МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ДОСЛІДЖЕННЯ ВИКЛЮЧНИХ ВИПАДКІВ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ РІМАНА НА ЗАМКНЕНОМУ КОНТУРІ ТА НА ДІЙСНІЙ ОСІ»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1118-з
спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми математика
О. М. Саф'янік
(ініціали та прізвище)
Керівник доцент кафедри фундаментальної математики, к.ф.-м.н. Д'яченко Н. М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)
Рецензент старший викладач кафедри загальної математики, к.ф.-м.н. Гречнєва М. О.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної математики,
д.т.н., доцент
_______________ Гребенюк С.М.
(підпис)

« 26 » вересня 2019 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ (СТУДЕНТЦІ)

Саф'янік Олені Миколаївні
(прізвище, ім'я та по батькові)

1. Тема роботи Дослідження виключних випадків крайової задачі Рімана на замкненому контурі та на дійсній осі

керівник роботи Д'яченко Наталя Миколаївна,
доцент кафедри фундаментальної математики, к.ф.-м.н.
(прізвище, ім'я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 29 » травня 2019 року № 812-с

2. Строк подання студентом роботи 09 грудня 2019 р.

3. Вихідні дані до роботи Теоретичні відомості щодо методу Гахова розв'язання крайової задачі теорії аналітичних функції у виключному випадку на замкненому контурі.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
Вивчити метод Гахова розв'язання крайової задачі Рімана у виключному випадку, коли коефіцієнт крайової задачі в окремих точках замкненого контура обертається в нуль або нескінченість цілих порядків, дослідити виключний випадок на дійсній осі, розв'язати Конкретні приклада.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) ___________

Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 26 вересня 2019

К А Л Е Н Д А Р Н И Й   П Л А Н

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	Вересень 2019	Виконано
2.	Збір вихідних даних.	Вересень – жовтень 2019	Виконано
3.	Обробка методичних та теоретичних	Вересень – жовтень 2019	Виконано
	джерел.		
4.	Розробка першого та другого розділу.	Жовтень 2019	Виконано
5.	Розробка третього розділу.	Листопад 2019	Виконано
6.	Оформлення та нормоконтроль	Листопад – грудень 2019	Виконано
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	Січень 2020	

Студент ____________ О. М. Саф'янік
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ____________ Н .М. Д’яченко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ____________ І.Г. Ткаченко
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Дослідження виключних випадків крайової задачі Рімана на замкненому контурі та на дійсній осі»: 70 с., 4 рис., 24 джерела, 2 додатки.

ВИКЛЮЧНИЙ ВИПАДОК КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ РІМАНА, ІНТЕГРАЛ ТИПУ КОШІ, КРАЙОВА ЗАДАЧА РІМАНА ТЕОРІЇ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ, СИНГУЛЯРНИЙ ІНТЕГРАЛ.

Об'єкт дослідження – крайова задача Рімана у виключному випадку на замкненому контурі та на дійсній осі.

Мета роботи: вивчити метод Гахова розв'язання крайової задачі Рімана у виключному випадку, коли коефіцієнт крайової задачі в окремих точках замкненого контура обертається в нуль або нескінченість цілих порядків, дослідити виключний випадок на дійсній осі, розв'язати конкретні приклади.

Метод дослідження – аналітичний метод Гахова розв'язання крайових задач Рімана.

Класична постановка крайової задачі Рімана передбачає що коефіцієнт цієї задачі не може обертатися в нуль і нескінченність в точках контура. Якщо припустити, що в скінченій кількості точок на контурі коефіцієнт має нуль і нескінченності скінчених порядків, то така крайова задача Рімана відноситься до виключного випаду. Саме така задача поставлена і розв'язується в роботі. Метод розв'язання поставленої задачі на зімкненому контурі викладено в підручнику Гахова Ф.Д. [7]. В роботі досліджено підхід до розв'язання цієї задачі на дійсній осі. Вивчені методи застосовані до розв'язання конкретних прикладів, частина з них є авторськими.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis «Investigation of Exceptional Cases for the Riemann Boundary Value Problem on a Closed Loop and on the Real Axis»: 70 pages, 4 figures, 24 references, 2 supplements.

AN EXCEPTIONAL CASES FOR THE RIEMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM, AN INTEGRAL OF CAUCHY TYPE, RIEMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE THEORY OF ANALYTICAL FUNCTIONS, A SINGULAR INTEGRAL.

The object of the study is Riemann boundary value problem in an exceptional case on a closed loop and on the real axis.

The aim of the study is to study the Gakhov method of solving the Riemann boundary value problem in the exceptional case, where the coefficient of the boundary value problem at individual points of the closed loop becomes zero or infinity of entire orders, investigate the exceptional case on the real axis, and to solve specific examples.

The method of research is Gakhov's analytical method of solving Riemann boundary problems.

The classical formulation of the Riemann boundary-value problem implies that the coefficient of this problem cannot be equal zero and infinity at the contour points. Assuming that in the finite number of points on the contour, the coefficient has zero and infinity of finite orders, this Riemann boundary value problem is correspoded to an exceptional case. This is precisely the problem that is posed and solved in the work. The method for solving these problems on a closed loop is described in textbook of Gakhov F.D. [7]. This paper is explored the approach to solving this problem on a real axis. The methods studied are applied to solving specific examples, some of them are author's.

ЗМІСТ

ВСТУП

Сингулярні інтегральні рівняння, диференціальні рівняння еліптичного типу, які застосовуються в теорії пружності, теорії контактних задач, математичній фізиці, аеродинаміці та дифракції хвиль зводяться до крайових задач теорії аналітичних функцій (ТАФ). Використанню такої методики присвячено роботи Гахова Ф.Д. [7], Волкова И.К. [5], Конторовича М. И. [10], Лиманова И.К. [16], Назарова С.А. [18], Александрова В.М. [1]. Широким застосуванням методів розв'язання задач ТАФ при дослідженні зазначених вище прикладних проблем визначається актуальність даної тематики та високий інтерес науковців. Огляд методів розв'язання задач теорії аналітичних функцій наведено в монографії Гахова Ф.Д. [7]. Окремі випадки таких методів розглянуто в роботах Кулієва В.Д. [11], Литвинчука Г.С. [15], Лаврентьєва М.А., Шабата Б.В. [13]. Розв'язання крайових задач ТАФ призводить до необхідності обчислення сингулярних інтегралів з ядром Коші та інтегралів типу Коші, методики обчислення яких містяться в роботах Пихтєєва Г.Г. [20], Гандель Ю.В. [6].

Теорія крайових задач продовжує розвиватися у нинішній час Санаєвим В.В. [2], Даніловим Е.А. [9], Бабаєвим А.А., Говоровим Н.В. [8], Kutlu K. [12], Плаксою С.А. [19], Тихоненко Н.Я. [24], Васильєвою Ю.В. [3], Солдатовим А.П.[23], Сиражудиновим М.М. [22], Сніжко Н.В. [20]. В роботах Васильєвої Ю.В. [3] та Тихоненко Н.Я. [24] досліджено виключні випадки цих задач.

У класичній крайовій задачі Рімана існує припущення, що функція-коефіцієнт цієї задачі задовольняє умову Гельдера і в жодній точці контура не дорівнює нулю. Це виключає можливість прямування його до нескінченності і обертання в нуль на контурі. В роботі наведено відомі за Гаховим Ф.Д. [7] дослідження задачі у виключному випадку, тобто допускається, що коефіцієнт крайової задачі в окремих точках контура має нуль або нескінченість цілих порядків.

Основною метою роботи є вивчення методу Гахова розв’язання крайової задачі Рімана у виключному випадку на замкненому контурі. Дослідити виключний випадок на дійсній осі. Для таких задач навести конкретні приклади. Деякі приклади, щодо поставленої задачі на замкненому контурі, вибрати для розв’язання із книги Гахова Ф.Д. [7], а деякі навести самостійно. Приклади на дійсній осі в підручнику [7] відсутні, тому їх теж навести самостійно.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ЩОДО ВИКЛЮЧНОГО ВИПАДКУ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ РІМАНА НА ЗАМКНЕНОМУ КОНТУРІ

У постановці крайової задачі Рімана (Б.1) існує умова, щоб коефіцієнт $G(t)$ ніде на контурі γ не обертався в нуль і відповідав умові Гельдера. Останнє виключає можливість прямування $G(t)$ до нескінченності. Для класичної крайової задачі ці обмеження є суттєвими. В цій роботі ми наведемо, відомі з роботи Гахова Ф.Д. [7], дослідження задачі, нехтуючи цими обмеженнями. Ці дослідження відносять до виключного випадку крайової задачі. Тут будемо припускати, що функція $G(t)$ в окремих точках замкненого контура γ обертається в нуль або нескінченість цілих порядків. Окрім того, припустимо, що контур γ складається з однієї замкненої кривої.

1.1 Однорідна задача

Розглянемо крайові умови однорідної задачі Рімана на контурі у вигляді

$$\Phi^{+}(t) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}}{\prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}} \cdot G_1(t) \cdot \Phi^{-}(t), \tag{1.1}$$

де m_k, p_j – цілі невід'ємні числа; α_k $(k=1,2,...,\mu)$; β_j $(j=1,2,...,\nu)$ – деякі точки контура; $G_1(t)$ – функція, яка задовольняє умову Гельдера і не обертається в нуль. Тоді точки α_k – нулі функції $G(t)$, а точки β_j – її полюси.

Виходячи з того, що функція $G(t)$ неаналітична, то застосувати термін «полюс» не зовсім коректно. Вживатимемо цей термін для стислості, і будемо розуміти під цім поняттям точку, де функція (неаналітична) обертається в нескінченість цього порядку.

Введемо позначення:

$$IndG_1(t) = \kappa\,; \quad \sum_{j=1}^{\nu} p_j = p\,; \quad \sum_{k=1}^{\mu} m_k = m.$$

Розв'язок цієї задачі будемо шукати в класі функцій, що є обмеженими на контурі. Стає зрозумілим, що важливою є лише вимога інтегрованості, тобто обмеження про обертання в нескінченність лише порядку нижче першого.

Використаємо підстановку $t^{\kappa} G_1(t) = \dfrac{X^+(t)}{X^-(t)}$ в (1.1) , причому

$$\mathrm{X}^+(z) = e^{\Gamma^+(z)},\; \mathrm{X}^-(z) = e^{\Gamma^-(z)},\; \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{\ln\left[\tau^{-k} G_1(\tau)\right]}{\tau - z} d\tau\,, \qquad (1.2)$$

тоді крайова умова матиме вигляд

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}} = \frac{t^{\kappa}\Phi^-(t)}{X^-(t)\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}}.$$

Застосувавши до цієї рівності теорему про аналітичне подовження і узагальнену теорему Ліувілля [13]. Точки α_k, β_j не є особливими точками єдиної аналітичної функції, оскільки це суперечить припущенню про обмеженість $\Phi^+(t)$ або $\Phi^-(t)$). Стає зрозумілим, що єдина можлива особливість – це нескінченно віддалена точка. Порядок на нескінченності z^{κ} є

κ, а порядок $\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}$ дорівнює p. Звідси порядком на нескінченності функції $\dfrac{z^{\kappa}\cdot\Phi^{-}(z)}{X^{-}(z)\cdot\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}}$ є $\kappa-p$. Причому, якщо $\kappa-p\geq 0$, то відповідно до узагальненої теореми Ліувілля

$$\frac{\Phi^{+}(z)}{X^{+}(z)\cdot\prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{m_k}}=\frac{z^{\kappa}\cdot\Phi^{-}(z)}{X^{-}(z)\cdot\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}}=P_{\kappa-p}(z),$$

звідси

$$\left.\begin{aligned}&\Phi^{+}(z)=X^{+}(z)\cdot\prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{m_k}\cdot P_{\kappa-p}(z),\\&\Phi^{-}(z)=z^{-\kappa}\cdot X^{-}(z)\cdot\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}\cdot P_{\kappa-p}(z).\end{aligned}\right\}\qquad(1.3)$$

Якщо ж $\kappa-p<0$, потрібно покласти $P_{\kappa-p}(z)\equiv 0$ і, отже, задача в загальному випадку нерозв'язна (або має тривіальний розв'язок.

