \quad (2.32)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (2.31)–(2.32), визначаємо довільні сталі:

$$C_1 \left\{ \frac{\alpha}{2} \sin \beta + \frac{1}{2} \alpha \beta \cos \beta \right\} + C_2 \left\{ -\frac{\alpha}{2} \cos \beta - \frac{1}{2} \alpha \beta \sin \beta \right\} = 1; \\ C_1 \left\{ -\frac{\alpha}{2} \sin \beta + \frac{1}{2} \alpha \beta \cos \beta \right\} + C_2 \left\{ \frac{\alpha}{2} \sin \beta + \frac{1}{2} \alpha \beta \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} \right\} = 1; \quad (2.33)$$

$$C_1 \left\{ \frac{1}{\cos \beta} - \frac{1}{2} \alpha \beta \right\} = 1. \quad (2.34)$$

Остаточний розв'язок з урахуванням початкових умов запишеться так:

$$X(t) = \exp\left[-\frac{\alpha}{2}t\right] \left\{ \frac{2 \cos \beta}{\alpha \beta} \sin\left(\beta e^{\frac{1}{2}\alpha t}\right) - \frac{2 \sin \beta}{\alpha \beta} \cos\left(\beta e^{\frac{1}{2}\alpha t}\right) \right\}. \quad (2.35)$$

де  $\alpha$  та  $\beta$  включає в себе гіроскопічних ефект обертання:

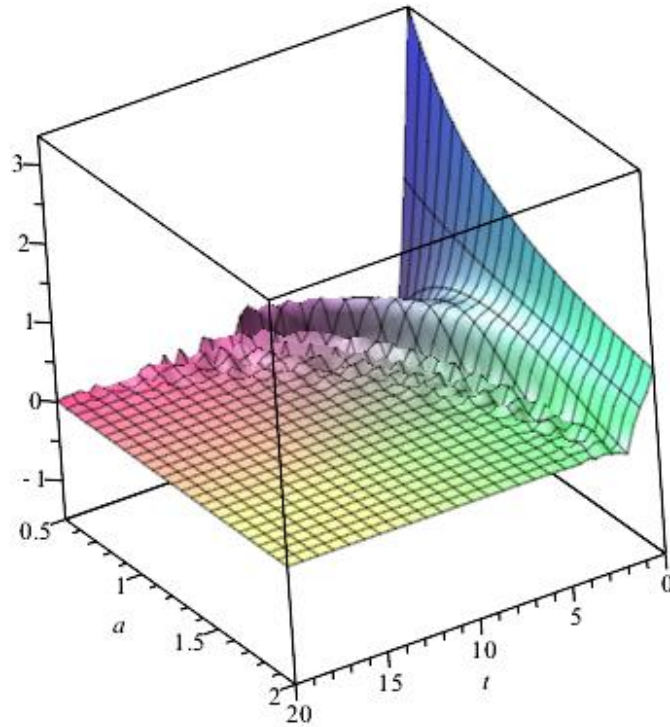


Рисунок 2.7 – Залежність (2.35) від параметру  $\alpha$  ( $\alpha = 0.5..2$ ) при  $\beta = 1$

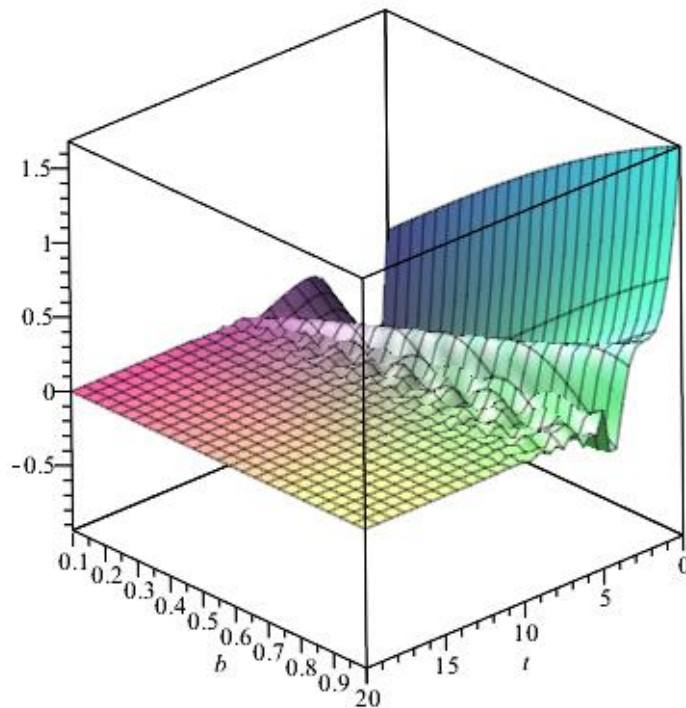


Рисунок 2.8 – Залежність (2.35) від параметру  $\beta$  ( $\beta = 0.1..1$ ) при  $\alpha = 1$



$$\beta = \frac{2\varepsilon^{-1}}{\alpha} = \frac{2}{\alpha \sqrt{\frac{m_0}{K_0}}} = \frac{2}{\alpha \frac{\sqrt{m_0}}{\Omega}} = \frac{2}{\alpha I_x \frac{\sqrt{m_0}}{[c + (I_z - I_y)\dot{\phi}^2]}}$$

Для (2.35) побудовано графіки залежності від параметру  $\alpha$  і параметру  $\beta$ .

