

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної математики**

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ОБЛАСТЕЙ
З РОЗРІЗАМИ ВЗДОВЖ ВІДРІЗКІВ ТА ПРОМЕНІВ»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1118-3
спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми математика

О.О. Велитченко

(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної
математики, доцент, к.т.н. Тітова О.О.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент декан математичного факультету,
професор, д.т.н. Гоменюк С.І.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

(шифр і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної
математики, д.т.н., доцент

Гребенюк С.М.
(підпис)

« 9 » грудня 2019р.

ЗАВДАННЯ НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Велитченко Олені Олександрівні

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи Конформні відображення областей з розрізами вздовж
відрізків та променів

керівник роботи Тітова Ольга Олександрівна, к.т.н., доцент

(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 29 » травня 2019 року № 812-с

2. Строк подання студентом роботи 09.12.2019

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.

2. Перелік питань до розробки.

3. Основна література

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

1. Конформні відображення.

2. Області з розрізами на комплексній площині.

3. Побудова конформних відображень

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) _____

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 09 вересня 2019 року**КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН**

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	10.09.2019	виконано
2.	Збір вихідних даних.	24.09.2019	виконано
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	30.09.2019	виконано
4.	Розробка першого та другого розділу.	24.10.2019	виконано
5.	Розробка третього розділу.	27.11.2019	виконано
6.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	08.12.2019	виконано
7.	Попередній захист кваліфікаційної роботи.	09.12.2019	до захисту допущено

Студент _____
(підпис)О.О. Велитченко _____
(ініціали та прізвище)Керівник роботи _____
(підпис)О.О. Тітова _____
(ініціали та прізвище)**Нормоконтроль пройдено**Нормоконтролер _____
(підпис)І.Г. Ткаченко _____
(ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Конформні відображення областей з розрізами вздовж відрізків та променів»: 63 с., 35 рис., 17 джерела.

ВІДРІЗКИ, КОНФОРМНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ, КОМПЛЕКСНА ПЛОЩИНА, ПРОМЕНІ, РОЗРІЗИ КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ, ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ.

Об'єкт дослідження – конформні відображення функцій.

Мета роботи: дослідити властивості конформних відображень, побудувати конформні відображення областей з розрізами.

Метод дослідження – аналітичний.

У кваліфікаційній роботі розглянуто теорію конформних відображень, наведено основні властивості таких відображень. Особливу увагу приділено деяким типам областей комплексної площини, зокрема, областям з розрізами. Побудовано відображення на області з розрізами вздовж відрізків, променів, паралельних променів. Приділено також увагу зіркоподібним багатокутним областям.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis «Conformal mappings of domains with cuts along segments and rays»: 63 pages, 35 figures, 17 references.

SEGMENTS, CONFORMAL MAPPING, THE COMPLEX PLANE, RAYS, CUTS OF THE COMPLEX PLANE, FUNCTIONS OF THE COMPLEX VARIABLE.

The object of study is conformal mappings of functions.

The aim of the study is to investigate the properties of conformal mappings, to construct the conformal mappings of domains with cuts.

The method of research is analytical.

In the qualification thesis the theory of conformal mappings is considered. The main properties of such mappings are presented. Particular attention is given to some types of complex domains, especially, the domains with cuts. Mappings of the domain with cuts along segments, rays, parallel rays are constructed. Attention is also given to star-shaped polygonal domains.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	2
Реферат.....	4
Summary.....	5
Вступ.....	7
1 Конформні відображення.....	9
1.1 Поняття конформності відображення.....	9
1.2 Елементарні функції комплексної змінної.....	13
2 Області з розрізами на комплексній площині.....	17
2.1 Розріз комплексної площини.....	17
2.2 Приклади областей з розрізами.....	18
3 Побудова конформних відображень	24
3.1 Інтеграл Кристоффеля-Шварца при побудові конформних відображень.....	24
3.2 Площина з розрізами вздовж паралельних променів, спрямованих в одному напрямку.....	26
3.3 Площина з розрізами вздовж паралельних променів, спрямованих в протилежних напрямках.....	30
3.4 Напівплощина з розрізами вздовж паралельних променів.....	33
3.5 Смуга з розрізами вздовж променів.....	40
3.6 Зіркоподібні багатокутні області.....	45
Висновки.....	56
Перелік посилань.....	58
Додаток А Функції комплексної графіки в Maple.....	60

ВСТУП

Комплексний аналіз – один із розділів класичної математики. Сучасна теорія функцій комплексної змінної має широке застосування в різних розділах математики, механіки, фізики, інформатики тощо. Аналітичні функції комплексної змінної описують плоскі гармонічні векторні поля, до дослідження яких зводиться багато прикладних задач. Тому методи комплексного аналізу знайшли застосування в задачах гідро-, електро-, аеродинаміки, теорії пружності.

Теорія функцій комплексної змінної отримала значного розвитку лише у XIX сторіччі, в першу чергу, завдяки роботам Огюстена-Луї Коші (фр. Augustin Louis Cauchy, 1789-1857), Бернарда Рімана (нім. Georg-Friedrich-Bernhard Riemann, 1826-1866), Карла Вейерштрасса (нім. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815-1897). Ріман розглядав функцію комплексної змінної, як відображення області однієї комплексної площини на область іншої, що володіє певними властивостями (конформне відображення), і довів основну теорему даної теорії (теорема Рімана). Нові обґрунтування методів Рімана містяться в роботах А. Пуанкаре (1854-1912) та інших математиків.

Конформні відображення застосовували з давніх часів. Наприклад, у картографії, коли потрібно було частину поверхні земної кулі зобразити на площині (на карті) з збереженням величин усіх кутів. Прикладами таких конформних відображень може бути стереографічна проекція. Особливе місце займають конформні відображення одних областей на інші.

Основні дослідження, пов'язані з конформністю відображень викладено в багатьох класичних підручниках та прикладних посібниках. Зокрема, це роботи І.Г. Арамановича, Г.Л. Лунца, Л.Е. Ельсгольца [2], В. Копенфельса, Ф. Штальмана [9], М.Л. Краснова, О.І. Кисельова,

Г.І. Макаренко [8], М.О. Лаврентьєва, Б.В. Шабата [10], Б.А. Фукса, Б.В. Шабата [16], І.А. Александрова [1], Е. Титчмарша [15], В.І. Іванова, В.Ю. Попова [6], Е.С. Половникова [11], І.І. Привалова [12], М.І. Карлова, Є.С. Половинкина, М.І. Шабунина [7], Ю.В. Сидорова, М.В. Федорука [14].

Конформні відображення простих областей можливо побудувати за допомогою елементарних функцій або їх комбінації. Дану роботу буде присвячено побудові відображень областей двовимірного простору, які мають прямолінійні розрізи. Зокрема, це будуть області з розрізами вздовж відрізків, променів, паралельних променів, спрямованих в один бік та в різні боки, зіркоподібні многокутні області. Побудова таких відображень є більш складною задачею.

Для побудови таких відображень у першому розділі розглянуто основні поняття та теореми теорії функцій комплексної змінної, також наведено властивості конформних відображень, побудованих за допомогою елементарних функцій.

У другому розділі розглянуто області з розрізами на комплексній площині та наведено приклади таких областей.

Третій розділ роботи присвячено побудові конформних відображень. Наведено велику кількість прикладів побудови відображень різних областей. При побудові було використано пакет математичних програм Maple, основні функції комплексної графіки якого наведено в додатку А.

1 КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

1.1 Поняття конформності відображення

Розглянемо множину точок комплексної площини. Областю на комплексній площині називають таку множину точок D , для якої виконуються дві властивості: 1) разом із кожною точкою із множини D цій множині належить і круг із центром в цій точці достатньо малого радіуса (властивість відкритості), 2) будь-які дві точки множини D можна поєднати ламаною, яка складається із точок множини (властивість зв'язності) [3].

Означення 1.1 Говорять, що в області D визначено однозначну (многозначну) функцію $w = f(z)$, якщо кожній точці $z \in D$ поставлено у відповідність одне (декілька) значень w .

Таким чином, функція $w = f(z)$ задає відображення точок комплексної площини z на відповідні точки комплексної площини w . Поняття графіка функції w відсутнє, оскільки ми задаємо відображення однієї комплексної площини на іншу.

Розглянемо неперервне та взаємно відображення [2] області D комплексної площини змінної z на деяку область D^* комплексної площини змінної w :

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (1.1)$$

Нехай функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ диференційовані в області D . Зафіксуємо довільну точку $z_0 = x_0 + iy_0$ із D та в околі цієї точки замінімо прирости функцій u та v диференціалами цих функцій. За означенням диференціалу [4]

$$\begin{cases} u - u_0 = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{z_0} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{z_0} \cdot (y - y_0) + \eta_1 \Delta r, \\ v - v_0 = \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{z_0} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{z_0} \cdot (y - y_0) + \eta_2 \Delta r, \end{cases} \quad (1.2)$$

де частинні похідні обчислюємо в точці z_0 , $\Delta r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, а η_1, η_2 прямують до нуля при $\Delta r \rightarrow 0$. Заміна приростів диференціалами зводиться до відкидання у співвідношеннях (1.2) доданків $\eta_1 \Delta r$ та $\eta_2 \Delta r$, які є малими більш високого порядку малості, ніж інші доданки цих формул (передбачається, що $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{z_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{z_0}\right)^2$ та $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{z_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{z_0}\right)^2$ відмінні від нуля).

Геометрично ця заміна рівносильна заміні відображення (1.2) наступним відображенням

$$\begin{cases} u - u_0 = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{z_0} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{z_0} \cdot (y - y_0), \\ v - v_0 = \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{z_0} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{z_0} \cdot (y - y_0), \end{cases} \quad (1.3)$$

яке називають головною лінійною частиною відображення (1.1).

Відображення (1.3) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} u = ax + by + l, \\ v = cx + dy + m, \end{cases} \quad (1.4)$$

де

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{z_0}, \quad b = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{z_0}, \quad c = \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{z_0}, \quad d = \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{z_0}, \\ l &= u_0 - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{z_0} \cdot x_0 - \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{z_0} \cdot y_0, \quad m = v_0 - \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{z_0} \cdot x_0 - \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{z_0} \cdot y_0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

не залежать від x та y . Воно є лінійним перетворенням площини (x, y) .

Означення 1.2 Лінійні перетворення, які володіють властивістю збереження подібності фігур називають ортогональними. Умови $bd + ac = 0, a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, є умовами ортогональності для перетворення (1.4).

Означення 1.3 Умови $a = d, b = -c$ виділяють ортогональні перетворення, що зберігають орієнтацію, а умови $a = -d, b = c$ – ортогональні перетворення, що її змінюють.

Означення 1.4 Взаємно-однозначне відображення (1.1) області D на область D^* називають конформним, якщо в околі будь-якої точки D головна лінійна частина цього відображення є ортогональним перетворенням, що зберігає орієнтацію.

Відомо [10], що для того, щоб функція (1.1) реалізовувала конформне відображення області D , необхідно і достатньо, щоб в цій області вона була однолисною, аналітичною, та щоб всюди в області D похідна $f'(z)$ була відмінна від нуля.

При побудові конформних відображень використовують основні властивості та теореми.

Властивість 1.1 Постійність розтягнень. Лінійне розтягнення в точці z_0 однакове для всіх кривих, які проходять через цю точку, та дорівнює $|f'(z_0)|$.

Властивість 1.2 Збереження кутів. Всі криві в точці z_0 оортаються на однаковий кут, який дорівнює $\arg f'(z_0)$.

Властивість 1.3 Відображення, яке обернене до конформного відображення, також є конформним.

Властивість 1.4 Суперпозиція двох конформних відображень також є конформним відображенням.

Властивість 1.5 При конформному відображенні області D розширеної комплексної площини зберігаються кути між кривими в кожній точці цієї області.

Теорема 1.1 (Теорема Рімана). Нехай D – однозв'язна область розширеної комплексної площини, границя якої складається більш ніж однієї точки. Тоді

- 1) існує функція $w = f(z)$, яка конформно відображає область D на коло $|w| < 1$;
- 2) ця функція єдина, якщо виконано умову

$$f(z_0) = w_0, \operatorname{arg} f'(z_0) = \alpha. \quad (1.6)$$

Тут z_0, w_0 – задані точки ($z_0 \in D, |w_0| < 1$), α – задане дійсне число.

Теорема 1.2 Нехай границі однозв'язних областей D та G складаються більш ніж однієї точки. Тоді існує одна і тільки одна функція $w = f(z)$, яка конформно відображає область D на область G так, що

$$f(z_0) = w_0, \operatorname{arg} f'(z_0) = \alpha, \quad (1.7)$$

де $z_0 \in D, w_0 \in G, \alpha$ – дійсне число.

Теорема 1.3 (Принцип взаємно-однозначної відповідності границь). Нехай область D обмежена гладким або кусочно-гладким контуром γ . Нехай функція $w = f(z)$ аналітична в області D та на її границі γ і відображає контур γ на деякий контур Γ , який обмежує область D^1 , причому коли точка z обходить контур γ так, що область D залишається

ліворуч, відповідна точка w обходить контур Γ так, що область D^1 також залишається ліворуч. Тоді область D за допомогою функції $w = f(z)$ буде відображена взаємно-однозначно та конформно на область D^1 [1, 16].

1.2 Елементарні функції комплексної змінної

З комплексного аналізу відомі елементарні функції [3]. Наведемо далі ті з них, які буде використано при побудові відображень.

Приклад 1.1 Лінійну функцію визначають на всій комплексній площині співвідношенням:

$$w = az + b, \quad (1.8)$$

$a \neq 0$ і b – довільні комплексні сталі. Нехай $|a| = k$, $\operatorname{Arg} a = \alpha$, тобто $a = k(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Представимо функцію (1.8) як складну функцію, складену із функцій:

$$\text{а) } z_1 = (\cos \alpha + i \sin \alpha)z;$$

$$\text{б) } z_2 = kz_1;$$

$$\text{в) } w = z_2 + b.$$

Таким чином, відображення а) задає поворот на кут α , відображення б) – подібне перетворення площини з коефіцієнтом подібності k , відображення в) – зсув площини на вектор b . Отже, лінійне відображення (1.8) є суперпозицією цих відображень, тому є взаємно-однозначним на всій площині. Воно перетворює прямі в прямі і кола в кола.

Приклад 1.2 Розглянемо функцію:

$$w = \frac{1}{z}. \quad (1.9)$$

Перетворення $w = \frac{1}{z}$ складається із двох симетричних відображень: відносно одиничного кола і відносно дійсної вісі (рис. 1.1) і його називають інверсією.

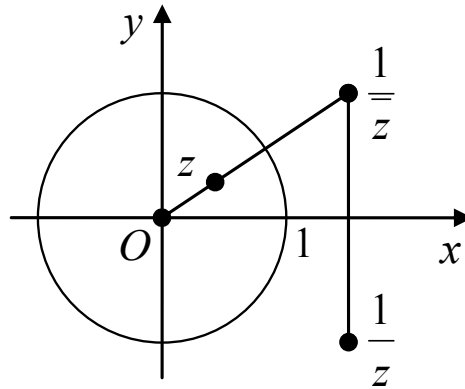


Рисунок 1.1 – Інверсія

Це перетворення є конформним і таким, що змінює орієнтацію на всій розширеній комплексній площині, причому точці $z = 0$ відповідає точка $w = \infty$, а точці $z = \infty$ відповідає точка $w = 0$.