Із формули (1.3) видно, що степінь многочлена $P(z)$ на p одиниць менша ніж індекс задачі κ. Отже, число лінійно незалежних розв'язків задачі (1.1) в класі функцій, обмежених на контурі, не змінюється від наявності нулів у коефіцієнта задачі і зменшується на сумарний порядок всіх полюсів. Якщо отримуємо індекс, менший сумарного порядку полюсів, то задача, взагалі кажучи, немає розв'язків (або має тривіальний розв'язок).

Якщо задача (1.1) розв'язна, то її розв'язок обраховується за допомогою формул (1.3), де функції $X^{\pm}(z)$ відповідають формулам (1.2). Якщо ж накладено додаткове обмеження $\Phi^{-}(\infty)=0$, то кількість лінійно незалежних розв'язків зменшується на одиницю, а степінь для многочлена $P(z)$ потрібно взяти $\kappa - p - 1$.

1.2 Неоднорідна задача

Запишемо граничну умову у вигляді

$$\Phi^{+}(t) = \frac{\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}} \cdot G_1(t) \cdot \Phi^{-}(t) + g(t). \tag{1.4}$$

Неважко помітити, що крайову умову не можна задовольнити функціями $\Phi^{+}(t), \Phi^{-}(t)$, якщо допустити, що функція $g(t)$ має полюси в точках, відмінних від β_j, або якщо в останніх точках порядок полюса функції $g(t)$ перевищує p_j. Отже, приймемо умову, що функція $g(t)$ може мати полюси в точках β_j і порядок їх не перевищують p_j.

Для того, щоб можна було застосовувати теорію, що буде нижче викладеною, потрібно поставити вимогу, щоб $G_1(t)$ і $\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j} \cdot g(t)$ у виключних точках були диференційовні достатню кількість разів. Далі визначимо порядок необхідної вищої похідної.

Введемо заміну, як і в однорідній задачі, функцію $t^{-\kappa} \cdot G_1(t)$ як відношення функцій $\frac{X^{+}(t)}{X^{-}(t)}$ і запишемо граничну умову (1.4) у вигляді

$$\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}\cdot\frac{\Phi^+(t)}{X^-(t)}=t^{\kappa}\cdot\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}+\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}\cdot\frac{g(t)}{X^+(t)}. \qquad (1.4')$$

Зауваження 1.1 Не можна перетворювати крайову умову, як ми це робили при розв'язанні однорідної задачі (за формулою (1.2)), залишаючи на місці $\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}$ і ділячи на $\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}$, оскільки вільний член став би неінтегровним. Навіть навпаки, переписуючи умови (1.2) у вигляді (1.4'), ми отримали би розв'язок

$$\Phi^+(z)=\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{-p_j}X^+(z)P_{\kappa+m}(z);$$

$$\Phi^-(z)=\prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{-m_k}X^-(z)P_{\kappa+m}(z).$$

Умова скінченності $\Phi^+(z), \Phi^-(z)$ змусила б нас обрати многочлен у вигляді

$$P_{\kappa+m}(z)=\prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{m_k}.\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}P_{\kappa+m}(z),$$

що привело б до отриманого раніше розв'язку (1.3).

Отже, розв'язання потребує іншого підходу. Функція $\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}\cdot\frac{g(t)}{X^+(t)}$ є інтегрованою. Відповідно до формул Сохоцького, замінимо цю функцію різницею крайових значень аналітичних функцій

$$\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}\cdot\frac{g(t)}{X^+(t)}=\Psi^+(t)-\Psi^-(t),$$

де

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_L \prod_{j=1}^{\nu} (\tau - \beta_j)^{p_j} \cdot \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z} \,. \tag{1.5}$$

Останнє дозволяє привести крайові умови до вигляду

$$\prod_{j=1}^{\nu} (t-\beta_j)^{p_j} \cdot \frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = t^{\kappa} \cdot \prod_{k=1}^{\mu} (t-\alpha_k)^{m_k} \cdot \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t).$$

Застосуємо теорему про аналітичне подовження і узагальнену теорему Ліувілля, отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \frac{X^+(z)}{\prod_{j=1}^{\nu} (z-\beta_j)^{p_j}} \cdot \left[\Psi^+(z) + P_{\kappa+m}(z) \right], \\ \Phi^-(z) &= \frac{z^{-\kappa} \cdot X^-(z)}{\prod_{k=1}^{\mu} (z-\alpha_k)^{m_k}} \cdot \left[\Psi^-(z) + P_{\kappa+m}(z) \right]. \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

Ці формули дадуть розв'язок, при якому функції будуть обертатися в нескінченність в точках α_k, β_j. Щоб отримати обмежений розв'язок, потрібно, щоб функція $\Psi^+(t) + P_{\kappa+m}(z)$ мала нулі порядку p_j в точках β_j, а функція $\Psi^-(t) + P_{\kappa+m}(z)$ мала нулі порядів m_k в точках α_k. Завдяки цим вимогам, отримаємо накладання $m+p$ умов на коефіцієнти многочлена $P_{\kappa+m}(z)$. Якщо для многочлена $P_{\kappa+m}(z)$ підберемо коефіцієнти згідно з накладеними умовами, то формули (1.6) дадуть розв'язок неоднорідної задачі (1.4) у класі обмежених функцій.

Зазначимо, що цей спосіб розв'язання є досить незручним як в практичному відношенні (труднощі розв'язання систем рівнянь), так і в теоретичному: виникає необхідність доведення незалежності та сумісності рівнянь, що випливають з умов скінченних розв'язку у точках α_k, β_j, до яких додадуться ще й умови скінченності розв'язку в нескінченно віддаленій точці.

Щоб звільнитися від цих проблем, Гахов Ф.Д. [7] у своїй роботі запропонував будувати спеціальний частковий розв'язок, названий канонічною функцією неоднорідної задачі.

Означення 1.1 Канонічною функцією $\Upsilon(z)$ неоднорідної задачі (1.4) називається кусково-аналітична функція, яка задовольняє граничну умову (1.4), що має всюди в скінченній частині площини (включаючи і точки α_k, β_j) нульовий порядок і на нескінченості має найвищий можливий порядок.

Для побудови канонічної функції керуватимемось розв'язком, який задається формулами (1.6). Зобразимо многочлен $Q(z)$ так, щоб він відповідав умовам:

$$Q^{(i)}(\beta_j) = \Psi^{+(i)}(\beta_j) \qquad (i = 0,1,\dots, p_j - 1;\ j = 1,2,\dots,\nu),$$
$$Q^{(l)}(\alpha_k) = \Psi^{-(l)}(\alpha_k) \qquad (l = 0,1,\dots, m_k - 1;\ k = 1,2,\dots,\mu),$$

де $\Psi^{+(i)}(\beta_j), \Psi^{-(l)}(\alpha_k)$ – значення похідних *i*-го та *j*-го порядку у відповідних точках (див. зауваження 1.2). Отже, $Q(z)$ є інтерполяційним многочленом для функції

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Psi^{+}(z) \text{ у відповідних точках } \beta_j, \\ \Psi^{-}(z) \text{ у відповідних точках } \alpha_k \end{cases}$$

з вузлами інтерполяції β_j, α_k кратності, відповідно, p_j, m_k.

Зауваження 1.2 Забезпечення існування зазначених вище похідних буде можливим, якщо функції $\prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j} \cdot g(t)$, $G_1(t)$ задовольняють умови, що в точках α_k, β_j вони матимуть похідні порядків m_k, p_j, при цьому вони є функціями, що відповідають умові Гельдера.

Такий інтерполяційний многочлен $Q(z)$ визначається однозначно і його степінь q дорівнює

$$q = m + p - 1.$$

Таким чином, канонічна функція неоднорідної задачі може бути виражена через інтерполяційний многочлен $Q(z)$:

$$\mathrm{Y}^{+}(z) = \mathrm{X}^{+}(z) \cdot \frac{\Psi^{+}(z) - Q_q(z)}{\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}}; \quad \mathrm{Y}^{-}(z) = z^{-\kappa} \cdot \mathrm{X}^{-}(z) \cdot \frac{\Psi^{-}(z) - Q_q(z)}{\prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{m_k}}. \qquad (1.7)$$

Для побудови загального розв’язку неоднорідної задачі (2.4) скористаємося тим, що цей загальний розв’язок складається із деякого часткового розв’язку неоднорідної задачі і загального розв’язку однорідної. Використовуючи формули (1.3) і (1.7), отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} \Phi^{+}(z) &= \mathrm{Y}^{+}(z) + \mathrm{X}^{+}(z) \cdot \prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{m_k} \cdot P_{\kappa-p}(z); \\ \Phi^{-}(z) &= \mathrm{Y}^{-}(z) + z^{-\kappa} \cdot \mathrm{X}^{-}(z) \cdot \prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j} \cdot P_{\kappa-p}(z). \end{aligned}\right\} \qquad (1.8)$$

Якщо $\kappa - p < 0$, то потрібно означити, що $P_{\kappa-p}(z) \equiv 0$. Використавши формулу (1.7), розрахуємо порядок $\mathrm{Y}^{-}(z)$ на нескінченності; він рівний $p-1-\kappa$. У випадку, коли $\kappa < p-1$, то функція $\mathrm{Y}^{-}(z)$ матиме в нескінченно віддаленій точці полюс, у такій ситуації канонічна функція не задовольняє розв’язок неоднорідної задачі.

Та якщо, функцію $g(t)$ підпорядкувати $p-\kappa-1$ умовам , можна отримати підвищення порядків на нескінченості функції $\Upsilon(z)$ на $p-\kappa-1$ одиниць і, завдяки цьому, знову отримати канонічну функцію $\Upsilon(z)$ як розв'язок неоднорідної задачі. Щоб скористатися цим, достатньо та необхідно, щоб у розкладі функції $\Psi(z)-Q_q(z)$, при наближені до нескінченно віддаленої точки, перші коефіцієнти оберталися в нуль. Звідси будемо мати $p-\kappa-1$ умов розв'язності задачі. Визначимо характер цих умов.

Розкладання функції $\Psi(z)-Q_q(z)$ можна представити у такому вигляді, що

$$\Psi(z)-Q_q(z)=-c_q z^q-c_{q-1}z^{q-1}-...-c_0+c_{-1}z^{-1}+c_{-2}z^{-2}+...+c_{-k}z^{-k}+...,$$

при $c_0, c_1, ..., c_q-$ коефіцієнти многочлена $Q_q(z)$, а c_k- коефіцієнти розкладу функції $\Psi(z)$, що обчислюються за формулами

$$c_k=-\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\prod\limits_{j=1}^{\nu}(\tau-\beta_j)^{p_j}\cdot g(\tau)\cdot\tau^{k-1}}{X^+(\tau)}d\tau. \qquad (1.9)$$

Тоді вище вказані умови розв'язності набудуть вигляду

$$c_q=c_{q-1}=...=c_{q-p+\kappa+2}=0. \qquad (1.10)$$

Якщо ж на розв'язок буде накладена додаткова умова $\Phi^-(\infty)=0$, то для $\kappa-\rho>0$ у формулах (1.8) потрібно використати многочлен $P_{\kappa-p-1}(z)$, а при $\kappa-p<0$ потрібно задовольнити $p-\kappa$ умовам.

