

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
Кафедра фундаментальної математики

## КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: «АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ  
РОЗВ'ЯЗКУ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ  
ГАММЕРШТЕЙНА ПЛОСКОЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ  
З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ І ШОРСТКОСТІ,  
ЩО ДЕФОРМУЄТЬСЯ ЗА СТЕПЕНЕВИМ ЗАКОНОМ,  
ДЛЯ МАЛИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ШОРСТКОСТІ»

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1118  
спеціальності 111 математика  
(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми математика

В.Ю. Містюк

(ініціали та прізвище)

доцент кафедри фундаментальної  
математики

Керівник доцент, к.ф.-м.н. Д'яченко Н.М.  
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри загальної математики  
доцент, к.ф.-м.н. Стеганцев Є.В.  
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

□

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Напрямок підготовки 111 математика

(шифр і назва)

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач кафедри  
фундаментальної математики,  
д.т.н., доцент

Гребенюк С.М.

(підпис)

« 16 » травня 2019 р.

**ЗАВДАННЯ**  
**НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ**

Містюк Валерії Юріївні

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Аналіз числових результатів розв'язку інтегрального рівняння Гаммерштейна плоскої контактної задачі з урахуванням тертя і шорсткості, що деформується за степеневим законом, для малих коефіцієнтів шорсткості

керівник роботи (проекту) Д'яченко Наталія Миколаївна, к.ф.-м.н., доцент  
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

Затверджені наказом ЗНУ від « 15 » квітня 2019 року № 2099-с

2. Строк подання студентом роботи 09.12.2019

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.  
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити) Побудова аналітичного розв'язку задачі про вдавнення смугового штампа в пружну шорстку смугу при степеневому законі деформування шорсткості; отримання числових результатів та їх аналіз

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) \_\_\_\_\_

Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 15 грудня

**КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН**

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	вересень 2019	Виконано
2.	Збір вихідних даних.	вересень 2019	Виконано
3.	Обробка теоретичних джерел.	жовтень 2019	Виконано
4.	Розробка першого та другого розділу.	жовтень 2019	Виконано
5.	Розробка третього розділу.	листопад 2019	Виконано
6.	Розробка четвертого розділу	грудень 2019	Виконано
7.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	грудень 2019	Виконано
8.	Захист кваліфікаційної роботи.	16.01.2020	

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

**В.Ю. Містюк** \_\_\_\_\_  
(ініціали та прізвище)

Керівник роботи \_\_\_\_\_  
(підпис)

**Н.М. Д'яченко** \_\_\_\_\_  
(ініціали та прізвище)

**Нормоконтроль пройдено**

Нормоконтролер \_\_\_\_\_  
(підпис)

**І.Г. Ткаченко** \_\_\_\_\_  
(ініціали та прізвище)

## РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Аналіз числових результатів розв'язку інтегрального рівняння Гаммерштейна плоскої контактної задачі з урахуванням тертя і шорсткості, що деформується за степеневим законом»: 54 с., 4 рис., 21 джерел, 1 додаток.

ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ, МЕТОД РЕДУКЦІЇ, ПЛОСКА КОНТАКТНА ЗАДАЧА, СТЕПЕНЕВИЙ ЗАКОН ДЕФОРМУВАННЯ ШОРСТКОСТІ, ШОРСТКІСТЬ, ТЕРТЯ, ШТАМП.

Об'єкт дослідження – інтегральне рівняння Гаммерштейна плоскої контактної задачі з урахуванням тертя і шорсткості.

Мета роботи: побудова аналітичного розв'язку задачі про вдавнення смугового штампу в пружну шорстку смугу при степеневому законі деформування шорсткості з урахуванням тертя, яким є функція тиску, подана степеневим рядом, і занурення штамп; отримати числові результати впливу параметрів шорсткості і тертя та проаналізувати їх.

Методи дослідження – принцип стискаючих відображень, метод редукції.

У кваліфікаційній роботі основне інтегральне рівняння, що моделює контактну взаємодію для випадку малих коефіцієнтів шорсткості при степеневому законі її деформування, було перетворене в інтегральне рівняння Гаммерштейна в операторному вигляді. Досліджено питання про існування і єдиність розв'язку цього інтегрального рівняння. Рівняння Гаммерштейна разом із рівнянням рівноваги зведено до нескінченної системи нелінійних рівнянь. Аналітичний розв'язок (функція нормального тиску) подається степеневим рядом, коефіцієнти якого є розв'язком зазначеної системи. Доведено можливість застосування методу редукції. Проведено аналіз числових результатів щодо впливу шорсткості і тертя на контактні характеристики.

## SUMMARY

Master's Qualification Thesis «Analysis of Numerical Results of the Solution of the Hammerstein Integral Equation of a Flat Contact Problem with a Consideration of a Friction and a Roughness Deforming upon the Power Law»: 54 pages, 4 figures, 21 references, 1 supplement.

AN INTEGRAL EQUATIONS, A PLANE CONTACT PROBLEM, A PUNCH, A ROUGHNESS, A FRICTION, THE POWER LAW OF DEFORMATION OF ROUGHNESS FRICTION, A REDUCTION METHOD.

The object of the study is Hammerstein integral equation of a flat contact problem taking into account a friction and a roughness.

The aim of the study is to construction the analytical decision about indentation of a punch in an elastic strip with a rough surface at the power law of deformation of a roughness taking into account a friction, which the function of pressure it is served power series and the depression of a punch; get the numerical results of the influence of the roughness and friction parameters and analyze them.

The method of research is contracting mappings theorem and a reduction method.

In qualification work the constitutive integral equation, models contact interaction, was transformed to an integral equation of Hammerstein in a operator look for the power law of deformation of a roughness. Then questions of existence and uniqueness of the solution of this integral equation were investigated. Then this equation together with an equilibrium equation is reduced to the infinite system of the nonlinear equations. The analytical decision (function of normal pressure) moves an ascending power series which coefficients it is the solution of the specified system. The possibility of using the method of reduction is proved. The analysis of numerical results concerning influence of roughness and friction on the contact characteristics is carried out.

## ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	2
Реферат.....	4
Summary.....	5
Вступ.....	7
1 Огляд досліджень за темою роботи. Постановка задачі та інтегральне рівняння.....	10
1.1 Огляд досліджень щодо моделювання шорсткості і тертя в контактних задачах.....	10
1.2 Постановка задачі та інтегральне рівняння.....	12
2 Існування єдиного розв'язку рівняння Гаммерштейна даної задачі.....	20
2.1 Властивості лінійного оператора, через який виражається нелінійний оператор даної задачі .....	20
2.2 Існування та єдиність розв'язку рівняння задачі.....	22
2.2.1 Метричний простір $X$ , що задає множину визначення нелінійного оператора.....	23
2.2.2 Дослідження множини значень нелінійного оператора .....	23
2.2.3 Дослідження нелінійного оператора на стискання в метричному просторі $X$ .....	26
3 Отримання нескінченної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, що еквівалентна системі інтегральних рівнянь даної задачі.....	31
4 Метод редукції. Аналіз результатів числових результатів.....	36
4.1 Про можливість застосування методу редукції.....	36
4.2 Аналіз числових результатів.....	39
Висновки .....	45
Перелік посилань.....	48
Додаток А.....	51

## ВСТУП

У останні роки багатьох науковців цікавить питання розв'язання задач теорії пружності. Це зумовлено потребами інженерії. Такі розрахунки потрібні при проектуванні багатопверхових будинків, дорожніх покриттів, виготовленням деталей у машинобудуванні. Якщо враховувати шорсткість поверхонь взаємодіючих тіл, то розв'язання контактних задач теорії пружності ускладнюється.

Будь-які, реально існуючі тіла, мають шорстку поверхню. І при їх контакті виникає тертя. Аналізуючи роботи науковців, можна зробити висновок, що ефективних методів визначення контактних напружень на даний час існує небагато.

У 30-ті роки ХХ століття вперше почали говорити про плоскі контактні задачі теорії пружності для нескладних областей. І.Г.Альперін, О.Я. Шехтер у своїх роботах вперше дослідили контактну задачу для смуги.

Задачі з урахуванням тертя або шорсткості поверхні контактуючих тіл теоретично почали розглядати на початку 60-х років минулого століття. Для цього з'явилися нові математичні можливості [10].

Г.Герц запропонував розв'язок контактної задачі для пружних суцільних тіл. Такий розв'язок було прийнято з припущенням, що поверхні тіл є ідеально гладкими. Зрозуміло, що це не так. Кожна поверхня має мікронерівності. Разом з тим, більшість технічних розрахунків базується саме на теорії Г.Герца.

І.Я. Штаерман вперше запропонував розв'язок контактної задачі з урахуванням шорсткості [20]. За його баченням, сумарне переміщення штампа, що вдавлюється в тіло з шорсткою поверхнею, складається з двох частин. Перша – це переміщення пружного тіла, а друга – стиснення мікровиступів шорсткості, що може залежати від тиску за лінійним, степеневому та експоненціальному законам. Це доведено теоретично та

експериментально. Для малих зовнішніх сил, що діють на штамп, можна розглядати лінійний та степеневий закони, а для великих – експоненціальний.

Певні дослідження у цьому напрямку розглядаються при різних законах деформування шорсткості, але без урахування тертя між штампом і шорстким півпростором [1-5, 15].

У роботі основну увагу зосереджено на плоску задачу про вдавнення штампа з плоскою основою в пружну шорстку смугу, де мікровиступи шорсткості деформуються за степеневим законом, який застосовується для контактних задач з невеликими зовнішніми навантаженнями [4, 5, 8].

Метою роботи є побудова аналітичного розв'язку інтегрального рівняння Гаммерштейна плоскої контактної задачі з урахуванням тертя і шорсткості, що деформується за степеневим законом, для малих коефіцієнтів шорсткості, обґрунтування методів обчислення, отримання числових результатів та їх аналіз щодо впливу параметрів шорсткості і тертя та контактні характеристики.

У роботах [1, 11-14] досліджено плоскі контактні задачі з урахуванням шорсткості, що деформується за різними законами. Додаткове врахування тертя в таких задачах розглянуто в [7, 13, 15]. Інтегральне рівняння, наведене в роботі [15], не моделює вплив тертя на нормальний тиск. Це показано в дослідженнях Л.О. Галіна [3], завдяки яким в роботі [6] досліджено інтегральне рівняння плоскої контактної задачі з урахуванням шорсткості, що деформується за лінійним законом. Інтегральне рівняння даної роботи відрізняється від зазначеного нелінійним доданком. Воно відповідає степеневому закону деформування шорсткості. Таке рівняння для малих коефіцієнтів шорсткості досліджено вперше.

На початкових етапах введено малий параметр Боголюбова-Крилова [6] і спеціальну заміну, за допомогою якої дане рівняння зведено до інтегрального рівняння Гаммерштейна в операторному вигляді. Наступним кроком, було знайдено множину  $X$  на якій існує розв'язок рівняння. Далі отримано нерівності-обмеження на коефіцієнти шорсткості, за яких оператор



рівняння, заданий на  $X$ , є стискаючим. За таких обмежень існує єдиний розв'язок рівняння Гаммерштейна. Коефіцієнти шорсткості, що задовольняють зазначені нерівності, обмежені зверху. За домовленістю [6], їх називають «малими».