З рис. 2.7 – 2.8 робимо висновок, що при зростанні параметра  $\alpha$  йде швидке згасання процесів коливання, параметр  $\beta$ , з його зростанням, впливає на повільність коливання.

### 2.3 Чисельний аналіз на базі наближеного аналітичного підходу

Вихідні дані для числових розрахунків:

$$K_0 = 40000 \frac{H}{m}; m_0 = 100 H; \alpha = 1;$$

$$\varepsilon = \left(\frac{m_0}{K_0}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,05; \beta = 40. \quad (2.36)$$

Пряме числове інтегрування проводиться з вихідного рівняння (1.4) у вигляді:

$$X''(t) - \alpha X'(t) + \frac{K_0}{m_0} e^{\alpha t} X(t) = 0. \quad (2.37)$$

Для прийнятих параметрів системи матимемо [24]:

$$X''(t) - X'(t) + 400e^t X(t) = 0. \quad (2.38)$$

Результати числового аналізу на основі наближеного аналітичного методу і числового інтегрування вихідного рівняння (2.15) та (2.38) наведено на рис. 2.9– 2.10.

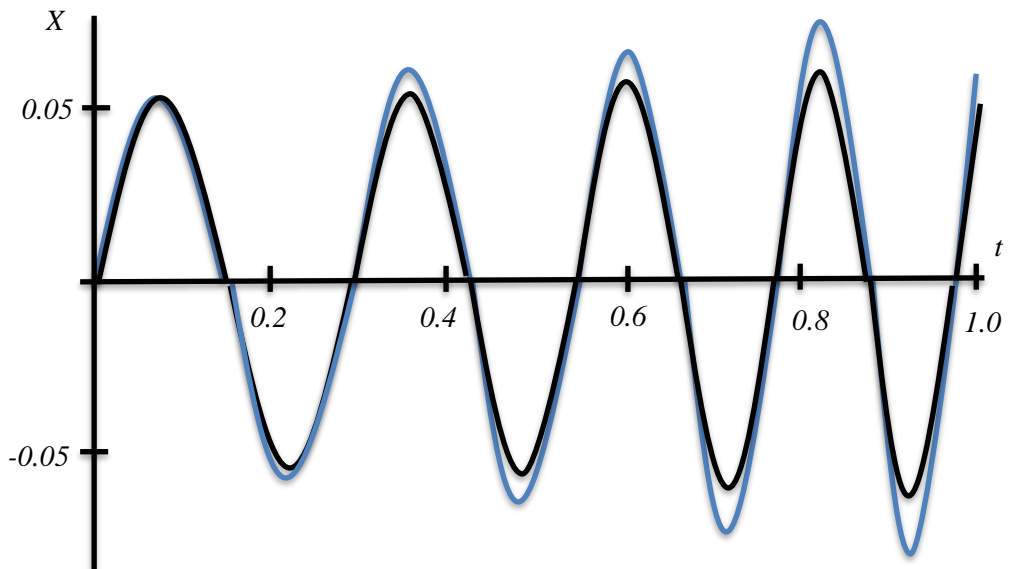


Рис. 2.9 – Результати порівняльного аналізу наближеного аналітичного розв'язку з числовими розрахунками

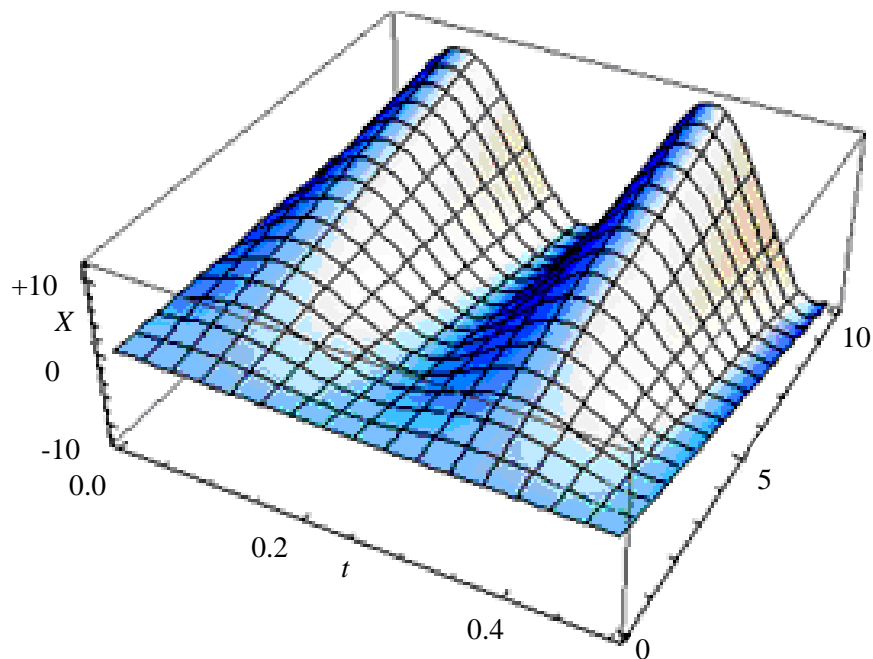


Рис. 2.10 – Залежність амплітуди коливань від величини малого параметра

Зроблений порівняльний аналіз показує добру відповідність результатів, що є підтвердженням ефективності запропонованого наближеного аналітичного розв'язку задачі для заданих параметрів системи [24].