2 РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ РІМАНА НА ДІЙСНІЙ ОСІ У ВИКЛЮЧНОМУ ВИПАДКУ

2.1 Однорідна задача

Запишемо крайову умову однорідної задачі в тому ж вигляді, що й у випадку задачі на замкненому контурі:

$$\Phi^{+}(t)=\frac{\prod\limits_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}}{\prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}}\cdot G_1(t)\Phi^{-}(t)\,. \tag{2.1}$$

При $\alpha_k\,(\alpha=1,2,...,\mu)$, $\beta_j\,(j=1,2,...,\nu)$ – деякі точки дійсної осі, m_k, p_j – цілі невід'ємні числа, $G_1(t)$ – функція, яка задовольняє умову Гельдера та не дорівнює нулю на дійсній осі. Використаємо ті самі позначення

$$Ind G_1(t)=\kappa\,;\ \sum_{j=1}^{\nu}p_j=p\,;\ \sum_{k=1}^{\mu}m_k=m\,.$$

Так само як і у випадку із замкненим контуром, розв'язок будемо шукати в класі функцій, обмежених на дійсній осі.

Здійснимо факторизацію точно так, як у класичному випадку. Замість функції нульового індексу $\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\kappa}\cdot G_1(t)$ підставимо $\frac{X^{+}(t)}{X^{-}(t)}$. Таким чином в (2.1) підставимо $\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\kappa}\cdot G_1(t)=\frac{X^{+}(t)}{X^{-}(t)}$, де

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln\left[\left(\frac{\tau - i}{\tau + i}\right)^{-\kappa} \cdot G_1(\tau)\right] \cdot \frac{d\tau}{\tau - z}, \tag{2.2}$$

$$X^{\pm}(z) = e^{\Gamma^{\pm}(z)}, \tag{2.3}$$

одержимо:

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{X^{+}(t)\cdot\prod\limits_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}} = \frac{\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}\cdot\Phi^{-}(t)}{X^{-}(t)\cdot\prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}}. \tag{2.4}$$

Застосуємо до (2.4) теорему про аналітичне подовження та теорему узагальнену Ліувілля [13] при $\kappa > 0$, зважаючи на те, що точка $z = -i$ є полюсом порядку κ для функції

$$\frac{\Phi^{-}(t)\cdot\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}}{X^{-}(t)\cdot\prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}}.$$

Точно, як і у випадку замкненого контура, α_k, β_j не можуть бути особливими точками єдиної аналітичної функції. Тоді такою єдиною аналітичною функцією потрібно обрати функцію $\frac{P_\kappa(z)}{(z+i)^\kappa}$. Після перетворень отримаємо

$$\Phi^{+}(z) = \frac{X^{+}(z)\cdot\prod\limits_{k=1}^{\mu}(z-a_k)^{m_k}\cdot P_k(z)}{(z+i)^k}. \tag{2.5}$$

Звідси випливає, що функція $\Phi^{+}(z)$ має в нескінченно віддалених точках полюс порядку m. Щоб цього уникнути, потрібно коефіцієнти многочлена $P_{\kappa}(z)$ із степенями $\kappa, \kappa-1, ..., \kappa-m+1$ прирівняти до нуля. Отримаємо коефіцієнти степеня $\kappa-m$. Таким чином, замість многочленна $P_{\kappa}(z)$ у виразі (2.5) потрібно взяти многочлен $P_{\kappa-m}(z)$. Отримаємо

$$\Phi^{+}(z)=\frac{X^{+}(z)\cdot\prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_{k})^{m_{k}}\cdot P_{\kappa-m}(z)}{(z+i)^{\kappa}}. \tag{2.6}$$

Застосувавши теореми про аналітичне подовження і узагальненої теорема Ліувілля [13], отримуємо, з урахуванням зауваження щодо степеня многочлена $P_{\kappa-m}(z)$, таке значення, що

$$\Phi^{-}(z)=\frac{X^{-}(z)\cdot\prod_{j=1}^{v}(z-\beta_{j})^{p_{j}}\cdot P_{\kappa-m}(z)}{(z-i)^{\kappa}}. \tag{2.7}$$

Проаналізувавши порядок полюса нескінченно віддаленої точки, можемо зробити висновок про те, що доречно було б ввести таке обмеження на кількість нулів і полюсів:

$$m=p=N. \tag{2.8}$$

Враховуючі (2.6) – (2.8), отримаємо розв’язок однорідної задачі у такому вигляді

$$\left.\begin{aligned}
&\varPhi^{+}(z)=\frac{\prod\limits_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}\cdot X^{+}(z)\cdot P_{\kappa-N}(z)}{(z+i)^{\kappa}};\\
&\varPhi^{+}(z)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}\cdot X^{-}(z)\cdot P_{\kappa-N}(z)}{(z-i)^{\kappa}}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Отриманий розв’язок (2.9) відповідає $\kappa - N \geq 0$. При $\kappa - N < 0$ потрібно покласти $P_{\kappa-N} \equiv 0$ і, таким чином, задача не матиме розв’язку (або має тривіальний розв’язок). Отже, число лінійних незалежних розв’язків (2.1) в класі функції, які є обмеженими на контурі, дорівнює $\kappa - N + 1$, при $\kappa - N \geq 0$.

2.2 Неоднорідна задача

Відразу потрібно накласти обмеження, що $m = p = N$ (див. (2.8)). Запишемо граничну умову неоднорідної задачі у вигляді

$$\varPhi^{+}(t)=\frac{\prod\limits_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}}{\prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}}\cdot G_1(t)\cdot\varPhi^{-}(t)+g(t),\ t\in R. \tag{2.10}$$

Умови щодо властивостей функцій $G_1(t)$ і $\prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}\cdot g(t)$ і полюсів функції $g(t)$, надані при складанні умови задачі Рімана на замкненому контурі, використовуються і у випадку задачі Рімана на дійсній осі.

Перепишемо (2.10) у вигляді

$$\Phi^+(t)=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}\cdot\frac{\prod\limits_{k=1}^{\mu}\left(t-\alpha_k\right)^{m_k}}{\prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}}\cdot\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\kappa}\cdot G_1(t)\cdot\Phi^-(t)+g(t)\,. \qquad (2.11)$$

Використаємо факторизацію для функції $\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}\cdot G_1(t)$, тобто подамо її у формі $\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}\cdot G_1(t)=\frac{X^+(t)}{X^-(t)}$, знаючи, що $\Gamma(z)$, $X^{\pm}(z)$ подаються формулами (2.2) і (2.3) відповідно. Тоді (2.11) набуває вигляду:

$$\Phi^+(t)=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}\cdot\frac{\prod\limits_{k=1}^{\mu}\left(t-\alpha_k\right)^{m_k}}{\prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}}\cdot\frac{X^+(t)}{X^-(t)}\cdot\Phi^-(t)+g(t)\,.$$

Помножимо обидві частини останньої рівності на вираз $\frac{\prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}}{X^+(t)}$:

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}}{X^+(t)}\cdot\Phi^+(t)=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}\cdot\frac{\prod\limits_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}}{\mathrm{X}^-(t)}\cdot\Phi^-(t)+\prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}\cdot\frac{g(t)}{\mathrm{X}^+(t)}. \qquad (2.12)$$

Дивлячись на зауваження, яке буде мати місце і у випадку дійсної осі, другий доданок у правій частині (2.12) – інтегровна функція на дійсній осі. Застосувавши до цього доданку формулу Сохоцького, отримаємо, що функція

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\prod\limits_{j=1}^{\nu}(\tau-\beta_j)^{p_j}\cdot\frac{g(\tau)}{\mathrm{X}^+(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}\ , \qquad (2.13)$$

задовольняє граничну умову

$$\Psi^{+}(t)-\Psi^{-}(t)=\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}\cdot\frac{g(t)}{X^{+}(t)}.$$

Підставивши останнє співвідношення в (2.12) та здійснивши перетворення, одержимо

$$\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}\cdot\frac{\Phi^{+}(t)}{X^{+}(t)}-\Psi^{+}(t)=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}\cdot\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}\cdot\frac{\Phi^{-}(t)}{X^{-}(t)}-\Psi^{-}(t).$$

Застосувавши теорему про аналітичне подовження та узагальнену теорему Ліувілля, отримаємо те, що точка $z=-i$ буде полюсом порядку κ, а нескінченно віддалена точка буде полюсом порядку N. Отже, єдина на всій комплексній площині функція, буде мати вигляд

$$\frac{P_{\kappa}^{(1)}(z)}{(z+i)^{\kappa}}+P_N^{(2)}(z)=\frac{P_{\kappa+N}(z)}{(z+i)^{\kappa}}.$$

Таким чином,

$$\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}\cdot\frac{\Phi^{+}(z)}{X^{+}(z)}-\Psi^{+}(z)=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\kappa}\cdot\prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{m_k}\cdot\frac{\Phi^{-}(z)}{X^{-}(z)}-\Psi^{-}(z)=$$

$$=\frac{P_{\kappa+N}(z)}{(z+i)^{\kappa}}.$$

Звідки для випадку $\kappa+N\geq 0$ отримуємо

$$\left.\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{-p_j}\cdot X^+(z)\cdot\left[\Psi^+(z)+\frac{P_{\kappa+N}(z)}{(z+i)^{\kappa}}\right]; \\ \Phi^-(z) &= \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-\kappa}\cdot\prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{-m_k}\cdot X^-(z)\cdot\left[\Psi^-(z)+\frac{P_{\kappa+N}(z)}{(z+i)^{\kappa}}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

Щоб розв'язок був обмежений в точках β_j і α_k, потрібно, щоб функції $P_{\kappa+N}(z)+\Psi^+(z)\cdot(z+i)^{\kappa}$ і $P_{\kappa+N}(z)+\Psi^-(z)\cdot(z+i)^{\kappa}$ мали нулі порядків p_j в точках β_j і m_j – в точках α_k.

Щоб все це виконувалося, потрібно провести дослідження за алгоритмом, запропонованим Гаховим Ф.Д. [7], для неоднорідної задачі виключного випадку на замкненому контурі. Потрібно побудувати такий многочлен $Q(z)$, щоб він задовольняв умови:

$$Q^{(i)}(\beta_j)=\left[\Psi^+(z)\cdot(z+i)^{\kappa}\right]^{(i)}\Big|_{z=\beta_j} \quad (i=0,1,\ldots,p_j-1;\ j=1,\ldots,\nu),$$

$$Q^{(l)}(\alpha_k)=\left[\Psi^-(z)\cdot(z+i)^{\kappa}\right]^{(l)}\Big|_{z=\alpha_k} \quad (l=0,1,\ldots,m_k-1;\ k=1,2,\ldots,\mu).$$

Степінь многочлена $Q(z)$, відповідно до методики Гахова Ф.Д. [7], має значення $q=m+p-1=2N-1$.

