**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**
**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**
**Кафедра фундаментальної математики**

# КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

## на тему: «ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ КОМПАКТНИХ ОПЕРАТОРІВ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ»

Виконав: студент 2 курсу, групи 8.1118
спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми математика
К.В. Скрипник
(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної математики, доцент, к.ф.-м.н., Красікова І.В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Стєганцева П.Г.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2020

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач кафедри фундаментальної математики, д.т.н., доцент

______________ Гребенюк С.М.

(підпис)

« 30 » травня 2019 р.

# З А В Д А Н Н Я

## НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ

Скрипнику Кирилу Віталійовичу

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Дослідження властивостей компактних операторів у банахових просторах

керівник роботи (проекту) Красікова Іріна Володимірівна, к.ф.-м.н., доцент

(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від «« 15 » грудня 2019 року № 2142-с

2. Строк подання студентом роботи 20.12.2019

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Ознайомитися з поняттям компактного оператора в нормованому просторі.
2. Ознайомитися з основними властивостями компактних операторів.
3. Розв'язати запропоновані задачі з компактними операторами.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) __________
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

| Розділ | Прізвище, ініціали та посада консультанта | Підпис, дата | |
|---|---|---|---|
| | | завдання видав | завдання прийняв |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

7. Дата видачі завдання 16.02.2019

## К А Л Е Н Д А Р Н И Й   П Л А Н

| № | Назва етапів кваліфікаційної роботи | Строк виконання етапів роботи | Примітка |
|---|---|---|---|
| 1. | Розробка плану роботи. | 19.07.2019 | виконано |
| | | | |
| 2. | Збір вихідних даних. | 09.08.2019 | виконано |
| | | | |
| 3. | Обробка методичних та теоретичних | | |
| | джерел. | 13.09.2019 | виконано |
| | | | |
| 4. | Розробка першого та другого розділу. | 17.09.2019 | виконано |
| | | | |
| 5. | Розробка третього розділу. | 10.11.2019 | виконано |
| | | | |
| 6. | Оформлення та нормоконтроль | 04.12.2019 | виконано |
| | кваліфікаційної роботи. | | |
| | | | |
| 7. | Захист кваліфікаційної роботи. | 16.01.2020 | |

Студент ______________ К.В. Скрипник
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ______________ І.В. Красікова
(підпис) (ініціали та прізвище)

**Нормоконтроль пройдено**

Нормоконтролер ______________ І.Г. Ткаченко
(підпис) (ініціали та прізвище)

**РЕФЕРАТ**

Кваліфікаційна робота магістра «Дослідження властивостей компактних операторів у банахових просторах»: 50 с., 12 джерел.

БАНАХОВИЙ ПРОСТІР, ГІЛЬБЕРТІВ ПРОСТІР, ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ, КОМПАКТНА МНОЖИНА, КОМПАКТНИЙ ОПЕРАТОР, ЛІНІЙНИЙ ОПЕРАТОР, НЕПЕРЕРВНИЙ ОПЕРАТОР, НОРМОВАНИЙ ПРОСТІР, ПЕРЕДКОМПАКТНА МНОЖИНА, СПЕКТР КОМПАКТНОГО ОПЕРАТОРА, ЯДРО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ.

Об’єкт дослідження – компактні оператори у банахових просторах.

Мета роботи: дослідити властивості компактних операторів у банахових просторах.

Метод дослідження – аналітичний.

У кваліфікаційній роботі досліджуються властивості компактних операторів, заданих у банахових просторах. Весь теоретичний матеріал проілюстровано прикладами та задачами. Розглянуто застосування компактних операторів до розв’язання інтегральних рівнянь.

**SUMMARY**

Master’s Qualification Thesis «Investigation of the Properties of Compact Operators in a Banach Space»: 50 pages, 12 references.

BANACH SPACE, HILBERT SPACE, INTEGRAL EQUATION, COMPACT SET, COMPACT OPERATOR, LINEAR OPERATOR, CONTINUOUS OPERATOR, NORMED VECTOR SPACE, PRECOMPACT SET, SPECTRUM OF COMPACT OPERATOR, KERNEL OF THE INTEGER EQUATION.

The object of the study is compact operators in Banach space.

The aim of the study is to study the properties of the compact operators in the Banach space.

The method of researching is analytical.

In the qualification paper the properties of compact operators are investigated, given in Banach spaces. All theoretical material is illustrated with examples and tasks. The application of compact operators to the solution of integral equations is considered.

# ЗМІСТ

# ВСТУП

Дослідження довільних лінійних операторів є важливою, але вельми складною задачею, враховуючи загальність поняття «лінійний оператор». Однак серед лінійних операторів можна виділити окремі класи операторів, які можуть бути розглянуті більш докладно. Дана робота розглядає основні поняття, властивості, визначення та теореми, пов'язані з одним із класів лінійних операторів – компактними операторами.

Добре відомо, що будь-який лінійний оператор, що діє між скінченновимірними просторами, визначається деякою прямокутною матрицею. Тому вивчення такого роду операторів є достатньо легкою задачею, оскільки властивості скінченних матриць добре відомі із курсу лінійної алгебри. Якщо ж розглядати оператор в довільному нормованому просторі, далеко не завжди можна встановити в нього властивості, аналогічні властивостям скінченновимірних операторів. В цьому відношенні ближче за всіх до скінченновимірних знаходяться компактні оператори, які ми будемо розглядати в роботі. Цікавість до цих операторів пов’язана з їх широким застосуванням, наприклад, в теорії інтегральних рівнянь. Слід відмітити, що кожен компактний оператор може бути подано у вигляді рівномірної границі послідовності скінченновимірних операторів.

Компактними називаються такі лінійні оператори, які довільну обмежену множину переводять у передкомпактну, тобто у таку, замикання якої компактне. Кожний компактний оператор є неперервним, але не навпаки. Навіть одиничний оператор у нескінченновимірному просторі не є компактним. Звідси береться інша назва компактних операторів – цілком неперервні.

Добре відомі основні властивості компактних операторів. Наприклад, множина компактних операторів утворює підпростір (замкнений лінійний многовид) у просторі всіх лінійних неперервних операторів. Добуток компактного і обмеженого оператора є компактним оператором.

Окремо ми розглядаємо властивості спектра компактних операторів, який, на відміну від спектра лінійного неперервного оператора, утворюється тільки власними значеннями, причому їх кількість буде не більш ніж зліченною.

У роботі ми також розглядаємо питання розв'язку інтегральних рівнянь з компактними операторами та наводимо деякі приклади розв'язання таких рівнянь.

# 1 КОМПАКТНІСТЬ У НОРМОВАНИХ ПРОСТОРАХ

## 1.1 Означення та властивості банахових просторів

**Означення 1.1** Непорожня множина $X$ елементів $x, y, z...$ називається дійсним лінійним, або векторним, простором, якщо вона задовольняє наступні умови:

1) для будь-яких двох елементів $x, y \in X$ однозначно визначено третій елемент $z \in X$, який називається сумою та позначається $x + y$, причому

а) $x + y = y + x \quad \forall x, y \in X$ (комунікативність);

б) $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in X$ (асоціативність);

в) у $X$ існує такий елемент $0 \in X$, що $x + 0 = x$ для усіх $x \in X$ (існування нуля);

г) для кожного $x \in X$ існує такий $-x \in X$, що $x + (-x) = 0$ (існування протилежного елемента);

2) для будь-якого числа $\alpha \in R$ та будь-якого елемента $x \in X$ визначено елемент $\alpha x \in X$, причому

а) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \forall \alpha, \beta \in R$;

б) $1 \cdot x = x \quad \forall x \in X$;

в) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad \forall \alpha, \beta \in R \quad \forall x \in X$;

г) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \quad \forall \alpha \in R \quad \forall x, y \in X$.

**Означення 1.2** Нормою у дійсному лінійному просторі $X$ називається дійснозначна невід'ємна функція $\|\cdot\| : X \to R^+$, яка задовольняє наступні умови:

1) $\|x\| = 0$ тоді та тільки тоді, коли $x = 0$;

2) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ для всіх $x, y \in X$ (нерівність трикутника);

3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ для кожного скаляра $\alpha \in R$.

Лінійний простір з нормою називається нормованим простором.

Будь-який нормований простір становиться метричним простором, якщо ввести в ньому метрику $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Багато лінійних просторів можуть бути наділені природною структурою нормованого простору, наприклад:

1) пряма $R^1$ становиться нормованим простором, якщо для будь–якого числа $\mathrm{x} \in \mathrm{R}^1$ покласти $\|x\| = |x|$.

2) якщо в дійсному $m$–вимірному просторі $R_p^m$ з елементами $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ покласти

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p},$$

то всі аксіоми норми будут виконані, і ми отримаємо нормований простір.