Запропоновані наближені аналітичні розв'язки, що визначають природні форми коливань одноступінчастої стрижневої системи змінної маси, можуть бути використані для аналізу вільних та вимушених коливань багатоступеневих конструкцій з параметрами, залежними від часу [24].

### 3 ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ГІРОСКОПІЧНОЇ СИСТЕМИ З МАСОЮ НЕПЕРІОДИЧНО ЗАЛЕЖНОЮ ВІД ЧАСУ

Для прикладу розглянемо коливання гіроскопічної системи із змінною у часі масою. Визначимо, як загасають коливання цієї системи з експоненціальною зміною маси, без урахування реактивної сили. Для відповіді на поставлене питання треба вирішити диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m_0} e^{-\lambda t} \frac{dx}{dt} + \tau^2 e^{-\lambda t} x = 0,$$

де  $\frac{k}{m_0} e^{-\lambda t} = 2d\Omega$ ,  $\tau^2 e^{-\lambda t} = \Omega^2$ ,  $N\omega_0 \sin \phi t = 0$ , при початкових умовах  $(x(t_0) = x_0; \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0)$ , поклавши  $t_0 = 0$ .

У даному випадку:

$$\Phi(t) = \frac{k}{m_0} e^{-\lambda t}; \quad \psi(t) \equiv 0.$$

Обчисливши інтеграли

$$a(t) = f^{-\frac{1}{4}}(t) \exp \left[ -\frac{1}{2} \int \Phi(t) dt \right];$$

$$F(t) = \int \left\{ \tau \sqrt{f} + \frac{1}{2\tau \sqrt{f}} \left[ \psi - \frac{\Phi^2}{4} - \frac{\dot{\Phi}}{2} - \frac{\ddot{f}}{4f} + \frac{5}{16} \left( \frac{\dot{f}}{f} \right)^2 \right] \right\} dt.$$

Знаходимо:

$$a(t) = \exp \left[ \frac{\lambda}{4} t + \frac{k}{2\lambda m_0} e^{-\lambda t} \right];$$

$$F(t) = -\frac{\tau}{\lambda} e^{-\frac{\lambda}{2}t} + \frac{1}{2\tau} \left[ \frac{1}{6\lambda} \left( \frac{k}{m_0} \right)^2 e^{\frac{3}{2}\lambda t} - \frac{k}{m_0} e^{-\frac{\lambda}{2}t} + \frac{\lambda}{8} e^{\frac{\lambda}{2}t} \right]. \quad (3.5)$$

Тоді вирішенням поставленого завдання є:

$$x(t) = \exp \left[ \frac{\lambda}{4}t + \frac{k}{2\lambda m_0} (1 - e^{-\lambda t}) \right] [C_1 \cos(T(t)) + C_2 \sin(T(t))], \quad (3.6)$$

де

$$T(t) = \frac{2\tau}{\lambda} \left( 1 - e^{-\frac{\lambda}{2}t} \right) + \frac{1}{2\tau} \left[ \frac{1}{6\lambda} \left( \frac{k}{m_0} \right)^2 \left( e^{\frac{3}{2}\lambda t} - 1 \right) + \frac{k}{m_0} \left( 1 - e^{-\frac{\lambda}{2}t} \right) + \frac{\lambda}{8} \left( e^{\frac{\lambda}{2}t} - 1 \right) \right];$$

з початкових умов та (3.6) отримаємо:

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 - \left( \frac{\lambda}{4} - \frac{k}{2m_0} \right) x_0}{\omega - \frac{1}{2\tau} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{k}{m_0} \right)^2 - \frac{k\lambda}{2m_0} - \frac{\lambda^2}{16} \right]},$$

де

$$\frac{k}{m_0} = \frac{2d\Omega}{e^{-\lambda t}} = \frac{\mu[c + (I_z - I_y)\dot{\phi}^2]}{\omega I_x I_y e^{-\lambda t}}.$$

З рішення (3.6) випливає та на рис. 3.1 – 3.2 наглядно проілюстровано, що коливання гіроскопічної системи загасають незалежно від значення  $k$  лише при убутті маси ( $\lambda < 0$ ). У разі зростання маси, загасання коливань немає, при  $k < 0,5 \lambda m_0$ . Коли  $k < 0,5 \lambda m_0$  на проміжку часу  $t \in (0; t^*)$  амплітуди коливань зменшуються, далі при  $t > t^*$  – вони зростають, час  $t^*$  визначається виразом