Функція нормального тиску – подана системою нелінійних алгебраїчних рівнянь, де потрібно визначити коефіцієнти степеневого ряду. Також виведена формула для обчислення занурення штамп. Це складає аналітичний розв'язок поставленої задачі.

Можливість застосування методу редукції дає змогу отримати наближений розв'язок задачі. Це дає змогу провести аналіз числових результатів щодо впливу шорсткості і тертя на контактні характеристики.

# 1 ОГЛЯД ДОСЛІДЖЕНЬ ЗА ТЕМОЮ РОБОТИ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ

## 1.1 Огляд досліджень щодо моделювання шорсткості і тертя в контактних задачах

Контактні задачі широко застосовуються у механіці при розрахунках фундаментів споруд в будівництві, концентрації напруг при контакті деталей машин в машинобудуванні тощо. Контактна задача в класичній постановці припускає ідеальну гладкість поверхні, однак на практиці, як правило, не існує ідеально гладких поверхонь.

Шорсткість поверхні твердих тіл істотно змінює характер їх контактної взаємодії. Модель шорсткої поверхні, припускає, що зближення двох тіл визначається лише деформаціями гладких тіл і шорсткого шару. Вважається, що близькі контакти мікронерівностей не впливають один на одного. Перша спроба врахувати шорсткість шару в постановці контактних задач була зроблена І.Я. Штаєрманом [20].

При розрахунку характеристик контакту шорсткої поверхні опираються, зазвичай, на модельні уявлення про спряжені поверхні: одна з них приймається ідеально гладкою, а інша – шорсткою. Шорсткість поверхні моделюється системою однотипних по формі виступів, розподілених за висотою.

Вибір конкретної форми мікровиступу шорсткості довільний. При цьому дослідники керуються найрізноманітнішими міркуваннями, в тому числі і асоціативного характеру. В роботах [7, 8] наведено повний перелік форм виступів, який супроводжується аналізом їх переваг та недоліків.

Першим етапом моделювання є вибір конкретної форми виступу, яка визначається певним набором параметрів, що розраховуються із вихідної

інформації про поверхню. Другий етап заключається у виборі закону розподілу виступів за висотою.

Наступний етап розрахунку пов'язаний з розв'язком контактної задачі для одиничного виступу. Для спрощення необхідно обирати модель з числа простих геометричних фігур: сферичних сегментів, циліндричних стержнів, еліпсоїдів, конусів та інших. Сферичні, циліндричні та еліпсоїдні найбільш відповідають реальності, а нерівності з загостреними вершинами є малоймовірними.

На останньому етапі використовується умова рівноваги, як правило в інтегральній формі, що припускає неперервність функції розподілу виступів за висотою.

Усі контакти можна розбити на три групи: пружні, пластичні і проміжні – пружно пластичні. Оскільки закономірності для таких контактів будуть різні, важливо знати умови, за яких реалізується той або інший вид контакту.

Модель, що розглядається, базується на структурних уявленнях про шорсткий шар, елементом якого є мікронерівність. У своєму первісному варіанті дискретна модель не враховує вплив мікровиступів, тобто напружено-деформований стан матеріалу в області плями контакту повністю визначається навантаженням, що сприймається цим контактом. Ця гіпотеза забезпечує відповідність між теорією і експериментом при малій щільності контакту. Однак, у тих випадках, коли ця гіпотеза не виконується, це припущення призводить до помилкових результатів. Наочним прикладом обмеженості такої моделі є насичення площі контакту, на полімерних матеріалах і гумах.

І.В. Крагельський [12] у 1943 р. запропонував для аналізу закономірностей тертя стрижневу і сферичну моделі шорстких поверхонь. Моделі визначалися такими параметрами: щільністю нерівностей (кількість нерівностей на одиницю площини), величиною нормального відхилення вершин нерівностей.

І.В. Крагельський [12], моделюючи шорсткі поверхні набором стрижнів, що деформуються пружно, отримав, що зближення задовольняє формулі

$$w = \left( \frac{6q_c}{k\gamma_1\gamma_2} \right)^{\frac{1}{3}},$$

де  $q_c$  – контурний тиск,  $k = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$  – наведений коефіцієнт жорсткості,

$K_i = \frac{E_i}{2r(1-\nu^2)}$ ,  $r$  – радіус плями контакту,  $\gamma$  – тангенс гладкості, що

дорівнює похідній зближення по площі дотику.

Розподіл мікростовпчиків за висотою описувався многочленом другого степеня. Він отримав такий вираз для зближення шорсткості поверхні з гладкою.

$$w = 0,794 H_{\max} \sqrt[3]{\frac{P\theta}{A_d E}},$$

де  $H_{\max}$  – максимальна висота нерівностей,  $A_d$  – номінальна площа,  $\theta$  – коефіцієнт, що враховує вплив мікрогеометрії і понижену міцність поверхневих шарів.

Залежність змінання мікростовпчиків від тиску може виражатися однією з таких залежностей [3, 4, 6, 15]:

$$W' = B[p(\rho, \theta)]^K,$$

$$W'' = h \left( 1 - \frac{\exp(-\beta p(\rho, \theta))}{E} \right),$$

де  $B, K, h, \alpha$  – показники шорсткості, що відповідають степеневому та експоненціальному законам.

Контактні задачі з урахуванням тертя в просторовій постановці були вивчені В.М. Александров [4], А.А. Шишканова [19], в плоскій – в В. Паука [21]. Однак, в роботі В.Паука [21] передбачається, що дотичні напруження не впливають на нормальні. Стосовно даної кваліфікаційної роботи, в ній вивчається плоска контактна задача, в якій дотичні напруження можуть впливати на нормальні. Крім того, знайдено аналітичний розв'язок на відміну від попередніх робіт та зроблено аналіз числових результатів.

У роботі [15] викладені основні процеси контактної взаємодії твердих тіл при зовнішньому терті і зносі, наведені відомості про зближення шорстких тіл, площі контакту, попереднє зміщення, граничне тертя, опір перекочуванню, методи визначення параметрів шорсткості, необхідних для розрахунку тертя і зносу.

Розглянута дискретна модель базується на структурних уявленнях про шорсткий шар, елементом якого є мікронерівність, а взаємодія поверхонь при терті на плямах контакту являє собою контакт двох мікронерівностей У даній роботі виконується побудова числових розв'язків задач про вдавнення штампа з тертям в пружну шорстку смугу при степеневому законі деформування шорсткості та аналіз кількісних та якісних числових результатів.

## **1.2 Постановка задачі та інтегральне рівняння**

Розглянемо задачу [3, 5] про напружений стан, який з'являється в шорсткій товстій смугі при вдавлюванні в неї штампа, при цьому враховуватиметься сили тертя між штампом і пружною смугою. Будемо досліджувати випадок, коли штамп знаходиться у стані граничної рівноваги і

він знаходиться під дією сили  $F$ , яка дорівнює добутку коефіцієнта тертя  $\rho$  на величину сили  $Q$ , яка вдавлює штамп (рис. 1.1).

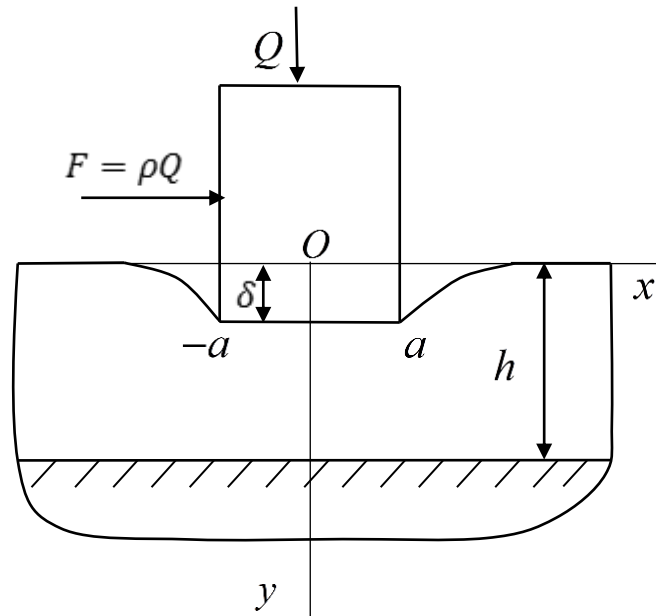


Рисунок 1.1 – Схема контакту штампа з пружним шаром

Відомо [3, 5], якщо швидкість переміщення штампа по поверхні пружного тіла мала, у порівнянні зі швидкістю звука в пружному просторі, то при розв'язанні цієї задачі можна знехтувати динамічними явищами.

Розглянемо штамп, що вдавлюється в пружну смугу  $\{|x| < +\infty, 0 < y < h\}$  силою  $Q$ , та має форму  $f(x) = 0$  та, що діє у напрямку осі  $Oy$ . Дослідимо два випадки закріплення смуги ( $y = h$ ) [5]:

- 1) смуга лежить на жорсткій основі без тертя:

$$\tau_{xy}(x, h) = 0, \quad v(x, h) = 0, \quad |x| < +\infty;$$

- 2) смуга жорстко закріплена на основі:

$$u(x, h) = v(x, h) = 0,$$

де  $u(x, h)$  – функція переміщень вздовж осі  $Ox$ ,  $v(x, h)$  – функція переміщень вздовж осі  $Oy$ .

На поверхні  $y = 0$  граничні умови в обох випадках мають вигляд:

$$\begin{aligned}\tau_{xy}(x, 0) &= 0, \quad \sigma_y(x, 0) = 0, \quad a < |x| < +\infty, \\ \tau_{xy}(x, 0) + \rho\sigma_y(x, 0) &= 0, \quad v(x, 0) = \delta, \quad |x| < a,\end{aligned}$$

де  $\delta$  – заглиблення штампа при вдавненні,  $a$  – півширина площадки контакту.

У контактній задачі про вдавлювання з тертям штампа з плоскою основою в товстий шорсткий шар, маємо інтегральне рівняння [3, 5] для визначення функції нормальних напруг у шарі під штампом, має вигляд :

$$\begin{aligned}\delta = W(\sigma_y, x) - \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left[ \int_{-a}^a \sigma_y(x', 0) \cdot k \left( \frac{x-x'}{h} \right) dx' - \right. \\ \left. - \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \pi \cdot \int_{-a}^x (-\tau_{xy}(x', 0)) dx' \right],\end{aligned}\quad (1.1)$$

де  $E$  – модуль пружності,  $\sigma_y(x, 0)$  – функція напруг півпростору,  $\tau_{xy}(x)$  – функція дотичних напруг, які виникають у шарі,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Врахуємо, що

$$\begin{aligned}W(\sigma_y, x) &= B[-\sigma_y(x, 0)]^\kappa, \\ \sigma_y(x, 0) &= -p(x), \\ \tau_{xy}(x, 0) &= \rho p(x),\end{aligned}$$

де  $p(x)$  – нормальний тиск, який діє на площадці контакту,  $B, \kappa$  – коефіцієнти шорсткості степеневого закону деформування шорсткості. Отримали:

$$\delta = B[p(x)]^\kappa + \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left[ \int_{-a}^a p(x') \cdot \kappa \left( \frac{x' - x}{h} \right) dx' + \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \pi \cdot \int_{-a}^a \rho p(x') dx' \right].$$

Помножимо останнє інтегральне рівняння на коефіцієнт  $c_1 = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}$ .