Як результат, отримаємо вигляд для часткового розв'язку

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Y}^+(z) &= \mathrm{X}^+(z)\cdot\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_k)^{-p_k}\cdot\left[\Psi^+(z)-\frac{Q(z)}{(z+i)^{\kappa}}\right]; \\ \mathrm{Y}^-(z) &= \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-\kappa}\cdot\mathrm{X}^-(z)\cdot\prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{-m_k}\cdot\left[\Psi^-(z)-\frac{Q(z)}{(z+i)^{\kappa}}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

Для того, щоб отримати загальний розв'язок неоднорідної задачі Рімана на дійсній осі, потрібно додати до розв'язку однорідної задачі (2.9) частковий розв'язок (2.15). Отже, отримаємо

$$\begin{cases} \Phi^+(z) = X^+(z) \cdot \prod\limits_{j=1}^{\nu} (z-\beta_k)^{-p_k} \cdot \left[\Psi^+(z) - \dfrac{Q(z)}{(z+i)^{\kappa}} \right] + \\ \qquad + \dfrac{X^+(z) \cdot \prod\limits_{k=1}^{\mu} (z-\alpha_k)^{m_k} \cdot P_{\kappa-N}(z)}{(z+i)^{\kappa}}; \\ \Phi^-(z) = \left(\dfrac{z-i}{z+i} \right)^{-\kappa} \cdot X^-(z) \cdot \prod\limits_{k=1}^{\mu} (z-\alpha_k)^{-m_k} \cdot \left[\Psi^-(z) - \dfrac{Q(z)}{(z+i)^{\kappa}} \right] + \\ \qquad + \dfrac{X^-(z) \cdot \prod\limits_{j=1}^{\nu} (z-\alpha_j)^{p_j} \cdot P_{\kappa-N}(z)}{(z-i)^{\kappa}}. \end{cases} \tag{2.16}$$

Таким чином, формули (2.16) задають розв'язок неоднорідної задачі у випадку $\kappa - N \geq 0$.

Функція $\Phi^-(z)$ в точці $z = -i$ може мати полюс, при $\kappa < 0$. В точці $z = -i$ функція $\dfrac{\Psi^-(z)}{(z+i)^{-\kappa}}$ є необмеженою. Для анулювання полюсу $z = -i$ треба накласти вимогу, щоб в розкладі функції $\Psi^-(z)$ за степенями $(z+i)$ були рівні нулю перші $-\kappa$ коефіцієнти. Тобто в розкладі

$$\Psi^-(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z+i)^k ,$$

де $c_k = \dfrac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{g(\tau)}{X^+(\tau) \cdot (\tau+i)^{k+1}} d\tau$, потрібно покласти

$$c_0 = c_1 = \ldots = c_{-\kappa-1} = 0. \tag{2.17}$$

При $\kappa - N < 0$ потрібно покласти $P_{\kappa-N} \equiv 0$ в (2.16). Розв'язок неоднорідної задачі буде збігатися з окремим її розв'язком $\Upsilon^{\pm}(z)$. Функції $\Upsilon^{\pm}(z)$ мають полюс порядку $-(\kappa - N + 1)$ в точці $z = \infty$. Таким чином, $\Upsilon^{\pm}(z)$ перестає бути розв'язком неоднорідної задачі.

Розглянемо деякі умови, коли можна анулювати полюс в $z = \infty$. Можемо виділити два випадки:

$\kappa < 0$ – це I випадок;

$0 \le \kappa < N - 1$ – це II випадок.

Опрацюємо перший випадок $\kappa < 0$. Тут функція $\Psi(z) - \dfrac{Q(z)}{(z+i)^{\kappa}}$ на нескінченості має порядок *N–1*. Надамо функції вигляду

$$\Psi(z) - \frac{Q(z)}{(z+i)^{\kappa}} = \sum_{л=1}^{\infty} a_k \cdot z^{-k} - (z+i)^{-k} \cdot \sum_{n=0}^{2N-1} b_n \cdot z^n , \tag{2.18}$$

де

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau) \cdot \tau^{k-1} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{\nu} (\tau - \beta_j)^{p_j} \cdot g(\tau) \cdot \frac{\tau^{k-1}}{\mathrm{X}^{+}(\tau)} d\tau - \tag{2.19}$$

коефіцієнти функції $\Psi(z)$ зі степенями $\dfrac{1}{z}$, а $b_n(n = \overline{1,(2N-1)})$ – коефіцієнти многочлена *Q(z)*.

Опрацюємо другий доданок в правій частині рівності (2.18). У виразі $(z+i)^{-\kappa}\cdot\sum_{n=0}^{2N-1} b_n\cdot z^n$ степені змінюються від 0 до $-\kappa+2N-1$. Щоб звести до нуля полюс в точці $z=\infty$ для функцій

$$\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_k)^{-p_k}\cdot\left[\Psi^{+}(z)-\frac{Q(z)}{(z+i)^{\kappa}}\right];$$

$$\prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{-m_k}\cdot\left[\Psi^{-}(z)-\frac{Q(z)}{(z+i)^{\kappa}}\right],$$

є потреба, щоб були рівними нулю коефіцієнти при степенях $z^{-\kappa+(2N-1)}$, $z^{-\kappa+(2N-2)},\ldots,z^{-\kappa+(N+\kappa+1)}$. Повинні дорівнювати нулю такі коефіцієнти многочлена *Q(z)*:

$$b_{2N-1}=b_{2N-2}=\ldots=b_{N+\kappa+1}=0, \tag{2.20}$$

коли $N+\kappa+1>0$. Коли $N+\kappa+1\le 0$, то всі коефіцієнти многочлена *Q(z)* повинні дорівнювати нулю, а це суперечить змісту функції *Q(z)*. Таким чином, коли $-(N+1)<\kappa<0$, то неоднорідна задача може мати розв’язок при виконані умов (2.17) і (2.20), причому цей розв’язок задається формулами (2.16), при $P_{\kappa-N}(z)\equiv 0$. Коли ж $\kappa\le-(N+1)$, то задача Рімана на дійсній осі є нерозв’язною.

Тепер опрацюємо другий випадок $0\le\kappa<N-1$. Розглянемо функцію

$$\Psi(z)-\frac{Q(z)}{(z+i)^{\kappa}}=\frac{\Psi(z)\cdot(z+i)^{\kappa}-Q(z)}{(z+i)^{\kappa}}=\frac{(z+i)^{\kappa}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\cdot z^{-k}-\sum_{n=0}^{2N-1}b_n\cdot z^n}{(z+i)^{\kappa}},$$

де α_k – задано формулами (2.19), а $b_n(n=\overline{1,(2N-1)})$ – це коефіцієнти многочлена *Q(z)*.

Тоді степені функції $(z+i)^{-\kappa}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cdot z^{-k}$ не перевищують $\kappa-1$, а многочлен $\sum_{n=0}^{2N-1}b_n\cdot z^n$ має степінь від 0 до 2*N–1*.

Розглянемо функцію, за допомогою якої подається $\Phi^+(z)$ в співвідношенні (2.16)

$$\frac{\Psi(z)-\dfrac{Q(z)}{(z+i)^k}}{\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}}=\frac{\left(z+i\right)^{\kappa}\cdot\prod_{k=1}^{\nu}a_k\cdot z^{-k}-\sum_{n=0}^{2N-1}b_n\cdot z^n}{\left(z+i\right)^{\kappa}\cdot\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}}. \qquad (2.21)$$

Так як, в (2.21) степінь знаменника $\kappa+N$, то потрібно накласти вимогу, щоб в розкладі чисельника (2.21) коефіцієнти при степенях $z^{2N-1},z^{2N-2},\ldots,z^{\kappa+N+1}$ були рівними нулю і відповідали степеням многочлена $\sum_{n=0}^{2N-1}b_n\cdot z^n$. Розклад функції $(z+i)^{\kappa}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\cdot z^{-k}$ не може містити такі степені через те, що найменший степінь $\kappa+N+1$ буде більшим за $\kappa-1$. Отримуємо висновок, що вимога за якою анулюється полюс в нескінченно віддаленій точці зводиться до прирівнювання до нуля таких коефіцієнтів многочлена $\sum_{n=0}^{2N-1}b_n\cdot z^n$:

$$b_{2N-1}=b_{2N-2}=\ldots=b_{N+\kappa+1}=0. \qquad (2.22)$$

У випадку коли $0 \le \kappa < N-1$ розв'язок задачі Рімана на дійсній осі буде існувати за умови (2.22), а він подається формулами (2.16) в підстановці $P_{\kappa-N}(z) \equiv 0$.

Ситуація при $\kappa - N = -1$ не потрапила у розглянуті вище, тож у цьому випадку задача Рімана на дійсній осі розв'язна безумовно, а її розв'язок подається формулами (2.16) в підстановці $P_{\kappa-N}(z) \equiv 0$.

Тож зробимо підсумок:

1. Якщо $\kappa \ge N$: розв'язок подається формулами (2.16).

2. У всіх випадках коли $-(N+1) < \kappa < N$ розв'язок подається (2.16) в підстановці $P_{\kappa-N}(z) \equiv 0$. Тоді, розв'язок буде єдиним.

А. Коли $\kappa - N = -1$, то розв'язок існує безумовно.

Б. Коли $\kappa - N < -1$, то розв'язок існує умовно. У ситуації коли $-(N+1) < \kappa < 0$ умови існування розв'язку подаються формулами (2.22). У ситуації коли $-(N+1) < \kappa < 0$, умови мають вигляд (2.20), і вони збігаються з умовами (2.22).

3. Окремим виявився випадок $\kappa \le -(N+1)$, в якому задача є нерозв'язною, при цьому розв'язок можна отримати за допомогою (2.16) підставляючи $P_{\kappa-N}(z) \equiv 0$.

3 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ РІМАНА У ВИКЛЮЧНИХ ВИПАДКАХ

3.1 Розв'язання задач Рімана на замкненому контурі

Приклади 3.1, 3.2 і 3.4 наведені як задачі з відповідями (без розв'язань) в роботі Гахова Ф.Д. [7]. Приклади 3.3, 3.5 є авторськими.

Приклад 3.1 Розв'язати крайову задачу Рімана

$$\Phi^{+}(t)=(t-1)\cdot\Phi^{-}(t)+t^{2}-1,\quad t\in\gamma \tag{3.1}$$

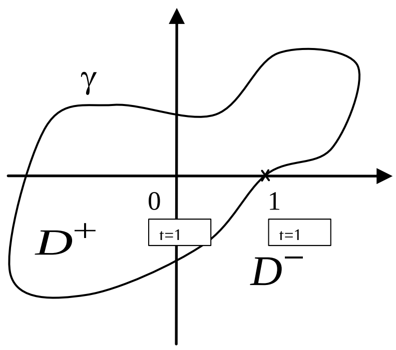

Рисунок 3.1

за таких припущень: $1\in\gamma$.