Вважають, що кут між лініями в нескінченно віддаленій точці однієї з площин (z або w) дорівнює куту між зображеннями цих ліній в початку координат іншої площини.

Кола (а також прямі, які можна вважати колами, але в більш широкому розумінні) при відображенні $w = \frac{1}{z}$ переходять в кола або прямі. Нерухомими точками цього перетворення є точки $z = 1$ та $z = -1$.

Приклад 1.3 При піднесенні комплексного числа до натурального степеня зазвичай використовують формулу Муавра [1]:

$$\begin{aligned} z^n &= (x + iy)^n = \rho^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \rho^n e^{in\varphi} = \\ &= \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Функцію виду $w = f(z) = z^n$, де $n \in \mathbb{N}$ називають степеневою функцією. При $n = 1$ степенева функція є лінійною функцією.

Степенева функція здійснює конформне відображення в усіх точках комплексної площини, окрім точки $z = 0$. Зауважимо, що в точках $z = 0$ та $z = \infty$ не виконується властивість збереження кутів при конформному відображенні. Кути між кривими з вершинами в точках $z = 0$ та $z = \infty$. степенева функція збільшує в n разів. Степенева функція не є однолистою.

Приклад 1.4 Показникову функцію $w = e^z$ визначають як суму абсолютно збіжного на всій комплексній площині степеневому ряду [1, 16]:

$$w = e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (1.11)$$

Показникова функція здійснює конформне відображення в усіх точках комплексної площини. Показникова функція не є однолистою, вона кожен смугу

$$\{z: \alpha < \text{Im}z < \alpha + 2\pi\}, \alpha \in R \quad (1.12)$$

взаємно однозначно (однолисто) відображає на комплексну площину з розрізом уздовж променя, що виходить з точки $w = 0$ і проходить під кутом α . Смуга (1.12) є областю однолистості показникової функції, а комплексну площину можна розбити на зчисленну кількість областей однолистості. Таким чином, при відображенні показниковою функцією комплексна площина «накриває» сама себе зчисленну кількість разів.

При відображенні показниковою функцією $w = f(z) = e^z$ комплексна площина C переходить у себе таким чином, що кожна точка $w \in C$, крім $w = 0$, має зчисленну кількість різних прообразів, які визначають формулою:

$$z = \text{Ln}w = \ln|w| + i\text{Arg}w = \ln|w| + i\text{arg}w + 2k\pi i, k \in Z. \quad (1.13)$$

Для показникової функції визначимо обернене перетворення логарифму $z = \operatorname{Ln} w$ [12]. Для цього розглянемо показникову функцію $w = f(z) = e^z$ на множинах $D_k = \{z \in \mathbb{C} : 2\pi k \leq \operatorname{Im} z < 2\pi(k + 1)\}, k \in \mathbb{Z}$, кожна з яких при відповідному фіксованому k показникова функція однолисто відображає на комплексну площину \mathbb{C} . При цьому очевидно $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} D_k = \mathbb{C}$. Кожну з областей $\{z \in \mathbb{C} : 2\pi k \leq \operatorname{Im} z < 2\pi(k + 1)\}, k \in \mathbb{Z}$ (стандартних областей однолистості) показникова функція взаємно однозначно відображає на площину \mathbb{C} з розрізом уздовж променя, що виходить з точки $w = 0$ і проходить під кутом 0 .

На комплексній площині визначають зчисленну кількість різних однозначних функцій, які в сукупності називають многозначним відображенням логарифма і позначають $z = \operatorname{Ln} w$. Відповідні однозначні функції, які визначають співвідношеннями (1.13), яких зчисленна кількість, називають гілками однозначності відображення $z = \operatorname{Ln} w$.

2 ОБЛАСТІ З РОЗРІЗАМИ НА КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ

2.1 Розріз комплексної площини

Розглянемо на комплексній площині деяку область, тобто множину точок, обмежену певною лінією Жордана. Область, яка включає в себе границю, вважаємо замкнутою областю на розширеній комплексній площини [12].

Якщо область обмежена декількома границями, то вона буде многозв'язною областю. Якщо ж однією замкнутою лінією, то однозв'язною.

Розглянемо один із класів областей розширеної комплексної площини. Це будуть так звані області з розрізами.

Під розрізом розширеної комплексної площини будемо розуміти таку границю області, яку ми проходимо в обох напрямках. Наприклад, площина з розрізом по відрізку (рис 2.1), або площина з розрізом по променю (рис. 2.2).

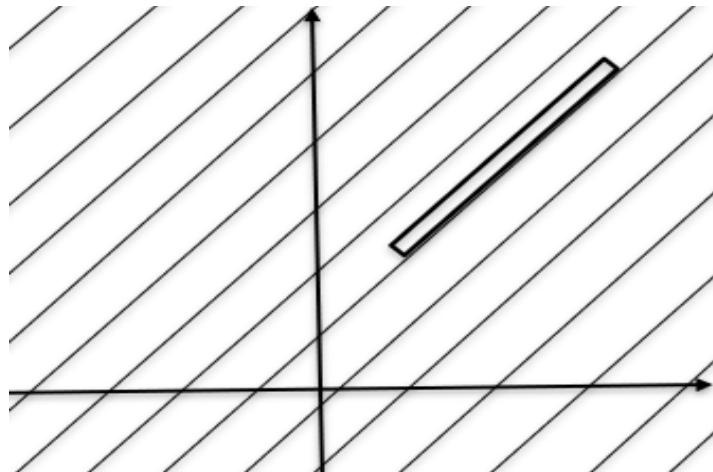


Рисунок 2.1 – Площина з розрізом по відрізку

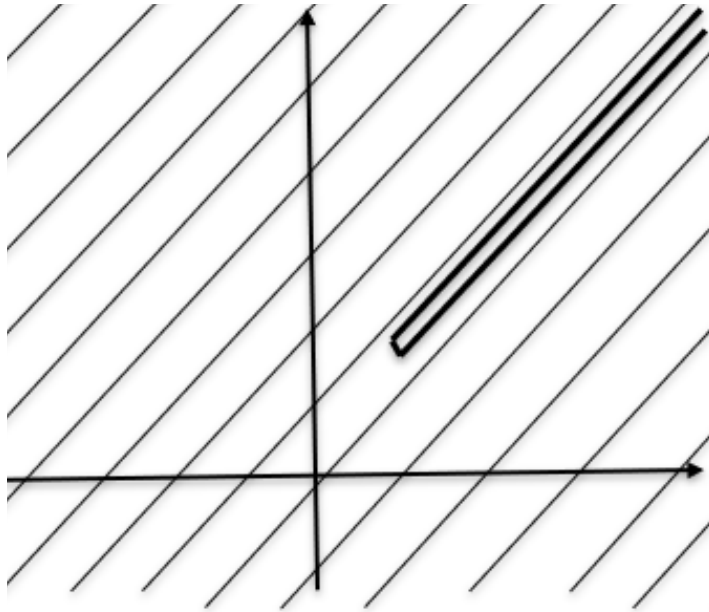


Рисунок 2.2 – Площина з розрізом по променю

2.2 Приклади областей з розрізами

Наведемо приклади деяких областей з розрізами.

Приклад 2.1 Площина з розрізом по променям $(-\infty; 0]$ та $[1; +\infty)$ – дійсної вісі (рис. 2.3).

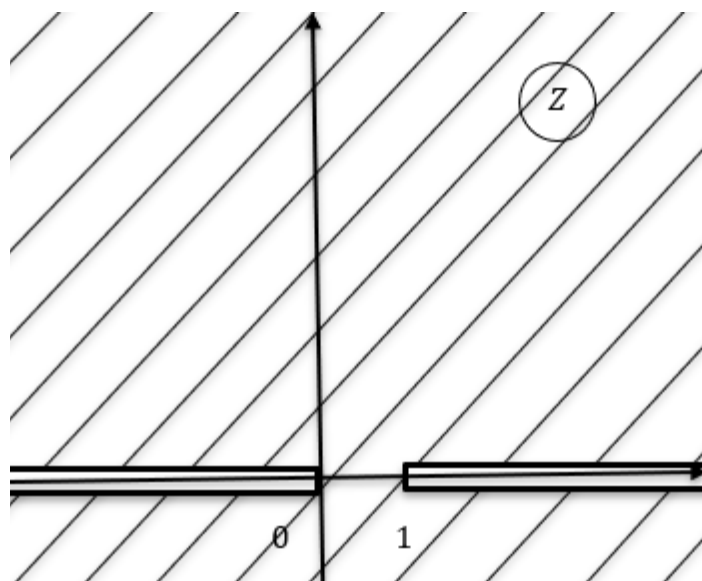


Рисунок 2.3 – Площина з розрізами по променям

Приклад 2.2 Верхня напівплощина з розрізом по відрізку $[0; ih]$, де $h > 0$ (рис. 2.4).

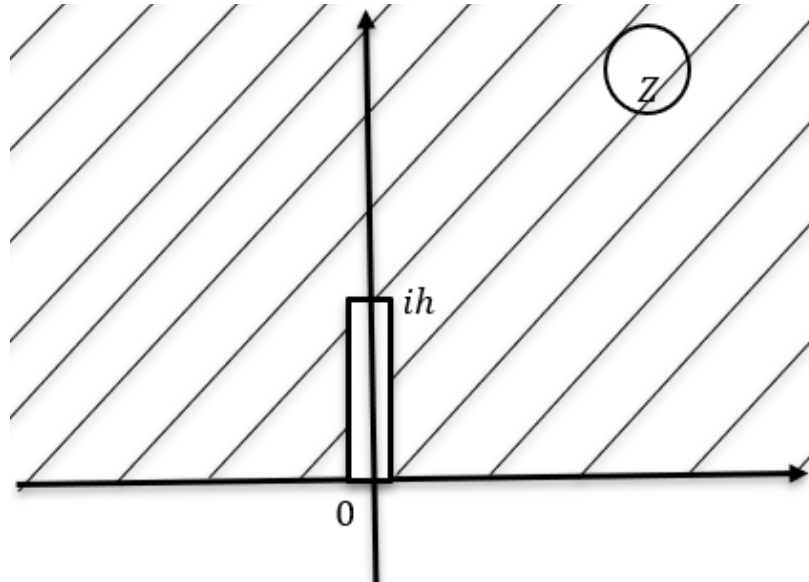


Рисунок 2.4 – Верхня напівплощина з розрізом по відрізку

Приклад 2.3 Зовнішність одиничного кола з центром в точці 0 та розрізом по променю $(-\infty; -1]$ (рис. 2.5).

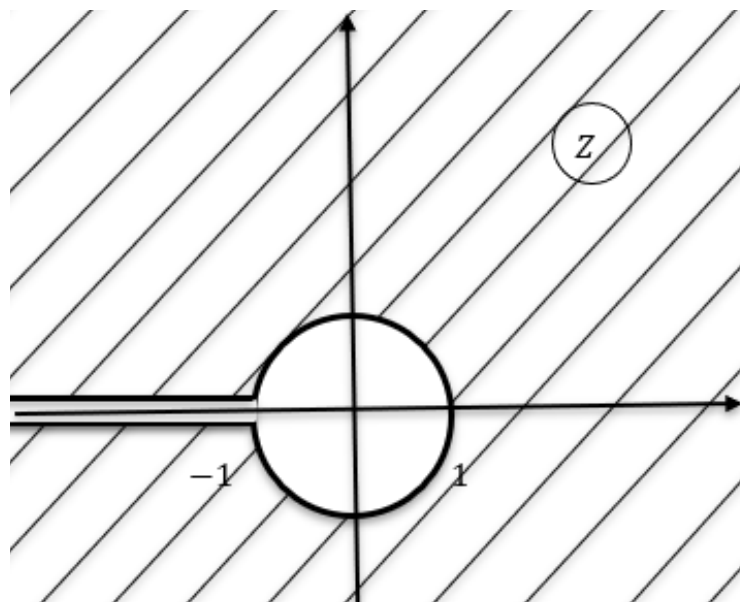


Рисунок 2.5 – Зовнішність одиничного кола з розрізом по променю

Приклад 2.4 Верхня половина одиничного круга з розрізом по відрізку уявної вісі $\left[\frac{i}{2}; i\right]$ (рис. 2.6).

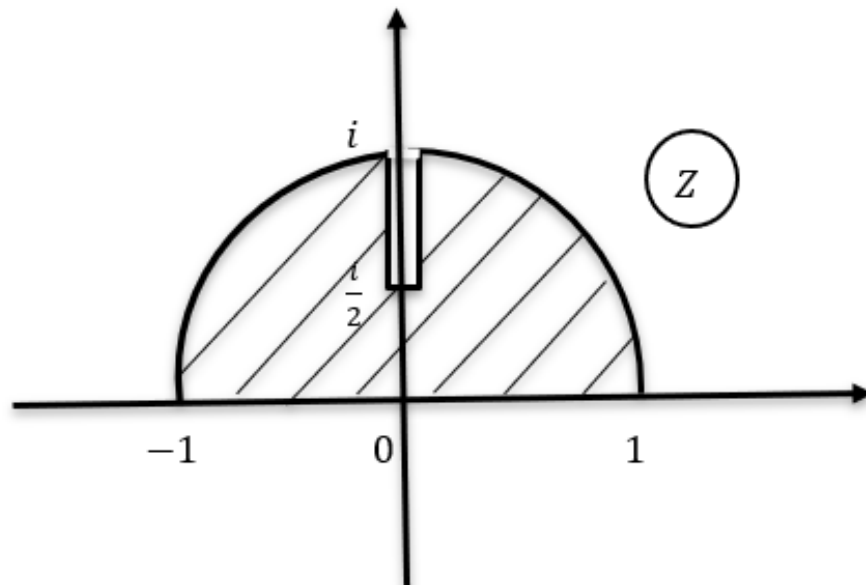


Рисунок 2.6 – Верхня половина одиничного круга з розрізом по відрізку

Приклад 2.5 Внутрішність одиничного кола з розрізами по відрізкам $\left[-1; -\frac{1}{4}\right]$ та $[0; 1]$ (рис. 2.7).

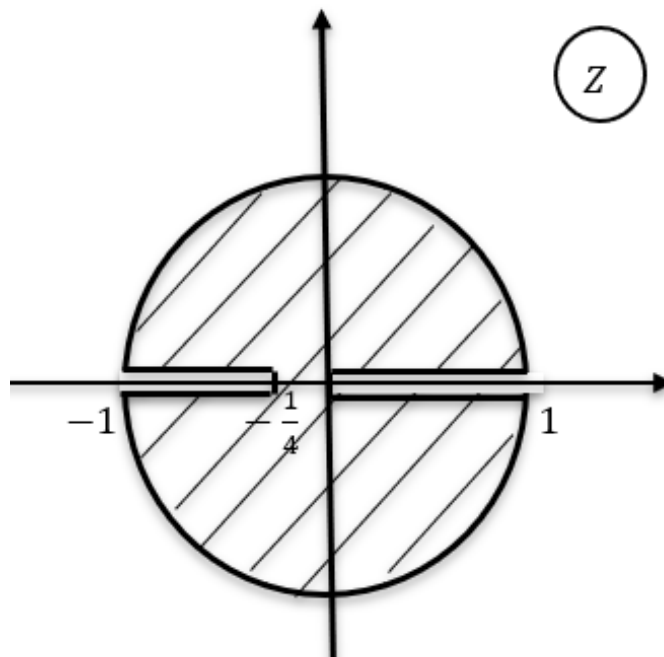


Рисунок 2.7 – Внутрішність одиничного кола з розрізами по відрізкам

Приклад 2.6 Смуга $|\operatorname{Im}z| \leq \pi$ з розрізом по променю $[0; +\infty)$ (рис. 2.8).