Маємо:

$$\delta = B[C_1 p(x)]^\kappa \cdot \frac{1}{C_1^\kappa} + C_1 \left[ \int_{-a}^a p(x') \cdot k \left( \frac{x' - x}{h} \right) dx' + C_1 C_2 \int_{-a}^x \rho p(x') dx' \right], \quad (1.2)$$

$$\text{де } C_2 = \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \pi.$$

У випадку контактної взаємодії пружної смуги і штампа, ядро інтегрального рівняння (1.2) має вигляд [5]:

$$k(t) = -\ln|t| + a_0,$$

де  $a_0 = -0,352$  для першого випадку та  $a_0 = -0,527$  для другого випадку при  $\nu = 0,3$ . Дане асимптотичне подання ядра має місце для достатньо товстих смуг для яких  $\lambda = \frac{a}{h} \leq \frac{1}{2}$ .

Уведемо позначення:

$$C_1 = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}, C_2 = \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \pi, C_1 p(x), B_1 = \frac{B}{C_1^\kappa}.$$



Отримаємо рівняння:

$$\delta = B_1 [p_1(x)]^\kappa + \int_{-a}^a p(x') \cdot \left[ -\ln \left| \frac{x' - x}{h} \right| + a_0 \right] dx' + C_2 \rho \int_{-a}^x p_1(x') dx'. \quad (1.3)$$

При введенні заміни  $t = \frac{x}{a}$ ,  $t' = \frac{x'}{a}$ ,  $x' = t'a$ ,  $dx' = a \cdot dt'$ , де  $t$  буде змінюватися

на проміжку  $[-1, 1]$ , рівняння (1.3) матиме вигляд

$$\delta = B_1 [p_1(ta)]^\kappa + \int_{-1}^1 p_1(t'a) \cdot a \cdot \left[ -\ln \left| \frac{a(t' - t)}{h} \right| + a_0 \right] dt' + C_2 \rho a \int_{-1}^1 p_1(t'a) dt'. \quad (1.4)$$

Позначивши  $p_1(ta) = p_2(t)$  і поділивши обидві частини рівняння (1.4) на  $a$ , отримаємо інтегральне рівняння в безрозмірних величинах,

$$\delta_1 = B_2 [p_2(t)]^\kappa + \int_{-1}^1 p_2(t') \left[ -\ln |t' - t| - C_0 \right] dt' + C_2 \rho \int_{-1}^1 p_2(t') dt', \quad (1.5)$$

у якому  $B_2 = \frac{B_1}{a}$ ,  $\delta_1 = \frac{\delta}{a}$ ,  $C_0 = \ln \frac{a}{h} - a_0$ . Ввівши оператор

$$[Lp_2](t) = - \left[ \int_{-1}^1 p_2(t') \left[ -\ln |t' - t| - C_0 \right] dt' + \rho C_2 \int_{-1}^1 p_2(t') dt' \right], \quad (1.6)$$

інтегральне рівняння запишеться в операторному вигляді

$$B_2 [p_2(t)]^\kappa - [Lp_2](t) = \delta_1. \quad (1.7)$$

У такій задачі потрібно знайти безрозмірні величини: функцію тиску  $p_1(t)$ , заглиблення штампа  $\delta_1$ . Тому потрібно додати друге рівняння, яке називається умовою рівноваги:

$$Q = \int_{-a}^a p(x') dx'. \quad (1.8)$$

Помножимо обидві частини (1.8) на  $\frac{C_1}{a}$ :

$$\frac{QC_1}{a} = \frac{C_1}{a} \int_{-a}^a p(x') dx'. \quad (1.9)$$

Позначимо

$$Q_2 = \frac{QC_1}{a},$$

а під знаком інтеграла замінимо  $t' = \frac{x'}{a}$ , тоді рівність (1.9) переписеться у вигляді:

$$Q_2 = \int_{-1}^1 p_2(t') dt'. \quad (1.10)$$

Таким чином, потрібно розв'язати операторне рівняння (1.7), враховуючи умови рівноваги (1.8), в яких невідомими є функція нормального тиску  $p_2(t')$  і заглиблення штампа  $\delta_1$ .

Уведемо малий параметр Боголюбова-Крилова  $\alpha = 1 - \frac{B_2}{C^*}$ , де  $C^*$  – значення пов'язане з нормою оператора. Тоді рівняння (1.7) можна подати наступним чином:

$$[p_2(t)]^\kappa - \alpha [p_2(t)]^\kappa - \frac{1}{C^*} [Lp_2](t) = \frac{\delta_1}{C^*}. \quad (1.11)$$

Уведемо новий лінійний оператор

$$(Ap_2)(t) = \frac{1}{C^*} [Lp_2](t).$$

Рівняння (1.11) набуде вигляду

$$[p_2(t)]^\kappa - \alpha [p_2(t)]^\kappa - (Ap_2)(t) = \frac{\delta_1}{C^*}. \quad (1.12)$$

Уведемо заміну, аналогічно до [5]:

$$\psi(t) = [p_2(t)]^\kappa - \frac{\delta_1}{C^*}, \quad (1.13)$$

тоді функція тиску виразиться через  $\psi(t)$  наступним чином:

$$p_2(t) = \left[ \psi(t) + \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\frac{1}{\kappa}},$$

а рівняння (1.12) –

$$\psi(t) = \alpha \left( \psi(t) + \frac{\delta_1}{C^*} \right) + A \left[ \psi(t) + \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\frac{1}{\kappa}}. \quad (1.14)$$

Через нелінійний оператор

$$(G\psi)(t) = \alpha \left( \psi(t) + \frac{\delta_1}{C^*} \right) + A \left[ \psi(t) + \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\frac{1}{\kappa}}$$

рівняння (1.14) запишеться у вигляді

$$\psi(t) = (G\psi)(t). \quad (1.15)$$

Рівняння (1.14) є інтегральним рівнянням Гаммерштейна в операторному вигляді, яке виражене через лінійний оператор  $A$ , а (1.15) – через нелінійний.

## 2 ІСНУВАННЯ ЄДИНОГО РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ ГАММЕРШТЕЙНА ДАНОЇ ЗАДАЧІ

### 2.1 Властивості лінійного оператора, через який виражається нелінійний оператор даної задачі

Розглянемо оператор [6]

$$[Lp_2](y) = \int_{-1}^1 [\ln|x-y| + C_0] p_2(x) dx - C_2 \int_{-1}^y p_2(x) dx, \quad (2.1)$$

де  $p_2 \in C_{[-1;1]}$ . Потрібно довести, що оператор (2.1) переводить простір  $C_{[-1;1]}$  в простір  $C_{[-1;1]}$ , тобто при дії оператора  $A$  образом неперервної на відрізку  $[-1;1]$  функції  $p_2(t)$  буде неперервна функція

$$g(t) = [Lp_2](t) = \int_{-1}^1 [\ln|t'-t| + C_0] p_2(t') dt' - \rho C_2 \int_{-1}^t p_2(t') dt'.$$

У припущенні, що функція неперервна на відрізку  $[-1,1]$  покажемо, що нескінченно малому приросту аргумента  $\Delta t$  в точці  $t_0 \in [-1,1]$  відповідає нескінченно малий приріст функції  $g(t)$ .

Розглянемо границю модуля приросту функції  $g(t)$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)| \leq \\ & \leq \|p_2\| \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \int_{-1}^1 \left| \ln \left| \frac{t' - t_0}{t' - t_0 - \Delta t} \right| \right| dt' + C_1 |\Delta t| \right) = \\ & = \|p_2\| \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_{-1}^{t_0 - \varepsilon_1} \left| \ln \left| 1 + \frac{\Delta t}{t_0 - t'} \right| \right| dt' + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{t_0 + \varepsilon_2}^1 \left| \ln \left| 1 + \frac{\Delta t}{t_0 - t'} \right| \right| dt' \right). \end{aligned}$$

Для обчислення останніх двох границь можна застосувати систему комп'ютерної алгебри Maple 14. Де доведено, що в будь якій точці  $t_0 \in [-1;1]$  функція  $g(t)$  неперервна.

Оцінивши норму оператора у просторі  $C_{[-1;1]}$ , маємо:

$$\|Lp_2\| \leq \|p_2\| \cdot \max_{t \in [-1;1]} \left( \int_{-1}^1 |\ln|t' - t| + C_0| dt' + \rho C_2(t+1) \right)$$

Позначимо

$$C^* = \max_{t \in [-1;1]} \left( \int_{-1}^1 |\ln|t' - t| + C_0| dt' + \rho C_2(t+1) \right),$$

Із означення норми оператора отримаємо:

$$\|L\| \leq C^*.$$

Оцінимо значення  $C^*$ . Із фізичного змісту оператора випливає, що  $C_1 = \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \cdot \pi \cdot \rho$ . Оберемо  $\nu = 0,3$ . Виконаємо грубе оцінювання значення величини  $C^*$ :

$$C^* = \max_{t \in [-1;1]} \left( \int_{-1}^1 |\ln|t' - t| + C_0| dt' + \rho C_2(t+1) \right) \leq \max_{t \in [-1;1]} \int_{-1}^1 |\ln|t' - t| + C_0| dt' + 2\rho C_2.$$

Використавши пакет прикладних програм Maple14 для побудови графіка

функції  $f(t) = \int_{-1}^1 |\ln|t - t'| + C_0| dt'$  при  $C_0 = -3$ , отримаємо, що  $\max_{t \in [-1;1]} f(t) = 8$ . Отже,

$$C^* \leq 8 + 2\rho C_2.$$

Якщо коефіцієнт  $\rho$  набуває значень від 0 до 1, то  $C_1 \leq \frac{\pi}{2}$ , тому  $C^* < 12$ .

Загальний вигляд розкладу образу степеневі функції при дії оператора  $L$  [6]:

$$Ly^N = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{N,i} y^i, \quad (2.2)$$

де при  $N = 2j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$

$$\alpha_{2j,2k} = -\frac{2}{2k(2j+1-2k)} \quad (k=1,2,3,\dots); \quad \alpha_{2j,0} = -\frac{2}{(2j+1)^2} + \frac{2C_0}{2j+1} - \frac{C_1}{2j+1};$$

$$\alpha_{2j,2j+1} = -\frac{C_1}{2j+1}; \quad \alpha_{2j,2k+1} = 0 \quad (k=0,1,2,\dots, k \neq j);$$

при  $N = 0$

$$\alpha_{0,2k} = -\frac{2}{2k(1-2k)} \quad (k=1,2,3,\dots), \quad \alpha_{0,1} = -C_1, \quad \alpha_{0,2k+1} = 0;$$

при  $N = 2j-1$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$

$$\alpha_{2j-1,2k-1} = -\frac{2}{(2k-1)(2j-2k+1)} \quad (k=1,2,3,\dots);$$

$$\alpha_{2j-1,2k} = 0 \quad (k=1,2,3,\dots, k \neq j), \quad \alpha_{2j-1,2j} = -\frac{C_1}{2j}; \quad \alpha_{2j-1,0} = -\frac{C_1}{2j}.$$

## 2.2 Існування єдиного розв'язку рівняння Гаммерштейна

Застосуємо принцип стискаючих відображень для дослідження питання про існування та єдиність розв'язку рівняння (1.13).