Розв'язання. На рисунку 3.1 наведено зображення контура γ, що задовольняє умову прикладу. В загальному випадку крайова умова має вигляд (1.4). Звідки

$$G(t)=(t-1);\quad G_1(t)=1;\quad g(t)=t^{2}-1;$$
$$\alpha_1=1;\quad m_1=m=1;\quad \mu=1;\quad p=0. \tag{3.2}$$

Знайдемо індекс функції $G_1(t)$. Функція $G_1(z)=1$ не має нулів і полюсів, тому

$$\kappa=indG_1(t)=0.$$

Оскільки застосуємо формулу (1.2)

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{\gamma}\frac{\ln\left[\tau^{-\kappa}\cdot G_1(\tau)\right]}{\tau-z}d\tau, \tag{3.3}$$

то для даного прикладу $\Gamma(z)=0$. Згідно з формулами (1.2) знайдемо функції $X^{\pm}(z)$:

$$X^{+}(z)=1; X^{-}(z)=1. \tag{3.4}$$

Застосовуючи формулу (1.5), отримаємо:

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{\gamma}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}\prod_{j=1}^{\nu}(\tau-\beta_j)^{p_j}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\tau^2-1}{1}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Так як функція щільності останнього інтеграла типу Коші $f(z)=z^2-1$ аналітична в області D^{+}, то відповідно до співвідношенням (А.6), одержимо :

$$\Psi(z)=\begin{cases} z^2-1, z\in D^{+}; \\ 0, z\in D^{-}. \end{cases}$$

Звідси маємо

$$\Psi^{+}(z)=z^2-1, \quad \Psi^{-}(z)=0. \tag{3.5}$$

Використовуючи формулу для обчислення степеня q многочлена $Q(z)$ і враховуючи (3.2), обчислимо

$$q=m+p-1=1+0-1=0.$$

Отже, многочлен $Q_0(z)$ потрібно подати у вигляді $Q_0(z)=a$, де коефіцієнт a – невизначений. Визначимо його, враховуючі $Q_0(\alpha_1)=\Psi^{-}(\alpha_1)$:

$$Q_0(1) = a,\ \ \Psi^-(1) = 0;$$
$$a = 0;$$
$$Q_0(z) = 0.$$

За формулами (1.7) обчислимо функції $Y^{\pm}(z)$:

$$Y^+(z) = X^+(z) \cdot \frac{\Psi^+(z) - Q_0(z)}{\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}} = 1 \cdot \frac{z^2-1-0}{1} = z^2 - 1,$$

$$Y^-(z) = z^0 \cdot X^-(z) \cdot \frac{\Psi^-(z) - Q_0(z)}{\prod_{k=1}^{\nu}(z-a_k)^{m_k}} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{0-0}{z-1} = 0.$$

Так як $\kappa - p = 0$, то $P_{\kappa-p}(z) = A$. Розв'язок знайдемо, застосовуючи (1.8):

$$\Phi^+(z) = Y^+(z) + X^+(z) \cdot \prod_{k=1}^{\mu}(z-a_k)^{m_k} \cdot P_{\kappa-p}(z) = z^2 - 1 + 1 \cdot (z-1) \cdot A,$$

$$\Phi^-(z) = Y^-(z) + X^-(z) \cdot z^{-\kappa} \cdot \prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j} \cdot P_{\kappa-p}(z) = 0 + 1 \cdot z^0 \cdot 1 \cdot A = A.$$

Відповідь. $\Phi^+(z) = z^2 - 1 + A \cdot (z-1)$, $\Phi^-(z) = A$.

Приклад 3.2 Розв'язати крайову задачу Рімана

$$\varPhi^+(t) = \frac{1}{t-1} \cdot \varPhi^-(t) + t + \frac{1}{t-1}, \quad t \in \gamma \tag{3.6}$$

за умови $1 \in \gamma$.

Розв'язання. Контур, що задовольняє умову зображено на рисунку 3.1. Враховуючи загальний вигляд крайової умови (1.4), отримаємо:

$$G(t)=\frac{1}{t-1};\quad G_1(t)=1,\quad g(t)=t+\frac{1}{t-1};$$
$$m=0;\quad \beta_1=1;\quad p_1=p=1;\quad \nu=1. \tag{3.7}$$

Функція $G_1(z)=1$ не має ні нулів, ні полюсів, тому $\kappa=indG_1(t)=0$. Звертаючи увагу на те, що

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\frac{\ln\left[\tau^0\cdot 1\right]}{\tau-z}d\tau=0, \tag{3.8}$$

застосовуючи формулу (1.2) знайдемо функції $X^{\pm}(z)$:

$$X^{+}(z)=1; X^{-}(z)=1. \tag{3.9}$$

Використовуючи (1.5), одержимо:

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int(\tau-1)\cdot\frac{\tau+\frac{1}{\tau-1}}{1}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(\tau\cdot(\tau-1)+1)\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Оскільки функція щільності останнього інтеграла типу Коші $f(z)=z\cdot(z-1)+1$ аналітична в області D^{+}, то цей інтеграл може бути обчисленим за формулою (А.6):

$$\Psi(z)=\begin{cases}z\cdot(z-1)+1, z\in D^{+};\\ 0, z\in D^{-}.\end{cases}$$

Враховуючи це, маємо

$$\Psi^{+}(z)=z\cdot(z-1)+1,\quad \Psi^{-}(z)=0. \tag{3.10}$$

Знаючі (3.7), обчислимо степінь q многочлена $Q_0(z)$: $q = m + p - 1 = 0 - 1 - 1 = 0$. Саме через це, многочлен $Q_0(z)$ матиме вигляд $Q_0(z) = A$. Знайдемо значення коефіцієнта A, враховуючі $Q_0(\beta_1) = \Psi^+(\beta_1)$, отримаємо:

$$Q_0(1) = A,\ \Psi^+(1) = 1;$$
$$A = 1;$$
$$Q_0(z) = 1 = Q_0(z).$$

Функції $Y^{\pm}(z)$ знайдемо за формулами (1.7):

$$Y^+(z) = X^+(z) \cdot \frac{\Psi^+(z) - Q_0(z)}{\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}} = 1 \cdot \frac{z \cdot (z-1) + 1 - 1}{z-1} = z,$$

$$Y^-(z) = z^0 \cdot \mathrm{X}^-(z) \cdot \frac{\Psi^-(z) - Q_0(z)}{\prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{m_k}} = 1 \cdot \frac{0-1}{1} = -1.$$

Оскільки $\kappa - p = 0 - 1 = -1$, то в (1.8) потрібно покласти $P_{\kappa - p}(z) \equiv 0$. Отже, розв'язком поставленої задачі буде

$$\Phi^+(z) = Y^+(z) + 0 = z,$$

$$\Phi^-(z) = Y^-(z) + 0 = -1.$$

Відповідь. $\Phi^+(z) = z$, $\Phi^-(z) = -1$.

Приклад 3.3 Розв'язати крайову задачу Рімана

$$\Phi^+(t) = \frac{(t-1)\cdot(t-2)}{t-4} \cdot \Phi^-(t) + t + 1 + \frac{1}{t} + \frac{4}{t-4}, \quad t \in \gamma \qquad (3.11)$$

за таких припущень: $1\,i\,4 \in \gamma, \quad 0\,i\,2 \in D^{+}$.

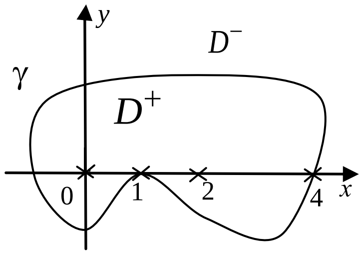

Рисунок 3.2

Розв'язання. Зображення контура наведено на рисунку 3.2. В загальному вигляду крайова умова має вигляд (1.4). Звідки

$$G_1(t) = t - 2,\ g(t) = t + 1 + \frac{1}{t} + \frac{4}{t-4},$$

$$\alpha_1 = 1; \quad m_1 = m = 1; \quad \mu = 1; \quad \beta_1 = 4; \quad p_1 = p = 1; \quad \nu = 1. \tag{3.12}$$

В області D^{+} функція $G_1(z) = z - 2$ має один нуль і не має полюсів, тому

$$\kappa = ind G_1(t) = 1.$$

Застосуємо формулу щодо знаходження функції $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\ln\left[(\tau - z_0)^{-k} \cdot G_1(\tau)\right]}{\tau - z} d\tau,$$

для $z_0 = 2$, тоді

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\ln\left[(\tau - 2)^{-1} \cdot (\tau - 2)\right]}{\tau - 2} d\tau = 0, \tag{3.13}$$

Використовуючи формули (1.2) знайдемо функції $X^{\pm}(z)$:

$$X^{+}(z) = 1;\ X^{-}(z) = 1. \tag{3.14}$$

А за формулою (1.5), отримаємо:

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{\gamma}\prod_{j=1}^{\nu}\left(\tau-\beta_j\right)^{p_j}\cdot\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{\gamma}(\tau-4)\cdot\frac{\tau+1+\frac{1}{\tau}+\frac{4}{\tau-4}}{1}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}..$$

Дослідимо функцію щільності останнього інтеграла типу Коші

$$f(z)=(z-4)\cdot\left(z+1+\frac{1}{z}+\frac{4}{z-4}\right)=(z-4)\cdot(z+1)+5-\frac{4}{z}.$$

Вона є сумою функції $f_1(z)=(z-4)(z+1)+5$, аналітичної в області D^{+}, та функції $f_2(z)=-\frac{4}{z}$, аналітичної в D^{-}, то відповідно до формул (А.6),(А.7) обчислимо:

$$\Psi(z)=\begin{cases}(z-4)(z+1)+5, z\in D^{+};\\ \frac{4}{z}, z\in D^{-}.\end{cases}$$

Отже, $\Psi^{+}(z)=(z-4)(z+1)+5,\ \Psi^{-}(z)=\frac{4}{z}.$

Використавши формулу для обчислення степеня q многочлена $Q(z)$ і враховуючи (3.12), обчислимо

$$q=m+p-1=1+1-1=1.$$

Таким чином, многочлен $Q(z)$ має вигляд $Q(z)=Az+B$. Обчислимо значення коефіцієнтів *A і B.* Враховуючи, що

$$Q(1)=A+B,$$
$$Q(1)=\Psi^{-}(1)=4,$$

отримуємо:

$$Q(z) = Az + B;$$
$$Q(4) = 4A + B;$$
$$Q(4) = \Psi^{+}(4) = 5$$

Таким чином, потрібно отримати розв’язок системи

$$\begin{cases} 4A + B = 5, \\ A + B = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A = 1, \\ B = 4 - A, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{3}, \\ B = \dfrac{11}{3}, \end{cases}$$

отже, $Q(z) = \dfrac{z+11}{3}$.

За допомогою формул (1.7) виведемо частковий розв’язок задачі $Y^{\pm}(z)$:

$$Y^{+}(z) = 1 \cdot \frac{(z-4)\cdot(z+1) + 5 - \left(\dfrac{z+11}{3}\right)}{z-4} = z + 1 - \frac{1}{3} = z + 1 - 1 = z + \frac{2}{3},$$

$$Y^{-}(z) = (z-2)^{-1} \cdot 1 \cdot \frac{\dfrac{4}{z} - \dfrac{z+11}{3}}{z-1} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{\dfrac{12 - z^{2} - 11z}{3z}}{z-1} = \frac{12 - z^{2} - 11z}{3z\cdot(z-2)\cdot(z-1)}.$$

Для перевірки правильності отриманого розв’язку, прорахуємо, чи задовольняють отримані функції $Y^{\pm}(z)$ задану крайову умову (3.11), тобто

$$Y^{+}(t) = \frac{(t-1)\cdot(t-2)}{t-4} \cdot Y^{-}(t) + t + 1 + \frac{1}{t} + \frac{4}{t-4}, \quad t \in \gamma.$$

Спочатку обчислимо граничні значення на контурі часткового розв’язку:

$$Y^{+}(t)=\lim_{z\to t}Y^{+}(z)=t+\frac{2}{3},\quad Y^{-}(t)=\lim_{z\to t}Y^{-}(z)=\frac{-t^{2}-11t+12}{3t\cdot\left(t-2\right)\cdot\left(t-1\right)}.$$

Граничний перехід в останніх рівностях був можливим завдяки неперервності функції $Y^{\pm}(z)$ в точках контура γ. Тепер підставимо граничні значення $Y^{\pm}(t)$ в крайову умову:

$$t+\frac{2}{3}=\frac{\left(t-1\right)\cdot\left(t-2\right)}{t-4}\cdot\frac{-t^{2}-11t+12}{3t\cdot\left(t-2\right)\cdot\left(t-1\right)}+t+1+\frac{1}{t}+\frac{4}{t-4};$$

$$t=\frac{-t^{2}-11t+12}{3t\left(t-4\right)}+t+1+\frac{1}{t}+\frac{4}{t-4}-\frac{2}{3};$$

$$t=\frac{-t^{2}-11t+12+3t^{3}-12t^{2}+3t^{2}-12t+3t-12+12t-2t^{2}+8t}{3t\cdot\left(t-4\right)};$$

$$t=\frac{3t^{2}\left(t-4\right)}{3t\cdot\left(t-4\right)}.$$

Таким чином, можемо зробити висновок, що функції $Y^{\pm}(z)$ задовольняють крайову умову, отже, вони є частковими розв’язками даної задачі.