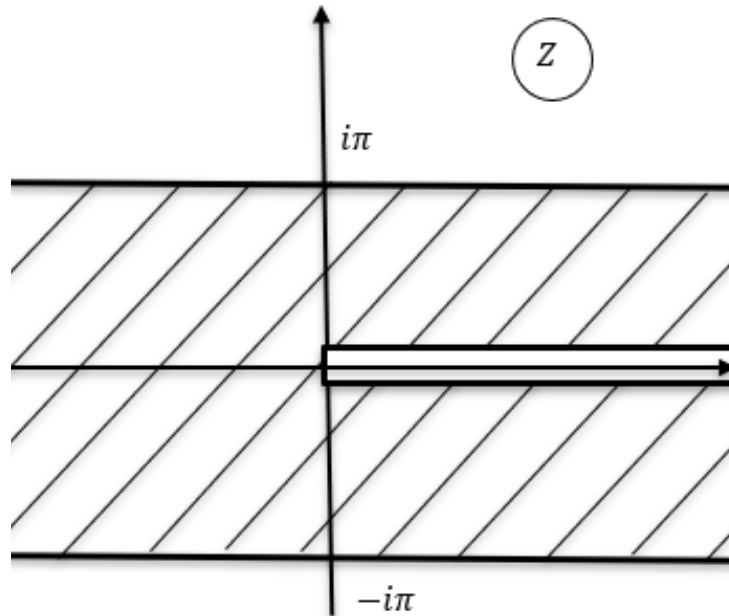


Рисунок 2.8 – Смуга з розрізом по променю

Приклад 2.7 Напівплощина $\operatorname{Im}z > 0$ з розрізами по паралельним променям $[i; +\infty)$ та $[1 + 2i; +\infty)$ (рис. 2.9).

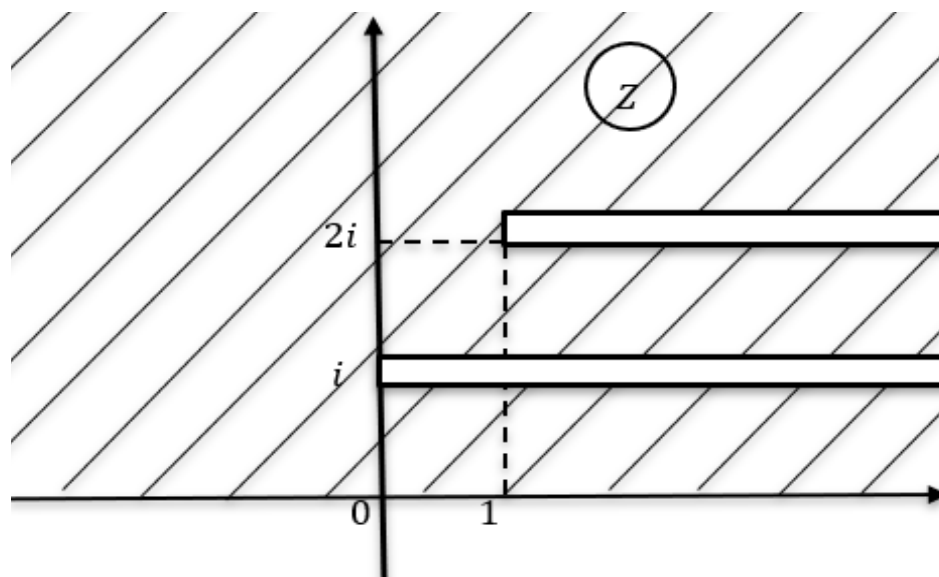


Рисунок 2.9 – Напівплощина з розрізами по двом променям, які спрямовані в один бік

Приклад 2.8 Площина з розрізами по променям $(-\infty; -1]$ та $[1; +\infty)$ (рис. 2.10).

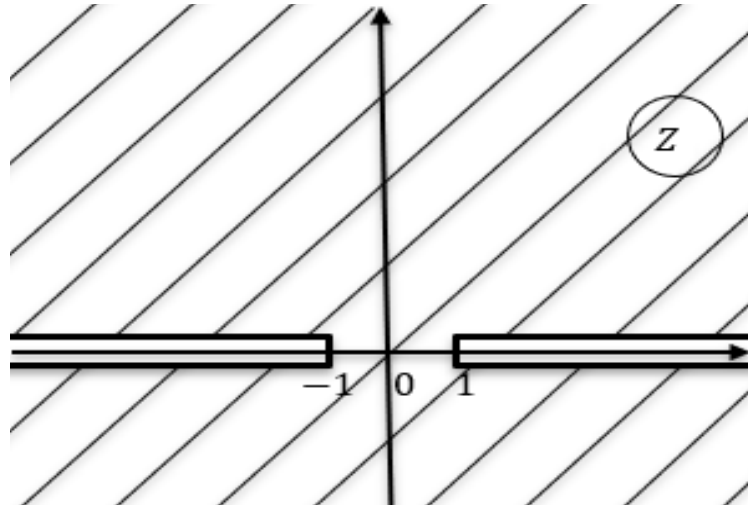


Рисунок 2.10 – Площина з розрізами по променям, які спрямовані в різні боки

Приклад 2.9 Напівплощина $\text{Im}z > 0$ з розрізами по променю $[4i; +\infty)$ та відріжку $[2 + 2i; 5 + 2i]$ (рис. 2.11).

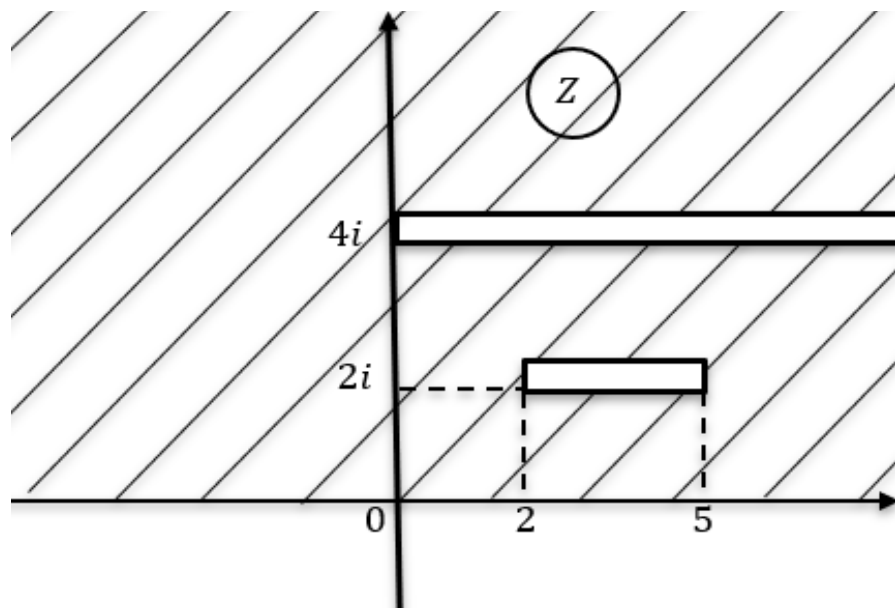


Рисунок 2.11 – Напівплощина з розрізами по відріжку та променю, які належать паралельним прямим

Приклад 2.10 Напівплощина $\text{Im}z > 0$ з розрізами по променю $[i; +\infty)$ та відрізкам $[2i; 1 + 2i]$ та $[3i; 1 + 3i]$ (рис. 2.12).

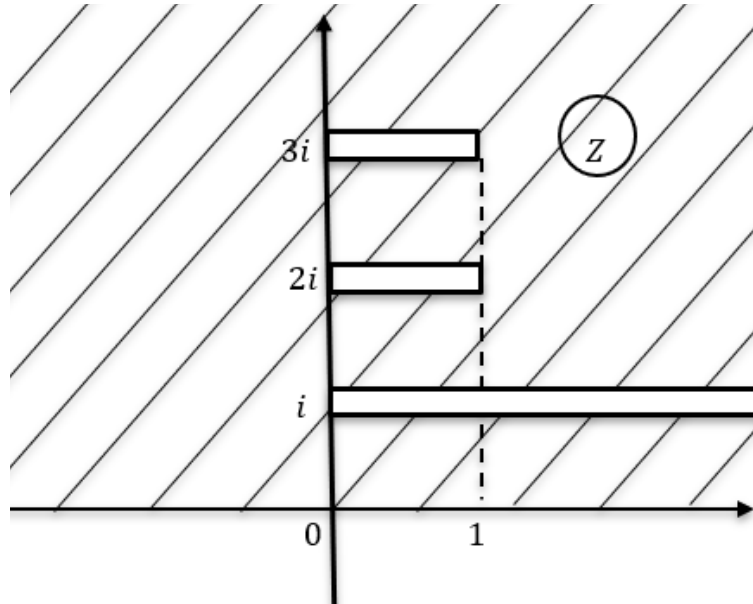


Рисунок 2.12 – Напівплощина з розрізами по відрізкам та променю, які належать паралельним прямим

У наступному розділі будуть побудовані конформні відображення областей з розрізами на деякі елементарні області комплексної площини.

3 ПОБУДОВА КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

3.1 Інтеграл Кристоффеля-Шварца при побудові конформних відображень

Нехай задано два набори з n дійсних чисел: числа a_k ($k = \overline{1, n}$) розташовані в порядку зростання $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ та числа α_k , які задовольняють умовам $0 < \alpha_k < 1$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2$.

Побудуємо функцію

$$h(z) = (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} = \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k - 1}, \quad (3.1)$$

яка є добутоком n степеневих функцій. Будемо розглядати функцію (3.1) у верхній напівплощині $\text{Im}z > 0$, виділяючи однозначну гілку кожного множника умовами $0 < \arg(z - a_k) < \pi$.

Функція $h(z)$ необмежено зростає при $z \rightarrow a_k$:

$$h(z) \sim \frac{C_k}{(z - a_k)^{1 - \alpha_k}}. \quad (3.2)$$

Вважаємо, що $h(a_k) = \infty$, отримаємо функцію, яка аналітична в напівплощині $\text{Im}z > 0$ та неперервна у замкнутій області $\text{Im}z \geq 0$.

При $z \rightarrow \infty$ функція $h(z)$ спадає аналогічно до функції $1/z^2$, тобто:

$$h(z) \sim z^{\sum \alpha_k - n} = z^{-2}. \quad (3.3)$$

Розглянемо функцію

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^z h(\zeta) d\zeta, \quad (3.4)$$

де інтегрування здійснюється по будь-якій кривій, яка лежить у напівплощині $\text{Im}\zeta > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ довільне комплексне число, $\text{Im}z_0 \geq 0$.

Зауважимо, що функція $\varphi(z)$ має скінченні границі при $z \rightarrow a_k$ та при $z \rightarrow \infty$. Збіжність інтегралів $\int_{z_0}^{a_k} h(\zeta)d\zeta$ та $\int_{z_0}^{\infty} h(\zeta)d\zeta$ випливає з оцінок порядку зростання функції $h(z)$ (3.2) та (3.3). Користуючись цим, будемо вважати $z_0 = a_1$ та позначимо

$$\varphi(a_k) = \int_{a_1}^{a_k} h(\zeta)d\zeta = A_k, \quad \int_{a_1}^{\infty} h(\zeta)d\zeta = A_{\infty}. \quad (3.5)$$

Функцію (3.4) називають інтегралом Кристоффеля-Шварца, а задача побудови відображення верхньої напівплощини функцією (3.4) – прямою задачею Кристоффеля-Шварца [4]. Для її розв'язання спочатку знайдемо у що відображає функція (3.4) дійсну вісь, а потім застосуємо принцип відповідності границь.

Оберненою задачею Кристоффеля-Шварца називають задачу знаходження функцій, які відображають напівплощину на заданий багатокутник.

При побудові конформних відображень будемо використовувати формули, одержані Кристоффелем та Шварцем [6].

У тих випадках, коли границя однозв'язної багатокутної області складається з паралельних променів та можливо з однієї або двох паралельних прямих, інтеграл Кристоффеля-Шварца обчислюється в елементарних функціях. При цьому частина параметрів у формулі Кристоффеля-Шварца виражається через геометричні характеристики області.

3.2 Площина з розрізами вздовж паралельних променів, спрямованих в одному напрямку

Нехай границя області D (на площині w) складається з n розрізів вздовж променів, паралельних дійсній осі і спрямованих у бік від'ємного напрямку дійсної вісі (рис. 3.1).

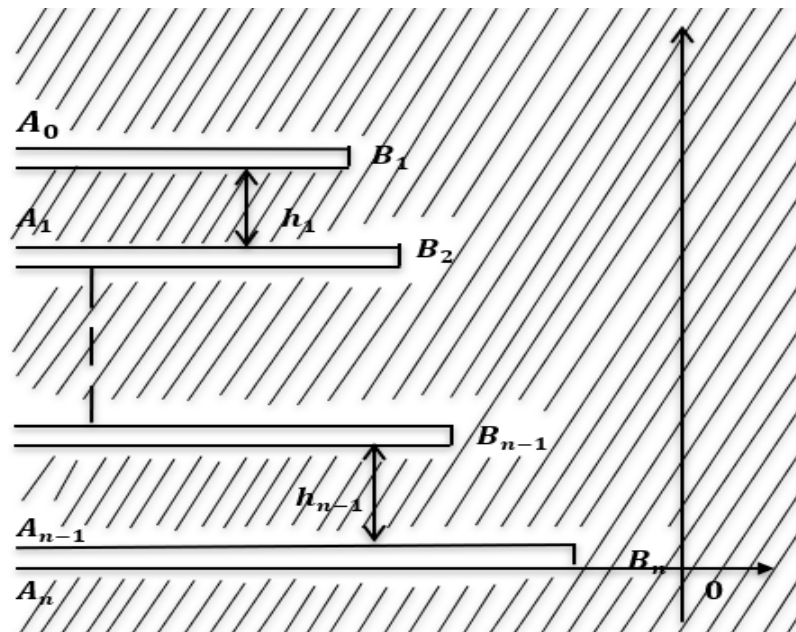


Рисунок 3.1 – Площина з розрізами вздовж променів, що спрямовані в один бік

Через h_1, h_2, \dots, h_{n-1} позначимо відстані між сусідніми розрізами, через B_1, B_2, \dots, B_n початкові точки променів (в порядку додатного руху по границі), через A_0, A_1, \dots, A_{n-1} – точки границі області на нескінченності. Будемо вважати, що нижній розріз $A_{n-1}B_nA_n$ належить дійсній осі.

Розглянуту область D можна відобразити, відповідно до теореми Рімана (1.1), на напівплощину $\text{Im } z > 0$ таким чином, щоб точка A_0 відобразилася в точку $z = \infty$.

Нехай при цьому точки A_0, A_1, \dots, A_{n-1} відображаються в точки дійсної осі a_1, a_2, \dots, a_{n-1} , точки B_1, B_2, \dots, B_n відповідно в точки b_1, b_2, \dots, b_n .