3) на множині неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій визначимо норму формулою

$$\|f\| = \max_{a \le t \le b} |f(t)|.$$

Отримаємо нормований простір $C[a, b]$ неперервних функцій на відрізку $[a, b]$.

4) $m$ – простір обмежених числових послідовностей $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ є нормованим простором, норма на якому задається формулою

$$\|x\| = \sup_n |x_n|;$$

5) нормованим є простір $l_p(p \geq 1)$, що скаладається з послідовностей $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ дійсних чисел, для яких $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, а норма задається формулою

$$\|x\| = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

6) $L_p[a,b]$ – простір класів еквівалентних функцій $x(t)$ на $[a,b]$ для яких

$$\int_a^b |x(t)|^p \, dt < \infty,$$

та норма визначається формулою

$$\|x\| = \sqrt[p]{\int_{[0,1]} |x(t)|^p \, d\mu(t)}.$$

**Означення 1.3** Послідовність $\{x_n\}$ називається збіжною в нормованому просторі $X$, якщо існує елемент $a \in X$ такий, що $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, тобто що $\|x_n - a\| \to 0$ при $n \to \infty$.

**Означення 1.4** Послідовність $\{x_n\}$ називається фундаментальною в нормованому просторі $X$, якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує номер $n_0 \in N$ такий, що для будь-яких $n, p \geq n_0$ виконується нерівність $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$.

Нагадаємо, що нормований простір називається повним, якщо в ньому збігається будь-яка фундаментальна послідовність.

**Означення 1.5** Банаховим простором називається повний нормований простір.

Прикладами банахових пострів виступають розглянуті вище простори $R^1$, $R_p^m$, $C[a,b]$, $m$, $l_p$, $L_p[a,b]$.

**Означення 1.6** Нехай $X$ – лінійний нормований простір. Відображення $f$, що діє з $X$ у $R$, будемо називати фунціоналом.

**Означення 1.7** Функціонал $f$ називається лінійним, якщо він аддитивен, тобто для всіх $x_1, x_2 \in X$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2),$$

і однорідний, тобто для всіх $x \in X$ і будь-яких дійсних чисел $\lambda$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

**Означення 1.8** Множина $\ker f = \{x \in X : f(x) = 0\}$ називається ядром функціонала $f$.

**Означення 1.9** Функціонал $f$ називається неперервним в точці $x_0 \in X$, якщо для $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, що для всіх $x$ таких, що $\|x - x_0\|_X < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Дамо інше означення неперервного функціонала.

**Означення 1.10** Функціонал $f$ називається неперервним в точці $x_0 \in X$, якщо для будь-якої послідовності $\{x_n\}$, що збігається до $x_0$, $f(x_n) \to f(x_0)$.

Якщо функціонал неперервний у кожній точці простору $X$, то його будемо називати неперервним на $X$.

Для лінійних функціоналів можна визначити операції додавання та множення їх на деякі числа.

Нехай $f_1$ та $f_2$ – два лінійних функціонала на деякому лінійному просторі $X$. Їхньою сумою $f_1 + f_2$ називається лінійний функціонал

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad x \in X.$$

Добутком $\alpha \cdot f_1$ лінійного функціонала $f_1$ на число $\alpha$ називається функціонал

$$f(x) = \alpha f_1(x), \quad x \in X.$$

Саме так визначені операції додавання функціоналів та множення їх на числа задовольняють усім аксіомам лінійного простору. Нульовим елементом цього простору буде нульовий функціонал $0 : x \to 0$, а протилежним елементом – функціонал $(-f) : x \to -f(x)$.

Інакше кажучи, сукупність всіх неперервних лінійних функціоналів, визначених на деякому лінійному просторі $X$, утворює лінійний простір. Він називається простором, спряженим до $X$, і позначається $X^*$. Спряжений простір $X^*$ є банаховим з нормою

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

З поняттям функціонала щільно пов'язане поняття слабкої збіжності у нормованому просторі.

**Означення 1.11** Говорять, що послідовність $\{x_n\}$ слабко збігається до $x_0$ у банаховому просторі $X$, якщо

$$f(x_n) \to f(x_0) \quad \forall f \in X^* \text{ при } n \to \infty.$$

На практиці зручно використовувати наступний критерій слабкої збіжності.

**Твердження 1.1** Послідовність $\{x_n\}$ елементів нормованого просто $X$ слабко збігається до $x_0 \in X$ тоді та тільки тоді, коли:

1) $\exists M > 0 : \forall n \ \|x_n\| \le M$;

2) $f(x_n) \to f(x_0) \quad \forall f \in \Delta$ при $n \to \infty$, де $\Delta -$ деяка множина, лінійна оболонка якої всюди щільна в $X^*$.

## 1.2 Гільбертові простори та їх властивості

**Означення 1.12** Скалярним добутком у дійсному лінійному просторі $X$ називається числова функція $(x, y)$ елементів $x, y \in X$, що задовольняє наступні умови:

1) $(x, x) \ge 0 \quad \forall x \in X; (x, x) = 0$ в тому та тільки в тому випадку, якщо $x = 0$;

2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \ \forall x, y, z \in X$;

3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \quad \forall x, y \in X, \ \forall \alpha \in R$;

4) $(x, y) = (y, x) \quad \forall x, y \in X$.

Простір, на якому задано скалярний добуток, називається евклідовим простором.

Розглянемо питання про вимірність просторів. Елементи $x_1, x_2, ..., x_n$ дійсного лінійного простору $X$ називаються лінійно залежними, якщо існують числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, не всі з яких дорівнюють нулю, такі, що

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0. \qquad (1.1)$$

У протилежному випадку ці елементи називаються лінійно незалежними.

Якщо в $X$ можна знайти $n$ лінійно незалежних елементів, а будь-які $n+1$ елементів цього простору лінійно залежні, то говорять, що простір $X$ має вимірність $\dim X = n$.

Якщо в $X$ можна визначити систему з довільного скінченного числа лінійно незалежних елементів, то говорять, що простір $X$ нескінченновимірний.

**Означення 1.13** Повний нескінченновимірний евклідів простір називається гільбертовим.

Прикладами гільбертових просторів є:

1) простір $l_2$, елементами якого є такі послідовності дійсних чисел $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, що $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$, є гільбертовим простором, в якому скалярний добуток задається формулою

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l_2, \; y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...) \in l_2;$$

2) простір $L_2[a,b]$, що складається з класів еквівалентих між собою дісних функцій, інтегровних з квадратом, зі скалярним добутком

$$(x, y) = \int_a^b x(t) y(t) dt, \quad x, y \in L_2[a,b]$$

є гільбертовим простором.

## 1.3 Компактність у нормованих просторах

Поняття компактності у нормованих просторах тісно пов'язане з поняттям цілковитої обмеженості множини.

**Означення 1.14** Нехай $M$ – деяка множина у нормованому просторі $X$, $\varepsilon$ – довільне додатне число. Множина $A \subset X$ називається $\varepsilon$-сіткою для $M$, якщо для довільної точки $x \in M$ існує хоча б одна точка $a \in A$, для якої $\|x - a\| \le \varepsilon$ [12].

**Означення 1.15** Множина $M$ називається цілком обмеженою, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує скінченна $\varepsilon$-сітка для цієї множини.

**Означення 1.16** Множина $M \subset X$ називається обмеженою в нормованому просторі $X$, якщо вона міститься в деякій кулі $B_r[a] = \{x \in X : \|x - a\| \le r\}$.

**Означення 1.17** Множина $M \subset X$ називається компактною, якщо будь-яка її нескінченна підмножина має граничну точку, яка належить цій множині.

Нагадаємо, що граничною точкою множини $M$ називається точка $x_0 \in X$ в будь-якому околі якої міститься принаймні один елемент множини $M$, відмінний від $x_0$.

Іншими словами, множина $M$, розташована в нормованому просторі $X$, називається компактною, якщо будь-яка послідовність елементів множини $M$ містить збіжну підпослідовність.

**Теорема 1.1** (необхідна умова компактності) Якщо множина у нормованому просторі є компактною, тоді вона цілком обмежена [12].

Взагалі, обмеженість та замкненість множини є необхідними умовами компактності у довільному нормованому просторі. Нагадаємо, що множина називається замкненою, якщо вона містить усі свої граничні точки.

Наведемо критерії компактності множин в загальному випадку та в деяких нормованих просторах.

**Теорема 1.2** (критерій компактності метричного простору) Метричний простір $X$ компактний тоді та тільки тоді, коли він цілком обмежений та повний.

У скінченновимірному просторі цей критерій набуває такого вигляду:

**Твердження 1.2** Множина у скінченновимірному просторі є компактною тоді та тільки тоді, коли вона обмежена та замкнена [12].

Прикладами компактних множин на числовій прямій є відрізок $[0,1]$ або скінченна множина $\{1, 2, 3\}$ .