### 2.2.1 Метричний простір $X$ , що задає множину визначення нелінійного оператора

Розглянемо функцію

$$\varphi(\psi, t) = \left[ \psi(t) + \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\frac{1}{\kappa}},$$

а також пов'язану з нею функцію відносно функціонального аргумента

$$\bar{\varphi}(z) = \left[ z + \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\frac{1}{\kappa}}.$$

Функція  $\varphi(\psi, t)$ , визначена на множині

$$X = \left\{ \psi(t) \in C[-1, 1] : -\frac{\delta_1}{C^*} \leq \psi(t) \leq 0 \right\},$$

тоді функція  $\bar{\varphi}(z)$  визначена на множині  $\tilde{X} = \left[ -\frac{\delta_1}{C^*}; 0 \right]$ .

Розглянемо замкнену множину  $X \subset C[-1, 1]$ . Множина  $X$  разом з метрикою повного метричного простору  $C[-1, 1]$  утворює повний метричний простір.



### 2.2.2 Дослідження множини значень нелінійного оператора

Розглянемо нелінійний оператор  $G$ :

$$(G\psi)(t) = \alpha \left( \frac{\delta_1}{C^*} + \psi(t) \right) + A \left[ \psi(t) + \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\frac{1}{k}}.$$

Доведемо, що цей оператор діє з простору  $X$  в простір  $X$ . Для цього розглянемо функцію  $g(t)$ :

$$g(t) = [G\psi](t).$$

Для доведення неперервності функції  $g(t)$  на  $[-1, 1]$ , покладемо  $t_0 \in [-1, 1]$ , а приріст аргументу  $\Delta t$  залишає елемент  $t_0 + \Delta t$  у відрізку  $[-1, 1]$ . Перевіримо здійсненність співвідношення:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)| = 0.$$

Розглянемо наступні перетворення:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \alpha \left( \frac{\delta_1}{C^*} + \psi(t_0 + \Delta t) \right) + \alpha \left( \frac{\delta_1}{C^*} + \psi(t_0) \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{C^*} \int_{-1}^1 \left[ \psi(t) + \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\frac{1}{k}} \cdot \left( [\ln|t' - t_0 - \Delta t| + c_0] - [\ln|t' - t_0| + c_0] \right) dt' \Big| \leq \\ &\leq \alpha \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0)) \right| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{C^*} \cdot \left\| \left[ \psi(t) + \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\frac{1}{\kappa}} \right\| \cdot \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \left( \int_{-1}^{t_0 - \varepsilon_1} \left| \ln \left| 1 - \frac{\Delta t}{t' - t_0} \right| \right| dt' \right) \right) \right. \\
& \left. + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \left( \int_{t_0 + \varepsilon_2}^1 \left| \ln \left| 1 - \frac{\Delta t}{t' - t_0} \right| \right| dt' \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

Оскільки функція  $\psi(t)$  – неперервна на  $[-1, 1]$ , то

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0)) = 0.$$

Внаслідок того, що  $\psi(t) \in X$ , зокрема,  $\psi(t) \leq 0$  на відрізку  $[-1, 1]$ , маємо

$$\left\| \left( \psi(t) + \frac{\delta_1}{C^*} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \right\| = \max_{t \in [-1, 1]} \left[ \psi(t) + \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\frac{1}{\kappa}} \leq \left( \frac{\delta_1}{C^*} \right)^{\frac{1}{\kappa}}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)| & \leq \left( \frac{\delta_1}{C^*} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \frac{1}{C^*} \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \left( \int_{-1}^{t_0 - \varepsilon_1} \left| \ln \left| 1 - \frac{\Delta t}{t' - t_0} \right| \right| dt' \right) \right) \right. \\
& \left. + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \left( \int_{t_0 + \varepsilon_2}^1 \left| \ln \left| 1 - \frac{\Delta t}{t' - t_0} \right| \right| dt' \right) \right).
\end{aligned}$$

Звідки робимо висновок, що

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)| = 0.$$

Функція  $g(t)$  є неперервною в кожній точці  $t_0 \in [-1, 1]$  згідно з означенням неперервності функції. У припущенні, що  $\psi(t) \in X$ . Отже, оператор  $G$  діє з метричного простору  $X$  в простір  $X$ .

### 2.2.3 Дослідження нелінійного оператора на стискання в метричному просторі $X$

На множині  $\tilde{X}$  дослідимо функцію

$$\varphi(z) = \left[ z + \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\frac{1}{\kappa}}.$$

За формулою Лагранжа для будь-яких  $z_1$  і  $z_2 \in \tilde{X}$  знайдеться таке  $z$ , що лежить поміж  $z_1$  і  $z_2$ , що буде справедливим співвідношення

$$\varphi(z_1) - \varphi(z_2) = \left( z_1 + \frac{\delta_1}{C^*} \right)^{\frac{1}{\kappa}} - \left( z_2 + \frac{\delta_1}{C^*} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{1}{\kappa} \left[ z + \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\frac{1}{\kappa}-1} (z_1 - z_2). \quad (2.3)$$

Позначимо

$$\nu(\psi) = \left[ z + \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\frac{1}{\kappa}-1},$$

та перепишемо (2.3) у такому вигляді:

$$\varphi(\psi_1) - \varphi(\psi_2) = \frac{1}{\kappa} \nu(\psi) (\psi_1 - \psi_2).$$

Розглянемо норму різниці:

$$\|G\psi_1 - G\psi_2\| = \max_{t \in [-1;1]} \left| \alpha(\psi_1 - \psi_2)(t) + \frac{1}{\kappa} [(A)\{v(\psi)(\psi_1 - \psi_2)\}] \right|. \quad (2.4)$$

Максимум неперервної функції досягається в деякій точці  $t_0 \in [-1;1]$  за другою теоремою Вейерштраса [12], тобто для (2.4) має місце

$$\|G\psi_1 - G\psi_2\| = \left| \alpha(\psi_1 - \psi_2)(t_0) + \frac{1}{\kappa} (A)\{v(\psi)(\psi_1 - \psi_2)(t_0)\} \right|.$$

Виділимо випадки коли:

а) вираз під модулем невід'ємний. Можна вважати, що  $(\psi_1 - \psi_2)(t_0) \geq 0$ . Із визначення функції  $v(\psi)$  випливає, що  $v(\psi)(t_0) \geq 0$ , тоді  $v(\psi)(\psi_1 - \psi_2)(t_0) \geq 0$ . З наведених оцінок робимо висновок, що

$$A\{v(\psi)(\psi_1 - \psi_2)(t_0)\} \leq 0.$$

Отже,

$$\|G\psi_1 - G\psi_2\| = \alpha(\psi_1 - \psi_2) + \frac{1}{\kappa} A(v(\psi)(\psi_1 - \psi_2)(t_0)),$$

з вище зазначеного слідує, що

$$\frac{1}{\kappa} A(v(\psi)(\psi_1 - \psi_2)(t_0)) \leq 0.$$

Отже, отримано наведену нижче оцінку

$$\|G\psi_1 - G\psi_2\| \leq \alpha(\psi_1 - \psi_2)(t_0) \leq \alpha \max_{t \in [-1;1]} |\psi_1(t) - \psi_2(t)| = \alpha \|\psi_1 - \psi_2\|;$$

б) вираз під модулем від'ємний. Тобто

$$\alpha(\psi_1 - \psi_2)(t_0) < \left(-\frac{1}{\kappa}\right)(A)\{v(\psi)(\psi_1 - \psi_2)(t_0)\},$$

Маємо:

$$\|G\psi_1 - G\psi_2\| = -\frac{1}{\kappa}A[v(\psi)(\psi_1 - \psi_2)](t_0).$$

Звідси випливає, що існує таке число  $q \in (0;1)$ , для якого

$$\alpha(\psi_1 - \psi_2)(t_0) = q \cdot \left(-\frac{1}{\kappa}\right)(A)[v(\psi)(\psi_1 - \psi_2)](t_0).$$

Отримуємо таку оцінку різниці:

$$\begin{aligned} \|G\psi_1 - G\psi_2\| &= \\ &= \frac{1}{\kappa}(1-q)(-A)[v(\psi)(\psi_1 - \psi_2)](t_0) = \\ &= \frac{1}{\kappa}(1-q)\|A[v(\psi)(\psi_1 - \psi_2)]\| \leq \frac{1}{\kappa}(1-q) \cdot \|A\| \cdot \|v(\psi)\| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|; \\ \|G\psi_1 - G\psi_2\| &\leq \frac{1}{\kappa}(1-q) \cdot \|A\| \cdot \|v(\psi)\| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Враховуючи, що функції  $\psi(t)$  належать метричному простору  $X$ , отримаємо:

$$\|v(\psi)\| = \max_{t \in [-1;1]} \left[ \psi(t) + \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\frac{1}{\kappa}-1} \leq \left[ \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\frac{1}{\kappa}-1}.$$

Із висновків попереднього підрозділу робимо висновок

$$\|A\| \leq \frac{1}{C^*} \cdot C^* = 1.$$

Продовження оцінки норми із (2.5) набуде вигляду:

$$\|G\psi_1 - G\psi_2\| \leq \frac{1}{\kappa} (1-q) \cdot 1 \cdot \left[ \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\frac{1}{\kappa}-1} \|\psi_1 - \psi_2\| < \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\frac{1}{\kappa}-1} \|\psi_1 - \psi_2\|.$$

Отже, з першого випадку можна зробити висновок, що

$$\|G\psi_1 - G\psi_2\| \leq \alpha \|\psi_1 - \psi_2\|,$$

з другого

$$\|G\psi_1 - G\psi_2\| \leq \frac{1}{K} \left[ \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\frac{1}{K}-1} \|\psi_1 - \psi_2\|.$$

В результаті маємо:

$$\|G\psi_1 - G\psi_2\| \leq \max_{t \in [0;1]} \left\{ \alpha, \frac{1}{K} \left[ \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\frac{1}{K}-1} \right\} \|\psi_1 - \psi_2\|.$$

Позначимо через  $q^*$  вираз

$$q^* = \max_{t \in [0;1]} \left\{ \alpha, \frac{1}{K} \left[ \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\frac{1}{K}-1} \right\},$$

де  $\alpha = 1 - \frac{B_2}{C^*}$ , як було зазначено вище.

Для того, щоб оператор  $G$  був стискаючим необхідно і достатньо, щоб  $q^* < 1$ . Тоді отримаємо:

$$0 < B_2 < C^*. \quad (2.6)$$

Для коефіцієнтів  $B_2$ , заданих формулою (2.2), відображення  $G$  є стискаючим.

Тепер відомо, що:

- 1) оператор  $G$  діє з простору  $X$  в простір  $X$ ;
- 2) оператор  $G$  є стискаючим;
- 3)  $X$  – банаховий простір.

Отже, згідно з принципом стискаючих відображень, оператор  $G$  має єдину нерухому точку в метричному просторі  $X$ . Тобто існує єдина функція  $\tilde{\psi}$  така, що  $G\tilde{\psi} = \tilde{\psi}$ .