Обернене відображення напівплощини $\text{Im } z > 0$ на область D реалізується згідно з теоремою Кристоффеля-Шварца функцією:

$$f(z) = C \int_{a_1}^z \prod_{k=1}^n (\xi - a_k)^{a_k - 1} d\xi + C_1, \quad (3.6)$$

$$w = \overline{C_1} \int_{z_0}^z h(\xi) d\xi + \overline{C_2},$$

де

$$h(\xi) = \frac{\prod_{k=1}^n (\xi - b_k)}{\prod_{k=1}^{n-1} (\xi - a_k)}. \quad (3.7)$$

Дріб (3.7) є неправильним. Виділяючи з нього цілу частину і розкладаючи її на найпростіші дроби отримаємо

$$h(\xi) = \xi + \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\xi - a_k},$$

де $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ – дійсні коефіцієнти.

Інтеграл Кристоффеля-Шварца при цьому має вигляд

$$w = \overline{C_1} \left(\frac{z^2}{2} + \alpha_0 z + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \ln(z - a_k) \right) + \overline{C_2}. \quad (3.8)$$

Для того, щоб функція (3.8) була дійсною при $z = x > a_n$ необхідно щоб коефіцієнти $\overline{C_1}$ та $\overline{C_2}$ були дійсними.

Під час руху точки $z = a_k$ по малому півколу у верхній напівплощині уявна частина функції $\ln(z - a_k)$ має приріст $-\pi$. При цьому приріст функції w повинен бути рівним $-ih_k$, отже $\overline{C_1} \alpha_k = h_k / \pi$.

Позначимо $\overline{C_1}\alpha_0 = B$, $\overline{C_1}/2 = -A$, $\overline{C_2} = C$. Остаточна формула (3.8) має вигляд:

$$w = -Az^2 + Bz + C + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} h_k \ln(z - a_k). \quad (3.9)$$

Усі параметри в формулі (3.9) дійсні, причому $A > 0$, $h_k > 0$. З параметрів a_0, a_1, \dots, a_{n-1} два можна задавати довільно. Інші $n - 3$ параметри і коефіцієнти A, B, C можна визначати з n умов

$$w(b_k) = B_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

де b_k – нулі похідної функції (3.9). Обчислимо похідну і прирівняємо її до нуля

$$w' = -2Az + B + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_k}{z - a_k} = 0.$$

На практиці параметри a_k (в разі $n > 3$) визначаються, як правило, підбором.

Приклад 3.1 Побудуємо відображення, яке задає функція (3.9), наприклад, при $n = 2$, тобто функція

$$w = -Az^2 + Bz + C + \frac{h}{\pi} \ln z. \quad (3.10)$$

Нехай $A = 1, B = 0$, $h = 2\pi$, $C = 1 - i\pi$, $a_1 = 0$. Тоді для відображення декартової сітки в півплощині $\text{Im}z > 0$ одержимо

$$w = -t^2 + 2\ln t - i\pi + 1, \quad t = e^z. \quad (3.11)$$

Функція для побудови задається в Maple формулою: `with(plots); conformal(-(exp(z))^2+2*ln(exp(z))-I*Pi+1, z = -1+I*0 .. 1+I*Pi, grid = [41, 41], numxy = [64, 64], view = [-3 .. 4, -5 .. 5], axes = boxed, xtickmarks = 0, ytickmarks = 0, scaling = constrained, style = line, thickness = 1, color = black).`

Відповідне зображення наведено на рисунку 3.2.

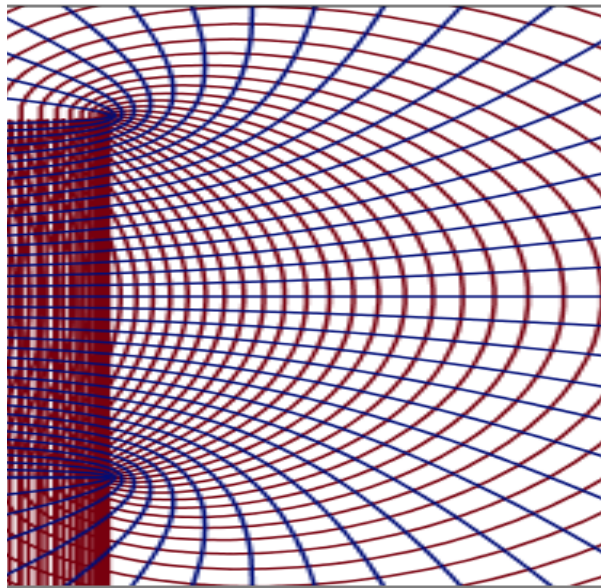


Рисунок 3.2 – Відображення за допомогою функції (3.11)

Приклад 3.2 Побудуємо відображення декартової сітки у смугі $0 < \text{Im}z < \pi$, яке реалізовано функцією (3.10). При $A = 1, B = 1, h = 2\pi, C = 1 - i\pi$, тобто функцією

$$w = -t^2 + t + 1 - 2 \cdot \pi \cdot \ln t, \quad t = e^z. \quad (3.12)$$

Функція для побудови задається формулою в Maple формулою: `with(plots); conformal(-(exp(z))^2+2*ln(exp(z))+exp(z)+1, z = -1+I*0 .. 1+I*Pi, grid = [41, 41], numxy = [64, 64], view = [-3 .. 5, -3 .. 7], axes = boxed, xtickmarks = 0, ytickmarks = 0, scaling = constrained, style = line, thickness = 1, color = black).`

Відповідне зображення наведено на рисунку 3.3.

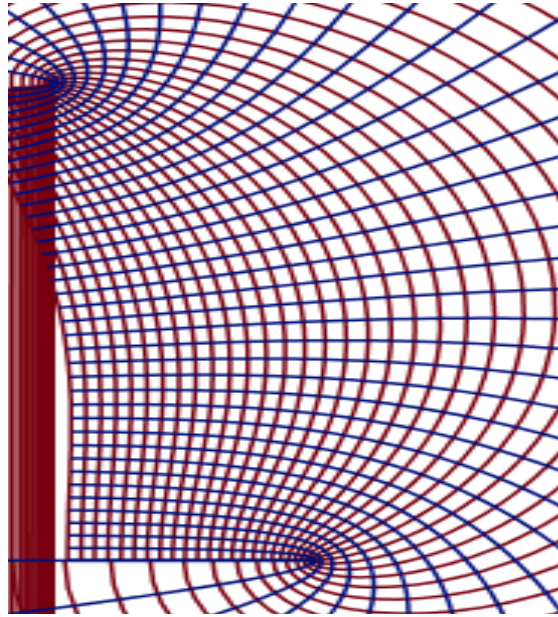


Рисунок 3.3 – Відображення за допомогою функції (3.12)

3.3 Площина з розрізами вздовж паралельних променів, спрямованих в протилежних напрямках

Нехай область D являє собою нескінченну площину w з $n + m$ розрізами вздовж променів, паралельних дійсній осі, з яких n променів спрямованих в бік від'ємних значень x , а m променів – в бік додатних x (рис. 3.4), нехай розріз $C_{m-1}D_mA_0$ належить дійсній вісі.

Позначимо кінці променів через $B_1, B_2, \dots, B_n; D_1, D_2, \dots, D_m$ граничні точки в нескінченності (в порядку додатного руху по границі) – через $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}; C_0, C_1, \dots, C_{m-1}$. Область D можна конформно відобразити на напівплощину $\text{Im } z > 0$ таким чином, щоб точка A_0 відобразилася в точку $z = \infty$. Нехай при цьому точки A_k, B_k, C_j, D_j відобразяться відповідно в точки дійсної вісі a_k, b_k, c_j, d_j .

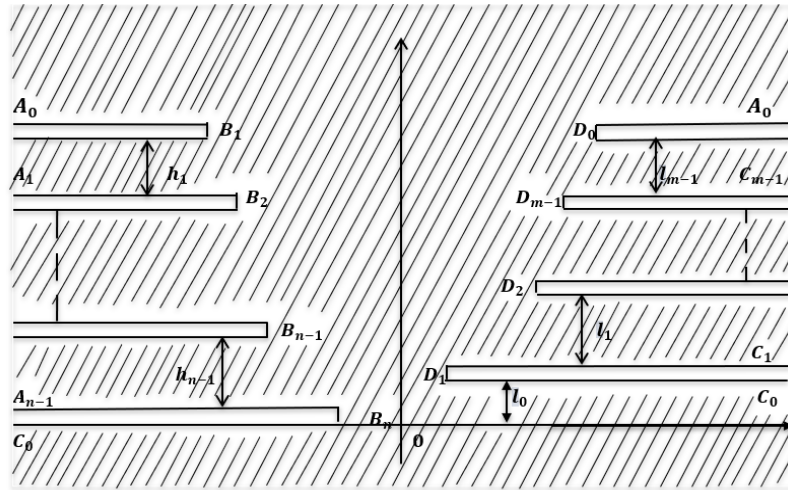


Рисунок 3.4 – Площина з розрізами вздовж паралельних променів, спрямованих в протилежних напрямках

Інтеграл Кристоффеля-Шварца для даної області має вигляд:

$$w(z) = \overline{C_1} \int_{z_0}^z h(\xi) d\xi + \overline{C_2},$$

де

$$h(\xi) = \frac{\prod_{k=1}^n (\xi - b_k) \prod_{j=1}^m (\xi - d_j)}{\prod_{k=1}^{n-1} (\xi - a_k) \prod_{j=1}^{m-1} (\xi - c_j)} \cdot \frac{1}{(\xi - c_0)^2}. \quad (3.13)$$

Дріб (3.13) є неправильним. Виділимо з нього цілу частину і розкладемо на прості дроби, отримаємо наступне:

$$h(\xi) = 1 + \frac{\alpha_0}{(\xi - c_0)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\xi - a_k} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\beta_j}{\xi - c_j}, \quad (3.14)$$

де $\alpha_0, \alpha_k, \beta_0, \beta_j$ – дійсні коефіцієнти. Функція, яка відображає напівплощину $\text{Im } z > 0$ на розглянуту область має вигляд:

$$w = \overline{C}_1 \left(z - \frac{\alpha_0}{z - c_0} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \ln(z - a_k) + \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j \ln(z - c_j) \right) + \overline{C}_2. \quad (3.15)$$

Оскільки функція $\ln(z - a_k)$ має приріст $-i\pi$ при обході точки $z = a_k$ по малому півколу зверху, то коефіцієнти можна представити наступним чином:

$$\alpha_k \overline{C}_1 = \frac{h_k}{\pi}, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Аналогічним чином визначаємо коефіцієнти β_j :

$$\beta_j \overline{C}_1 = -l_j / \pi, \quad (j = 1, 2, \dots, m - 1).$$

Уведемо позначення: $\overline{C}_1 \alpha_0 = -B$, $\overline{C}_1 = A$, $\overline{C}_2 = C$. Тоді для функції $w(z)$, маємо вираз:

$$w(z) = Az + \frac{B}{z - c_0} + C + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} h_k \ln(z - a_k) - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{m-1} l_j \ln(z - c_j). \quad (3.16)$$

Параметри A, B, h_k ($k = 1, 2, \dots, n - 1$) і l_j ($j = 1, 2, \dots, m - 1$), які входять до функції (3.16) повинні бути додатними, коефіцієнти l_0 та C – дійсними числами. Дійсні параметри a_k та c_j утворюють зростаючу послідовність $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < c_0 < c_1 < \dots < c_{m-1}$. Два, з цих параметрів можна вибрати довільно.

Приклад 3.3 Побудуємо відображення, яке задає функція (3.16), наприклад, при $n = 1, m = 1, c_0 = 0$, тобто відображення функцією:

$$w = Az + \frac{B}{z} + C - \frac{l_0}{\pi} \ln z \quad (3.17)$$

Відображення декартової сітки у смугі $0 < \text{Im}z < \pi$ реалізоване функцією (3.17). При $A = B = 1$, $l_0 = \pi/2$, $C = i\pi/4$, функція буде мати вигляд $w = z + \frac{1}{z} + \frac{i\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln z$.

Функція для побудови задається в Maple формулою: `with(plots); conformal(z+1/z+I*Pi*(1/4)-(1/2)*ln(z), z = -5+I*0 .. 5+I*Pi, grid = [41, 41], numxy = [64, 64], view = [-5 .. 4, -3 .. 4], axes = boxed, xtickmarks = 0, ytickmarks = 0, scaling = constrained, style = line, thickness = 1, color = black)`. Відповідне зображення наведено на рисунку 3.5.

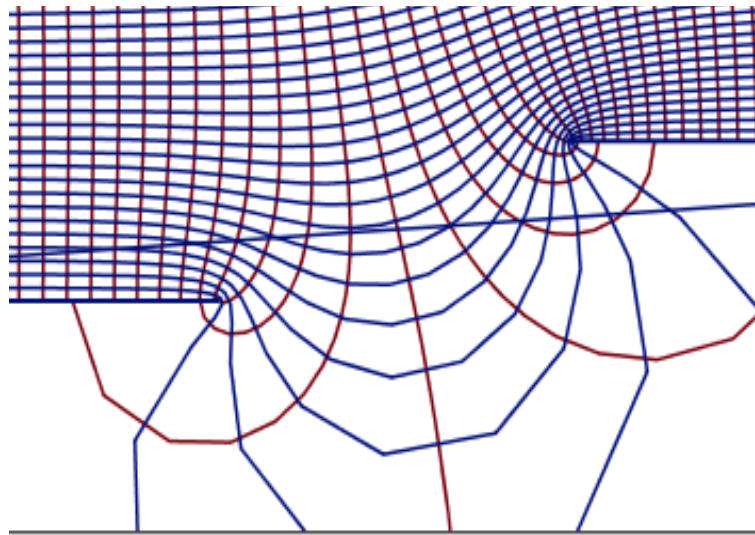


Рисунок 3.5 – Відображення за допомогою функції (3.17)

3.4 Напівплощина з розрізами вздовж паралельних променів

Нехай область D на площині w являє собою напівплощину $\text{Im}w > 0$, на якій побудовано n розрізів вздовж променів, які спрямовано паралельно дійсній вісі із точок B_k ($k = 1, 2, \dots, n$) ліворуч і m розрізів із точок D_j ($j = 1, 2, \dots, m$) праворуч (рис. 3.6).