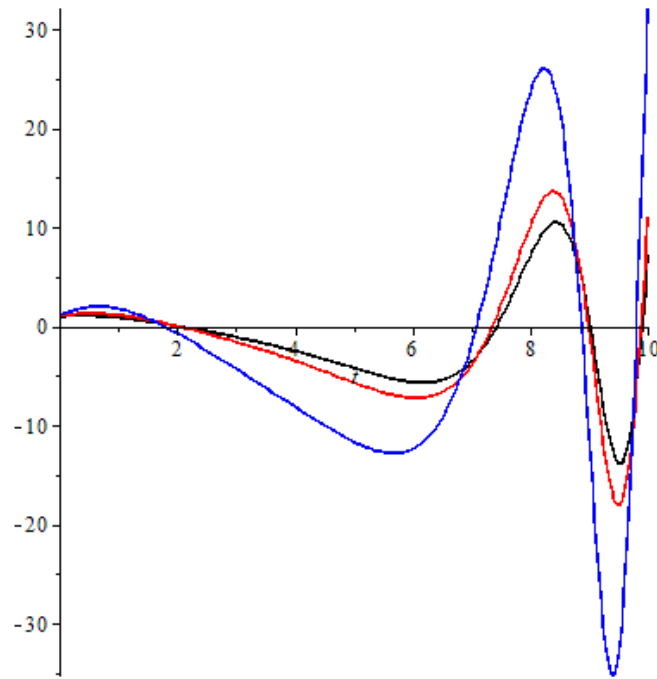


Рисунок 3.1 – Порівняльний аналіз впливу параметра  $\frac{k}{m_0}$  на рішення (3.6), при  $\lambda = 1, x_0 = 1, \tau = 1, \frac{k}{m_0} = 0.5$  (чорний),

$$\frac{k}{m_0} = 1 \text{ (червоний)}, \frac{k}{m_0} = 2 \text{ (синій)}$$

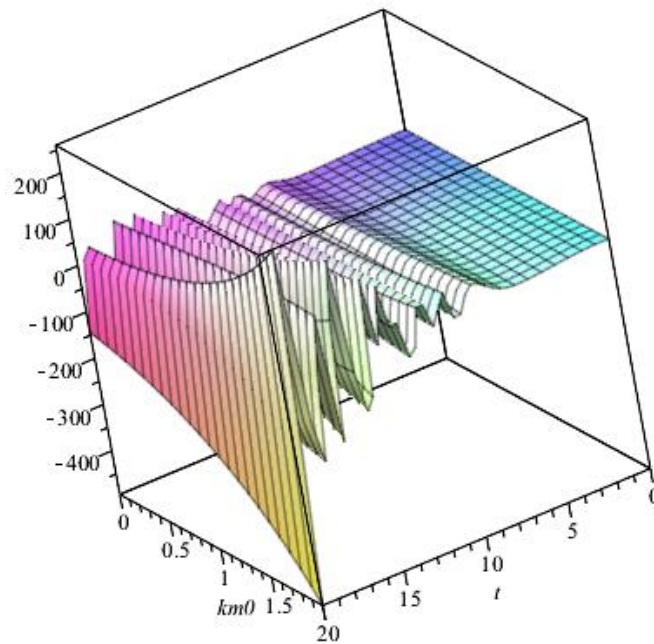


Рисунок 3.2 – Вплив параметра  $\frac{k}{m_0}$  ( $\frac{k}{m_0} = 0.2$ ) на рішення (3.6), при

$$\lambda = 1, x_0 = 1, \tau = 1$$

$$t^* = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{2k}{\lambda m_0}.$$

Таким чином, при експоненційному зростанні маси гіроскопічної системи з постійним коефіцієнтом  $k$  може забезпечити загасання коливань лише на кінцевому проміжку часу.

## ВИСНОВКИ

У даній роботі надано результати розрахунків для систем з неперіодичними коефіцієнтами з урахуванням гіроскопічних ефектів. Розглянуто окремий випадок, коли параметри частоти власних коливань і геометричні параметри змінюються в часі, побудовано розв'язки диференціального рівняння вимушених коливань систем зі змінними у часі параметрами отриманими методом фазних інтегралів (ВКБ), а також розглянуті коливання гіроскопічної системи із змінною у часі масою. Надано співставлення чисельних та асимптотичних методів розв'язку задач динаміки гіроскопічних систем з масою, неперіодично залежних від часу.

Показано, що параметр гіроскопічності (обертання) досліджуваної системи із масою залежною від часу суттєво залежить від характеру зміни параметру  $\beta$ .

Дані результати можуть бути застосовані у дослідженні вимушених коливань більш складних гіроскопічних систем, параметр яких залежить від часу, а в подальшому і для нелінійних подібних задач динаміки, застосовуючи метод збурення по параметру нелінійності системи.



**ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ**

1. Ольшанський В. П. Вільні коливання осцилятора змінної маси з позиційним тертям. Київ: науково–технологічний журнал, 2015. С. 27–33.
2. Gristchak V. Z., Golovan O. A. Asymptotic Solution for Nonlinear Dynamic of Mechanical Systems with Time Dependent Parameters. Bulletin of ZNU. Zaporizhzhya: Zaporizhzhya National University, 1995. P. 183–190.
3. Gristchak V. Z., Kabak V. N. Double Asymptotic Method for Nonlinear Forced Oscillations Problem of Mechanical Systems with Time Dependent Parameters. Bulletin of ZNU. Zaporizhzhya: Zaporizhzhya National University, 1996. P. 285–296.
4. Грищак В. З., Кабак В. М. Про один асимптотичний підхід до дослідження вимушених коливань механічних систем з демпфіруванням, параметри яких залежать від часу. Вісник Запорізького державного університету. Запоріжжя: Запорізький Національний Університет, 1998. С. 28–30.
5. Болотин В. В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. Москва: Издательство литературы по строительству, 1971. 255 с.
6. Гироскоп. Wikipedia. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B8%D1%80%D0%BE%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%BF>.
7. IvS. Как это работает: гироскоп. Trashbox. URL: <https://trashbox.ru/topics/41482/kak-eto-rabotaet-giroskop>
8. Інерціальні навігаційні системи. URL: <http://er.nau.edu.ua/bitstream/NAU/11011/9/%D0%93%D0%BB5.pdf>.
9. Советская энциклопедия Хайкин. Физические основы механики. Москва: Советская энциклопедия, 1971. 529 с.

10. Тамрязан А. Г. Железобетонные и каменные конструкции. Москва: МГСУ, 2017. 732 с.
11. Большая советская энциклопедия: Собственные колебания. Москва: Советская энциклопедия, 1976. 478 с.
12. Межотраслевая Интернет–система поиска и синтеза физических принципов действия преобразователей энергии. Собственные колебания, формы колебаний, частоты колебаний URL: <http://www.heuristic.su/effects/catalog/est/byId/description/749/index.htm>.
13. Большая советская энциклопедия: Вынужденные колебания. Москва: Советская энциклопедия, 1971. 529 с.
14. Сіренко Г. О. Теорія та аналіз випадкових процесів. Вісник Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника. Івано–Франківськ: Національний університет імені Василя Стефаника, 2016. С. 19–29.
15. Энциклопедия «Техника». Москва: Росмэн, 2006. 272 с.
16. Бабаков И. М. Теория колебаний. Москва: Наука, 1968. 560 с.
17. Тимошенко С. П., Колебания в инженерном деле. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 1985. 474 с.
18. Строительная механика. Основы динамики и устойчивости сооружений. Новополоцк : ПГУ, 2010. 136 с.
19. Vseslova. Коливальні системи URL: [http://vseslova.com.ua/word/%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%B8%D0%B2%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%96\\_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B8-48765u](http://vseslova.com.ua/word/%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%B8%D0%B2%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%96_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B8-48765u).
20. Анісімов І. О. Коливання та хвилі. Навчальний посібник. Київ: Академпрес, 2001. 280 с.
21. Ахмеров Р. Р. Очерки по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Воронеж: ВГУ, 1982. 12 с.

22. Ігнатенко М. В. Механічні коливання і хвилі: конспект лекцій. Суми: "Сум ДУ", 2007. 89 с.
23. Физпортал. Механические колебания и волны URL: [http://phys-portal.ru/lections/Mech.kol&voln\\_lec.htm](http://phys-portal.ru/lections/Mech.kol&voln_lec.htm).
24. Пожуєв В. І., Грищак Д. В. Дослідження коливань конструкцій з масою, неперіодично змінною в часі. Вісник Академії митної служби України. Дніпропетровськ: Центр економічної освіти, 2010. С. 34–38.
25. Грищак В. З. Метод подвійного асимптотичного розкладу при аналізі стохастичної поведінки нелінійних механічних систем з коефіцієнтом демпфірування, залежним від часу. Вісник Запорізького державного університету. Запоріжжя: Запорізький Національний Університет, 2000. 64 с.
26. Найфе А. Х. Методы возмущений. Москва: Мир, 1976. 456 с.
27. Грищак В. З. Об эффективности гибридных асимптотических методов в прикладных задачах математической физики. Вісник Дніпропетровського Національного Університету імені Олеся Гончара. Дніпропетровськ: Дніпропетровський Національний Університет імені Олеся Гончара, 2012. С. 80–88.
28. Грищак В. З., Пожуєв В. І., Грищак Д. В. Гибридные асимптотические подходы к решению актуальных задач механики конструкций с переменными параметрами на базе современной компьютерной алгебры. Вісник Дніпропетровського Національного Університету імені Олеся Гончара. Дніпропетровськ: Дніпропетровський Національний Університет імені Олеся Гончара, 2011. С. 61–71.
29. Пожуєв В. І., Грищак Д. В. Кінематичний стан конічної оболонки літального апарату з зосередженою масою при динамічному зовнішньому тиску. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Дніпропетровськ: Ліра, 2011. С. 207–215.
30. Грищак В. З. Погребицька Г. М. Подвійний асимптотичний розклад у проблемі променевого теплообміну кільцевих ребер

трапецеїдальної форми. Вісник Запорізького державного університету. Запоріжжя: Запорізький Національний Університет, 2009. С. 217–223.