Так як $\kappa-p=0$, то звідси $P_{\kappa-p}(z)=C$. Знайдемо розв’язок застосувавши (1.8):

$$\Phi^{+}(z)=Y^{+}\left(z\right)+X^{+}\left(z\right)\cdot\prod_{k=1}^{\mu}\left(z-\alpha_{k}\right)^{m_{k}}\cdot P_{\kappa-p}(z)=Y^{+}\left(z\right)+1\cdot\left(z-1\right)\cdot C=z+\frac{2}{3}+\left(z-1\right)\cdot C,$$

$$\Phi^{-}(z)=Y^{-}\left(z\right)+z^{-\kappa}\cdot X^{-}\left(z\right)\cdot\prod_{j=1}^{\nu}\left(z-\beta_{j}\right)^{p_{i}}\cdot P_{\kappa-p}(z)=Y^{-}\left(z\right)+\left(z-2\right)^{-1}\cdot1\cdot\left(z-4\right)\cdot C=$$

$$=\frac{-z^{2}-11z+12}{3z\left(z-2\right)\left(z-1\right)}+\frac{z-4}{z-2}\cdot C=-\frac{z+12}{3z\left(z-2\right)}+\frac{z-4}{z-2}\cdot C.$$

Для того, щоб упевнитись, чи правильний знайдений розв'язок, перевіримо, чи задовольняють отримані функції $Y^{\pm}(z)$ задану крайову умову (3.11). Завдяки неперервності функцій $\Phi^{+}(z)$ і $\Phi^{-}(z)$ в точках контура, при $t\in\gamma$ матимемо:

$$\Phi^{+}(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^{+}}}\Phi^{+}(z)=Y^{+}(t)+1\cdot(t-1)\cdot C\,.$$

$$\Phi^{-}(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^{-}}}\Phi^{-}(z)=Y^{-}(t)+(t-2)^{-1}\cdot(t-4)\cdot C\,.$$

Підставимо в умову:

$$Y^{+}(t)+1\cdot(t-1)\cdot C=\frac{(t-1)\cdot(t-2)}{t-4}\cdot\left(Y^{-}(t)+(t-2)^{-1}\cdot(t-4)\cdot C\right)+t+1+\frac{1}{t}+\frac{4}{t-4};$$

$$Y^{+}(t)=\frac{(t-1)\cdot(t-2)}{t-4}\cdot Y^{-}(t)+t+1+\frac{1}{t}+\frac{4}{t-4}.$$

Остання рівність – тотожність, що було перевірено вище.

Відповідь. $\Phi^{+}(z)=z+\dfrac{2}{3}+\left(z-1\right)\cdot C,\ \Phi^{-}(z)=-\dfrac{z+12}{3z\left(z-2\right)}+\dfrac{z-4}{z-2}\cdot C$.

Приклад 3.4 Показати, що крайова задача

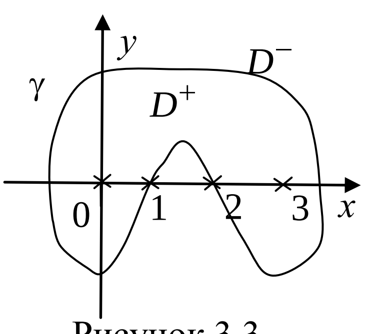

Рисунок 3.3

$$\Phi^{+}(t)=\frac{1}{(t-1)\cdot(t-2)}\cdot\Phi^{-}(t)+t+1+\frac{1}{t}-\frac{a}{t-3}\,, \qquad (3.15)$$

за умови, що $1{,}2\in\gamma,\ 0{,}3\in D^{+}$ є розв'язною лише при $a=1$. Знайти розв'язок в такому випадку.

Розв'язання. Схематичне зображення контура на комплексній площині наведено на рисунку 3.3. Із (1.4) випливає, що

$$G(t)=\frac{1}{(t-1)\cdot(t-2)};\ G_1(t)=1;$$

$$m=0;\ \beta_1=1,\ \beta_2=2;\ p_1=1,\ p_2=1,\ p=2,\ \nu=2. \qquad (3.16)$$

Очевидно, що

$$\kappa=ingG_1(t)=0. \qquad (3.17)$$

Згідно з формулами (1.2) для даного прикладу

$$\Gamma(z)=0,\quad X^+(z)=1; X^-(z)=1. \qquad (3.18)$$

Використовуючи співвідношення (1.5), отримаємо:

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_\gamma(\tau-1)\cdot(\tau-2)\cdot\left(\tau+1+\frac{1}{\tau}-\frac{a}{\tau-3}\right)\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_\gamma\left((\tau^2-1)\cdot(\tau-2)+(\tau-3-a\tau)\cdot\left[1+\frac{2}{\tau\cdot(\tau-3)}\right]\right)\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Функція щільності останнього інтеграла типу Коші є сумою функції $f_1(z)=(z^2-1)\cdot(z-2)+z-3-az$, яка є аналітичною в області D^+, і функції $f_2(z)=\dfrac{2\cdot(z-3-az)}{z\cdot(z-3)}$, яка є аналітичною в D^-, тому відповідно до (А.6) і (А.7) одержуємо:

$$\Psi(z)=\begin{cases}(z^2-1)\cdot(z-2)+z-3-az,\ z\in D^+;\\ -\dfrac{2\cdot(z-3+az)}{z\cdot(z-3)}, z\in D^-.\end{cases}$$

Отже, маємо

$$\Psi^{+}(z)=(z^{2}-1)\cdot(z-2)+z-3-az\,,\quad \Psi^{-}(z)=-\frac{2\cdot(z-3+az)}{z\cdot(z-3)}\,. \tag{3.19}$$

Враховуючи (3.16) і (3.17), обчислимо степінь q многочлена $Q(z)$:

$$q=m+p-1=1+1-1=1.$$

Тому $Q(z)=C_1 z+C_2$. Знаходимо значення невизначених коефіцієнтів, враховуючи, що $Q(\beta_1)=\Psi^{+}(\beta_1)$, $Q'(\beta_2)=\Psi^{+\prime}(\beta_2)$. Отримуємо систему для знаходження коефіцієнтів

$$Q(1)=C_1+C_2=-2-a=\Psi^{+}(1);$$
$$Q(2)=2C_1+C_2=-1-2a=\Psi^{+\prime}(2)\,.$$

Розв'язком є $C_1=1-a,\;\; C_2=-3$. Звідси, $Q(z)=(1-a)\cdot z-3.$

Знаходимо функції $Y^{\pm}(z)$ за формулами (1.7):

$$Y^{+}(z)=1\cdot\frac{(z-1)\cdot(z+1)\cdot(z-2)+z-3-az-z+az+3}{(z-1)\cdot(z-2)}=z+1\,,$$
$$Y^{-}(z)=z^{0}\cdot 1\cdot\frac{1}{1}\cdot\left(-\frac{2}{z}+\frac{2a}{z-3}-(1-a)\cdot z+3\right).$$

Так як $\kappa-p=-2$, то розв'язок можна знайти за формулами (1.8), обираючи $P_{\kappa-p}(z)\equiv 0$, тобто

$$\Phi^{+}(z)=Y^{+}(z)+0=z+1,$$
$$\Phi^{-}(z)=Y^{-}(z)+0=-\frac{2}{z}+\frac{2a}{z-3}-(1-a)\cdot z+3.$$

Перевіримо виконання умови існування розв'язку крайової задачі. Потрібно знайти коефіцієнти c_k. Визначаємо, коефіцієнти з якими номерами потребують обчислення. Із (1.10) отримуємо, що значення номерів змінюються від $q=1$ до $k=q-p+\kappa+2=1-2+0+2=1$. Таким чином, знайдемо c_1 за формулою (1.9):

$$c_1=-\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_\gamma\frac{\prod_{j=1}^{\nu}\left(\tau-\beta_j\right)^{p_j}\cdot g(\tau)\cdot\tau^{1-1}}{\mathrm{X}^+(\tau)}d\tau=-\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_\gamma\frac{(\tau-1)\cdot(\tau-2)\cdot\left[\tau+1+\frac{1}{\tau}-\frac{a}{\tau-3}\right]}{1}d\tau=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_\gamma\left[\left(\tau^2-1\right)\cdot\left(\tau-2\right)+\tau-3-a\tau+\frac{2}{\tau}-\frac{2a}{\tau-3}\right]d\tau.$$

Для функція $f_1(z)=(z^2-1)\cdot(z-2)+z-3-az$, яка є аналітичною в області D^+, інтеграл вздовж зімкненого контура дорівнює нулю. Використовуючи формулу Коші, обчислимо $\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_\gamma\frac{2}{\tau}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_\gamma\frac{2a}{\tau-3}d\tau=2-2a$. Отже, умовою існування розв'язку задачі є

$$2-2a=0.$$

Таким чином, $a=1$.

Відповідь. Розв'язок існує при $a=1$, причому цей розв'язок має вигляд $\Phi^+(z)=z+1,\ \Phi^-(z)=-\frac{2}{z}+\frac{2}{z-3}+3.$

Приклад 3.5 Розв'язати крайову задачу Рімана

$$\varPhi^+(t)=\frac{(t-i)\cdot(t-3i)}{(t+i)\cdot(t+3i)}\cdot\varPhi^-(t)+\frac{12t}{\left(t+i\right)^2\cdot(t+3i)\cdot(t-i)},\qquad(3.20)$$

за умови $\pm 3i\in\gamma,\ \pm i\in D^+$.

Розв'язання. Зображення області наведено на рисунку 3.4. Оберемо $z_0 = i$. В загальному вигляді крайова умова має вигляд (1.4). Звідки

$$G_1(t) = \frac{t-i}{t+i};$$

$$\alpha_1 = 3i;\ m_1 = m = 1;\quad \beta_1 = -3i;\ p_1 = p = 1. \qquad (3.21)$$

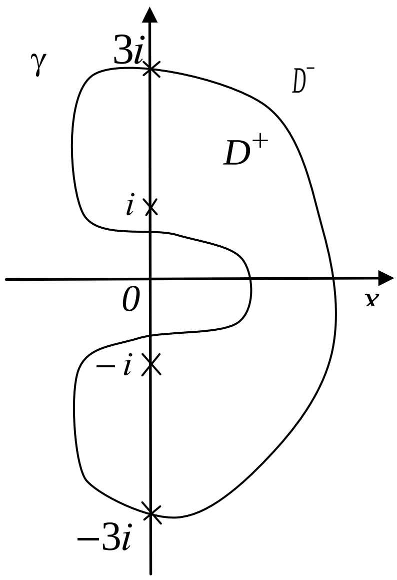

Рисунок 3.4

Для функції $G_1(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ знайдемо нулі

$$z - i = 0,$$

$$z = i \in D^+ \Rightarrow N^+ = 1.$$

та полюси

$$z + i = 0,$$

$$z = -i \in D^+ \Rightarrow P^+ = 1.$$

Тоді $\kappa = IndG_1(t) = N^+ - P^+ = 0$. Спираючись на формулу (1.2), отримаємо :

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\gamma \frac{\ln\left[(\tau - z_0)^{-\kappa} \cdot G_1(\tau)\right]}{\tau - z} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\gamma \frac{\ln\left[\left(\tau - z_0\right)^0 \cdot \dfrac{\tau - i}{\tau + i}\right]}{\tau - z} d\tau.$$