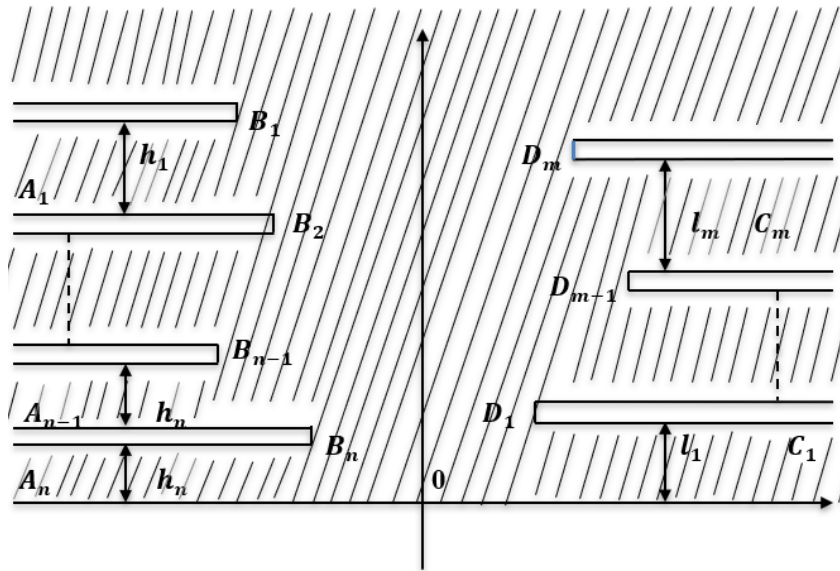


Рисунок 3.6 – Напівплощина з розрізами вздовж паралельних променів

Позначимо граничні точки, що лежать у нескінченності, через A_0, \dots, A_n ; C_1, C_2, \dots, C_m (в напрямку додатнього руху по границі). Розглянуту область можливо конформно відобразити на напівплощину $\text{Im}z > 0$ так, щоб точка A_0 відобразилась у точку $z = \infty$. При цьому точки A_k, B_k, C_j, D_j відобразяться в точки дійсної вісі a_k, b_k, c_j, d_j відповідно. Обернене відображення напівплощини $\text{Im}z > 0$ на многокутну область, яку ми розглядаємо, здійснюється за допомогою інтеграла Кристоффеля-Шварца, в якому

$$h(\xi) = \frac{\prod_{k=1}^n (\xi - b_k) \prod_{j=1}^m (\xi - d_j)}{\prod_{k=1}^n (\xi - a_k) \prod_{j=1}^m (\xi - c_j)}. \quad (3.18)$$

Якщо виділити цілу частину та розкласти дріб (3.18) на прості дроби, одержимо:

$$h(\xi) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\xi - a_k} + \sum_{j=0}^m \frac{\beta_j}{\xi - c_j}, \quad (3.19)$$

де α_k, β_j – дійсні коефіцієнти. Таким чином, інтеграл Кристоффеля-Шварца дорівнює функції:

$$w = A \left(z + \sum_{k=1}^n \alpha_k \ln(z - a_k) + \sum_{j=0}^m \beta_j \ln(z - c_j) \right) + C. \quad (3.20)$$

Функції $\ln(z - a_k)$ та $\ln(z - c_k)$ мають приріст $-i\pi$ при русі точок $z = a_k$ та $z = c_k$ по малим півколам. Звідси отримаємо формули:

$$\alpha_k A = \frac{h_k}{\pi}, \quad \beta_j C = -\frac{l_j}{\pi}.$$

Для відображення одержимо функцію:

$$w(z) = Az + C + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n h_k \ln(z - a_k) - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m l_j \ln(z - c_j). \quad (3.21)$$

Коефіцієнти A , h_k , l_j у рівнянні (3.21) додатні. Коефіцієнт C відповідає умові $\text{Im}C = \sum l_j$. Параметри a_k і c_j мають задовольняють умови:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n < c_1 < c_2 < \dots < c_m.$$

Зауважимо, що два з цих параметрів задають довільно.

Приклад 3.4 В найпростішому випадку ($n = 1$, $m = 1$) область D виглядає як напівплощина з одним розрізом. В цьому випадку формула (3.21) має вигляд

$$w = Az + \frac{h}{\pi} \ln z + C. \quad (3.22)$$

Після заміни змінної $\pi Az/h = e^\xi$ ця функція перетворюється в функцію:

$$w = \frac{h}{\pi} (\xi + e^\xi) + \bar{C}. \quad (3.23)$$

Побудуємо відображення, яке задає функція (3.22). Відображення декартової сітки в півплощині $\text{Im}z > 0$, яке реалізовано функцією (3.22) при $A = 1$, $h = \pi$, $C = 1$, буде мати вигляд: $w = z + \ln z + 1$.

Функція для побудови задається в Maple формулою: `with(plots); conformal(z+1+ln(z), z = -5+0*I .. 3+I*5, grid = [31, 31], numxy = [64, 64], view = [-2 .. 5, 0 .. 5], axes = boxed, xtickmarks = 0, ytickmarks = 0, scaling = constrained, style = line, thickness = 1, color = black).`

Відповідне зображення наведено на рисунку 3.7.

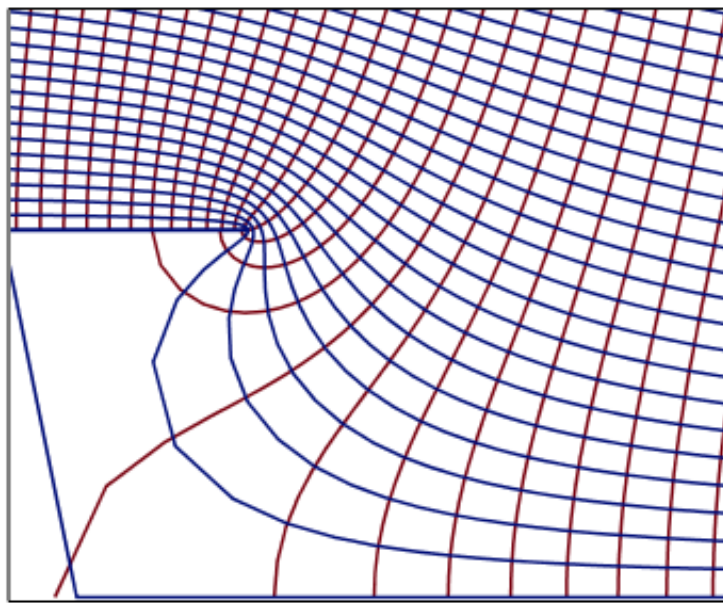


Рисунок 3.7 – Відображення за допомогою функції $w = z + \ln z + 1$

Приклад 3.5 Побудуємо відображення декартової сітки у смузі $0 < \text{Im}z < \pi$, реалізоване функцією (3.23) при $h = \pi$, $\bar{C} = 1$. Функція буде мати вигляд: $w = z + e^z + 1$.

Функція для побудови задається в Maple формулою: `with(plots); conformal(z+exp(z)+1, z = -5+0*I .. 10+I*Pi, grid = [41, 41], numxy = [64, 64], view = [-3 .. 7, 0 .. 7], axes = boxed, xtickmarks = 0, ytickmarks = 0, scaling = constrained, style = line, thickness = 1, color = black).` Відповідне зображення наведено на рисунку 3.8.

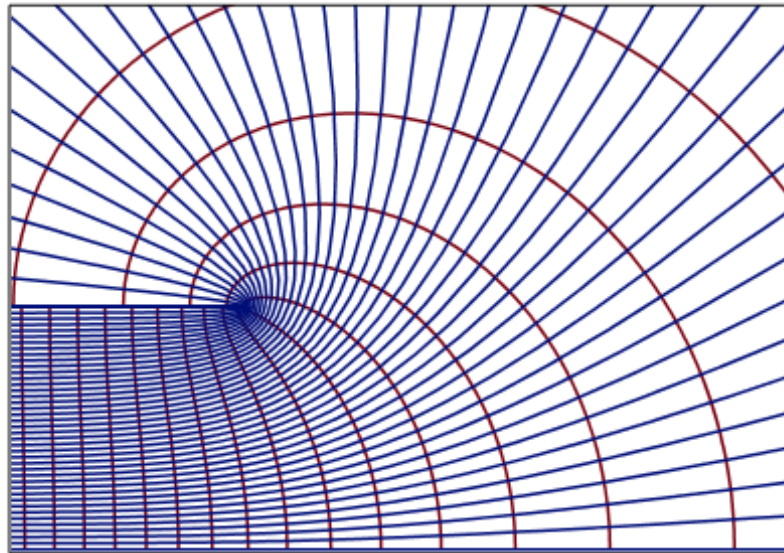


Рисунок 3.8 – Відображення за допомогою функції $w = z + e^z + 1$

Далі розглянемо приклади, для яких $n + m = 2$.

Приклад 3.6 Нехай $n = 1$, $m = 1$. Будемо вважати, що $a_1 = -1$, $c_1 = 1$. Тоді функція (3.21) буде мати вигляд:

$$w(z) = Az + C + \frac{h}{\pi} \ln(z + 1) - \frac{l}{\pi} \ln(z - 1). \quad (3.24)$$

Відображення декартової сітки в верхній півплощині, яке реалізовано функцією (3.24) при $h = 1,4\pi$, $l = \pi$, $A = 1$, $C = 0$ буде мати вигляд: $w = z + 1,4 \ln(z + 1) - \ln(z - 1)$.

Функція для побудови задається в Maple формулою: `with(plots); conformal(z+(14*(1/10))*ln(z+1)-ln(z-1), z = -5+0*I .. 5+I*10, grid = [71, 71], numxy = [64, 64], view = [-4 .. 5, -3 .. 5], axes = boxed, xtickmarks = 0, ytickmarks = 0, scaling = constrained, style = line, thickness = 1, color = black).`

Відповідне зображення наведено на рисунку 3.9.

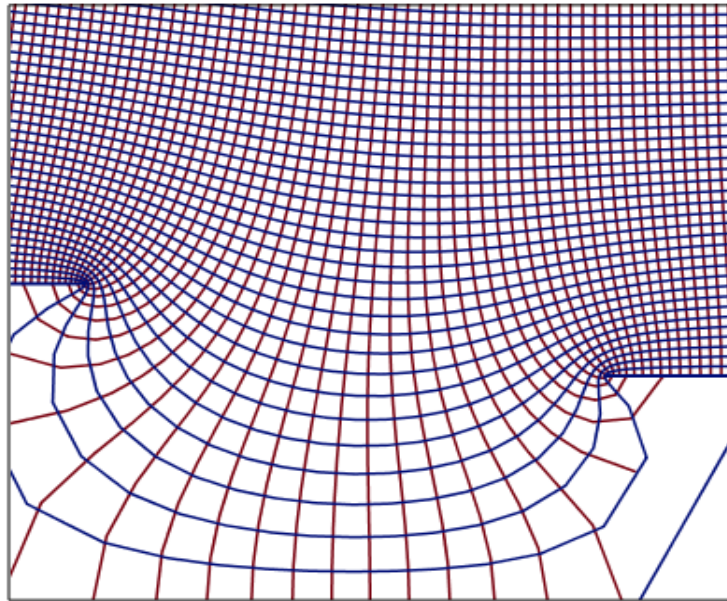


Рисунок 3.9 – Відображення напівплощини на напівплощину з двома розрізами за допомогою функції $w = z + 1,4 \ln(z + 1) - \ln(z - 1)$

Інше відображення області, яку ми розглядаємо, можливо отримати будуючи відображення смуги $0 < \text{Im}\xi < \pi$ на напівплощину $\text{Im}z > 0$, при якому точки $\xi = \pm\pi$ відображаються в точки $z = \pm 1$. Таке відображення здійснюється функцією $z = \tanh(\xi/2)$.

Особливо простий вигляд функція (3.24) має при $h = l = \pi$, $C = i\pi$:

$$w = Az + \ln \frac{l+z}{l-z} = Az + 2 \tanh^{-1} z.$$

Якщо зробити заміну $z = \tanh(\xi/2)$, то функція буде мати вигляд

$$w = A \tanh(\xi/2) + \xi. \quad (3.25)$$

Відображення смуги $0 < \text{Im}\xi < \pi$ на напівплощину $\text{Im}w > 0$ з двома розрізами вздовж симетричних променів реалізовано функцією (3.25) і наведено на рисунку 3.10.

Функція для побудови задається в Maple формулою: `with(plots); conformal(tanh((1/2)*z)+z, z = -5+0*I .. 5+I*Pi, grid = [41, 41], numxy = [64, 64], view = [-5 .. 5, 0 .. 7], axes = boxed, xtickmarks = 0, ytickmarks = 0, scaling = constrained, style = line, thickness = 1, color = black).`

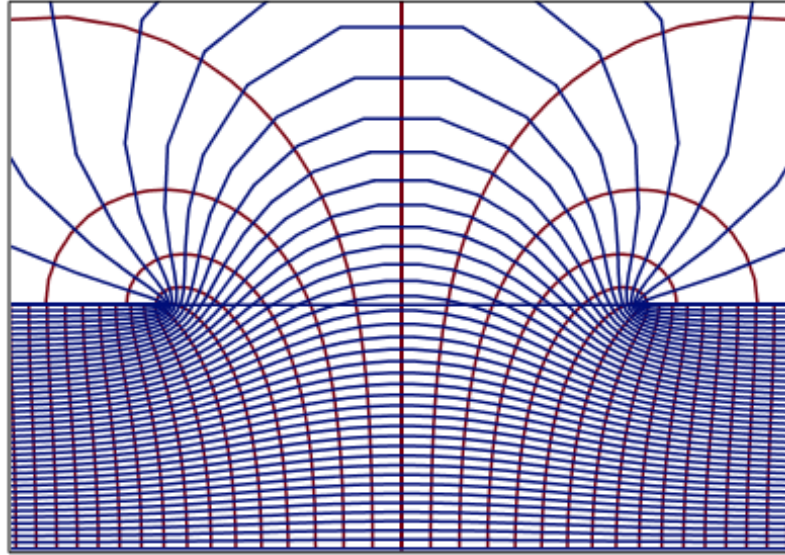


Рисунок 3.10 – Відображення смуги на напівплощину з двома розрізами за допомогою функції $w = \tanh \frac{1}{2}z + z$

Приклад 3.7 Побудуємо відображення, яке задає функція (3.25) при $n = 2$, $m = 0$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $C = ih_2$. Функція для відображення буде мати вигляд:

$$w(z) = Az + \frac{h_1}{\pi} \ln(1+z) + \frac{h_2}{\pi} \ln(1-z). \quad (3.26)$$

Будемо вважати $z = \tanh(\xi/2)$, одержимо функцію, яка відображає смугу $0 < \text{Im}\xi < \pi$. Відображення смуги $0 < \text{Im}\xi < \pi$, яке реалізовано функцією (3.26) при $h_1 = \pi$, $h_2 = 1.5\pi$, $A = 0.9$, функція буде мати вигляд: $w = 0,9z + \ln(z+1) + 1,5 \ln(1-z)$.

Функція для побудови задається в Maple формулою: `with(plots); conformal((9/10)*z+ln(z+1)+(15*(1/10))*ln(1-z), z = -10+0*I .. 10+I*Pi, grid = [41, 41], numxy = [64, 64], view = [-3 .. 5, -1 .. 5], axes = boxed, xtickmarks = 0, ytickmarks = 0, scaling = constrained, style = line, thickness = 1, color = black).`

Відповідне зображення наведено на рисунку 3.11.