**Означення 1.18** Множина $M \subset X$ називається предкомпактною, якщо її замикання є компактним.

**Твердження 1.3** (критерій передкомпактності) Множина $M$ у повному нормованому просторі є передкомпактною тоді та тільки тоді, коли вона цілком обмежена.

Приклади:

1) множина $M = \{e_n : n \geq 1\}$ в $l_p, 1 \leq p \leq \infty$, не є передкомпактною, а отже, не є компатною, оскільки $\|e_n - e_m\|_p = 2^{\frac{1}{p}} > 1, n \neq m$, тобто жодна з підпослідовностей послідовності $\{e_n : n \geq 1\}$ не є фундаментальною, а отже збіжною;

2) множина $M = \{x_n(t) = e^{-nt}, t \in [0,1] \mid n \geq 1\}$ в $C[0,1]$ не є предкомпактною.

Якщо припустити, що дана множина передкомпатна, отримаємо існування підпослідовності $\{x_n(t) : k > 1\}$, збіжної в $C[0,1]$, а отже, і поточково, до деякої функції $y \in C[0,1]$. Однак $x_{n_k}(t) = e^{-n_k t} \to \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t \in (0,1], \end{cases}$ $k \to \infty$, звідки, враховуючи єдність границі, отримаємо, що $y$ – розривна функція. Таким чином, $M$ не є передкомпактною, а отже, і компактною в $C[0,1]$ .

**Означення 1.19** Множина $M$ функції $x(t) \in C[a,b]$ називається рівномірно обмеженою, якщо існує стала $A > 0$ така, що $|x(t)| \leq A$ для всіх $x(t) \in M$ при будь-якому $t \in [a,b]$.

**Означення 1.20** Множина $M$ функції $x(t) \in C[a,b]$ називається рівностепенево неперервною, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$, задовольняють нерівності $|t_2 - t_1| < \delta$, і для будь–якої функції з множини $M$ має місце співвідношення

$$|x(t_2) - x(t_1)| < \varepsilon.$$

**Теорема 1.3** (Арцела) Для того щоб множина $M$ функції $x(t) \in C[a,b]$ була передкомпактною, необхідно і достатньо, щоб вона була рівномірно обмеженою та рівностепенево неперервною [6].

**Теорема 1.4** (М. Рисса) Для того щоб сім'я $M$ функції $x(t) \in L_p[a,b]$ було компактною, необхідно і достатньо, щоб ця сім'я була рівномірно обмеженою по нормі та рівномірно неперервною в средньому, тобто

1) $\int\limits_A^B |x(t)|^p \, dt \leq M^p$;

2) $\int\limits_A^B |x(t+h) - x(t)|^p \, dt < \varepsilon^p$

при $0 < h < \delta(\varepsilon)$ відразу для всіх фукнцій сімейства [6].

**Теорема 1.5** Для компактності множини $M \subset l_p$ необхідно і достатньо, щоб $M$ була обмежена та для довільного $\varepsilon > 0$ існувал номер $n_0$ такий, що для всіх $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in M$ виконувалась нерівність $\sum\limits_{i=n_0}^{\infty} |x_i|^p < \varepsilon$ [6].

# 2 КОМПАКТНІ ОПЕРАТОРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

## 2.1 Означення та властивості компактних операторів

Наведемо основні означення стосовно компактних операторів.

**Означення 2.1** Лінійним оператором, що діє з нормованого простору $X$ у нормований простір $Y$, називається відображення $y = Ax, x \in X, y \in Y$, яке задовольняє умову: $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2$ для будь–яких $x_1, x_2 \in X$ $\alpha, \beta \in R$.

**Означення 2.2** Оператор $A$ називається неперервним в точці $x_0$, якщо для будь–якої послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка збігається до $x_0$, виконується умова $A(x_n) \to A(x_0)$. Збіжність послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ до $x_0$ означає збіжність за нормою, тобто $\|x_n - x_0\| \to 0$ коли $n \to \infty$.

Якщо лінійний оператор неперервний в одній точці, він буде неперервним на всьому просторі.

З поняттям неперервності лінійного оператора безпосередньо пов'язане поняття обмеженості.

**Означення 2.3** Лінійний оператор $A$ називається обмеженим, якщо існує така стала $C > 0$, що для будь-якого $x \in X$ виконується умова

$$\|Ax\| \le C\|x\|.$$

**Твердження 2.1** Для того, щоб лінійний оператор $A : X \to Y$ з був неперервним, необхідно і достатньо, щоб він був обмеженим.

**Означення 2.4** Нормою лінійного неперервного оператора $A : X \to Y$ називається число

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Нехай $X, Y$ – лінійні нормовані простори. Позначимо символом $\Im(X, Y)$ сукупність усіх лінійних неперервних операторів, які діють з $X$ в $Y$. Введемо в $\Im(X, Y)$ структуру лінійного простору наступним чином: для будь-яких $A, B \in \Im(X, Y), \lambda \in \mathrm{R}, x \in X$ покладемо

$$(A + B)x = Ax + Bx;$$
$$(\lambda A)x = \lambda(Ax).$$

Є справедливою наступна теорема.

**Теорема 2.1** Множина $\Im(X, Y)$ з заданими вище операціями та нормою $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ є лінійним нормованим простором. Якщо $Y$ є банаховим простором, тоді $\Im(X, Y)$ – банаховий простір [2].

**Означення 2.5** Послідовність операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Im(X, Y)$ назвемо збіжною за нормою до оператора $A \in \Im(X, Y)$, якщо $\lim_{n \to \infty} \|A_n - A\| = 0$.

Оскільки $\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A_n - A)x\|$, тоді збіжність $A_n$ до $A$ за нормою

називають також рівномірною збіжністю та позначають $A_n \Rightarrow A, \ \ n \to \infty$.

**Означення 2.6** Нехай $X, Y$ – нормовані простори. Компактним оператором називається лінійний оператор $A: X \to Y$, який будь–яку обмежену підмножину з $X$ відображає в предкомпактну множину простору $Y$.

Отже, компактний оператор довільну обмежену множину переводить у обмежену, значить, кожний компактний оператор є обмеженим і неперервним. Наведемо основні властивості компактних операторів [6].

**Твердження 2.2** Якщо $A$ – компактний оператор, а $B$ – обмежений оператор, то оператори $AB$ та $BA$ – компактні.

**Твердження 2.3** Якщо оператори $A$ та $B$ компактні, та діють з нормованого простору $X$ у нормований простір $Y$ та $\alpha, \beta \in R$, то оператор $C = \alpha A + \beta B$ також компактний.

Отже, сукупність компактних операторів утворює лінійний підпростір у просторі $\Im(X,Y)$ всіх лінійних операторів, що діють з нормованого простору $X$ у нормований простір $Y$, причому цей простір є замкненим, що виипливає з наступного твердження.

**Твердження 2.4** Якщо $\{A_n\}$ – послідовність компактних операторів у банаховому просторі $X$, яка збігається за нормою до деякого оператора $A$, тоді оператор $A$ також компактний.

**Означення 2.7** Лінійний обмежений оператор $A: X \to Y$ називається скінченновимірним, якщо множина значень цього оператора є скінченновимірним підпростором у просторі $Y$.

Зрозуміло, що кожний скінченновимірний обмежений оператор є компактним, оскільки обмежену множину такий оператор переводить у обмежену, яка є передкомпактною у скінченновимірному просторі. Прикладом скінченновимірного оператора є функціонал. Іншими словами, можна зробити висновок, що будь-який лінійний неперервний функціонал є компактним.

У нескінченновимірному просторі компактність оператора є вимогою істотно більш сильною, ніж просто його неперервність (тобто обмеженість). Наприклад, одиничний оператор $I$ у нескінченновимірному банаховому просторі неперервний, але не компактний. Цей факт випливає з того, що одинична куля не є компактною множиною у нескінченновимірному нормованому просторі [6].

У гільбертовому просторі зручно користуватися іншим означенням компактного оператора, яке використовує зв’язок між слабко та сильно збіжними послідовностями. Нагадаємо, що послідовність $\{x_n\}$ називається слабко збіжною до елемента $x$, якщо для будь-якого лінійного обмеженого функціонала $f$ на $X$ виконується умова $f(x_n) \to f(x)$. Натомість збіжна за нормою послідовність називається сильно збіжною.

**Твердження 2.5** Оператор $A$ є компактним в $H$ тоді та тільки тоді, коли він будь-яку слабко збіжну послідовність переводить в сильно збіжну.

Доведення. Дійсно, нехай ця остання умова виконана і нехай $M$ – обмежена множина в $X$. Кожна нескінченна підмножина множини $M$ містить слабко збіжну підпослідовність, яку оператор переводить в сильно збіжну послідовність, тобто множина $AM$ предкомпактна.