(3.22)

Функція щільності $f(z) = \ln\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)$ має особливі точки $\pm i \in D^+$, тому $f(z)$ аналітична в D^-, $f(\infty) = \ln 1 = 0$, то для даного інтеграла потрібно застосувати формулу (А.7),

$$\varGamma(z)=\begin{cases}0, \quad z\in D^{+};\\ \ln\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right), \ z\in D^{-}.\end{cases}$$

Згідно формул (1.16) знайдемо функції $X^{\pm}(z)$:

$$X^{+}(z)=e^{\varGamma^{+}(z)}=e^{0}=1; \qquad X^{-}(z)=e^{\varGamma^{-}(z)}=\frac{z+i}{z-i}. \tag{3.23}$$

Знаючи (1.5), отримаємо:

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\gamma}\left(\tau+3i\right)\cdot\frac{12\tau}{\left(\tau+i\right)^{2}\cdot\left(\tau+3i\right)\cdot\left(\tau-i\right)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Функція $f(z)=\dfrac{12z}{(z+i)^{2}\cdot(z-i)}$ має особливі точки $\pm i\in D^{+}$, тому функція $f(z)$ є аналітичною в області D^{-}, отже, останній інтеграл може бути обчисленим за формулою (А.7):

$$\Psi(z)=\begin{cases}0, \ z\in D^{+};\\ -\dfrac{12z}{(z+i)^{2}\cdot(z-i)}, z\in D^{-}.\end{cases}$$

Тепер можемо знайти $Q(z)$. Із (3.31) виливає, що

$$q=m+p-1=1+1-1=1.$$

Таким чином, многочлен $Q(z)$ має вигляд $Q(z)=Az+B$. Знаходимо значення його коефіцієнтів, знаючи, що $Q(\alpha_1)=\Psi^{-}(\alpha_1)$, $Q(\beta_1)=\Psi^{+}(\beta_1)$. Так як

$$Q(\beta_1)=Q(-3i)=-3Ai+B\,,\quad \Psi^{+}(\beta_1)=\Psi^{+}(-3i)=0\,,$$

$$Q(\alpha_1)=Q(3i)=3Ai+B\,,\quad \Psi^{-}(\alpha_1)=\Psi^{-}(3i)=-\frac{12\cdot 3i}{\left(3i+i\right)^2\cdot\left(3i-i\right)}=\frac{9}{8},$$

то отримаємо:

$$\begin{cases}-3Ai+B=0,\\ 3Ai+B=\dfrac{9}{8},\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}2B=\dfrac{9}{8},\\ -3Ai+B=0,\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}B=\dfrac{9}{16},\\ A=\dfrac{3}{16i}.\end{cases}$$

Таким чином, $Q(z)=\dfrac{3}{16i}\cdot z+\dfrac{9}{16}=\dfrac{3\left(z+3i\right)}{16i}$.

Зза формулами (1.7) знайдемо частковий розв'язок задачі:

$$Y^{+}(z)=1\cdot\frac{0-\left(\dfrac{3\left(z+3i\right)}{16i}\right)}{z+3i}=-\frac{3}{16i}\,,$$

$$Y^{-}(z)=(z-i)^0\cdot\frac{z+i}{z-i}\cdot\frac{-\dfrac{12z}{(z+i)^2\cdot(z-i)}-\dfrac{3\left(z+3i\right)}{16i}}{z-3i}=\frac{3i\left(z^3+7i\,z^2-23z-i\right)}{16(z+i)\cdot(z-i)^2}.$$

Оскільки $\kappa-p=-1$, то для отримання розв'язку потрібно в формулі (1.8) покласти $P_{\kappa-p}(z)\equiv 0$. Тоді розв'язок набуде вигляду

$$\Phi^{+}(z)=-\frac{3}{16i}\,,$$

$$\Phi^{-}(z)=\frac{3i\left(z^3+7i\,z^2-23z-i\right)}{16(z+i)\cdot(z-i)^2}\,.$$

Зробимо перевірку, підставляючи знайдені функції в крайову умову (3.21). Тоді права частина (3.21) буде мати вигляд:

$$\frac{(t-i)\cdot(t-3i)}{(t+i)\cdot(t+3i)}\cdot\Phi^{-}(t)+\frac{12t}{\left(t+i\right)^{2}\cdot(t+3i)\cdot(t-i)}=$$

$$=\frac{(t-i)\cdot(t-3i)}{(t+i)\cdot(t+3i)}\cdot\frac{3i\left(t^{3}+7i\,t^{2}-23t-i\right)}{16(t+i)\cdot(t-i)^{2}}+\frac{12t}{\left(t+i\right)^{2}\cdot(t+3i)\cdot(t-i)}=-\frac{3}{16i}\quad(t\in\gamma).$$

Отримана функція збігається з $\Phi^{+}(t)$.

Відповідь. $\Phi^{+}(z)=-\dfrac{3}{16i},\quad \Phi^{-}(z)=\dfrac{3i\left(z^{3}+7i\,z^{2}-23z-i\right)}{16(z+i)\cdot(z-i)^{2}}$.

3.2 Розв’язання крайових задач Рімана на дійсній осі

Приклад 3.6 Розв’язати крайову задачу Рімана

$$\Phi^{+}(t)=\frac{(t-i)\cdot(t-2)}{(t+4i)t}\cdot\Phi^{-}(t)-\frac{12i}{t(t+4i)},\qquad t\in R. \tag{3.24}$$

Розв’язання. В загальному вигляді крайова умова задачі Рімана на дійсній осі має вигляд (2.10). Звідки

$$G_{1}(t)=\frac{t-i}{t+4i};$$

$$\alpha_{1}=2;\; m_{1}=m=1=N;\; \beta_{1}=0;\; p_{1}=p=1=N. \tag{3.25}$$

Функція $G_{1}(z)=\dfrac{z-i}{z+4i}$ має нулі $z=i\in D^{+}$, полюси: $z=-3i\notin D^{+}$, тому $N^{+}=1$, $P^{+}=0$, а індекс функції $G_{1}(t)$ дорівнює $\text{к}=IngG_{1}(t)=N^{+}-P^{+}=1$.

Видозмінимо формулу (Б.27):

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left[\left(\frac{\tau-i}{\tau+4i}\right)^{-\kappa}\cdot G_1(\tau)\right]\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{\gamma}\ln\left[\left(\frac{\tau-i}{\tau+4i}\right)^{-1}\cdot\frac{\tau-i}{\tau+4i}\right]\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}. \tag{3.26}$$

Функція щільності даного інтеграла $\phi(z)=\ln 1=0$. Тоді

$$\Gamma(z)=0. \tag{3.27}$$

Згідно з формулами (Б.26) обчислимо функції $X^{\pm}(z)$:

$$X^{\pm}(z)=e^{\Gamma^{\pm}(z)}=1, \tag{3.28}$$

Знайдемо розв’язок однорідної задачі $\Phi^{+}(t)=\dfrac{(t-i)\cdot(t-2)}{(t+4i)t}\cdot\Phi^{-}(t),\quad t\in R$.

Оскільки $\kappa=1,\ N=1$, то $P_{\kappa-N}(z)=C$, тому аналогічно до формули (3.9) маємо:

$$\Phi_0^{+}(z)=\frac{\prod\limits_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}\cdot X^{+}(z)\cdot P_{\kappa-N}(z)}{(z+4i)^{\kappa}}=\frac{(z-2)\cdot 1\cdot C}{(z+4i)}=\frac{(z-2)\cdot C}{z+4i},$$

$$\Phi_0^{-}(z)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}\cdot X^{-}(z)\cdot P_{\kappa-N}(z)}{(z-i)^{\kappa}}=\frac{1\cdot z\cdot C}{z-i}.$$

Застосуємо формулу (3.13)

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{j=1}^{\nu}(\tau-\beta_j)^{p_j}\cdot\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\tau\cdot\frac{-12i}{\tau(\tau+4i)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-12i}{\tau+4i}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Щільністю отриманого інтеграла є функція $\phi(z)=\dfrac{-12i}{z+4i}$ з особливою точкою $-4i\in D^{-}$, яка є аналітичною в D^{+}, тому після застосування (А.14) отримаємо

$$\Psi^{+}|(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-12i}{\tau+4i}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}=\begin{cases}\varphi(z)+\left(\dfrac{-\varphi(\infty)}{2}\right), & z\in D^{+};\\ -\dfrac{\varphi(\infty)}{2}, z\in D^{-};\end{cases}=\begin{cases}-\dfrac{12i}{z+4i}, z\in D^{+};\\ 0, z\in D^{-}.\end{cases}$$

Звідси знайдемо

$$\Psi^{+}(z)=-\frac{12i}{z+4i};$$

$$\Psi^{-}(z)=0.$$

Враховуючи (3.24), одержимо $q=2N-1=1$.Для даної задачі многочлен $Q(z)$ має вигляд $Q(z)=Az+B$. Знайдемо значення коефіцієнтів A і B, виходячи із рівностей

$$Q(0)=\left[\Psi^{+}(z)\cdot(z+4i)^{\kappa}\right]\Big|_{z=0},$$

$$Q(1)=\left[\Psi^{-}(z)\cdot(z+4i)^{\kappa}\right]\Big|_{z=1}.$$

Оскільки

$$\Psi^{+}(z)\cdot(z+4i)=-12i,\quad \Psi^{-}(z)\cdot(z+4i)=0;$$

$$Q(\beta_1)=Q(0)=B,\quad Q(\alpha_1)=Q(2)=2A+B,$$

то

$$\begin{cases} B=-12i, \\ 2A+B=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-12i, \\ A=6i. \end{cases}$$

Звідки $Q(z)=6iz-12i$.

Частковий розв'язок даної крайової задачі – функції $Y^{\pm}(z)$ – визначимо за формулами (2.15):

$$Y^{+}(z)=X^{+}(z)\cdot\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{-p_j}\cdot\left[\Psi^{+}(z)-\frac{Q(z)}{(z+4i)^{\kappa}}\right]=$$

$$=1\cdot\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{-12i}{z+4i}-\frac{6iz-12i}{(z+4i)^{1}}\right]=-\frac{6i}{z+4i};$$

$$Y^{-}(z)=\left(\frac{z-i}{z+4i}\right)^{-\kappa}\cdot \mathrm{X}^{-}(z)\cdot\prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{-m_k}\cdot\left[\Psi^{-}(z)-\frac{Q(z)}{(z+4i)^{\kappa}}\right]=$$

$$=\left(\frac{z-i}{z+4i}\right)^{-1}\cdot 1\cdot(z-2)^{-1}\cdot\left[0-\frac{6iz-12i}{(z+4i)^{1}}\right]=-\frac{6i}{z-i}.$$

Результат даної задачі знаходимо як суму розв'язку однорідної задачі і частинного розв'язку неоднорідної, застосовуючи (2.16):

$$\Phi^{+}(z)=Y^{+}(z)+\Phi_0^{+}(z)=-\frac{6i}{z+4i}+\frac{(z-2)\cdot C}{z+4i}=\frac{-6i+(z-2)\cdot C}{z+4i};$$

$$\Phi^{-}(z)=Y^{-}(z)+\Phi_0^{-}(z)=-\frac{6i}{z-i}+\frac{z\cdot C}{z-i}=-\frac{6i+z\cdot C}{z-i}.$$

Перевіримо правильність розв'язку, підставляючи знайдені функції в крайову умову (3.24). Тоді ліва і права частини (3.24) відповідно будуть мати вигляд:

$$\Phi^{+}(t)=\frac{-6i+(t-2)\cdot C}{t+4i};$$

$$\frac{(t-i)\cdot(t-2)}{(t+4i)\cdot t}\cdot\Phi^{-}(t)-\frac{12i}{t\cdot(t+4i)}=\frac{(t-i)\cdot(t-2)}{t\cdot(t+4i)}\cdot\left(-\frac{6i+t\cdot C}{t-i}\right)-\frac{12i}{t\cdot(t+4i)}=$$
$$=\frac{-6i+\left(t-2\right)\cdot C}{t+4i}\quad(-\infty<t<+\infty).$$

Отже, функції $\Phi^{\pm}(z)$ задовольняють крайову умову.