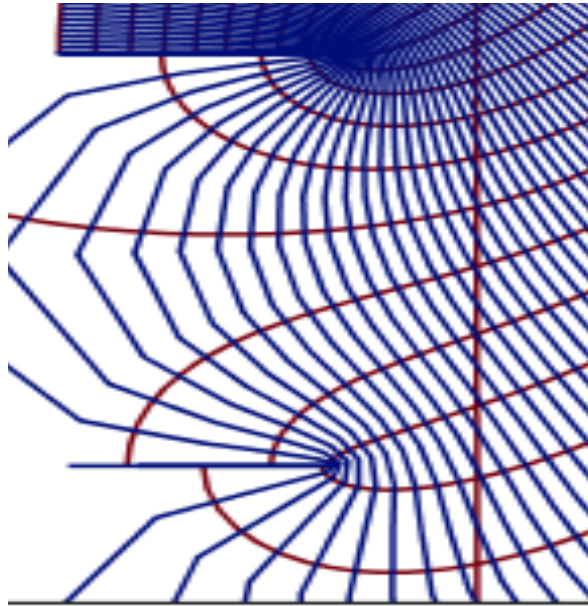


Рисунок 3.11 – Відображення смуги на напівплощину двома розрізами функцією $w = 0,9z + \ln(z + 1) + 1,5 \ln(1 - z)$

3.5 Смуга з розрізами вздовж променів

Нехай область D являє собою горизонтальну смугу $0 < \text{Im}w < H$, на якій побудовано $n + m - 2$ розрізів вздовж променів із точок B_k ($k = 1, 2, \dots, n - 1$) ліворуч і з точок D_j ($j = 1, 2, \dots, m - 1$) праворуч (рис. 3.12).

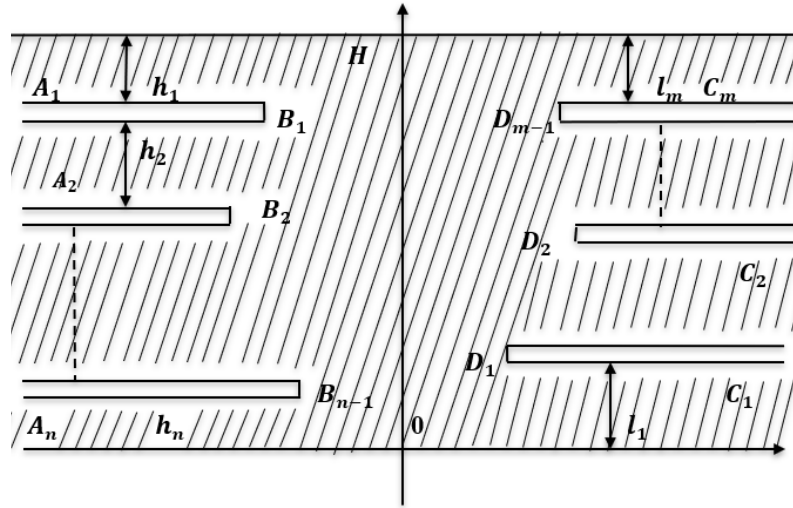


Рисунок 3.12 – Смуга з розрізами вздовж променів

Позначимо через $A_1, A_2, \dots, A_n; C_1, C_2, \dots, C_m$ граничні точки, що належать нескінченності, які мають нумерацію згідно додатного руху по границі області D . Область D можливо конформно відобразити на напівплощину $\text{Im}z > 0$. Нехай при цьому граничні точки A_k, B_k, C_j, D_j відображаються в точки дійсної вісі a_k, b_k, c_j, d_j . Будемо вважати, що жодна з точок a_k, b_k, c_j, d_j не є нескінченно віддаленою. Функція, яка реалізує обернене відображення напівплощини $\text{Im}z > 0$ на область D , згідно з формулою Кристоффеля-Шварца має вигляд

$$w = \bar{C}_1 \int_{z_0}^z h(\xi) d\xi + \bar{C}_2, \quad (3.27)$$

де

$$h(\xi) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (\xi - b_k) \prod_{j=1}^{m-1} (\xi - d_j)}{\prod_{k=1}^n (\xi - a_k) \prod_{j=1}^m (\xi - c_j)}. \quad (3.28)$$

Правильний дріб $h(\xi)$ можна розкласти на прості дроби

$$h(\xi) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\xi - a_k} + \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j}{\xi - c_j}, \quad (3.29)$$

де α_k, β_j – дійсні коефіцієнти. Після інтегрування одержимо

$$w = \bar{C}_1 \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \ln(z - a_k) + \sum_{j=1}^m \beta_j \ln(z - c_j) \right) + \bar{C}_2. \quad (3.30)$$

Прирости функцій $w(z)$ при обході точок a_k і c_j мають дорівнювати ih_k та il_j відповідно. Оскільки приріст функції $\ln(z - a_k)$ при обході точок a_k по півколам, які належать верхній півплощині, дорівнює $-i\pi$, то

$$\bar{C}_1 \alpha_k = \frac{h_k}{\pi}, \quad \bar{C}_1 \beta_j = -\frac{l_j}{\pi}.$$

Таким чином, функція, яка відображає напівплощину $\text{Im}z > 0$ на область D має вигляд:

$$w = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n h_k \ln(z - a_k) - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m l_j \ln(z - c_j), \quad (3.31)$$

де $\text{Im}\bar{C}_2 = H = \sum l_j$. Якщо один з параметрів a_k або c_j дорівнює ∞ , то відповідний доданок не враховуємо.

Приклад 3.8 При $n = 2$, $m = 1$ область являє собою смугу $0 < \text{Im}w < H$ з розрізом вздовж променя. Будемо вважати в функції (3.31), що $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $C_1 = \infty$, $\bar{C}_2 = -ih_2$, $z = \tanh(\xi/2)$. Тоді одержимо функцію, яка відображає смугу $0 < \text{Im}z < \pi$ на криволінійну область, яку ми розглядаємо:

$$w = \frac{h_1}{\pi} \ln(1 + z) + \frac{h_2}{\pi} \ln(1 - z). \quad (3.32)$$

Для відображення декартової сітки в смузі $0 < \text{Im}z < \pi$, яке реалізовано функцією (3.32), при $h_1 = \pi$, $h_2 = 0.8\pi$ функція буде мати вигляд: $w = \ln(1 + z) + 0,8 \ln(1 - z)$.

Функція для побудови задається в Maple формулою: `with(plots); conformal(ln(1+z)+(8*(1/10))*ln(1-z), z = -2+0*I .. 2+I*Pi, grid = [31, 31], numxy = [64, 64], view = [-3 .. 3, -3 .. 4], axes = boxed, xtickmarks = 0, ytickmarks = 0, scaling = constrained, style = line, thickness = 1, color = black)`.

Відповідне зображення наведено на рисунку 3.13.

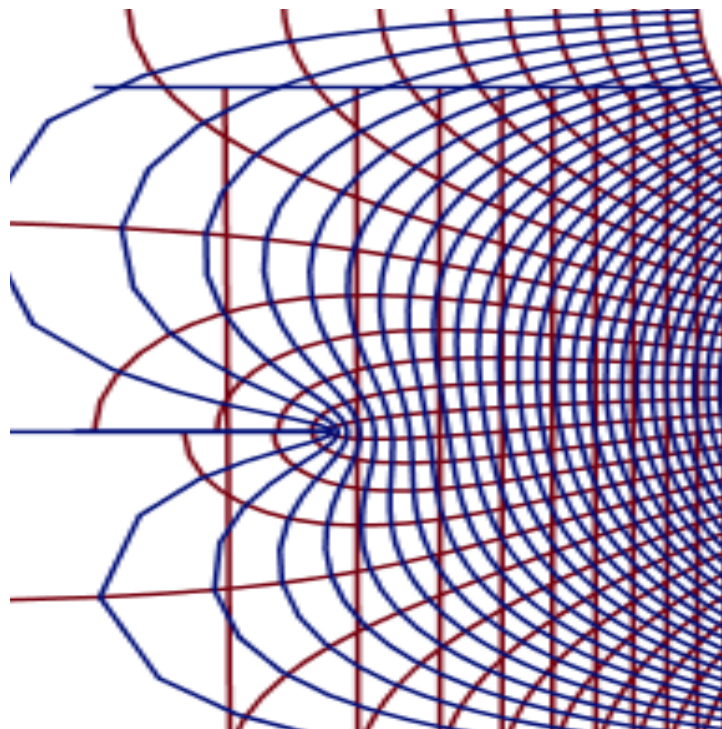


Рисунок 3.13 – Відображення за допомогою функції

$$w = \ln(1 + z) + 0,8 \ln(1 - z)$$

Приклад 3.9 При $n = 2$, $m = 1$, $A = B = 1$, $C = 0$, $h_1 = 2\pi$, $l_0 = \pi$, $a_1 = -1$, $c_0 = 0$, функція (3.16) бути мати вигляд: $w(t) = t + \frac{1}{t} + 2 \ln(1 + t) - \ln(t)$, де $t = e^z$.

Побудуємо відображення декартової сітки в смузі $0 < \text{Im}z < \pi$. Функція для побудови задається в Maple формулою: `with(plots); conformal(exp(z)+1/exp(z)+2*ln(1+exp(z))-ln(exp(z)), z = -2+0*I .. 2+I*Pi, grid`

= [41, 41], numxy = [64, 64], view = [-5 .. 5, -5 .. 5], axes = boxed, xtickmarks = 0, ytickmarks = 0, scaling = constrained, style = line, thickness = 1, color = black).

Відповідне зображення наведено на рисунку 3.14.

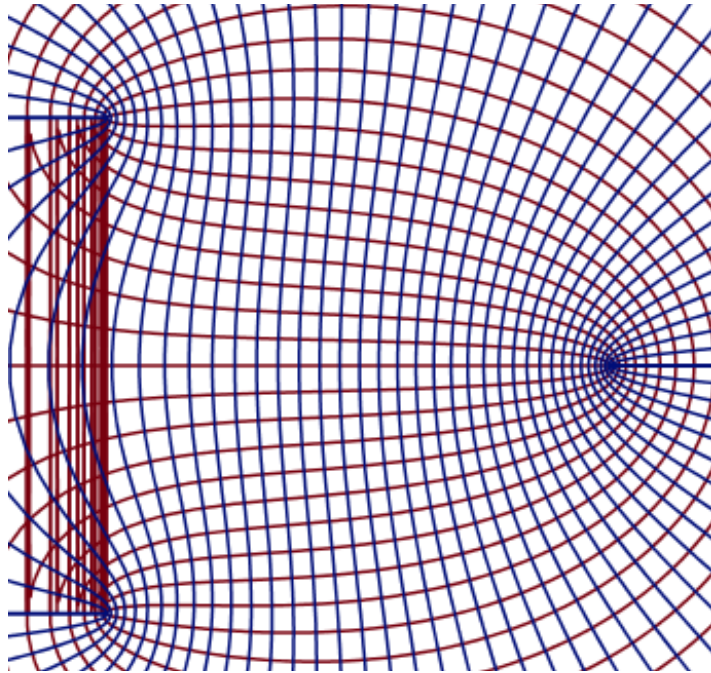


Рисунок 3.14 – Відображення за допомогою функції $w = e^z + \frac{1}{e^z} + 2\ln(1 + e^z) - \ln(e^z)$

Приклад 3.10 Функція $w = \left(\frac{A}{t^2} - 1\right) + \ln t - i\pi/2$, де $t = e^z$, $A > 0$ відображає смугу $0 < \text{Im}z < \pi$ на площину з чотирма розрізами вздовж променів, які паралельні дійсній вісі та розташовані симетрично відносно координатних вісей.

Функція для побудови задається в Maple формулою:

```
with(plots); conformal(1/(exp(2*z)-1)+ln(exp(z))-I*Pi*(1/2), z = -3+0*I ..
3+I*Pi, grid = [41, 41], numxy = [64, 64], view = [-5 .. 5, -5 .. 5], axes = boxed,
xtickmarks = 0, ytickmarks = 0, scaling = constrained, style = line, thickness = 1,
color = black).
```

Відповідне зображення наведено на рисунку 3.15.

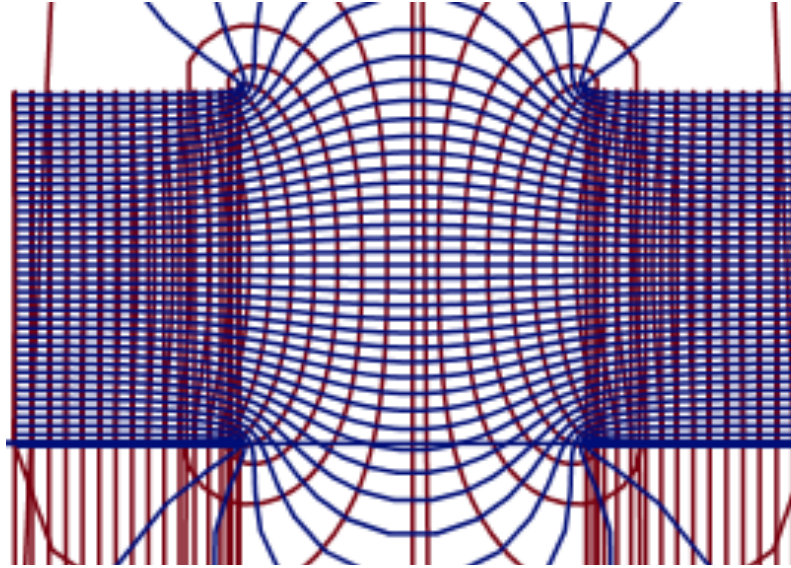


Рисунок 3.15 – Відображення за допомогою функції $w = 1/(e^{2z} - 1) + \frac{1}{e^z} + \ln(e^z) - (i \cdot \pi)/2$

3.6 Зіркоподібні багатокутні області

Зіркоподібними розрізами називають розрізи, які складаються з відрізків та (або) променів, які проходять через одну точку площини. В якості цієї точки ми будемо вважати початок координат. Однозв'язну область, обмежену зіркоподібними розрізами, будемо називати зіркоподібною багатокутною областю, або зіркоподібним багатокутником. Аналітична функція, яка відображає півплощину або круг на зіркоподібний багатокутник є елементарною, причому вона може бути знайдена без використання інтеграла Кристоффеля-Шварца.

Нехай границя кутової зіркоподібної області складається з двох променів та $(n - 1)$ – го відрізка, які виходять з початку координат (рис. 3.16).

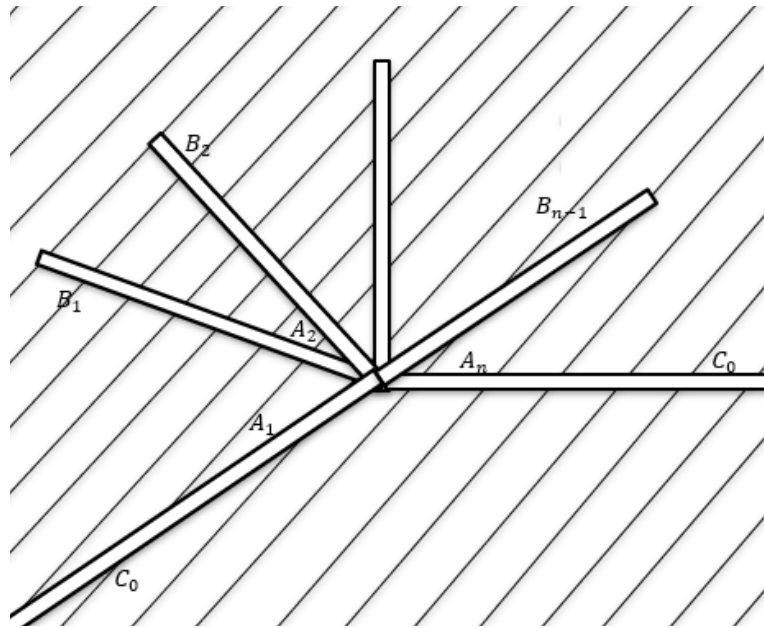


Рисунок 3.16 – Зіркоподібна кутова область

Початок координат є n -кратною граничною точкою. Позначимо вершини багатокутної області в початку координат (в порядку додатного обходу границі) через A_1, A_2, \dots, A_n , а відповідні кути через $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \dots, \pi\alpha_n$. Нескінченно віддалена точка є однократною граничною точкою, кут в нескінченно віддаленій точці C_0 дорівнює $-\pi(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$.