Навпаки, нехай $A$ – компактний оператор, $\{x_n\}$ – слабко збіжна послідовність і $x$ – її слабка границя. Тоді $\{Ax_n\}$ містить підпослідовність, що збігається сильно. В той же час $\{Ax_n\}$ збігається слабко до $Ax$ в силу неперервності оператора $A$. Звідки випливає, що $\{Ax_n\}$ не може мати більше однієї граничної точки. Отже, $\{Ax_n\}$ – збіжна послідовність.

## 2.2 Приклади компактних та некомпактних операторів

Приклад 2.1 В просторі неперервних функцій $C[a,b]$ важливий клас компактних операторів утворюють оператори вигляду:

$$Ax = y(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)dt , \tag{2.1}$$

де функція $K(s,t)$ неперервна на квадраті $a \le s \le b, a \le t \le b$.

Покажемо справедливість наступного тверження: якщо функція $K(s,t)$ неперервна на квадраті $a \le s \le b, a \le t \le b$, то формула (2.1) визначає в просторі $C[a,b]$ компактний оператор.

Дійсно, в зазначених умовах інтеграл (2.1) існує для будь–якого $s$ з $[a,b]$, то функція $y(s)$ визначена. Нехай $M = \max\limits_{a \le s,t \le b} |K(s,t)|$. На квадраті $a \le s \le b, a \le t \le b$ функція $K(s,t)$ рівномірно неперервна за теоремою Кантора, оскільки вона неперервна на замкненій та обмеженій множині на площині. Отже,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta : \forall (s',t),(s'',t) \quad \rho((s',t),(s'',t)) < \delta \quad |K(s',t) - K(s'',t)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

$$|y(s') - y(s'')| \le \int_a^b |K(s',t) - K(s'',t)| \cdot |x(t)| dt.$$

Оцінимо різницю

$$\int_a^b |K(s',t) - K(s'',t)| \cdot |x(t)| dt < \frac{\varepsilon}{b-a} \|x\| \cdot (b-a) = \varepsilon \|x\|$$

при $\rho((s',t),(s'',t)) < \delta.$

Отримана нерівність показує, що функція $y(s)$ неперервна, тобто формула (2.1) дійсно віизначає оператор, який переводить простір $C[a,b]$ в себе.

З цієї ж нерівності видно, що якщо $\{x(t)\}$ – обмежена множина у $C[a,b]$, то відповідна множина $\{y(s)\}$ рівностепенево неперервна. Таким чином, якщо виконується нерівність $\|x\| \le c,$ то

$$\|y\| = \sup_{s \in [a,b]} |y(s)| \le \sup_{s \in [a,b]} \int_a^b |K(s,t)| \cdot |x(t)| dt \le M(b-a) \cdot c.$$

Тобто обмежена множина перейде в рівномірно обмежену. Таким чином, оператор (2.1) переводить будь–яку обмежену множину з $C[a,b]$ в множину функцій, рівномірно обмежену і равностепенево неперервну, тобто предкомпактну за теоремою Арцела [6].

Приклад 2.2 Оператор $A:\ L_2[0;1] \to L_2[0;1]$, $(Ax)(t) = \int\limits_{[0,1]} \frac{x(s)}{20s-20} d\mu(s)$ не є компактним.

Оператор $A: L_2[0;1] \to L_2[0;1]$, визначений за допомогою рівності

$$(Ax)(t) = \int\limits_{[0,1]} \frac{x(s)}{20s-20} d\mu(s),$$

не є заданими на всьому просторі $L_2[0;1]$. Дійсно, якщо розглянути функцію $x(t) = 1$, $t \in [0;1]$, то $\int\limits_0^1 \frac{ds}{20s-20}$ розбігається. Тому оператор $A$ не є обмеженим і, отже, він не є компактним.

Приклад 2.3 Розглянемо у просторі $L_2[0,1]$ такий інтегральний оператор

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 (st^2 + ts^2)x(s)ds.$$

Тоді подамо його у вигляді суми двох операторів

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 (st^2 + ts^2)x(s)ds = t^2 \int\limits_0^1 sx(s)ds + t\int\limits_0^1 s^2 x(s)ds.$$

Оскільки вимірність області значень такого оператора $\left\{\alpha t + \beta t^2 : \alpha, \beta \in R\right\}$ дорівнює 2, цей оператор скінченновимірний, тобто для доведення компактності $A$ у просторі $L_2[0,1]$ достатньо показати, що $A$ – обмежений.

У просторі $L_2[0,1]$ для будь-якої функції $x \in L_2[0,1]$ маємо для суми двох операторів наступну оцінку:

$$\|Ax\| = \|A_1 x + A_2 x\| \le \|A_1 x\| + \|A_2 x\| \le C_1\|x\| + C_2\|x\| = (C_1 + C_2)\|x\|,$$

тобто достатньо показати обмеженість кожного оператора.

$$\|A_1 x\| = \sqrt{\int_0^1 \left|\int_0^1 st^2 x(s)ds\right|^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 t^4 \left|\int_0^1 s \cdot x(s)ds\right|^2 dt} = \left|\int_0^1 s \cdot x(s)ds\right| \sqrt{\int_0^1 t^4 dt} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left|\int_0^1 s \cdot x(s)ds\right| \le \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\int_0^1 |x(s)|^2 ds}\sqrt{\int_0^1 s^2 ds} = \frac{1}{\sqrt{15}}\|x\|;$$

$$\|A_2 x\| = \sqrt{\int_0^1 \left|\int_0^1 ts^2 x(s)ds\right|^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 t^2 \left|\int_0^1 s^2 \cdot x(s)ds\right|^2 dt} = \left|\int_0^1 s^2 \cdot x(s)ds\right| \sqrt{\int_0^1 t^2 dt} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\int_0^1 s^2 \cdot x(s)ds\right| \le \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\int_0^1 |x(s)|^2 ds}\sqrt{\int_0^1 s^4 ds} = \frac{1}{\sqrt{15}}\|x\|;$$

$$\|Ax\| = \|A_1 x + A_2 x\| \le \|A_1 x\| + \|A_2 x\| \le \frac{1}{\sqrt{15}}\|x\| + \frac{1}{\sqrt{15}}\|x\| = \frac{2}{\sqrt{15}}\|x\|,$$

тобто $A$ є обмеженим скінченновимірним оператором в $L_2[0,1]$. Це означає, що оператор $A$ є компактним оператором в просторі $L_2[0,1]$.

Приклад 2.4 Нехай $A$ – лінійний неперервний оператор в просторі $l_2$, який діє за правилом

$$Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n, ...),$$

де

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots).$$

Якщо $\lim\limits_n \alpha_n = 0$, тоді $A$ – компактний.

За означенням компактного оператора достатньо показати, що оператор $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n, ...)$ переводить будь-яку обмежену множину в передкомпактну. Оскільки будь-яка обмежена множина з $l_2$ міститься в деякій кулі цього простору, покажемо, що образи куль передкомпакні, тобто що під дією оператора $A$ куля переходить в передкомпактну множину.

За допомогою відображення

$$y = \frac{x-a}{r}$$

будь-яку кулю $B_r[a] = \{x \in X : \|x-a\| \le r\}$ можна перетворити на одиничну кулю з центром в початку координат $B_1[0] = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$. Дійсно, якщо $x \in B_r[a]$, тоді

$$\|y\| = \frac{\|x-a\|}{r} \le \frac{r}{r} = 1,$$

тобто $y \in B_1[0]$.

Отже, оскільки оператор $A$ є лінійним, для доведення його компактності достатньо довести, що він переводить одиничну кулю $B_1[0]$ в передкомпактну множину.

Розглянемо образ одиничної кулі:

$$M = AB_1[0] = \{(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n, ...) : x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in B_1[0]\}.$$

Оскільки

$$B_1[0] = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \le 1 \right\},$$

тоді $\forall n \quad |x_n| \le 1$.

Оскільки при $n \to \infty$, $\alpha_n \to 0$, тоді послідовність $\{\alpha_n\}$ є обмеженою, тобто існує $\sup\limits_n |\alpha_k| = C$.

Отже,

$$\|y\| = \|(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n, \ldots)\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 x_n^2} \le C \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2} = C.$$

Тобто множина $M$ є обмеженою.

Оскільки $\lim\limits_n \alpha_n = 0$, тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $n_0$, таке що

$$\forall n \ge n_0 \ |\alpha_n| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Тоді для довільного $y = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n, \ldots) \in M$ оцінимо залишок ряду

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} y_k^2 = \sum_{k=n_0}^{\infty} \alpha_k^2 x_k^2 < \varepsilon \sum_{k=n_0}^{\infty} x_k^2 < \varepsilon.$$

Отже, множина $M$ передкомпактна, тобто оператор $A$ переводить одиничну кулю у передкомпактну множину, а це доводить, що оператор $A$ є компактним.