31. Грищак В. З. Погребницкая А. М. Двойное гибридное асимптотическое разложение в проблеме лучистого теплообмена кольцевых ребер прямоугольной формы. Вісник Запорізького державного університету. Запоріжжя: Запорізький Національний Університет, 2009. С. 74–80.

32. Грищак В. З. Погребницка Г. М. Эффективность расширенного ВКБ–Галеркин метода в дифференциальных уравнениях с переменными коэффициентами. Вісник Запорізького державного університету. Запоріжжя: Запорізький Національний Університет, 2010. С. 45–50.

33. Cartmell M. P., Ganilova O. A., Gristchak V. Z. Controlling Plate Vibrations by Means of Embedded Active Shape Memory Alloy Elements. Proceedings of EUROMECH. Sheffield, 2008. P. 112–118.

34. Steele C. R. Beams and Shells with Moving Loads. International Journal of Solids and Structures, 1971. P. 1171–1198. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768371900606>.

35. Бирюков В. Конструкция и расчет механического оборудования электроподвижного состава. Сибирь: Новосибирский государственный технический университет, 2018. 467 с.

36. Теорія коливань та стійкості руху. URL: <http://mmi-dmm.kpi.ua/images/pdf/personnel/BORONKO/Posibnyk.pdf>.

37. Бабанов В. В., Лаппо Е. Л. Строительная механика. Санкт–Петербург: АСВ, 2005. 43 с.

38. Студопедія – ваша енциклопедія. Вимушені коливання  
Исследование колебаний объектов с конструктивно–поворотной симметрией  
URL: <https://studopedia.org/8–21723.html>

39. Резников Л. М. Эквивалентная модель многомассовой системы с вязким и частотнонезависимым трением. Москва: Стройиздат, 1979. С. 44–48.

40. Цейтлин А. И. Прикладные методы решения краевых задач строительной механики. Москва: Стройиздат, 1984. 336 с.
41. Ананьин А. И. К составлению и решению уравнений движения неконсервативных систем. Известия вузов. Новосибирск: Строительство, 1999. С. 21–27.
42. Перельмутер А.В. Расчётные модели сооружений и возможность их анализа. Москва: ДМК Пресс, 2007. 600 с.
43. Владимиров В. С. Уравнения математической. Москва: Наука, 1988. 52 с.
44. Вікіпедія – вільна енциклопедія. Динаміка споруд. URL: [https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D1%96%D0%BA%D0%B0\\_%D1%81%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%83%D0%B4](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D1%96%D0%BA%D0%B0_%D1%81%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%83%D0%B4).
45. ANSYS. Справочник пользователя. URL: [https://books.google.com.ua/books?id=wQ7RAAAAQBAJ&pg=PA551&lpg=PA551&dq=%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D1%8B+%D0%B8%D0%B7%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F+%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D0%B1%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B9+%D0%B7%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D1%81%D1%8F%D1%89%D0%B8%D1%85+%D0%BE%D1%82+%D0%B2%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%B8&source=bl&ots=MZtNlsVXWh&sig=ACfU3U05SDSqiI20wI\\_H3EmTgalyrX9mEQ&hl=ru&sa=X&ved=2ahUKEwj81dvAodPjAhWhtIsKHfJDCCgQ6AEwAXoECAkQAQ#v=onepage&q=%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D1%8B%20%D0%B8%D0%B7%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%20%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D0%B1%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B9%20%D0%B7%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D1%81%D1%8F%D1%89%D0%B8%D1%85%20%D0%BE%D1%82%20%D0%B2%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%B8&f=false](https://books.google.com.ua/books?id=wQ7RAAAAQBAJ&pg=PA551&lpg=PA551&dq=%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D1%8B+%D0%B8%D0%B7%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F+%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D0%B1%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B9+%D0%B7%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D1%81%D1%8F%D1%89%D0%B8%D1%85+%D0%BE%D1%82+%D0%B2%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%B8&source=bl&ots=MZtNlsVXWh&sig=ACfU3U05SDSqiI20wI_H3EmTgalyrX9mEQ&hl=ru&sa=X&ved=2ahUKEwj81dvAodPjAhWhtIsKHfJDCCgQ6AEwAXoECAkQAQ#v=onepage&q=%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D1%8B%20%D0%B8%D0%B7%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%20%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D0%B1%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B9%20%D0%B7%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D1%81%D1%8F%D1%89%D0%B8%D1%85%20%D0%BE%D1%82%20%D0%B2%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%B8&f=false).
46. Бондарчук П. В. Прочность пневмо– и гидромашин. Самара: СНЦ РАН, 2013. 195 с.