### 3 ОТРИМАННЯ НЕСКІНЧЕНОЇ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ, ЩО ЕКВІВАЛЕНТНА СИСТЕМІ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДАНОЇ ЗАДАЧІ

У випадку лінійного закону деформування шорсткості невідомий тиск можливо подати у вигляді степеневого ряду, що доведено в роботі [6].

$$\psi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i t^i, \quad (3.1)$$

де  $\{\gamma_i\}_{i=0}^{\infty}$  – невідомі коефіцієнти степеневого ряду. Потрібно розвинути в степеневий ряд функцію [12]

$$p_2(t) = \left[ \psi(t) + \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\frac{1}{\kappa}} = \left[ \frac{\delta_1}{C^*} + \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \gamma_3 t^3 + \gamma_4 t^4 + \dots \right]^{\frac{1}{\kappa}}. \quad (3.2)$$

Для зручності позначимо через  $\xi_0$  вираз  $\gamma_0 + \frac{\delta_1}{C^*}$ ,  $\omega = \frac{1}{\kappa}$ , а через  $\xi_i = \frac{\gamma_i}{\xi_0}$

( $i = 1, 2, 3, \dots$ ), отримаємо:

$$p_2(t) = \left[ \gamma_0 + \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\omega} \left[ 1 + \frac{\gamma_1}{\xi_0} t + \frac{\gamma_2}{\xi_0} t^2 + \frac{\gamma_3}{\xi_0} t^3 + \dots \right]^{\omega};$$

$$p_2(t) = [\xi_0]^{\omega} \cdot \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i t^i \right]^{\omega}. \quad (3.3)$$

Тоді для оператора



$$G\psi(t) = \alpha \left( \psi(t) + \frac{\delta_1}{C^*} \right) + A \left[ \psi(t) + \frac{\delta_1}{C^*} \right]^{\frac{1}{\kappa}}$$

одержимо

$$G\psi(t) = \alpha \left( \psi(t) + \frac{\delta_1}{C^*} \right) \cdot A \cdot [\xi_{50}]^{\omega} \cdot \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i t^{2i} \right]^{\omega}.$$

Далі використаємо відомий розклад

$$(1+y)^{\omega} = 1 + \omega y + \frac{\omega(\omega-1)}{2!} y^2 + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{3!} y^3 + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{4!} y^4 + \dots,$$

перепишемо (3.3) у вигляді:

$$\begin{aligned} p_2(t) &= [\xi_{50}]^{\omega} [1 + \xi_1 t + \xi_2 t^2 + \xi_3 t^3 + \xi_4 t^4 + \dots]^{\omega} = \\ &= [\xi_{50}]^{\omega} \left[ 1 + \omega \cdot (\xi_1 t + \xi_2 t^2 + \xi_3 t^3 + \xi_4 t^4 + \dots) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega(\omega-1)}{2!} (\xi_1 t + \xi_2 t^2 + \xi_3 t^3 + \xi_4 t^4 + \dots)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{3!} (\xi_1 t + \xi_2 t^2 + \xi_3 t^3 + \xi_4 t^4 + \dots)^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{4!} (\xi_1 t + \xi_2 t^2 + \xi_3 t^3 + \xi_4 t^4 + \dots)^4 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Перегрупуємо коефіцієнти при однакових степенях  $t$ :

$$\begin{aligned} p_2(t) &= [\xi_{50}]^{\omega} \left[ 1 + \omega \xi_1 t + t^2 \left( \omega \xi_2 + \frac{\omega(\omega-1)}{2!} \xi_1^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + t^3 \left( \omega \xi_3 + \frac{\omega(\omega-1)}{2!} 2 \xi_1 \xi_2 + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{3!} \xi_1^3 \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +t^4 \left( \omega \xi_4 + \frac{\omega(\omega-1)}{2!} (\xi_1^2 + 2\xi_1 \xi_3) + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{3!} 3\xi_1^2 \xi_2 + \right. \\
& \left. + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{4!} \xi_1^4 \right) + t^5 \left( \omega \xi_5 + \frac{\omega(\omega-1)}{2!} (2\xi_1 \xi_4 + 2\xi_2 \xi_3) + \right. \\
& \left. + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{3!} (3\xi_1^2 \xi_3 + 3\xi_1^2 \xi_3) + \right. \\
& \left. + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{4!} 4\xi_1^3 \xi_2 + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)(\omega-4)}{5!} \xi_1^5 \right) + \dots \Big].
\end{aligned}$$

Для коефіцієнтів при змінній  $t$  введемо такі позначення:

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= 1, \quad \sigma_1 = \omega \xi_1, \quad \sigma_2 = \omega \xi_2 + \frac{\omega(\omega-1)}{2!} \xi_1^2, \\
\sigma_3 &= \omega \xi_3 + \frac{\omega(\omega-1)}{2!} 2\xi_1 \xi_2 + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{3!} \xi_1^3, \\
\sigma_4 &= \omega \xi_4 + \frac{\omega(\omega-1)}{2!} (\xi_1^2 + 2\xi_1 \xi_3) + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{3!} 3\xi_1^2 \xi_2 + \\
& \quad + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{4!} \xi_1^4, \dots
\end{aligned}$$

Індуктивно узагальнюючи, отримаємо :

$$\begin{aligned}
p_{m,k} &= \prod_{s=1}^{k-m+1} \frac{\omega-s+1}{s}, \quad a_{j,m} = \sum_{i=1}^m a_{j-i,m-i+1} \xi_i, \\
a_{j,j} &= \xi_j \quad (m=1, \dots, j-1; j=2,3,\dots), \\
\sigma_j &= \sum_{m=1}^j p_{m,j} a_{j,m}, \quad (j \in X).
\end{aligned}$$

Таким чином, здобуваємо наступний вигляд функції тиску:

$$p_2(t) = [\xi_0]^\omega \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k t^k. \quad (3.4)$$

Права частина рівняння (1.12) з врахуванням (3.4) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} (G\psi)(t) &= \alpha \left( \frac{\delta_1}{C^*} + \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i t^i \right) + \frac{[\xi_0]^\omega}{C^*} A \left( \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k t^k \right) = \\ &= \alpha \left( \frac{\delta_1}{C^*} + \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i t^i \right) + \frac{[\xi_0]^\omega}{C^*} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{k,i} t^i. \end{aligned}$$

Для розвинення в ряд образу степеневі функції при дії на неї оператора  $A$  застосуємо вираз (2.1). Рівняння (1.14) перепишемо у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i t^i = \alpha \left( \frac{\delta_1}{C^*} + \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i t^i \right) + \frac{[\xi_0]^\omega}{C^*} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{k,i} t^i. \quad (3.7)$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях  $t$  в (3.7), отримаємо нескінчену кількість рівнянь відносно коефіцієнтів степеневого ряду функції  $\psi(t)$  :

$$\begin{cases} \gamma_0 = \alpha \frac{\delta_1}{C^*} + \alpha \gamma_0 + \frac{[\xi_0]^\omega}{C^*} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \beta_{k,0}, \\ \gamma_i = \alpha \gamma_i + \frac{[\xi_0]^\omega}{C^*} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \beta_{k,i}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Будемо шукати заглиблення штампа за допомогою умови рівноваги (1.10). Для цього підставимо в це рівняння раніше знайдене (3.4), та отримаємо:

$$Q_2 = C_1 [\xi_0]^\omega \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k (t')^k dt' = C_1 [\xi_0]^\omega \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{2k} \frac{2}{2k+1}.$$

Позначимо  $M = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{2k} \frac{2}{2k+1}$ , тоді:

$$Q_2 = (\xi_0)^\omega \cdot M,$$

$$Q_2 = (\delta_1 + \gamma_0)^\omega \cdot M.$$

Звідки знайдемо заглиблення штампа:

$$\delta_1 = \left(\frac{Q_2}{M}\right)^\omega - \gamma_0. \quad (3.9)$$

Сукупність рівнянь (3.8), (3.9) утворює нескінченну систему нелінійних алгебраїчних рівнянь.

Розв'язком системи рівнянь (3.8), (3.9), якими моделюється контактна взаємодія, є функція нормального тиску і заглиблення штампа. Функцію тиску подано у вигляді степеневого ряду, коефіцієнти якого разом із зануренням штампа задовольняють нескінченну систему нелінійних алгебраїчних рівнянь. Отже, розв'язок даної задачі є аналітичним.

## 4 МЕТОД РЕДУКЦІЇ. АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

### 4.1 Про можливість застосування методу редукції

Для доведення можливості використання методу редукції для стискаючого оператора  $G$  ми будемо використовувати результати, аналогічні до тих, що наведено в підручнику [9].

Розглянемо відображення  $P_N : C_{[-1,1]} \rightarrow R_{[-1,1]}^{(N)}$ , де  $C_{[-1,1]}$  – простір неперервних функцій на  $[-1, 1]$ , а  $R_{[-1,1]}^{(N)}$  – простір поліномів  $N$ -ого степеня, визначених на  $[-1, 1]$ . Результат дії цього відображення на  $f$  позначимо  $\overline{f}_N$  (тобто  $\overline{f}_N = P_N f$ ).

Індекс  $N$  будемо опускати для спрощення записів (замість  $P_N$  і  $\overline{f}_N$  писати  $P$  і  $\overline{f}$  відповідно). Рівняння (1.8) з врахуванням (1.14) переписеться у вигляді

$$\psi = G\psi, \quad (4.1)$$

а наближене рівняння –

$$\begin{aligned} \overline{\psi} &= \overline{G\psi}, \\ (\overline{G\psi})(t) &= \alpha \left( \frac{\delta_1}{C^*} + \sum_{i=0}^N \gamma_i t^i \right) + \frac{[\xi_0]^\omega}{C^*} \sum_{k=0}^N \sigma_k \sum_{i=0}^N \beta_{k,i} t^i. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Коефіцієнти  $\sigma_j$  для  $\overline{\psi}$  співпадають до номера  $N$  з коефіцієнтами для  $\psi$ .