Приклад 2.5 Розглянемо у просторі $l_2$ оператор $A$, заданий наступним чином: якщо $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, тоді

$$Ax = (x_1, \frac{1}{2}x_2, ..., \frac{1}{2^n}x_n, ...).$$

Цей оператор є компактним. Дійсно, оскільки будь-яка обмежена підмножина з $l_2$ міститься у деякій кулі, достатньо довести, що образи куль передкомпактні, а в силу лінійності оператора достатньо перевірити це для одиничної кулі. Але оператор $Ax = (x_1, \frac{1}{2}x_2, ..., \frac{1}{2^n}x_n, ...)$ переводить одиничну кулю простору $l_2$ у множину точок, які містяться в основному паралелепіпеді. Оскільки ця множина цілком обмежена [6], вона передкомпактна.

### 2.3 Спектр компактного оператора

Наведемо основні означення стосовно спектра лінійного неперервного оператора.

Згадаємо означення деяких понять лінійної алгебри [4]. Розглянемо у $n$-вимірному просторі $X$ лінійний оператор $A$, який задається матрицею $\left(a_{jk}\right)_{j,k=1}^{n}$. Ненульовий вектор $\varphi \in E$ називається власним вектором оператора $A$, що відповідає власному значенню $\lambda \in C$, якщо $A\varphi = \lambda\varphi$. Сукупність усіх власних значень оператора $A$ називається спектром оператора $A$. Спектр оператора $A$ збігається з множиною коренів $\{\lambda_1, ..., \lambda_m\}(m \le n)$ характеристичного рівняння $\det\left(a_{jk} - \lambda\delta_{jk}\right)_{j,k=1}^{n} = 0$. Однорідне рівняння $(A - \lambda\mathrm{I})\varphi = 0$ має нетривіальний розв'язок тільки для $\lambda = \lambda_k\,(k = 1, ..., m)$. Якщо $z \notin \{\lambda_1, ..., \lambda_m\}$, то $Ker(A - \lambda\mathrm{I}) = \{0\}$ і оператор $A - \lambda\mathrm{I}$ оборотний. Тут I – тотожний оператор.

Перейдемо до узагальнення цих понять на випадок нескінченновимірних лінійних просторів. Нехай $X$ – лінійний нормований простір, $A$ – лінійний неперервний оператор у ньому.

**Означення 2.8** Ненульовий вектор $\varphi \in X$ назвемо власним вектором оператора $A$, який відповідає власному значенню $\lambda \in C$, якщо $A\varphi = \lambda\varphi$. Однак означення спектра оператора у скінченновимірному просторі не допускає прямого переносу на нескінченновимірний випадок.

**Означення 2.9** Доповнення (у комплексній площині) до множини $\rho(A)$ усіх регулярних точок оператора $A$ називається спектром оператора $A$ та позначається $\sigma(A)$.

Якщо $X$ – скінченновимірний простір, тоді неперервна оборотність оператора $A - \lambda \mathrm{I}$ рівносильна тому, що $Ker(A - \lambda \mathrm{I}) = \{0\}$. Тому у випадку $\dim X < \infty$ точка $\lambda$ входить у $\sigma(A)$ в тому і тільки в тому випадку, коли має ненульовий розв’язок рівняння $(A - \lambda \mathrm{I})\varphi = 0$. Таким чином, у випадку $\dim X < \infty$ означення спектра оператора $A$ збігається з відомим з лінійної алгебри означенням спектра як сукупності усіх власних значень оператора.

Нехай обмежений лінійний оператор $A$ задано у банаховому $X$. Для фіксованих $\lambda \in C$ та $y \in X$ розглянемо питання про існування розв’язку рівняння $(A - \lambda I)x = y$, тобто про існування оператора $(A - \lambda I)^{-1}$. Нагадаємо, що якщо цей оператор існує, тоді він буде неперервним завдяки теоремі Банаха про обернений оператор.

Отже, якщо існує обмежений оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, тобто $\lambda$ є регулярною точкою оператора $A$. Якщо рівняння $Ax = \lambda x$ має ненульовий розв’язок, тобто $\lambda$ є власним значенням для $A$, оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ при цьому $\lambda$ не існує, а сукупність таких таких $\lambda$ утворює точковий спектр оператора $A$. Нарешті, якщо оператор $(A - \lambda I)^{-1}$існує, але заданий не на всьому просторі $X$, тобто $R(A - \lambda I) \subset X$, тоді можливі 2 ситуації: якщо

$\overline{(A-\lambda I)}=X$, говорять, що $\lambda$ належить неперервній частині спектра, а якщо $\overline{(A-\lambda I)}\neq X$, $\lambda$ належить залишковій частині спектра.

Відомо, що спектр будь–якого лінійного неперервного оператора є непорожньою множиною. Більш того, має місце наступний факт [9].

**Теорема 2.2** Спектр лінійного неперервного оператора $A$ є замкненою підмножиною кола $\{\lambda \in C \| \lambda | \leq \|A\|\} = B_{\|A\|}[0]$.

Зауважимо, що коли оператор є компактним, його спектр може бути описаний ще більш докладно [2].

**Теорема 2.3** Нехай $A$ – компактний оператор у нескінченновимірному банаховому просторі $X$. Справедливі наступні твердження:

1) спектр $\sigma(A)$ оператора $A$ – не більш ніж злічення підмножина кола $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \|\lambda\| \leq \|A\|\}$, що містить точку $0$;

2) відмінні від нуля точки $\sigma(A)$ є власними значеннями скінченної кратності, тобто власні підпростори, що відповідають їм, скінченновимірні.

3) якщо $\sigma(A)$ – нескінченна множина, тоді $0$ є единою граничною точкою $\sigma(A)$.

Приклад 2.6 Знайдемо спектр оператора $(Ax)(t)=\int\limits_{[0,1]}(2t+1)\cdot x(s)d\mu(s)$, який задано на просторі $L_2[0,1]$. Подамо оператор у вигляді $(Ax)(t)=(2t+1)\cdot\int\limits_{[0,1]}x(s)d\mu(s)$. Зрозуміло, що цей оператор є одновимірним, тобто компактним. Знайдемо його спектр, для чого спочатку розв'яжемо рівняння вигляду $Ax=\lambda x$:

$$(2t+1)\cdot\int\limits_{[0,1]}x(s)d\mu(s)=\lambda x(t).$$

Позначимо $c=\int\limits_{[0,1]}x(s)d\mu(s)$, тоді $(2t+1)\cdot c=\lambda x(t)$. Якщо $\lambda\neq 0$, проінтегруємо обидві частини:

$$c\int_0^1 (2t+1)dt = \lambda \cdot \int_{[0,1]} x(t)d\mu(t) = \lambda c\,,\ \lambda \cdot c = 2 \cdot c.$$

Звідси випливає, що $\lambda = 2$ – власне значення оператора $A$. Розглянемо випадок, коли $\lambda = 0$, тоді при будь-якому $t$

$$(2t+1) \cdot \int_{[0,1]} x(s)d\mu(s) = 0$$

або

$$\int_{[0,1]} x(s)d\mu(s) = 0\,.$$

Візьмемо $x(t) = t - \dfrac{1}{2}$, тоді

$$\int_0^1 \left(s - \frac{1}{2}\right)ds = \frac{s^2}{2} - \frac{s}{2}\Bigg|_0^1 = 0\,,$$

тобто рівняння має ненульовий розв'язок, що означає, що $\lambda = 0$ також є власним значенням оператора. Отже, $\lambda = 0{,}2 \in \sigma(A)$.

Для знаходження інших елементів спектра дослідимо сюр'єктивність оператора $(A - \lambda I)$, тобто розв'яжемо рівняння $(A - \lambda I)x(t) = y(t)$ з довільною функцією $y(t) \in L_2[0,1]$:

$$(A - \lambda I)x(t) = (2t+1) \cdot c - \lambda x(t) = y(t)\,,$$

звідки $x(t)=\dfrac{c\cdot(2t+1)-y(t)}{\lambda}$. Для знаходження константи $c$ інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int_0^1((2t+1)\cdot c)dt-\int_{[0,1]}\lambda x(t)d\mu(t)=\int_{[0,1]}y(t)d\mu(t),$$

$$c\cdot\int_0^1(2t+1)dt-\lambda\cdot c=\int_{[0,1]}y(t)d\mu(t),$$

$$2\cdot \mathrm{c}-\lambda\cdot c=\int_{[0,1]}y(t)d\mu(t),$$

$$c=\frac{\int_{[0,1]}y(t)d\mu(t)}{2-\lambda}.$$

Отримаємо,

$$x(t)=\frac{c\cdot(2t+1)-y(t)}{\lambda}=\frac{(2t+1)\cdot\int_{[0,1]}y(s)d\mu(s)-(2-\lambda)y(t)}{\lambda(2-\lambda)}.$$

Отже, при $\lambda\neq 0{,}2$ знайдена функція $x(t)$, очевидно, належить просторові $L_2[0,1]$, тобто спектр утворюють лише точки $\lambda=0{,}2$.