Позначимо кінці відрізків через B_1, B_2, \dots, B_{n-1} , а довжини $A_k B_k$ через l_k ($l_k = |A_k B_k|$). Сторону $A_n C_0$ спрямуємо вздовж додатного напрямку дійсної вісі.

Розглянуту кутову зіркоподібну багатокутну область можна конформно відобразити на півплощину $\text{Im}z > 0$ таким чином, щоб точка C_0 відобразилась в точку $z = \infty$. Нехай при цьому точки A_1, A_2, \dots, A_n відобразяться в точки a_1, a_2, \dots, a_n дійсної вісі відповідно. Обернене відображення півплощини $\text{Im}z > 0$ на кутову зіркоподібну область здійснюється функцією:

$$w = f(z) = C \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k}. \quad (3.33)$$

Точки b_k (прообрази кінців променів зірки B_k) являють собою нулі похідної функції $f(z)$, вони визначаються як корені рівняння:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{z - a_k} = 0. \quad (3.34)$$

Рівняння (3.34) має рівно $n - 1$ дійсний корень, причому

$$a_k < b_k < a_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1).$$

При знаходженні відображення заданої області параметри a_1, a_2, \dots, a_n та C є невідомими. Для їх визначення є $n - 1$ умов:

$$|f(b_k)| = l_k \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1). \quad (3.35)$$

Два з параметрів a_1, a_2, \dots, a_n можна задати довільно; інші параметри (та коефіцієнт C) визначаються з умов (3.35).

Приклад 3.11 Для зіркоподібної кутової області з кутами в початку координат $\pi\theta$ та $2\pi - \pi\theta$ будемо вважати $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $\alpha_1 = 2 - \theta$, $\alpha_2 = \theta$ тоді функція (3.33) буде мати вигляд:

$$w = Cz^{2-\theta}(z - 1)^\theta. \quad (3.36)$$

Функція для побудови задається в Maple формулою: `with(plots); conformal(z^(13/10)*(z-1)^(7/10), z = -3+0*I .. 3+I*10, grid = [71, 71], numxy = [64, 64], view = [-1 .. 1, -1 .. 1], axes = boxed, xtickmarks = 0, ytickmarks = 0, scaling = constrained, style = line, thickness = 1, color = black).`

Відображення декартової сітки напівплощини, яке реалізовано функцією (3.36) при $\theta = 0,7$, $C = 1$ має вигляд $w = z^{1,3}(z - 1)^{0,7}$.

Відповідне зображення наведено на рисунку 3.17.

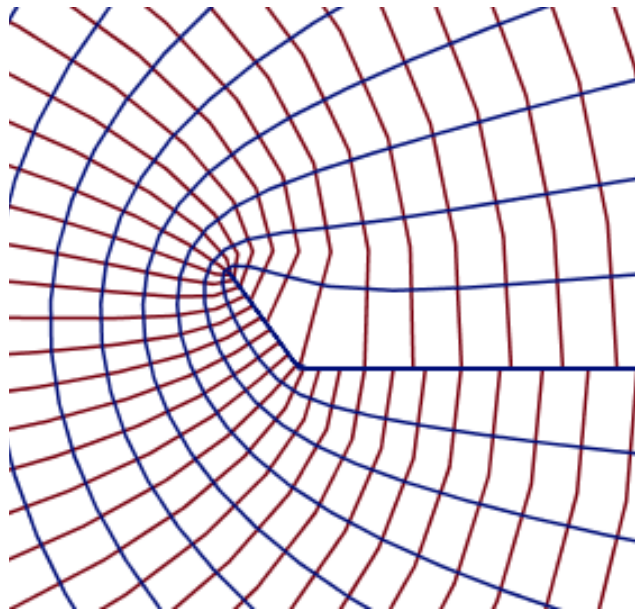


Рисунок 3.17 – Відображення зіркоподібної області

Розглянемо зіркоподібну многокутну смугу, для якої початок координат є n -кратною точкою, а нескінченно віддалена точка є $(m + 1)$ -кратною граничною точкою (рис. 3.18).

Позначимо через A_1, A_2, \dots, A_n граничні точки зіркоподібної області в початку координат, а відповідні кути через $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \dots, \pi\alpha_n$. Далі позначимо через C_0, C_1, \dots, C_m граничні точки у нескінченності (також в порядку додатного обходу границі області), а відповідні кути – через $-\pi\gamma_0, -\pi\gamma_1, \dots, -\pi\gamma_m$. Кути зіркоподібної смуги відповідають співвідношенню

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = \sum_{j=0}^m \gamma_j.$$

Сторону $A_n C_0$ направимо вздовж додатної дійсної піввісі.

Розглянуту смугу можна конформно відобразити на напівплощину $\text{Im}z > 0$ таким чином, щоб точка C_0 відобразилася в нескінченно віддалену точку.

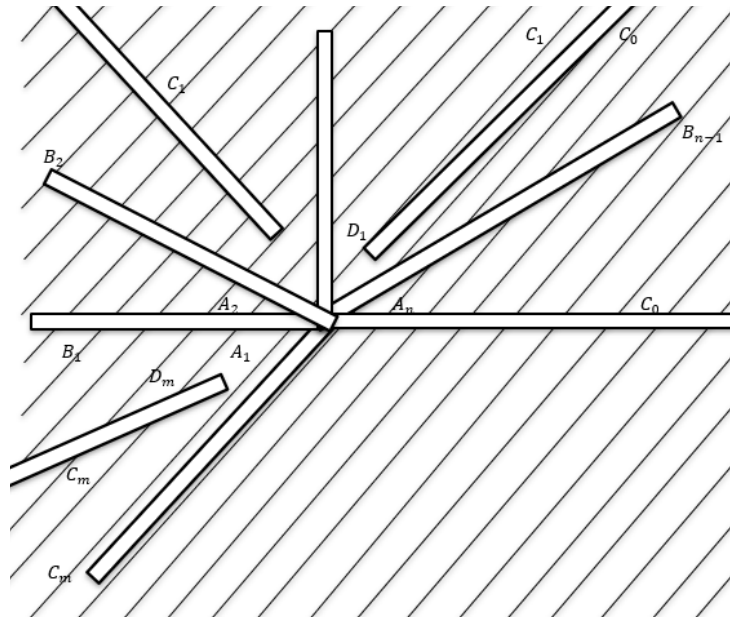


Рисунок 3.18 – Зіркоподібна область

Нехай при цьому точки C_1, C_2, \dots, C_m відобразяться в точки c_1, c_2, \dots, c_m дійсної вісі, а точки A_1, A_2, \dots, A_n відповідно в точки a_1, a_2, \dots, a_n . Зрозуміло, що точки будуть розташовані наступним чином

$$c_1 < c_2 < \dots < c_m < a_1 < a_2 < \dots < a_n.$$

Функція, яка реалізує обернене конформне відображення напівплощини $\text{Im}z > 0$ на розглянуту зіркоподібну смугу, має вигляд

$$w = C \frac{\prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k}}{\prod_{j=1}^m (z - c_j)^{\gamma_j}}, \text{ де } C > 0. \quad (3.37)$$

При розв'язанні задач про відображення напівплощини на заданий многокутник параметри a_k, c_j невідомі. Два з них можна задати довільно, а інші параметри та коефіцієнт C (усього $n + m - 1$ параметрів) знаходяться з системи рівнянь $n + m - 1$, що визначають положення точок $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}; D_1, D_2, \dots, D_m$, (рис. 3. 18). Замість розв'язання складної системи рівнянь, на практиці використовують метод підбора параметрів для

отримання потрібної форми області. Особливо важливим є випадок з двома смугами ($m = 1$). Такі смуги ми будемо відображати на канонічну область – смугу $0 < \text{Im}\xi < \pi$ – таким чином, щоб граничні точки C_1 та C_0 зіркоподібної полоси відобразилися в точки $\xi = -\infty$ та $\xi = \infty$ відповідно. Це досягається за допомогою перетворення $\xi = \ln(z - c_1)$. Обернене відображення смуги $0 < \text{Im}\xi < \pi$ на зіркоподібну полосу здійснюється композицією функцій:

$$z = c_1 + e^\xi,$$

$$w = \frac{c}{(z-c_1)^{\gamma j}} \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k}.$$

Приклад 3.12 Побудуємо відображення декартової сітки в смугу $0 < \text{Im}z < \pi$, при $\alpha_1 = 1,1$, $\alpha_2 = 0,5$, $\gamma = 0,5$, $p = 5$, $z_1 = e^z$, яке реалізовано функцією

$$w = \frac{(z_1 - 1)^{\alpha_1} (z_1 - p)^{\alpha_2}}{z_1^\gamma}.$$

При обраних параметрах функція буде мати вигляд $w = \frac{(e^z - 1)^{1,1} (e^z - 5)^{0,5}}{e^{0,5z}}$.

Функція для побудови задається в Maple формулою: `with(plots); conformal((exp(z)-1)^(11/10)*(exp(z)-5)^(5*(1/10))/exp((5*(1/10))*z), z = -3+0*I .. 3+I*Pi, grid = [47, 47], numxy = [64, 64], view = [-10 .. 7, -10 .. 7], axes = boxed, xtickmarks = 0, ytickmarks = 0, scaling = constrained, style = line, thickness = 1, color = black).`

Відповідне зображення наведено на рисунку 3.19.

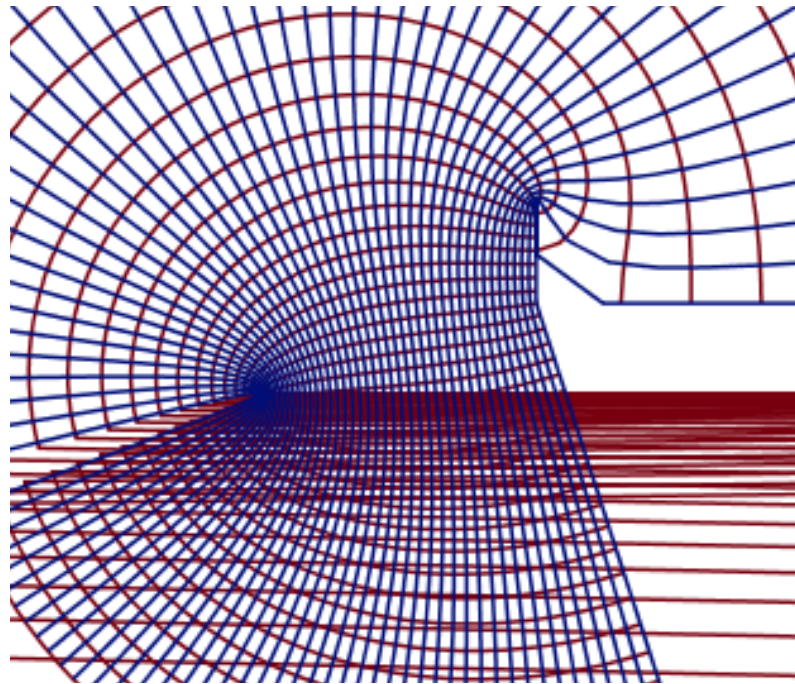


Рисунок 3.19 – Відображення за допомогою

$$\text{функції } w = \frac{(e^z - 1)^{1,1} (e^z - 5)^{0,5}}{e^{0,5z}}$$

Нехай границя зіркоподібної області являє собою m розрізів вздовж прямолінійних променів, продовження яких проходить через початок координат. Точка $w = 0$ є для такої області внутрішньою точкою, а нескінченність m – кратною граничною точкою. Позначимо через C_1, C_2, \dots, C_m граничні точки у нескінченності, а відповідні кути – через $-\pi\gamma_1, -\pi\gamma_2, \dots, -\pi\gamma_m$ (всі $\gamma_j > 0$, $\sum_{j=1}^m \gamma_j = 2$) (рис. 3.20).

Розглянемо конформне відображення даної зіркоподібної смуги на одиничний круг $|z| < 1$, при якому точка $w = 0$ відображається в центр круга. При цьому точки C_1, C_2, \dots, C_m відобразяться в точки одиничного кола $c_1 = e^{i\varphi_1}, c_2 = e^{i\varphi_2}, \dots, c_m = e^{i\varphi_m}$.

Функція, яка реалізує обернене відображення одиничного круга на таку зіркоподібну область, має вигляд:

$$w = \overline{C_z} \prod_{j=1}^m (z - c_j)^{-\gamma_j}, \quad (3.38)$$

де \bar{C} – деяка константа.

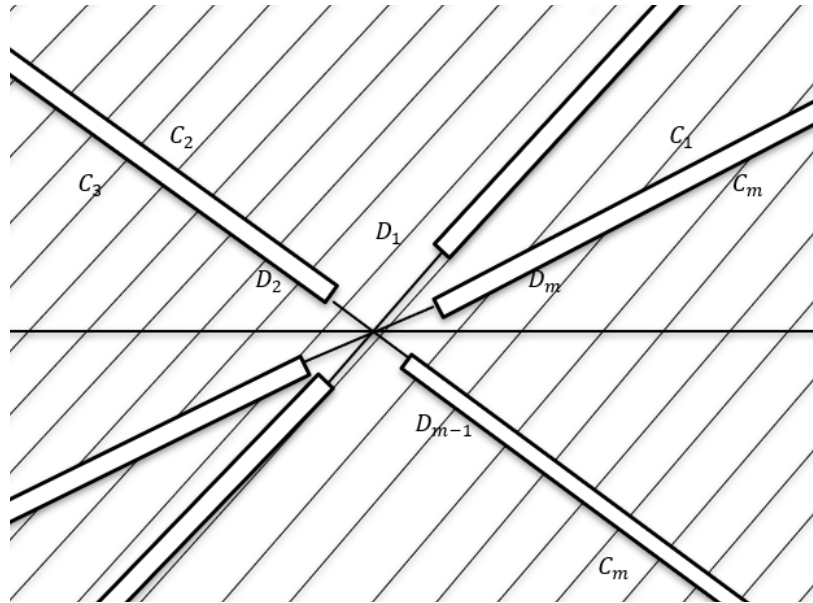


Рисунок 3.20 – Зірноподібная смуга, де початок координат – внутрішня точка

Функція (3.38) є багатозначною, та при виділенні головних гілок її співмножників з'являються розриви в точках деяких відрізків, які лежать в крузі. Для того, щоб позбавитись цих розривів, слід представити відображаючу функцію у вигляді

$$w = Cz \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{z}{c_j}\right)^{-\gamma_j}. \quad (3.39)$$

При знаходженні відображення одиничного круга на задану зірноподібну область параметри a_1, a_2, \dots, a_n та параметри c_1, c_2, \dots, c_m невідомі. З них тільки один можна задавати довільно.

Нехай нескінченна зірноподібна область являє собою зовнішність зірки, яка складається з n відрізків, що виходять з точки $w = 0$ (рис. 3.21).