Знайдемо далі

$$(PG\bar{\psi})(t) = \alpha \left( \frac{\delta_1}{C^*} + \bar{\psi}(t) \right) + [PA\varphi(\bar{\psi})](t).$$

Таким чином,

$$(PG\bar{\psi})(t) = \alpha \left( \frac{\delta_1}{C^*} + \bar{\psi}(t) \right) + [PA\varphi(\bar{\psi})](t), \quad (4.3)$$

$$(\bar{G}\bar{\psi})(t) = \alpha \left( \frac{\delta_1}{C^*} + \bar{\psi}(t) \right) + [PAP\varphi(\bar{\psi})](t). \quad (4.4)$$

З (4.2) – (4.4) і формули Лагранжа випливає справедливість таких співвідношень:

1) умова близькості відображень

$$\begin{aligned} \left\| PG\bar{\psi}_1 - \bar{G}\bar{\psi}_1 - (PG\bar{\psi}_2 - \bar{G}\bar{\psi}_2) \right\| &\leq \|PA\| \|I - P\| \left\| \varphi(\bar{\psi}_1) - \varphi(\bar{\psi}_2) \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\delta_1}{C^*} \right)^{\frac{1}{\kappa}-1} (1 + \|I - P\|) \|I - P\| \left\| \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \right\|, \end{aligned}$$

тобто

$$\left\| PG\bar{\psi}_1 - \bar{G}\bar{\psi}_1 - (PG\bar{\psi}_2 - \bar{G}\bar{\psi}_2) \right\| \leq \eta \left\| \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \right\|, \quad (4.5)$$

$$\text{де } \eta = \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\delta_1}{C^*} \right)^{\frac{1}{\kappa}-1} (1 + \|I - P\|) \|I - P\|;$$

2) умова хорошої апроксимації елементів  $G\psi$  із  $C_{[-1,1]}$  елементами з  $R_{[-1,1]}^{(N)}$ : Для будь-яких елементів  $\psi_1$  і  $\psi_2$  із  $C_{[-1,1]}$  та елементів  $y_1$  і  $y_2$  із  $R_{[-1,1]}^{(N)}$ , які мають вигляд

$$y_i = \alpha \left( \frac{\delta_1}{C^*} + \psi_i(t) \right) + [PA\varphi(\psi_i)](t) =$$

$$= \alpha \left( \frac{\delta_1}{C^*} + \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j^{(i)} t^j \right) + \frac{[\xi_0]^\omega}{C^*} \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^{(i)} \beta_{k,j} t^j, \quad (i=1,2,\dots),$$

має місце оцінка

$$\|G\psi_1 - y_1 - (G\psi_2 - y_2)\| \leq$$

$$\leq \|A\| \|I - P\| \|\varphi(\psi_1) - \varphi(\psi_2)\| \leq \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\delta_1}{C^*} \right)^{\frac{1}{\kappa}-1} \|I - P\| \|\psi_1 - \psi_2\|,$$

тобто

$$\|G\psi_1 - y_1 - (G\psi_2 - y_2)\| \leq \eta_1 \|\psi_1 - \psi_2\|, \quad \eta_1 = \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\delta_1}{C^*} \right)^{\frac{1}{\kappa}-1} \|I - P\|. \quad (4.6)$$

Далі для зручності скористаємося позначеннями

$$u = \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\delta_1}{C^*} \right)^{\frac{1}{\kappa}-1}, \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_1 = \|I - P\|, \quad (4.8)$$

(вираз для  $\varepsilon_1$  залежить від  $P$ , у позначенні якого опущений індекс  $N$ , тому будемо мати на увазі залежність  $\varepsilon_1$  від  $N$ ). Тут  $I: C_{[-1,1]} \rightarrow C_{[-1,1]}$  – тотожний оператор, який переводить елемент у себе.

У класі неперервних недодатних функцій відображення  $H\psi = \psi - G\psi$  при виконанні умови (1.12) має обернене  $H^{-1}$ , неперервність якого впливає з наступних нерівностей

$$\|H\psi_1 - H\psi_2\| \geq (1 - q^*) \|\psi_1 - \psi_2\| = \frac{1}{\eta_2} \|\psi_1 - \psi_2\|. \quad (4.9)$$

Скористуємося результатами додатку А. Так як виконано умови 1)-2), число  $q = (\eta + \|I - P\| \eta_1) \eta_2$  у формулі (4.8) при достатньо великих  $N$  менше 11, то оператор  $H$  має неперервний обернений, при цьому

$$\|\bar{H}^{-1} y_1 - \bar{H}^{-1} y_2\| \leq \frac{\eta_2}{1 - q} \|y_1 - y_2\|. \quad (4.10)$$

Пригадаємо, що в позначеннях  $P$  і  $\bar{f}$  опущений індекс  $N$ . Із визначення  $\varepsilon_1$ ,  $\eta$ ,  $\eta_1$  випливає, що вони залежать від  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(N)$ , тому  $\eta = \eta(N)$ ,  $\eta_1 = \eta_1(N)$ , а також  $\lim_{N \rightarrow \infty} \eta_1(N) \|P_N\| = 0$ .

Доходимо до висновку, що при достатньо великих  $N$  наближене рівняння має розв'язок  $\bar{\psi}_N^*$  та існує збіжність послідовності наближених розв'язків  $\bar{\psi}_N^*$  до точного  $\psi^*$ , тобто

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\psi^* - \bar{\psi}_N^*\| = 0. \quad (4.11)$$

## 4.2 Аналіз числових результатів

Алгоритм розв'язання даної задачі реалізується в програмному пакеті комп'ютерної алгебри MAPLE. Для наближених обчислень оберемо безрозмірну силу  $Q_2 = 0.008625$ , значення константи  $C_0 = -3$  та значення півширини площадки контакту  $a = 1$  см. Такі значення параметрів обрано для розрахунків в [5]. Розв'язок нескінченної системи рівнянь, заглиблення штампа методом редукції У додатку [А] наведено фрагмент програми, за допомогою якої знайдено розв'язок нескінченної системи рівнянь,



заглиблення штампа методом редукції. Значення кількості рівнянь і невідомих обиралося рівним 12, 20, 30. Значення функції тиску і заглиблення відрізнялися в третьому значущому знаці при кількості невідомих і кількості рівнянь 20 і 30. Тому, достатньо обмежитися значенням  $N = 20$ , що відповідає точності обчислень до 1 %.

Після проведених розрахунків, на основі отриманих результатів, було побудовано графіки. На рисунку 4.1 побудовано графік функції тиску при вдавлюванні штампа в смугу з шорсткою поверхнею з урахуванням тертя при фіксованих значеннях коефіцієнтів  $\kappa = 0,4$   $\rho = 0,3$  для різних показників шорсткості  $B_1$ . На цьому рисунку штриховою лінією побудовано графік функції тиску для гладкої смуги, аналітичний вигляд якої наведено Л.А. Галіним [3].

Функція тиску  $p_2(t)$  штампа на пружний шорсткий півпростір має точку локального мінімуму, позначено її через  $t_{\min}$ . За допомогою MAPLE, для пошуку наближеного значення  $t_{\min}$  знайдено чисельний розв'язок рівняння.

$$p_2(x)|_{B_2=0} = \frac{Q_2 \cdot \sin(\pi \cdot \theta)}{\pi \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{0,5-\theta} \quad (4.18)$$

$$\theta = \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2-2\nu}{\rho(1-2\nu)}.$$

Так як функція тиску являє собою многочлен, за допомогою зазначеного програмного пакету, знайдено розв'язок цього рівняння.

Відповідно до результатів [3] знайдемо значення заглиблення для  $B_1=0$ . А саме, підставляючи (4.5) в інтегральне рівняння (4.6) виразимо функцію тиску із формули (4.1), поклавши  $B_1=0$ ,  $t=1$  отримаємо формулу для розрахунку заглиблення штампа, що має вигляд:

$$\delta_1 = Q_1(-c_0 + \ln 2) \quad (4.12)$$

Наприклад, для  $B_1=0$  і  $\rho=0,3$  значення заглиблення дорівнює  $\delta_1 = 0,033068$

Всі виконані обчислення відповідають обмеженню коефіцієнтів шорсткості:

$$0 < B_2 < C^*. \quad (4.13)$$

Для  $Q_2$  побудовані графіки залежностей заглиблень штампа при степеневому законі від показників шорсткості  $\kappa$  і від коефіцієнта тертя  $\rho$ , побудовані на рис. 4.1, а, б. відповідно. На рисунку 4.1, а значення  $\rho=0,3$  фіксовано,  $B_1$  – різні. З отриманого зазначимо, що лінія 1 відповідає значенню  $B_1=1$ , лінія 2 показує значення  $B_1=0,5$ , третя –  $B_1=0,2$  відповідно. На рисунку 4.1, б лінії 1 відповідають значенням коефіцієнтів  $B_1=1$ ,  $\kappa=0,4$ , лінії 2 –  $B_1=1$ ,  $\kappa=0,5$ , лінії 3 –  $B_1=0,5$ ,  $\kappa=0,4$ .

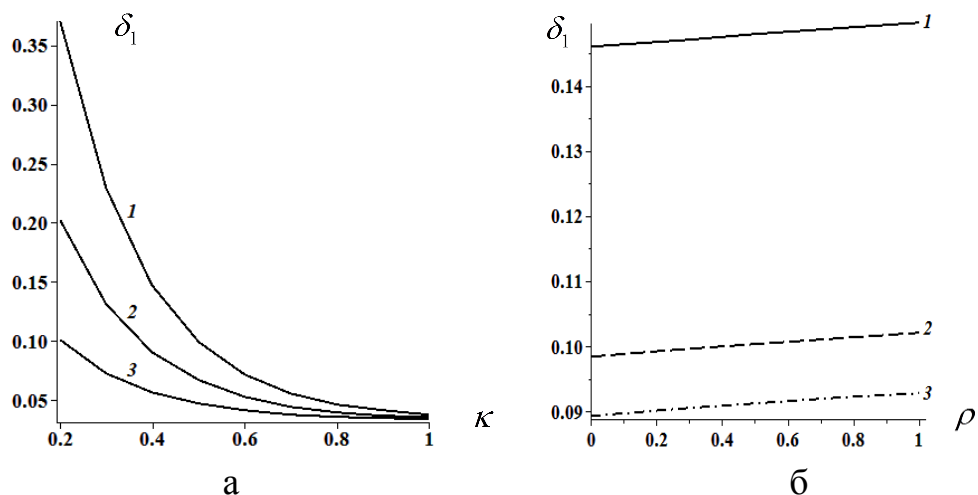


Рисунок 4.1

Отже можна зробити висновок, що зі зменшенням  $B_1$  (при фіксованих параметрах  $\kappa$  і  $\rho$ ), заглиблення штампа зменшується, наближаючись до

числового значення  $\delta_1^*$ , що відповідає гладкій смузі з урахуванням тертя з коефіцієнтом  $\rho = 0,3$ . При зменшенні  $\kappa$  (при фіксованих  $B_1$  і  $\rho$ ) заглиблення збільшується. При фіксованих коефіцієнтах шорсткості збільшення коефіцієнта тертя  $\rho$  приводить до збільшення заглиблення.

Графіки розподілу нормального тиску під штапом при степеневому законі деформування шорсткості побудовані на рисунку 4.2 а, б. А саме на рисунку 4.2 а – для фіксованих  $\rho = 0,3$ ,  $\kappa = 0,4$  та різних  $B_1$ . Наприклад, лінія 1 описує значення коефіцієнта  $B_1 = 0$ , друга лінія  $B_1 = 0,01$ , на третій лінії отримано  $B_1 = 0,1$ , значення  $B_1 = 1$  відповідає четвертій лінії. На рисунку 4.2, б отримано випадок для фіксованих  $\rho = 0,3$ ,  $B_1 = 1$  і різних  $\kappa$ , а саме, лінія 1 описує випадок  $\kappa = 1$ , друга  $\kappa = 0,9$ , третя  $\kappa = 0,8$ , четверта та п'ята  $\kappa = 0,6$   $\kappa = 0,2$  – відповідно.