Знайдемо норму цього оператора:

$$\|Ax\|=\left\|\int_{[0,1]}(2t+1)\cdot x(s)d\mu(s)\right\|=\sqrt{\int_{[0,1]}\left|\int_{[0,1]}(2t+1)x(s)d\mu(s)\right|^2d\mu(t)}=$$

$$=\left|\int_{[0,1]}x(s)d\mu(s)\right|\sqrt{\int_{[0,1]}(2t+1)^2d\mu(t)}=\sqrt{\frac{13}{3}}\left|\int_{[0,1]}x(s)d\mu(s)\right|\leq$$

$$\le \sqrt{\frac{13}{3}}\sqrt{\int\limits_{[0,1]} |x(s)|^2 \, d\mu(s)} \cdot \sqrt{\int\limits_{[0,1]} d\mu(s)} = \sqrt{\frac{13}{3}}\|x\|.$$

Звідси випливає, що $\|A\| \le \sqrt{\frac{13}{3}}$. Оскільки при всіх $x(t) \in L_2[0,1]$ $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$, виберемо в якості $x(t) = 1$. Тоді

$$(Ax)(t) = \int\limits_{[0,1]} (2t+1) d\mu(s) = 2t+1,$$

$$\|x\| = 1, \quad \|Ax\| = \sqrt{\int\limits_{[0,1]} (2t+1)^2 \, d\mu(t)} = \sqrt{\frac{13}{3}}$$

і остання нерівність набуває вигляду

$$\sqrt{\frac{13}{3}} \le \|A\| \cdot 1.$$

Враховуючи, що вище отримано оцінку $\|A\| \le \sqrt{\frac{13}{3}}$, маємо, що $\|A\| = \sqrt{\frac{13}{3}} \approx 2{,}08$. Отже, спектр заданого оператора дійсно є підмножиною кола радіуса $\sqrt{\frac{13}{3}}$.

# 3 КОМПАКТНІ ОПЕРАТОРИ В ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯННЯХ

Одним з найбільш відомих застосувань компактних операторів є їхнє застосування в теорії інтегральних рівнянь.

## 3.1 Загальні поняття теорії інтегральних рівнянь

Інтегральним рівнянням називають рівняння, котрі містять невідому функцію під знаком інтеграла. Наприклад, інтегральним рівнянням відносно функції $\varphi(t)$ є рівняння

$$\alpha(t)\varphi(t) + f(t) = \lambda\int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds, \tag{3.1}$$

де $\alpha(t), f(t), k(t,s)$ – невідомі функції (змінні $t$ та $s$ пробігають тут деякий фіксований відрізок $[a,b]$, а функції і параметр $\lambda$ можуть приймати як дійсні так і комплексі значення).

Виділимо основні класи рівнянь, які будемо розглядати далі [6].

Рівняння вигляду

$$\varphi(t) - \lambda\int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds = f(t) \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \tag{3.2}$$

називають рівняннями Фредгольма другого роду, а рівняння вигляду

$$\int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds = f(t) \tag{3.3}$$

– рівняннями Фредгольма першого роду.

При чому, як правило, припускають, що їхнє ядро $k(t,s)$ та вільний член $f(t)$ є сумовними з квадратом функціями (ядро – в квадраті $[a,b]\times[a,b]$, вільний член – на відрізку $[a,b]$). Нагадаємо, що функція $f(t)$ називається інтегровною з квадратом на $[a,b]$, якщо існує інтеграл Лебега

$$\int_a^b \varphi^2(s)ds\,.$$

Розглянемо у просторі $L_2[a,b]$ оператор $K$, який визначається відношенням

$$(K\varphi)(t)=\int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds \tag{3.4}$$

чи $K\varphi=\psi$, де $\psi(t)=\int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds$

Цей оператор називається оператором Фредгольма з ядром $k(t,s)$. В розділі 2 було показано, що якщо ядро є неперервною функцією, такой оператор є компактним у просторі $C[a,b]$

**Теорема 3.1** Якщо $k(t,s)$ – функція з інтегровним квадратом, то формула (3.4) визначає у просторі $L_2[a,b]$ компактний оператор, причому

$$\|K\|\le\left(\int_a^b\int_a^b |k(t,s)|^2\,dtds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

### 3.2 Інтегральні рівняння з компактними операторами в гільбертовому просторі

Розглянемо наступні рівняння у гільбертовому просторі з компактним оператором $A$:

$$Ax = y \tag{3.5}$$

(рівняння першого роду),

$$x - Ax = y \tag{3.6}$$

(рівняння другого роду),

$$z - Az = 0 \tag{3.7}$$

(відповідне до нього однорідне рівняння),

$$f - A^* f = g \tag{3.8}$$

(спряжене до (3.6) рівняння),

$$\varphi - A^* \varphi = 0 \tag{3.9}$$

(відповідне однорідне спряжене рівняння).

Нагадаємо, що в гільбертовому просторі оператор $A^*$ називається спряженим до оператора $A$, якщо $\forall x.y \in H$ виконується умова

$$\left(Ax, y\right) = \left(x, A^{*} y\right).$$

Якщо $A^{*} = A$, оператор називається самоспряженим.

**Теорема 3.2** Наступні твердження є еквівалентними [6]:

а) рівняння (3.6) має розв’язок (причому єдиний) при будь-якій правій частині;

б) рівняння (3.7) має тільки тривіальний розв’язок;

в) рівняння (3.8) має розв’язок при будь-якій правій частині;

г) рівняння (3.9) має тільки тривіальний розв’язок.

Якщо виконана одна з умов а)-г), тоді оператори $I - A$ та $I - A^{*}$ є неперервно оберненими.

Зауважимо також, що твердження про еквівалентність умов а) та б) в літературі називаються альтернативою Фредгольма.

Приклад 3.1 Розглянемо однорідне рівняння Фредгольма

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^1 (s^3 + 2st)\varphi(s)ds = 0. \tag{3.10}$$

Покажемо, що при кожному $\lambda \neq 0$ це рівняння та спряжене до нього рівняння мають однакову кількість лінійно незалежних розв’язків в просторі $C[0,1]$.

Знайдемо оператор, спряжений до $\left(K\varphi\right)\left(t\right) = \lambda \int_0^1 (s^3 + 2st)\varphi(s)ds$:

$$\forall \varphi, y \in C[0,1] \ \left(K\varphi, y\right) = \int_0^1 \left(K\varphi\right)\left(t\right) \cdot y\left(t\right)dt = \int_0^1 \left( \lambda \int_0^1 (s^3 + 2st)\varphi(s)ds \right) \cdot y\left(t\right)dt =$$

$$= \lambda \int_0^1 \left( \int_0^1 (s^3 + 2st) \cdot y(t)dt \right) \varphi\left(s\right)ds = \int_0^1 \varphi\left(s\right) \cdot \lambda \left( \int_0^1 (s^3 + 2st) \cdot y(t)dt \right) ds = \left(\varphi, A^{*} y\right).$$

Звідси отримуємо, що

$$\left(A^* y\right)(t) = \lambda \int_0^1 \left(t^3 + 2st\right) y(s) ds.$$

Значить, спряжене рівняння має вигляд

$$\psi(t) - \left(A^* \psi\right)(t) = 0$$

або

$$\psi(t) - \lambda \int_0^1 \left(t^3 + 2st\right) \psi(s) ds. \tag{3.11}$$

Функції $\varphi(t)$ та $\psi(t)$, які задовольняють ці рівняння, будемо шукати відповідно у вигляді

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^1 \left(s^3 + 2st\right) \varphi(s) ds = \lambda \int_0^1 \left(s^3\right) \varphi(s) ds + 2\lambda t \int_0^1 (s) \varphi(s) ds = \alpha_1 + \alpha_2 t$$

та

$$\psi(t) = \lambda \int_0^1 \left(t^3 + 2st\right) \psi(s) ds = t^3 \lambda \int_0^1 \psi(s) ds + 2\lambda t \int_0^1 s \psi(s) ds = \beta_1 t + \beta_2 t^3 .$$

Тому для визначення сталих $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ підставимо $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ в (3.10) та (3.11):

$$\alpha_1 + \alpha_2 t - \lambda \int_0^1 \left(s^3 + 2st\right)\left(\alpha_1 + \alpha_2 s\right) ds = 0,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 t - \lambda \int_0^1 \left( \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^4 + 2\alpha_1 st + 2\alpha_2 s^2 t \right) ds = 0,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 t - \lambda \left( \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{5} + \alpha_1 t + \frac{2}{3}\alpha_2 t \right) = 0,$$

$$\left( \alpha_1 - \lambda \frac{\alpha_1}{4} - \lambda \frac{\alpha_2}{5} \right) + t \left( \alpha_2 - \lambda \alpha_1 - \frac{2}{3}\lambda \alpha_2 \right) = 0.$$