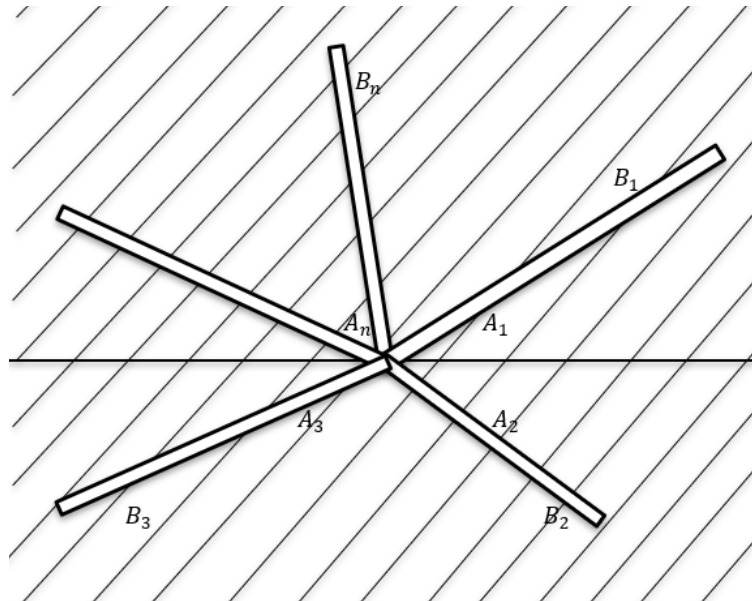


Рисунок 3.21 – Зіркоподібний розріз з n відрізків

Позначимо вершини в початку координат (в порядку додатного руху по границі нескінченної області) через A_1, A_2, \dots, A_n , а відповідні кути в цих вершинах через $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \dots, \pi\alpha_n$ ($\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2$).

Розглянуту зовнішність зіркоподібного розрізу можна конформно відобразити на канонічну область (зовнішність одиничного круга $|z| > 1$) таким чином, щоб точка $w = \infty$ відобразилася в точку $z = \infty$. Нехай при цьому точки A_1, A_2, \dots, A_n відобразяться в точки одиничного кола a_1, a_2, \dots, a_n відповідно.

Функція, яка реалізує обернене відображення зовнішності одиничного круга на зовнішність зіркоподібного розрізу, має вигляд

$$w = \frac{C}{z} \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k}. \quad (3.40)$$

Для того, щоб виділити гілку цієї багатозначної функції, яка неперервна зовні круга $|z| > 1$, вираз (3.40) слід записати у вигляді

$$w = Cz \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_k}{z}\right)^{\alpha_k}. \quad (3.41)$$

Функцію (3.41) можна одержати з (3.40) інверсіями по z та w .

При знаходженні відображення зовнішності круга на заданий зіркоподібний многокутник параметри a_1, a_2, \dots, a_n та C невідомі. З них один можна задавати довільно. Наприклад, $a_1 = 1$. Інші параметри $a_k = e^{i\varphi_k}$ необхідно знайти таким чином, щоб одержати необхідний зіркоподібний розріз.

Приклад 3.13 Розглянемо зіркоподібний розріз, який складається з чотирьох відрізків, які виходять з початку координат та розташовані симетрично відносно координатних вісей. Нехай кути між цими відрізками дорівнюють $\pi p_1, \pi(1-p), \pi p, \pi(1-p)$. В якості точок одиничного кола візьмемо симетричні точки $1, -i, -1, i$. Згідно з функцією (3.41) одержимо

$$w = \frac{C}{z} (z-1)^p (z+i)^{1-p} (z+1)^p (z-i)^{1-p} = C \left(z + \frac{1}{z}\right) \left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^p. \quad (3.42)$$

Побудуємо відображення зовнішності кола, реалізованого функцією (3.42) при $p = 1/3$. Функція буде мати вигляд:

$$w = \left(z + \frac{1}{z}\right) \left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Функція для побудови задається в Maple формулою: `with(plots); conformal((z+1/z)*((z^2-1)/(z^2+1))^(1/3), z = -1-I .. 1+I, grid = [81, 81], numxy = [64, 64], view = [-2 .. 2, -2 .. 2], axes = boxed, xtickmarks = 0, ytickmarks = 0, scaling = constrained, style = line, thickness = 1, color = black).`

Відповідне відображення наведено на рисунку 3.22.

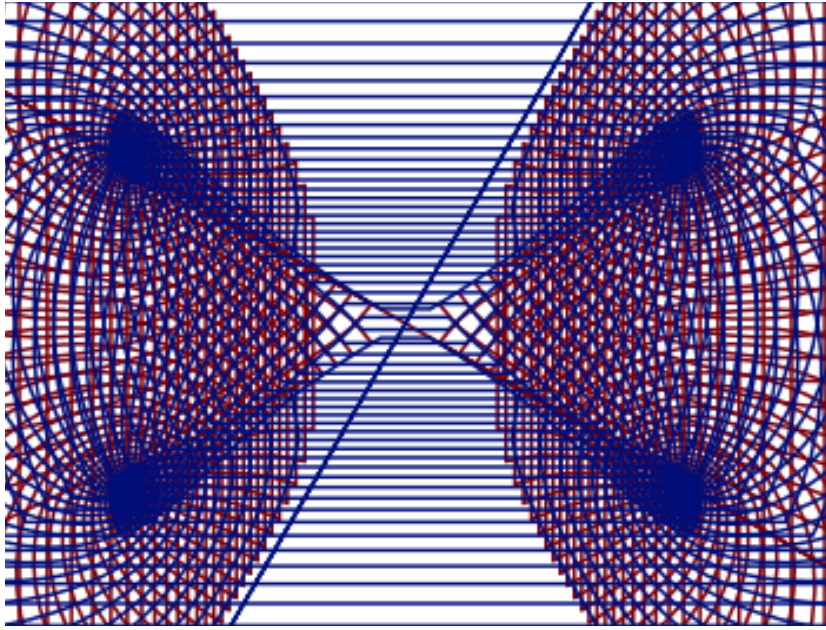


Рисунок 3.22 – Відображення за допомогою функції $w = \left(z + \frac{1}{z}\right) \left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^{\frac{1}{3}}$

ВИСНОВКИ

Кваліфікаційну роботу було присвячено конформним відображенням областей з розрізами.

У вступі було розглянуто історію розвитку, як теорії конформних відображень, так і теорії комплексних чисел, відзначено найвідоміших вчених, які досліджували їх. Зокрема, зазначено коли вперше з'явилося поняття конформного відображення, яку роль відігравали ті чи інші науковці в дослідженні конформних відображень та теорії комплексних чисел. Зроблено висновок про те, що деякі відображення недостатньо досліджені.

У першому розділі роботи було наведено основні теоретичні відомості з теорії конформних відображень та елементарних функцій комплексної змінної. Наведено основні властивості конформних відображень та теореми, зокрема, теорема Рімана. Приделено особливу увагу тим елементарним функціям комплексної змінної, які будуть використані при побудові конформних відображень областей з розрізами в третьому розділі.

У другому розділі роботи введено поняття розрізу комплексної площини. Наведено приклади таких областей. Зокрема, площини з розрізами вздовж променів та відрізків, які сонаправлені або направлені в різні боки. Також наведені приклади зовнішності та внутрішності одиничних кіл з розрізами по променям та відріzkам на комплексній площині.

У третьому розділі роботи розглянуто використання інтеграла Кристоффеля-Шварца при побудові конформних відображень. Побудовано аналітично конформні відображення областей з розрізами на елементарні області комплексної площини. Було побудовано відображення площини з розрізами вздовж паралельних променів, спрямованих в одному напрямку, площини з розрізами вздовж променів, спрямованих в протилежних

напрямках, напівплощини $\text{Im}w > 0$ з розрізами вздовж променів, смуги $0 < \text{Im}w < H$ з розрізами вздовж променів. Також, розглянуто та побудовано відображення зіркоподібних многокутних областей: з кутами в початку координат, в смугі $0 < \text{Im}z < \pi$, області, де початок координат – внутрішня точка, зірковоподібного розрізу з 4 відрізків.

Для візуалізації побудови було використано пакет математичних програм Maple.

Отримані результати можна використовувати при розв'язанні електростатики, механіки суцільних середовищ (гідро- і аеромеханіці, газовій динаміці, теорії пружності, теорії пластичності) тощо.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Александров И. А., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Аналитические функции комплексного переменного. Москва : Высш. шк, 1984. 186 с.
2. Араманович И. Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: монография. Москва : Наука, 1968. 416 с.
3. Гребенюк С. М., Тітова О. О., Панасенко Є. В. Теорія функцій комплексної змінної: навчальний посібник для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки «Прикладна математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2015. 72 с.
4. Грищенко О. Ю., Ляшко С. І. Теорія функцій комплексної змінної. Київ : Видавничо-поліграфічний центр «Київський ун-т», 2009. 496 с.
5. Єжов С. М., Разумова М. А. Теорія функцій комплексної змінної: навч. посіб. для студентів фізичних спеціальностей університетів. Київ : Видавничо-поліграфічний центр «Київський ун-т», 2012. 191 с.
6. Иванов В. И., Попов В. Ю. Конформные отображения и их приложения. Москва : Едиториал УРСС, 2002. 324 с.
7. Карлов М. И., Половинкин Е. С., Шабунин М. И. Методические указания по решению задач курса ТФКП: учеб. пособие. Москва : МФТИ, 2007. 78 с.
8. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Функция комплексного переменного: задачи и примеры с подробными решениями: учеб. пособие . Москва : Наука, 2003. 208 с.
9. Копенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений: монография. Москва : Изд-во иностранной лит-ры, 1963. 390 с.

10. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Москва : Наука, 1987. 728 с.
11. Половинкин Е. С. Курс лекций по теории функций комплексного переменного. Москва : МФТИ, 1999. 256 с.
12. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. Москва : Наука, 1984. 432 с.
13. Рудавський Ю. К, Костробій П. П., Уханська Д. В., Сало Т. М., Уханська О. М., Сорокатиї І. М. Теорія функцій комплексної змінної: уч. посібник для внз. Львів : Видавництво Львівській політехніки, 2007. 230 с.
14. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. Москва : Наука, 1989. 480 с.
15. Титчмарш Е. Теория функций. Издание второе. Москва : Наука, 1980. 463 с.
16. Фукс Б. А., Шабат Б. В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. Москва : Наука, 1964. 388 с.
17. Швець В. Т. Вища математика: теорія функцій комплексної змінної. Одеса : Видавництво БМВ, 2014. 284 с.

ДОДАТОК А

Функції комплексної графіки в Maple

Пакет математичних програм Maple має достатній вибір команд та процедур для роботи з комплексними числами та функціями комплексної змінної. Процедури, які дозволяють візуалізувати деякі комплексні об'єкти, знаходяться в графічній бібліотеці *plots*. Для їх використання цю бібліотеку необхідно долучити за допомогою команди *with(plots)* або повного виклику процедури: *plots* [ім'я процедури](параметри).

Комплексне число в Maple задається у вигляді $a + I \cdot b$, де символ I позначає уявну одиницю i . Константа Pi в Maple задає число π . Для запису різних виразів з комплексними числами використовуються арифметичні оператори $+$, $-$, $*$, $/$, оператор піднесення до степеня $^$ та вбудовані функції комплексної змінної. При піднесенні до степеня результатом є головне значення многозначної функції z^p . Наведемо формат запису основних елементарних функцій комплексної змінної в Maple:

$Re(z)$ – дійсна частина комплексного числа $Re z$;

$Im(z)$ – уявну частина комплексного числа $Im z$;

$abs(z)$ – модуль комплексного числа $|z|$;

$argument(z)$ – головне значення аргумента комплексного числа $-\pi < arg z \leq \pi$;

$conjugate(z)$ – комплексне спряження \bar{z} ;

$sqrt(z)$ – головне значення комплексного кореня \sqrt{z} ;

$exp(z)$ – e^z ;

$ln(z)$ – головне значення $\ln z$;

$sin(z)$ – $\sin z$;

$cos(z)$ – $\cos z$;

$\tan(z) - tn\ z;$
 $\arcsin(z) - arcsin\ z;$
 $\arccos(z) - arccos\ z;$
 $\arctan(z) - arctg\ z;$
 $\sinh(z) - sh\ z;$
 $\cosh(z) - ch\ z;$
 $\tanh(z) - th\ z;$
 $\operatorname{arcsinh}(z) - arsh\ z;$
 $\operatorname{arccosh}(z) - arch\ z;$
 $\operatorname{arctanh}(z) - arth\ z.$

Важливо відмітити, що для багатозначних функцій пакет математичних програм Maple визначає головне значення багатозначної функції.

Для побудови конформних відображень в комплексній графіці в пакеті математичних програм Maple використовують процедуру `conformal`.

Процедура `conformal` візуалізує конформне відображення декартової або полярної сітки, яке реалізується за допомогою однолистої аналітичної функції:
`conformal(f(z), Zmin ... Zmax, params);`

Позначимо основні параметри цієї функції:

$f(z)$ – функція комплексної змінної, яка здійснює конформне відображення двовимірної ортогональної сітки області комплексної площини (U, V) :

$$U_{min} \leq U \leq U_{max}, V_{min} \leq V \leq V_{max}.$$

В якості змінних U, V обираються декартові змінні (x, y) , або полярні змінні (ρ, φ) . При цьому $Z_{min} = U_{min} + I \cdot V_{min}$, $Z_{max} = U_{max} + I \cdot V_{max}$.

Розмір вихідної ортогональної сітки (число ліній по кожній координаті) задається користувачем. Результатом роботи програми є набір плоских кривих – конформне відображення вихідної ортогональної сітки.

params – перелік параметрів, які дозволяють користувачеві контролювати якість графіка. Кожний параметр задається у вигляді *param = value*.

Найбільш часто використовують наступні параметри:

- *grid = [n, m]*, де *n* та *m* цілі числа, задає число ліній вихідної сітки по кожній координаті. Зазвичай розмір вихідної сітки дорівнює 11×11 .
- *coords* задає систему координат. Якщо *coords = polar*, то *conformal* працює в полярній системі координат. Якщо параметр *coords* не введено, то використовується декартова система координат.
- *numxy = [m, n]* – де *m* та *n* цілі числа, визначає число точок на лінії сітки по кожній координаті. Зазвичай, на кожній лінії береться 15 точок. Збільшення *m* та *n* робить криві більш гладкими, але збільшує час роботи програми.
- *view = (Xmin ... Xmax, Ymin ... Ymax)* – задає прямокутну область комплексної площини, яка буде відображатися на екрані.
- *axes = normal* – тип виводимих вісій координат. Можливі значення: *normal* – вісі з центром в початку координат, *boxed* – графік виводиться в рамку з нанесеною шкалою, *frame* – вісі з центром в лівому нижньому куті, *none* – графік без нанесення вісій.
- *xtickmarks = n*, *ytickmarks = m* – число міток по горизонтальній та вертикальній вісі відповідно. Якщо будь-яке із значень дорівнює 0, то відповідна вісь виводиться без міток.
- *scaling = constrained* задає тип масштабування.
constrained – графік виводиться з однаковим масштабом по вісям, *unconstrained* – графік масштабується по розміру графічного вікна, яке задається параметром *view*.

- *style = line* – вивід графіка лінією (*line*) або точками (*point*).
- *thickness = 1* – товщина лінії: 1 – тонка, 2 – середня, 3 – товста
- *color = black* – колір графіка. Можливі значення:
blue, green, grey,...