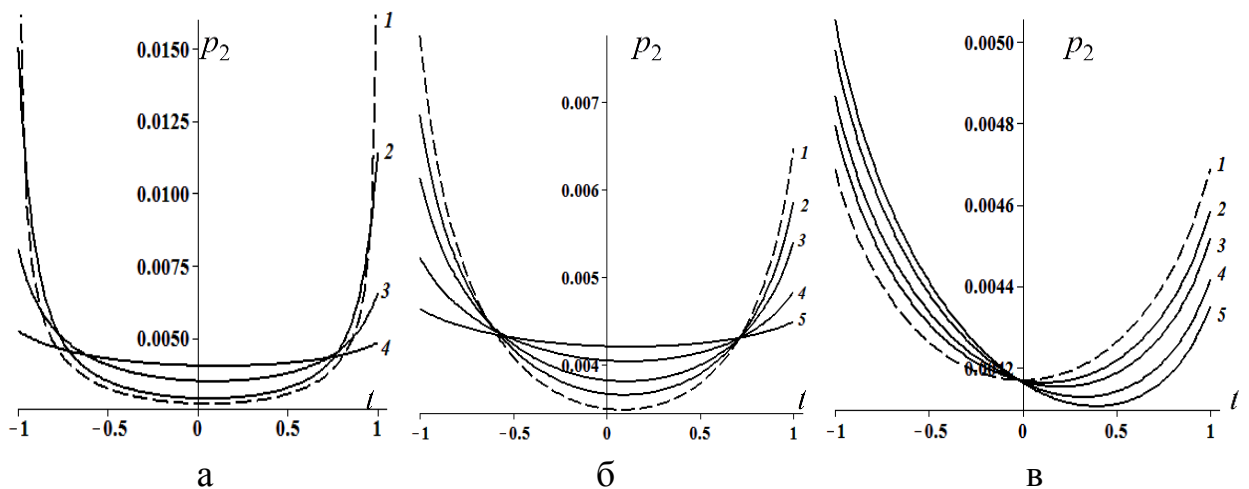


Рисунок 4.2

Зазначимо, що на рис. 4.2 в, б лінії не перетинаються в одній точці, це можна побачити при збільшеному масштабі в околі точки удаваного перетину.

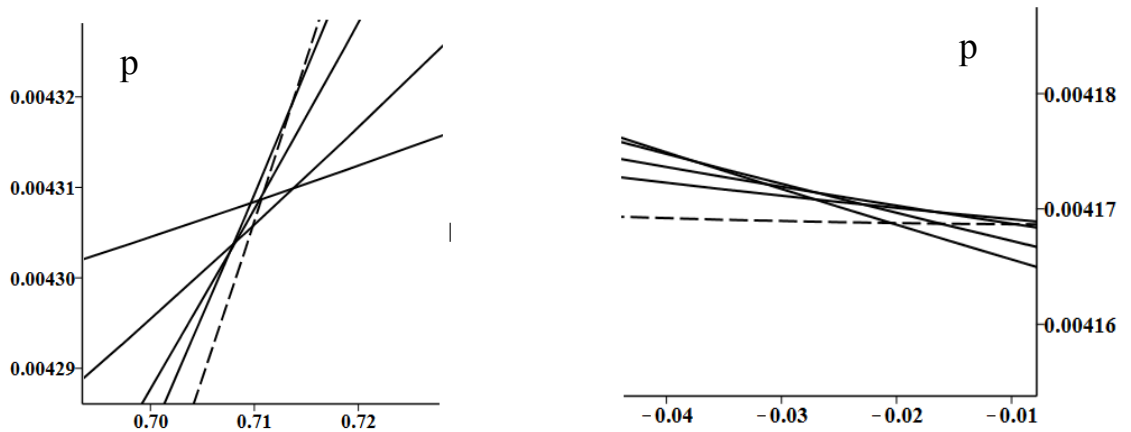


Рисунок 4.3

На рисунку 4.2 а штрихованою лінією зображені графік функції тиску на гладкий півпростір ( $B_1 = 0$ ). Із аналізу графіків цього рисунку випливає, що при  $B_1 \rightarrow 0$  і для всіх  $t \in (-1;1)$  значення функції тиску на шорстку полосу наближається до значень функції тиску на гладку смугу ( $B_1 = 0$ ). На рис. 4.2 б штрихованій лінії відповідає графік функції тиску для лінійного закону, що повністю співпадає з функцією побудованою в роботі [6]. Штрихованою лінією на рисунку 4.2 в, показані функцію тиску для  $\rho = 0,0001$ . Їх значення відрізняються менше ніж на 1% від значень розрахованих в роботі [15], при  $\rho = 0$  і тих самих коефіцієнтах шорсткості степеневому закону. Указані факти свідчать про достовірність результатів.

В роботах попередніх років досліджено випадок великих коефіцієнтів шорсткості. Відхилення між результатами складає менше 1%, в діапазоні, де значення коефіцієнту шорсткості  $B_1$  задовольняє одночасно двом відповідним обмеженням (тобто коефіцієнт  $B_1$  є і великим і малим), розрахунки проведені за двома алгоритмами.

Тертя впливає на функцію тиску так, що вона стає несиметричною. Шорсткість поверхні смуги впливає на контактний тиск так, що її наявність робить цю функцію неперервною в усіх точках площадки контакту, в тому числі і на границі, на відміну від задачі без урахування шорсткості.. Проаналізувавши рисунок 4.2 маємо, що найбільше значення нормального

тиску досягається на границі площадки контакту при  $t = -1$ , а найменше - в деякій внутрішній точці площадки контакту. Зазначимо, що збільшення коефіцієнта шорсткості призводить до зміщення цієї точки до правої межі площадки контакту. Це також спостерігається з ростом коефіцієнту шорсткості  $B_1$ , що відповідає за висоту мікровиступів. Однак, із зростанням коефіцієнту  $\kappa$ , в межах від 0,1 до 1, абсциса точки мінімуму функції контактного тиску зміщується в бік до  $t = 0$

## ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто інтегральне рівняння плоскої контактної задачі про вдавлення штамп в пружну шорстку смугу, враховуючи тертя, при степеневому законі деформування шорсткості.

Практичне значення контактних задач велике. Їх дослідженням займалися А.І. Лур'є, І.Я. Штаерман, В.М. Александров, Л.А. Галін, І.Г. Горячова, М.Н. Добичін, та ін. [1-5, 20]. Розв'язанню контактних задач з урахуванням шорсткості присвячено роботи [1-5, 11], шорсткості і тертя – роботи [6-8, 13, 19].

Протиставляючи досліджену в роботі [5] плоску контактну задачу про вдавлення штамп в шорстку пружну смугу при степеневому законі деформування шорсткості, у даній роботі враховано тертя між смугою і штампом. У цьому полягає новизна роботи. В даній роботі запропоновано аналітичне розв'язання задачі, яка у [5] розв'язувалась чисельно. Це другий аспект новизни роботи.

Щоб досягти поставленої мети, в інтегральному рівнянні задачі введено заміну і малий параметр Боголюбова- Крилова. Це дозволяє звести його до інтегрального рівняння Гаммерштейна. Досліджено умови існування єдиного його розв'язку. Знайдено множину  $X$  функцій на якій визначено рівняння Гамерштейна. На цій множині знайдено обмеження на коефіцієнти шорсткості, за яких оператор рівняння є стискаючим; за цих же обмежень існує єдиний розв'язок рівняння Гаммерштейна.

Функція тиску, подана степеневим рядом є аналітичним розв'язком поставленої задачі. Коефіцієнти цього ряду та занурення штамп визначаються із системи нелінійних алгебраїчних рівнянь. Це наступний крок дослідження.

При дослідженні нелінійного оператора  $G$  рівняння Гамерштейна на стискання і зведення його до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь було

застосовано певні властивості лінійного оператора, через який виражається нелінійний оператор  $G$ , наведені в роботі [6].

Аналіз числових результатів щодо впливу коефіцієнтів шорсткості та тертя на контактні характеристики дозволив отримати такі висновки:

1) з шорсткості поверхні смуги отримуємо неперервну функцію тиску, яка є необмеженою в околах межових точок площадки контакту на відміну від класичної контактної задачі без урахування шорсткості, де в околах межових точок площадки контакту функція тиску прямує до нескінченності;

2) при урахуванні тертя функція тиску має несиметричні графіки, а в задачі без урахування тертя, функція тиску є симетричною;

3) там де досягається найменше значення функції тиску, при зменшенні коефіцієнта шорсткості  $B_1$  значення тиску збільшується на границі площадки контакту, і зменшується в точці;

4) занурення штампа  $\delta_1$  збільшується при збільшенні коефіцієнта тертя  $\rho$ , тиск в точці  $t_1 = -1$  збільшується, а в точці  $t_1 = 1$  зменшується, так само як і у внутрішній точці  $t_{\min}$ , що відповідає локальному мінімуму функції тиску. При цьому точка локального мінімуму пересувається в напрямку до  $t_1 = 1$ .

Розрахунки проведені в даній роботі мають хороше узгодження з результатами роботи [15].

Ідеї, які запропоновано в даній роботі, можна використовувати до розв'язування плоских задач контакту з тертям для шорсткої поверхні і штампу, який здійснює поворот, або має неплоску основу. Також для задач у яких шорсткість поверхні площини деформується за експоненціально-степеневим законом.

Розв'язок даних задач можна застосовувати у механіці, при розрахунках фундаментів споруд в будівництві, концентрації напруг при контакті деталей машин в машинобудуванні.

За результатами досліджень було опубліковано статтю [8], апробація результатів досліджень якої була проведена на конференції.

**ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ**

1. Александров А. И., Грабко Е. В. Алгоритм численного решения пространственной контактной задачи о взаимодействии упругих тел, имеющих шероховатые поверхности // *Проблеми обчислювальної мат. і міцності конструкцій*. 2011. Вип. 17. С. 23-34.

2. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. Москва : Наука, 1983. 488 с.

3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. Москва : Наука, 1980. 302 с.

4. Грабко О. В. Д'яченко Н. М., Коптева М. Д. Розв'язок плоскої контактної задачі про вдавнення неплоского штампа в пружну шорстку смугу при степеневому законі деформування шорсткості // *Вісник Запорізького нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки*. 2011. №2. С. 46-54.

5. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. Москва : Наука, 2001. 478 с.

6. Дьяченко Н. Н., Синченко Е. С., Качан А. И. Аналитическое и приближенно аналитическое решение плоской контактной задачи с учетом трения и шероховатости // *Вісник Запорізького нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки*. 2016. №1. С. 79-91.

7. Д'яченко Н. М., Столярчук І, А., Резвіна Д. Г., Смолянкова Т. М. Експоненціально-степеневий закон деформування шорсткості в плоскій задачі про вдавнення штампа. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2019, №1.. С. 45-60.