Оскільки рівність виконується при всіх $t \in [0,1]$, отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda}{4}\right)\alpha_1 - \frac{\lambda}{5}\alpha_2 = 0, \\ -\lambda \alpha_1 + \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right)\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

та

$$\beta_1 t + \beta_2 t^3 - \lambda \int_0^1 \left( t^3 + 2st \right)\left( \beta_1 s + \beta_2 s^3 \right) ds = 0,$$

$$\beta_1 t + \beta_2 t^3 - \lambda \int_0^1 \left( t^3 \beta_1 s + 2t\beta_1 s^2 + t^3 \beta_2 s^3 + 2t\beta_2 s^4 \right) ds = 0,$$

$$\beta_1 t + \beta_2 t^3 - \lambda \left( \frac{t^3 \beta_1}{2} + \frac{2}{3}\beta_1 t + \frac{1}{4}\beta_2 t^3 + \frac{2}{5}\beta_2 t \right) = 0,$$

$$t\left( \beta_1 - \frac{2}{3}\beta_1 \lambda - \frac{2}{5}\beta_2 \lambda \right) + t^3 \left( \beta_2 - \frac{1}{4}\beta_2 \lambda - \frac{1}{2}\beta_1 \lambda \right) = 0.$$

Оскільки рівність виконується при всіх $t \in [0,1]$, отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \left(1-\frac{2}{3}\lambda\right)\beta_1 - \frac{2}{5}\beta_2\lambda = 0, \\ -\frac{1}{2}\lambda\beta_1 + \left(1-\frac{1}{4}\lambda\right)\beta_2 = 0. \end{cases}$$

У цих систем один й той самий визначник $\Delta(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{30} - \frac{11}{12}\lambda + 1$, та для тих $\lambda_0$, що $\Delta(\lambda_0) \neq 0$, обидва інтегральних рівняння мають тільки тривіальні розв'язки. Якщо ж $\lambda$ збігається з одним з коренів визначника $\Delta(\lambda)$, то кожне з інтегральних рівнянь має лише по одному нетривіальному розв'язку (наприклад, $\varphi(t) = 1 + \frac{5}{4} \cdot \frac{4-\lambda}{\lambda} t$ та $\psi(t) = t + \frac{5}{4} \cdot \frac{4-\lambda}{\lambda} t^3$).

Приклад 3.3 Нехай $f \in L_2[0,1]$. Розв'яжемо рівняння

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^1 \varphi(s)ds = f(t), \ \lambda \neq 0.$$

Оскільки шукана функція $\varphi(t)$ представлена у вигляді $\varphi(t) = C\lambda + f(t)$, то після підстановки цього виразу в рівняння отримаємо

$$(1-\lambda)C = \int_0^1 f(s)ds. \qquad (3.12)$$

Отже, якщо $\lambda \neq 1$, то

$$C = \frac{1}{1-\lambda}\int_0^1 f(s)ds \text{ та } \varphi(t) = f(t) + \frac{\lambda}{1-\lambda}\int_0^1 f(s)ds$$

Нехай $\lambda = 1$. Тоді (3.12) приймає вигляд

$$\int_0^1 f(s)ds = 0. \qquad (3.13)$$

Тобто, якщо умова (3.13) не виконується, тоді початкове рівняння не має розв'язку; якщо вона виконується, то співвідношення (3.12) задовольняє довільна стала $C$, а відповідне інтегральне рівняння має безліч розв'язків вигляду

$$f(t) + C.$$

Відзначимо, що в цьому випадку оператор Фредгольма $K$ є самоспряженим, а самоспряжене однорідне рівняння при $\lambda = 1$ має вигляд

$$\psi(t) - \int_0^1 \psi(s)ds = 0.$$

Його розв'язками є тільки функції $\psi(t) = C_1$ ($C_1$ – довільна стала). Тому умова (3.13) – це умова ортогональності $f(t)$ до розв'язків спряженого однорідного рівняння.

### 3.3 Метод послідовних наближень

Існують різні методи розв'язання інтегральних рівнянь з компактними операторами. Розглянемо лише деякі з них.

Нехай вільний член та ядро рівняння Фредгольма є неперервними функціями (перша – на $[a,b]$, друга – на квадраті $[a,b]\times[a,b]$). Виберемо якусь неперервну функцію $\varphi_0(t)$ та підставимо її в праву частину цього рівняння. Отримаємо

$$\varphi_1(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)\varphi_0(s)ds,$$

причому $\varphi_1(t)$ також є неперервною на $[a,b]$. Поступимо з нею так само, як і з $\varphi_0(t)$. Якщо продовжувати цей процес, отримаємо послідовність функцій $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t),\ldots$, які задовольняють рівняння

$$\varphi_2(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)\varphi_1(s)ds,$$

$$\ldots$$

$$\varphi_n(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)\varphi_{n-1}(s)ds,$$

$$\ldots$$

З цієї системи випливає, що

$$\varphi_n(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k_1(t,s) f(s)ds + \lambda^2 \int_a^b k_2(t,s) f(s)ds + \ldots + \lambda^{n-1} \int_a^b k_{n-1}(t,s)ds + R_n(t),$$

де $R_n(t) = \lambda^n \int_a^b k_n(t,s)\varphi_0(s)ds$. Враховуючи оцінки

$$\max_{t\in[a,b]} |R_n(t)| \le |\lambda|^n (b-a)^n \left( \max_{s,t\in[a,b]} |k(t,s)| \right)^n \max_{t\in[a,b]} |\varphi_0(t)|,$$

робимо висновок, що при $|\lambda|(b-a)\left( \max_{s,t\in[a,b]} |k(t,s)| \right) < 1$ $\lim_{n\to\infty} R_n(t) = 0$ та $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – розв’язок рівняння Фредгольма.

Зауважимо, що в процесі послідовного наближення кожна функція $\varphi_n(t)$ залежить від вибору початкової функції $\varphi_0(t)$. Проте гранична функція $\varphi(t)$ від вибору $\varphi_0(t)$ не залежить.

Найчастіше метод послідовних наближень використовують для розв'язку інтегральних рівнянь Вольтерра, оскільки в цьому випадку він може застосовуватись при усіх значеннях $\lambda$. Тут важливо лише вибрати «нульове» наближення $\varphi_0(t)$, хоча часто вважають $\varphi_0(t) = f(t)$.

Приклад 3.4 Методом послідовних наближень розв'яжемо наступні рівняння в просторі $L_2[0,1]$:

а) $\varphi(t) = 2t + 2 - \int_0^t \varphi(s)ds.$

В якості нульового наближення візьмемо $\varphi_0(t) \equiv 1$. Отримаємо:

$$\varphi_1(t) = 2t + 2 - \int_0^t 1ds = 2t + 2 - t = t + 2,$$

$$\varphi_2(t) = 2t + 2 - \int_0^t (s+2)ds = 2t + 2 - \frac{t^2}{2} - 2t = 2 - \frac{t^2}{2!},$$

$$\varphi_3(t) = 2t + 2 - \int_0^t \left(2 - \frac{s^2}{2}\right)ds = 2 + \frac{t^3}{3!},$$

$$\ldots$$

$$\varphi_n(t) = 2 + (-1)^{n+1}\frac{t^n}{n!}.$$

Цей вигляд $\varphi_n(t)$ легко перевіряється за індукцією.

Дійсно,

$$\varphi_{n+1}(t) = 2t + 2 - \int_0^t \left(2 + \frac{(-1)^{n+1}s^{n+1}}{(n+1)!}\right)ds = 2t + 2 - \left(2s + \frac{(-1)^{n+1}s^{n+1}}{(n+1)!}\right)\Bigg|_0^t =$$

$$= 2t + 2 - 2t - \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!} = 2 + \frac{(-1)^{n+2} t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Оскільки $\varphi_n(t) \xrightarrow{м.с.} 2$ в $L_2[0,1]$, то розв'зком рівняння є функція $\varphi(t) = 2$.

б) $\varphi(t) = 1 + t + \int_0^t (t-s)\varphi(s)ds.$

В якості нульового наближення візьмемо $\varphi_0(t) \equiv 1$. З виду данного рівняння можна сказати, що $n$-не наближення можна представити у вигляді

$$\varphi_1(t) = 1 + t + \int_0^t (t-s)ds = 1 + t + \left( ts - \frac{s^2}{2} \right)\Bigg|_0^t = 1 + t + \frac{t^2}{2},$$

$$\varphi_2(t) = 1 + t + \int_0^t (t-s)\left(1 + s + \frac{s^2}{2}\right)ds = 1 + t + \int_0^t \left( t + ts + \frac{ts^2}{2} - s - s^2 - \frac{s^3}{2} \right)ds =$$

$$= 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{6} - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{8} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!}.$$

За індукцією легко показати, що $\varphi_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ та $\varphi(t) = \lim_n \varphi_n(t) = e^t$.