47. Академик. Математическая энциклопедия. ВКБ–МЕТОД. URL: [https://dic.academic.ru/dic.nsf/enc\\_mathematics/776/%D0%92%D0%9A%D0%9](https://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/776/%D0%92%D0%9A%D0%9).
48. Галас О. С. Розробка методів аналізу та гасіння нелінійних коливань стержневих елементів машин. Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук. Харків: НТУ ХПИ, 2012. С. 42–48.
49. Амбарцумян С. А., Теория анизотропных пластин. Москва: Наука, 1987. 346 с.
50. Студфайлз. Вимушені коливання. Диференціальне рівняння вимушених коливань та його розв’язок URL: <https://studfiles.net/preview/5082862/page:6/>.
51. Студопедія – ваша енциклопедія. Вимушені коливання URL: [https://studopedia.com.ua/1\\_334786\\_vimusheni-kolivannya.html](https://studopedia.com.ua/1_334786_vimusheni-kolivannya.html).
52. Gristchak V. Z., Dmitrieva Ye. M. A Hybrid WKB–Galerkin Method and its Application. Bulletin of ZNU. Zaporizhzhya: Zaporizhzhya National University, 1995. P. 281–294.
53. Грищак В. З. К решению проблемы динамического деформирования пьезоэлектрических многослойных пластин на основе гибридного ВКБ–Галеркин метода. Доповіді Національної Академії наук України. Київ: Академпрес, 2008. С. 13–20.

## ДОДАТОК А

## Програмний код на Maple 18

Для рис. 2.1 – 2.2:

```
restart : B := 0.1 : Om0 := 1 : Fm := 1 : Om := 100 :
d1 := diff(x(t), t$2) + 2·B·diff(x(t), t) + Om02·x(t) = Fm·cos(Om
·t);
d2 := diff(y(t), t$2) + 2·B·diff(y(t), t) + Om02·y(t) = Fm·cos(5
·Om·t);
d3 := diff(z(t), t$2) + 2·B·diff(z(t), t) + Om02·z(t) = Fm·cos(10
·Om·t);
dsolve(d1, x(t)); dsolve(d2, y(t)); dsolve(d3, z(t));
ics := x(0) = 0, D(x)(0) = 1 :
s1 := dsolve({d1, ics}); assign(s1);
ics := y(0) = 0, D(y)(0) = 1 :
s2 := dsolve({d2, ics}); assign(s2);
ics := z(0) = 0, D(z)(0) = 1 :
s3 := dsolve({d3, ics}); assign(s3);
a := plot(x(t), t = 0 ..20, color = black);
b := plot(y(t), t = 0 ..20, color = red);
c := plot(z(t), t = 0 ..20, color = blue);
plots[display](a, b, c);
```

```
restart : B := 0.1 : Om0 := 1 : Fm := 1 : Om := 100 :
d1 := diff(x(t), t$2) + 2·B·diff(x(t), t) + Om02·x(t) = Fm·cos(Om
·t);
d2 := diff(y(t), t$2) + 2·2·B·diff(y(t), t) + Om02·y(t) = Fm
·cos(Om·t);
d3 := diff(z(t), t$2) + 2·4·B·diff(z(t), t) + Om02·z(t) = Fm
·cos(Om·t);
dsolve(d1, x(t)); dsolve(d2, y(t)); dsolve(d3, z(t));
ics := x(0) = 0, D(x)(0) = 1 :
s1 := dsolve({d1, ics}); assign(s1);
ics := y(0) = 0, D(y)(0) = 1 :
s2 := dsolve({d2, ics}); assign(s2);
ics := z(0) = 0, D(z)(0) = 1 :
s3 := dsolve({d3, ics}); assign(s3);
a := plot(x(t), t = 0 ..20, color = black);
b := plot(y(t), t = 0 ..20, color = red);
c := plot(z(t), t = 0 ..20, color = blue);
plots[display](a, b, c);
```

Для рис. 2.5 – 2.6:

*restart :*

*b := 1 :*

$$x := \exp\left(-\frac{a}{2} \cdot t\right) \cdot \left(\frac{2 \cos(b)}{a \cdot b} \cdot \sin\left(b \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot t\right)\right) - \frac{2 \sin(b)}{a \cdot b} \cdot \cos\left(b \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot t\right)\right)\right);$$

*plot3d(x(t), t = 0 ..20, a = 0.5 ..2);*

*restart :*

*a := 1 :*

$$x := \exp\left(-\frac{a}{2} \cdot t\right) \cdot \left(\frac{2 \cos(b)}{a \cdot b} \cdot \sin\left(b \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot t\right)\right) - \frac{2 \sin(b)}{a \cdot b} \cdot \cos\left(b \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot t\right)\right)\right);$$

*plot3d(x(t), t = 0 ..20, b = 0.1 ..1);*

Для рис. 3.2 – 3.3:

*restart :*

*lam := 1 : km0 := 0.5 : x0 := 1 : Om := 1 :*

*c1 := x0;*

$$c2 := -\frac{\left(\frac{lam}{4} - \frac{1}{2} \cdot km0\right) \cdot x0}{Om - \frac{1}{2 \cdot Om} \left(\frac{1}{4} \cdot (km0)^2 - \frac{lam}{2} \cdot km0 - \frac{lam^2}{16}\right)};$$

$$c2\_2 := -\frac{\left(\frac{lam}{4} - \frac{1}{2} \cdot km0 \cdot 2\right) \cdot x0}{Om - \frac{1}{2 \cdot Om} \left(\frac{1}{4} \cdot (km0 \cdot 2)^2 - \frac{lam}{2} \cdot km0 \cdot 2 - \frac{lam^2}{16}\right)};$$

$$c2\_3 := -\frac{\left(\frac{lam}{4} - \frac{1}{2} \cdot km0 \cdot 4\right) \cdot x0}{Om - \frac{1}{2 \cdot Om} \left(\frac{1}{4} \cdot (km0 \cdot 4)^2 - \frac{lam}{2} \cdot km0 \cdot 4 - \frac{lam^2}{16}\right)};$$

$$T := \frac{2 \cdot Om}{lam} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{lam}{2} \cdot t\right)\right) + \frac{1}{2 \cdot Om} \cdot \left(\frac{1}{6 \cdot Om} \cdot (km0)^2 \left(\exp\left(\frac{3}{2} \cdot lam \cdot t\right) - 1\right) + km0 \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot lam \cdot t\right)\right) + \frac{lam}{8} \cdot \left(\exp\left(\frac{1}{2} \cdot lam \cdot t\right) - 1\right)\right);$$

$$T\_2 := \frac{2 \cdot Om}{lam} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{lam}{2} \cdot t\right)\right) + \frac{1}{2 \cdot Om} \cdot \left(\frac{1}{6 \cdot Om} \cdot (km0 \cdot 2)^2 \left(\exp\left(\frac{3}{2} \cdot lam \cdot t\right) - 1\right) + km0 \cdot 2 \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot lam \cdot t\right)\right) + \frac{lam}{8} \cdot \left(\exp\left(\frac{1}{2} \cdot lam \cdot t\right) - 1\right)\right);$$



```

T_3 :=  $\frac{2 \cdot Om}{lam} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{lam}{2} \cdot t\right)\right) + \frac{1}{2 \cdot Om} \cdot \left(\frac{1}{6 \cdot Om} \cdot (km0 \cdot 4)^2 \left(\exp\left(\frac{3}{2} \cdot lam \cdot t\right) - 1\right) + km0 \cdot 4 \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot lam \cdot t\right)\right) + \frac{lam}{8} \cdot \left(\exp\left(\frac{1}{2} \cdot lam \cdot t\right) - 1\right)\right);$ 
x :=  $\exp\left(\frac{lam}{4} \cdot t + \frac{1}{2 \cdot lam} \cdot km0 \cdot (1 - \exp(-lam \cdot t))\right) \cdot (x0 \cdot \cos(T) + c2 \cdot \sin(T));$ 
y :=  $\exp\left(\frac{lam}{4} \cdot t + \frac{1}{2 \cdot lam} \cdot km0 \cdot 2 \cdot (1 - \exp(-lam \cdot t))\right) \cdot (x0 \cdot \cos(T_2) + c2_2 \cdot \sin(T_2));$ 
z :=  $\exp\left(\frac{lam}{4} \cdot t + \frac{1}{2 \cdot lam} \cdot km0 \cdot 4 \cdot (1 - \exp(-lam \cdot t))\right) \cdot (x0 \cdot \cos(T_3) + c2_3 \cdot \sin(T_3));$ 
a := plot(x(t), t = 0 .. 10, color = black);
b := plot(y(t), t = 0 .. 10, color = red);
c := plot(z(t), t = 0 .. 10, color = blue);
plots[display](a, b, c);

restart :
lam := 1 : x0 := 1 : Om := 1 :
c1 := x0;
c2 :=  $-\frac{\left(\frac{lam}{4} - \frac{1}{2} \cdot km0\right) \cdot x0}{Om - \frac{1}{2 \cdot Om} \left(\frac{1}{4} \cdot (km0)^2 - \frac{lam}{2} \cdot km0 - \frac{lam^2}{16}\right)}$ ;
T :=  $\frac{2 \cdot Om}{lam} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{lam}{2} \cdot t\right)\right) + \frac{1}{2 \cdot Om} \cdot \left(\frac{1}{6 \cdot Om} \cdot (km0)^2 \left(\exp\left(\frac{3}{2} \cdot lam \cdot t\right) - 1\right) + km0 \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot lam \cdot t\right)\right) + \frac{lam}{8} \cdot \left(\exp\left(\frac{1}{2} \cdot lam \cdot t\right) - 1\right)\right);$ 
x :=  $\exp\left(\frac{lam}{4} \cdot t + \frac{1}{2 \cdot lam} \cdot km0 \cdot (1 - \exp(-lam \cdot t))\right) \cdot (x0 \cdot \cos(T) + c2 \cdot \sin(T));$ 
plot3d(x(t), t = 0 .. 20, km0 = 0 .. 2);

```