8. Д'яченко Н. М., Мухін В.В., Містюк. В. Ю., Юрченко А. К. Розв'язання плоскої контактної задачі з урахуванням тертя і шорсткості, що деформується за нелінійними законами. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичних науки*



9. Дьяченко Н. Н., Шашкова Е. В. Решение задачи о скольжении штампа с трением по границе шероховатого полупространства с линейным законом деформирования шероховатости // *Вісник Запорізького нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки.* 2006. № 1. С. 25-33.
10. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. Москва : Наука, 1984. 752 с
11. Козачок О. П., Мартиняк Р. М., Слободян Б. С. Взаємодія тіл з регулярним рельєфом за наявності міжконтактного середовища. Львів : Растр-7, 2018. 200 с
12. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчётов на трение и износ. Москва : Машиностроение, 1977. 576 с.
13. Містюк В. Ю., Юрченко А. К., Д'яченко Н. М. Аналітичний розв'язок рівняння Гаммерштейна плоскої контактної задачі з урахуванням тертя і шорсткості, що деформується за степеневим законом, для малих коефіцієнтів шорсткості. *Збірка тез Дев'ятої Всеукраїнської шістнадцятої регіональної конференції молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики»* (Запоріжжя, 26-27 квітня 2018). Запоріжжя, 2018. С. 95-96.
14. Развитие контактных задач в СССР. Галин Л. А. Москва : Наука, 1976. 126 с.
15. Тітова О. О., Гриценко О. М., Д'яченко Т. А., Стасюк О. В. Плоска контактна задача про вдавнення штампа з плоскою основою в пружну шорстку смугу при різних законах деформування шорсткості // *Вісник Запорізького нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки.* 2012. №2. С. 105-113.
16. Ткачук Н. Н., Скрипченко Н. Б., Ткачук Н. А., Грабовский А. В. Контактное взаимодействие сложнопрофильных деталей машиностроительных конструкций с учетом локальной податливости поверхностного слоя. Харьков : ФОРМ Панов А.Н., 2017. 148 с.
17. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : у 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. Москва : Наука, 1966. Т. 2. 800 с.

18. Шашкова Є.В., Д'яченко Н.М. Ковзання з тертям квадратного у плані штампа по межі пружного шорсткого півпростору. *Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи: Матеріали відкритої науково-технічної конференції молодих науковців і спеціалістів Фізико-механічного інституту ім.. Г.В. Карпенка НАН України КНМ*. Львів, 2005. С. 294-297.

19. Шишканова А. А. О решении контактной задачи с учетом трения и шероховатости для штампа в форме двусвязного квадрата в плане // *Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки*. 2004. Вип. 1. С. 95-102.

20. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Москва : Гостехтеоретиздат, 1949. 270 с.

21. Pauk V. Plane Contact Problems with Partial Slip for Rough Elastic Half-Space // *J. Theor. Appl. Mech.* 2004. Vol. 42, P. 107-124.

## ДОДАТОК А

Фрагмент програми для розв'язання скінченної системи  
відносно незалежних коефіцієнтів ряду та пошуку заглиблення штамп

```

> restart
> # POWER LAW
>
>
#-----
# Функція тиску за наявності тертя для гладкої смуги (B1=0)

$$\theta := \text{evalf}\left(\frac{1}{\text{Pi}} \cdot \arctan\left(\frac{(2 - 2 \cdot v)}{\rho \cdot (1 - 2 \cdot v)}\right)\right) :$$


$$p0 := \left(\frac{Q2 \cdot \sin(\text{Pi} \cdot \theta)}{\text{Pi} \cdot \sqrt{1 - x^2}} \cdot \left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^{0.5 - \theta}\right) :$$

#-----
# Функція тиску за БЕЗ тертя для гладкої смуги (B1=0)

$$p00 := \frac{Q2}{\text{Pi} \cdot \sqrt{1 - x^2}} :$$

>
#-----
# Занурення штамп в смугу за наявності тертя для гладкої смуги (B1 = 0)

$$\text{YY} := \text{evalf}\left(-\text{int}\left(\left(\frac{Q2 \cdot \sin(\text{Pi} \cdot \theta)}{\text{Pi} \cdot \sqrt{1 - x^2}} \cdot \left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^{0.5 - \theta}\right) \cdot (\ln(\text{abs}(x - (1)))) + C0), x = -1 .. 1, \right.$$


$$\left. \text{numeric}\right) - C1(\rho) \cdot \text{int}\left(\left(\frac{Q2 \cdot \sin(\text{Pi} \cdot \theta)}{\text{Pi} \cdot \sqrt{1 - x^2}} \cdot \left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^{0.5 - \theta}\right), x = -1 .. 1, \text{numeric}\right), 20) :$$


$$X[0] := 0 :$$

#-----
>
> kon := 20 :
>  $\omega := \frac{1}{K} : \xi_0 := \frac{\delta l}{12} + \gamma_0 :$ 
> for nn from 1 to kon do  $\beta_{nn} := \frac{\gamma_{nn}}{\xi_0}$  od:


$$p_{1,1} := \omega :$$


$$\sigma_0 := 1 : \sigma_1 := a_{1,1} \cdot p_{1,1} : a_{1,1} := \beta_1 :$$

for k from 2 to kon do
  for m from 1 to k-1 do

$$p_{m,k} := \prod_{s=1}^{k-m+1} \frac{(\omega - s + 1)}{s} :$$


$$a_{k,m} := \sum_{n=1}^m (a_{k-n, m-n+1} \cdot \beta_n) : \quad \text{od: } p_{k,k} := \omega :$$


```

&gt;

$$p_{1,1} := \omega :$$

$$\sigma_0 := 1 : \sigma_1 := a_{1,1} \cdot p_{1,1} : a_{1,1} := \beta_1 :$$

**for k from 2 to kon do****for m from 1 to k-1 do**

$$p_{m,k} := \prod_{s=1}^{k-m+1} \frac{(\omega - s + 1)}{s} :$$

$$a_{k,m} := \sum_{n=1}^m (a_{k-n, m-n+1} \cdot \beta_n) :$$

**od:**

$$p_{k,k} := \omega :$$

$$a_{k,k} := \beta_k :$$

$$\sigma_k := \sum_{s=1}^k (a_{k,s} \cdot p_{s,k}) :$$

**od:**

$$> kkk := \frac{kon}{2} :$$

$$> M := \sum_{s=0}^{kkk} \frac{\sigma_{2 \cdot s} \cdot 2}{2 \cdot s + 1} :$$

$$> p := (\xi_0)^\omega \cdot \sum_{kk=0}^{kon} (\sigma_{kk} \cdot x^{kk}) : v := 0.3 : C0 := -3 : CI := \rho \rightarrow -\frac{(1 - 2 \cdot v)}{2 - 2 \cdot v} \cdot \text{Pi} \cdot \rho :$$

&gt;

$$> \beta\beta[0,0] := -2 + 2 \cdot C0 + CI(\rho) :$$

&gt;

**for j from 1 to kon do**

$$\beta\beta[2 \cdot j, 0] := -\frac{2}{(2 \cdot j + 1)^2} + \frac{2 \cdot C0}{2 \cdot j + 1} + \frac{CI(\rho)}{2 \cdot j + 1} :$$

$$\beta\beta[2 \cdot j - 1, 0] := \frac{CI(\rho)}{2 \cdot j} :$$

$$\beta\beta[0, 2 \cdot j] := -\frac{2}{2 \cdot j \cdot (-2 \cdot j + 1)} :$$

$$\beta\beta[0, 2 \cdot j - 1] := 0 :$$

**for k from 1 to kon do**

$$\beta\beta[2 \cdot j, 2 \cdot k] := -\frac{2}{2 \cdot k \cdot (2 \cdot j - 2 \cdot k + 1)} :$$

$$\beta\beta[2 \cdot j, 2 \cdot k - 1] := 0 :$$

$$\beta\beta[2 \cdot j - 1, 2 \cdot k - 1] := -\frac{2}{(2 \cdot k - 1) \cdot (2 \cdot j - 2 \cdot k + 1)} :$$

$$\beta\beta[2 \cdot j - 1, 2 \cdot k] := 0 :$$

**od:**

$$\beta\beta[2 \cdot j, 2 \cdot j + 1] := \frac{CI(\rho)}{2 \cdot j + 1} :$$

$$\beta\beta[2 \cdot j - 1, 2 \cdot j] := \frac{CI(\rho)}{2 \cdot j} :$$

**od:**

$$\beta\beta[0, 1] := CI(\rho) :$$

```

> for jj from 1 to 10 do
  KI[jj] :=  $\frac{jj}{10}$ ;
od:
ρρ[1] := 0.0001; ρρ[2] := 0.3; ρρ[3] := 0.5; ρρ[4] := 0.8; ρρ[5] := 1;

>
> B11[1] := 1; B11[2] := 0.5; B11[3] := 0.2; B11[4] := 0.1; B11[5] := 0.05; B11[6]
  := 0.01; B11[7] := 0.005; B11[8] := 0.001; B11[9] := 0.0001;

>
> for n from 16 to kon do  γn := 0  od: qq := 1000 : δ12 := 0.033068 : δ1 := 0.033 :

> γ[0] := evalf( (subs(ρ = 0.3, x = 0, p0))0.4 -  $\frac{\delta12}{12}$  ) :

> δ12 := 0.147; δ1 := 0.1471177765;

> eee :=  $Q2 \cdot 10^{-5}$ ;
Q2 := 0.008625 :
for ip from 5 to 1 by -1 do
  ρ := ρρ[ip] : # print(ρ, "B1=0", evalf(YY) );
  for ii from 4 to 4 by -1 do
    K := evalf(KI[ii], 1) : print("ρ=", ρ, "K=", K);
    for jj from 2 to 2 by -1 do
      B1 := B11[jj] : eee1 := 1000 :
      nomIter := 0 :
      μ :=  $1 - \frac{B1}{12}$  :
      print("=====");
      while eee1 > eee do
        δ1 :=  $12 \cdot \text{evalf}\left(\left(\frac{Q2}{M}\right)^K - \gamma_0\right)$  :

        eee1 := abs(δ12 - δ1) :
        # eee1 := abs(γ1 - γ0) :
        for n from 0 to kon do
          γn := evalf(  $\mu \cdot \gamma_n + \frac{(\xi_0)^\omega}{12} \cdot \sum_{s=0}^{kon} \sigma_s \cdot \beta_{s,n}$  ) :
        od:
        γ0 := γ0 +  $\mu \cdot \frac{\delta12}{12}$ 

      for n from 0 to kon do
        γn := γn
      od:
      nomIter := nomIter + 1 : δ12 := δ1 :
      print(nomIter, δ1, eee1);
    od:
  rr := fsolve(  $\frac{\partial}{\partial x} p, x = -1 .. 1$  ) : # cond :=  $\left(\frac{12}{K} \cdot \delta1^{\frac{1}{K} - 1}\right)^K$  :

```

```

print("Q2=", Q2, "ρ=", ρ, "K=", K, B1, δl, rr, nomIter);
# `print(ip, ρ, ii, K, jj, B1, nomIter, δl, rr, cond);
#   Gr[ip, ii, jj] := plot(p, x=-1 ..1, color = black, thickness = 2, font = [TIMES, BOLD,
    14]) :
    δδ[Q2, ip, ii, jj] := δl :
  od:
od:
od:
> # kon=20 ρ=0.3, K=0.2 B1=1, 0.3704050060,0.1266057805
> print(seq([0.05 + (jjj - 1)·0.05, δδ[0.05 + (jjj - 1)·0.05, 2, 10, 1]], jjj = 1 ..10))
> data := [seq([0.05 + (jjj - 1)·0.05, δδ[0.05 + (jjj - 1)·0.05, 2, 10, 1]], jjj = 1 ..10)] :
> [[0, 0], [0.05, 0.3715465525], [0.10, 0.7430859083], [0.15, 1.114629601], [0.20,
    1.486159231], [0.25, 1.857702914], [0.30, 2.229246605], [0.35, 2.600790300], [0.40,
    2.972333999], [0.45, 3.343877696], [0.50, 3.715421394]]
> plot(data)

```