### 3.4 Рівняння з виродженими ядрами

**Означення 3.1** Ядро $k(t,s)$ інтегрального рівняння Фредгольма другого роду називається виродженим, якщо воно є сумою скінченного числа добутків функцій тільки від $t$ на функції тільки від $s$, тобто якщо воно має вигляд

$$k(t,s)=\sum_{k=1}^{n}a_k(t)b_k(s);$$

функції $a_k(t)$ та $b_k(s)$ будемо вважати неперервними на $[a,b]$ та лінійно незалежними між собою.

Тоді рівняння прийме вигляд

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\int_a^b b_k(s)\varphi(s)ds$$

або

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\sum_{k=1}^{n}c_k a_k(f), \tag{3.14}$$

де $c_k=\int_a^b b_k(s)\varphi(s)ds$ – невідомі сталі (бо функція $\varphi(s)$ – невідома).

Звідси випливає, що розв'язок рівняння зводиться до знаходження сталих $c_k(k=1,2,...,n)$. Якщо підставити (3.14) в (3.2) та враховувати лінійну незалежність функцій $a_m(t)$, приходимо до висновку, що сталі $c_k$ повинні визначатися з системи алгебраїчних рівнянь

$$c_m-\lambda\sum_{k=1}^{n}a_{km}c_k=f_m \quad (m=1,2,...,n),$$

$$a_{km}=\int_a^b a_k(t)b_m(t)dt,$$

$$f_m=\int_a^b b_m(t)f(t)dt.$$

Якщо визначник

$$\Delta(\lambda) = \det\left\| b_{km} - \lambda a_{km} \right\|_{k,m=1}^{n}$$

цієї системи відмінний від нуля, то відповідне рівняння (3.2) має єдиний розв'язок, який задається формулою (3.14).

Приклад 3.5 Розв'яжемо інтегральне рівняння

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^{\pi} (\sin s + s \cdot \cos t)\varphi(s)ds = 1 - \frac{2t}{\pi},$$

де $\lambda \in R$.

Оскільки ядро рівняння є виродженим, то розв'язок рівняння треба шукати у вигляді

$$\varphi(t) = C_1 t + C_2 \cos t + C_3 t.$$

Якщо підставити цей вираз в дане рівняння, отримаємо

$$C_1 + C_2 \cos t + C_3 t - \lambda \int_0^{\pi} (\sin s + s \cdot \cos t)(C_1 + C_2 \cos s + C_3 s)ds = 1 - \frac{2t}{\pi},$$

$$C_1 + C_2 \cos t + C_3 t - \lambda \int_0^{\pi} (C_1 \sin s + C_2 \sin s \cdot \cos s + C_3 s \cdot \sin s + C_1 s \cdot \cos t +$$

$$+ C_2 s \cdot \cos s \cdot \cos t + C_3 s^2 \cos t)ds = 1 - \frac{2t}{\pi},$$

$$C_1 + C_2 \cos t + C_3 t - \lambda \left( 2C_1 + \pi C_3 + \frac{\pi^2 C_1}{2} \cos t - 2C_2 \cos t + \frac{C_3 \pi^3}{3} \cos t \right) = 1 - \frac{2t}{\pi},$$

$$C_1 + C_2\cos t + C_3 t - 2\lambda C_1 - \pi\lambda C_3 - \frac{\pi^2\lambda C_1}{2}\cos t + 2\lambda C_2\cos t - \frac{\lambda C_3\pi^3}{3}\cos t - 1 + \frac{2t}{\pi} = 0,$$

$$\left(C_1 - 2\lambda C_1 - \pi\lambda C_3 - 1\right) + \left(C_3 + \frac{2}{\pi}\right)t + \left(C_2 - \frac{\lambda\pi^2 C_1}{2} + 2\lambda C_2 - \frac{\lambda C_3\pi^3}{3}\right)\cos t = 0.$$

Враховуючи лінійну незалежність фунцій $1, t, \cos t$, отримуємо систему:

$$\begin{cases} C_1 - 2\lambda C_1 - \pi\lambda C_3 - 1 = 0, \\ C_3 + \dfrac{2}{\pi} = 0, \\ C_2 - \dfrac{\lambda\pi^2 C_1}{2} + 2\lambda C_2 - \dfrac{\lambda C_3\pi^3}{3} = 0. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $C_3 = -\dfrac{2}{\pi}$ та система перетвориться на таку:

$$\begin{cases} C_1(1 - 2\lambda) = 1 + \pi\lambda C_3 = 1 - 2\lambda, \\ C_2(1 + 2\lambda) = \dfrac{\lambda\pi^2 C_1}{2} - \dfrac{2\lambda\pi^2}{3}. \end{cases}$$

Якщо $\lambda \neq \pm\dfrac{1}{2}$, тоді $C_1 = 1,\ C_2 = -\dfrac{\pi^2\lambda}{6(1+2\lambda)}$, тобто при $\lambda \neq \pm\dfrac{1}{2}$ рівняння має розв’язок

$$\varphi(t) = 1 - \frac{2}{\pi}t - \frac{\pi^2\lambda}{6(1+2\lambda)}\cos t.$$

Якщо $\lambda = \dfrac{1}{2}$ рівняння $C_1(1 - 2\lambda) = 1 - 2\lambda$ перетворюється на тотожність.

Отже, залишається рівняння $2C_2 = \frac{\pi^2 C_1}{4} - \frac{\pi^2}{3}$ або $C_1 = \frac{8C_2}{\pi^2} + \frac{4}{3}$. Значить, при $\lambda = \frac{1}{2}$ розв'язком буде фукнція

$$\varphi(t) = \frac{4}{3} - \frac{2}{\pi}t + \frac{8C_2}{\pi^2} + C_2 \cos t = \frac{4}{3} - \frac{2}{\pi}t + C\left(8 + \pi^2 \cos t\right),$$

де $C$ – довільна константа.

Якщо ж $\lambda = -\frac{1}{2}$, тоді $C_1 = 1, C_3 = -\frac{2}{\pi}$, але останнє рівняння системи перетвориться на таке:

$$0 = -\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{3},$$

що не має сенсу, тобто при $\lambda = -\frac{1}{2}$ рівняння не має розв'язків.

# ВИСНОВКИ

Кваліфікаційна робота була присвячена дослідженню властивостей компактних операторів, що діють в банахових просторах. Оскільки компактні оператори дуже схожі на скінченновимірні оператори, вони мають велику кількість схожих властивостей. Відомо, наприклад, що оператор є компактним тоді та тільки тоді, коли він може бути поданий у вигляді рівномірної границі послідовності скінченновимірних операторів.

У роботі наведені основні властивості компактних операторів, які проілюстровані відповідними прикладами. Досліджені властивості спектра компактного оператора. На відміну від спектра довільного лінійного неперервного оператора, спектр компактного оператора утворюється тільки власними значеннями, причому їх кількість буде не більш ніж зліченною.

З компактними операторами пов’язана також теорія інтегральних рівнянь. Відомі теореми Фредгольма про існування розв’язків рівнянь з компактними операторами.

Перший розділ дипломної роботи містить попередні відомості з теорії банахових просторів, зокрема, критерії компактності у різних просторах.

У другому розділі розглянуто означення компактного оператора, основні властивості цього класу операторів та приклади компактних і некомпактних операторів.

Третій розділ містить відомості про інтегральні рівняння та найпоширеніші методи їх розв’язання. Як і в перших двох розділах, особливе місце виділено розв’язанню задач, показано на практиці застосування методу послідовних наближень та методу рівняннь з виродженими ядрами.

Результати роботи можуть бути застосовані при викладанні курсів функціонального аналізу та спецкурсу з інтегральних рівнянь.

# ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Ахиезер Н. И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Харьков : Высшая школа, 1977. 325 с.

2. Банах С.С. Курс функціонального аналізу. Киев : Радянська школа, 1948. 216 с.

3. Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функциональний анализ. Киев : Высшая школа, 1990. 600 с.

4. Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ. Москва : Наука, 1967. 412 с.

5. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. Москва : Мир, 1964. 267 с.

6. Городецкий В. В., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П. Методы решения задач по функциональному анализу. Киев : Вища школа, 1990. 479 с.

7. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Том 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Москва : Мир, 1966. 1064 с.

8. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Том 1. Общая теория. Москва : Мир, 1962. 896 с.

9. Канторович А. В., Акилов Г.П., Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва : Физматлит, 1959. 684 с.

10. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва : Наука, 1976. 542 с.

11. Красікова І. В. Функціональний аналіз : навчальний посібник. Запоріжжя: 2015. 104 с.

12. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. Москва : Наука, 1965. 519 с.