Відповідь. $\Phi^{+}(z)=\dfrac{-6i+(z-2)C}{z+4i}$; $\Phi^{-}(z)=\dfrac{-6izC}{z-i}$.

ВИСНОВКИ

Для класичної крайової задачі Рімана припускається, що коефіцієнт цієї задачі задовольняє умову Гельдера і не перетворюється в нуль у жодній точці контура. В роботі наведено дослідження Гахова Ф.Д. щодо задачі у виключному випадку, де відсутні зазначені обмеження, тобто коефіцієнт крайової задачі в окремих точках контура може обертатись в нуль або нескінченість цілих порядків.

Метою роботи було дослідження виключних випадків крайової задачі Рімана на замкненому контурі та на дійсній осі з наведенням конкретних прикладів розв’язання таких задач.

Для досягнення цієї мети розв’язано наступні проблеми:

1) наведено відомі теоретичні викладки щодо методу Гахова Ф.Д. розв’язання поставленої задачі на замкненому контурі;

2) досліджено метод розв’язання задачі у виключному випадку на дійсній осі, аналогічно випадку замкненого контура;

3) наведено приклади розв’язання поставленої задачі на замкненому контурі, з яких два приклади є авторськими (приклади 3.3, 3.5);

4) наведено авторський приклад розв’язання поставленої задачі на дійсній осі (приклад 4.1).

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Александров В.М., Чебаков М.И. Введение в механику контактных взаимодействий. Ростов-на-Дону : Изд-во ООО «ЦВВР», 2007. 114 с.

2. Бабаев А.А., Салаев В.В. Краевые задачи и сингулярные уравнения на спрямляемом контуре // *Математические заметки*. 1982. № 4. 580 с.

3. Васильева Ю.В., Плакса С.А. Кусочно-непрерывная краевая задача Римана на спрямляемой кривой // *Украинский мат. журн*ал. 2006. № 5. С. 616 − 628.

4. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. Москва : Наука, 1970. 379 с.

5. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002. 228 с.

6. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов: уч. пособие. Ч. 1. Харьков, 2000. 92 с.

7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. Москва : Наука, 1977. 640 с.

8. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. Москва : Наука, 1986. 239 с.

9. Данилов Е. А. Зависимость числа решений однородной задачи Римана от контура и модуля коэффициента // *Докл. АН СССР.* 1982, № 6. С.305 – 308.

10. Конторович М.И. Операционное исчисление и нестандартные явления в электрических цепях. Москва : Машиностроение, 1987. 298 с.

11. Кулиев В.Д. Сингулярные краевые задачи. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. 750 с.

12. Kutlu K. On Riemann boundary value problem // *An. Univ. Timisoara: Ser. mat. – inform.* 2000. 38, № 1. P.1-17

13. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Москва : Наука, 1973. 736 с.

14. Левиский С.В. Коаевые задачи для функцій, полианалитических в области: дис. канд. физ.- мат.наук.: 01.01.02. Одесса, 1991. 142 с.

15. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. Москва : Наука, 1977. 448 с.

16. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). Москва : ТОО «Янус», 1995. 520 с.

17. Мартиненко М.А., Юрик І.І. .Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. Київ : Слово, 2007. 296 с.

18. Назаров С.А., Пламеневский Б.А.. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. Москва : Наука, 1991. 336 с.

19. Плакса С.А. Краевая задача Римана с осциллирующим коэффициентом и сингулярные интегральные уравнения на спрямляемой кривой // *Укр. мат. журн.* 1989. 41. № 1. С.116-121.

20. Пыхтеев Г.Г. Точные методы вычисления интегралов типа Коши специального вида. Новосибирск : Наука, 1982. 128 с.

21. Сніжко Н.В. Крайові задачі теорії аналітичних функцій: Навчальний посібник для студентів математичних спеціальностей. Запоріжжя : ЗНУ, 2007. 95 с.

22. Сиражудинов М.М., Магомедов А.Г., Магомедова В.Г. Краевые задачи для общих эллиптических систем на плоскости // *Изв. РАН, сер. матем.* №2, 2000. 238 с.

23. Солдатов А.П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций.. Москва : Высшая. школа, 1991. 517с.

24. Тихоненко Н.Я. К приближенному решению исключительного случая задачи Римана теории аналитических функций // *Теория функций, функциональный анализ и их приложения: Респ. науч. сб.* Харько в: Изд-во Харьк. ун-та, 1970. Вып. 10. С. 27 – 35.

ДОДАТОК А

Відомі поняття та твердження, що використовуються у роботі

А.1 Функції, які задовольняють умові Гельдера

Припустимо, що γ – деякий гладкий контур і $\varphi(t)$ – функція точок контура γ. Функція $\varphi(t)$ задовольняє умову Гельдера на контурі γ, якщо можна знайти додатні константи A та λ такі, що для будь-яких двох точок t_1 і t_2 контура γ виконується нерівність

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq A|t_1 - t_2|^{\lambda}, \tag{А.1}$$

Із (А.1) випливає: якщо функція $\varphi(t)$ на γ задовольняє умову Гельдера, то вона на контурі γ неперервна.

Відомо [7], що у випадку, коли $\lambda > 1$ функція $\varphi(t)$ є сталою на контурі γ. Тому будемо вважати, що $0 < \lambda \leq 1$. Якщо $\lambda = 1$, то умова Гельдера збігається з умовою Ліпшиця.

Теорема А.1 [7] Якщо $\lambda < \lambda_1$ і $\varphi(t) \in H_{\lambda_1}(\gamma)$, то $\varphi(t) \in H_{\lambda}(\gamma)$, тобто $H_{\lambda_1}(\gamma) \subset H_{\lambda}(\gamma)$.

З теореми А.1 випливають такі висновки: якщо функції $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ задовольняють умову Гельдера відповідно з показниками λ_1, λ_2, то їхня сума, різниця, добуток, а також частка за умови, що знаменник не перетворюється в нуль, задовольняють умову Гельдера з показником $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$.

А.2 Поняття та властивості індексу функції

Розглянемо функцію $G(t)$, що задана неперервна на гладкому замкненому контурі γ. Припустимо, що ця функція не перетворюється в нуль на контурі. Індексом κ функції $G(t)$ відносно контура γ називають [7] поділений на 2π приріст її аргумента при обббігу кривої γ в додатному напрямі:

$$\kappa = IndG(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\arg G(t)\right]\Big|_{\gamma} . \qquad (A.2)$$

Властивості індексу [7]:

1) якщо $G(t)$ є крайове значенні функції, аналітичної всередині або зовні контура, то індекс її дорівнює кількості нулів всередині контура γ або, відповідно, кількості нулів зовні контура γ, взятій зі знаком «–»;

2) якщо функція $G(t)$ аналітична всередині контура γ, за винятком скінченного числа точок, де вона може мати плюси скінченного порядку, то кількість нулів потрібно замінити на різницю кількості нулів і полюсів.

В зазначених властивостях нулі і полюси враховуються стільки разів, яка у них кратність.

А.3 Інтеграл типу Коші на контурі

Розглянемо гладкий замкнений контур γ на площині комплексної змінної z. Область яка лежить всередині контура γ, будемо позначати D^{+}, а область, доповнюючу до $D^{+} \cup \gamma$, яка містить нескінченно віддалену точку, будемо позначати D^{-}.

Якщо функція $f(z)$ – функція, аналітична в D^{+} і неперервна в $D^{+} \cup \gamma$, то за формулою Коші [13]

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(z), z \in D^{+}; \\ 0, z \in D^{-}. \end{cases} \tag{A.3}$$

Якщо ж $f(z)$ аналітична в області D^{-} і неперервна в $D^{-} \cup \gamma$, то [13]

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(\infty), z \in D^{+}; \\ -f(z) + f(\infty), z \in D^{-}. \end{cases} \tag{A.4}$$

Інтеграл, який стоїть зліва в формулах (А.3),(А.4), називається інтегралом Коші.

Нехай [13] тепер γ – гладкий замкнений або незамкнений контур, цілком розташований в скінченній частині площини, а $\varphi(\tau)$ – неперервна функція точок контура γ. Тоді інтеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau, \tag{A.5}$$

побудований так само, як і інтеграл Коші, називається інтегралом типу Коші. Функція $\varphi(\tau)$ називається його щільністю, а $\dfrac{1}{\tau - z}$ – ядром.

Інтеграл типу Коші являє собою функцію, аналітичну на всій комплексній площині, за винятком точок контура γ [13].

Якщо γ – замкнений контур, то $\Phi(z)$ розпадається на дві аналітичні функції: $\Phi^{+}(z)$, визначену в області D^{+}, і $\Phi^{-}(z)$, визначену в області D^{-}. В даному випадку $\Phi(z)$ часто називають кусково-аналітичною функцією. При цьому легко встановити властивість: $\Phi(\infty)=0$.

А.4 Сингулярний криволінійний інтеграл

Нехай γ – гладкий контур, а t,τ – його точки. Розглянемо особливий криволінійний інтеграл

$$\int_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau\,. \tag{А.6}$$

Нехай точка t контура γ не збігається з кінцями контура. Проведемо з точки t як із центру коло на стільки малого радіуса ρ, щоб воно перетинало криву γ рівно у двох точках t_1,t_2. Тоді інтеграл $\int\limits_{\gamma\backslash\cup t_1t_2}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$ є вже власним [13]. Границя інтеграла $\int\limits_{\gamma\backslash\cup t_1t_2}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$ при $\rho\to 0$ називається сингулярним інтегралом Коші, якщо вона існує, і позначається так, як записано в (А.6).

Нехай тепер функція $\varphi(\tau)$ задовольняє умові Гельдера, тобто $\varphi(\tau)\in H_{\lambda}(\gamma)$. Відомо, що [13] у такому випадку існує сингулярний інтеграл (А.6).

А.5 Формули Сохоцького

Нехай $\varphi(\tau)$ задовольняє на γ умову Гельдера на гладкому замкненому контурі. Розглянемо інтеграл типу Коші

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau. \tag{А.7}$$

Позначимо через $\Phi^{+}(t)$ граничні значення аналітичних функцій $\Phi^{+}(z)$ при прямуванні точки z зсередини γ до точки t контура, а через $\Phi^{-}(t)$ – при прямуванні зовні. В зазначених припущеннях мають місце формули:

$$\Phi^{+}(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau; \tag{A.8}$$

$$\Phi^{-}(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau; \tag{A.9}$$

Формули (А.8), (А.9) отримані вперше в 1873 р. Ю.В.Сохоцьким [7, 13], називаються формулами Сохоцького. При цьому формулам (А.8), (А.9) можна надати такого вигляду:

$$\Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t) = \varphi(t); \tag{A.10}$$

$$\Phi^{+}(t) + \Phi^{-}(t) = \frac{1}{\pi i}\cdot\oint_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau. \tag{A.11}$$

А.6 Інтеграл типу Коші вздовж дійсної осі

Нехай $\varphi(\tau)$ – комплексна функція дійсної змінної τ, яка задовольняє умову Гельдера при всіх скінченних τ і прямує до певної границі $\varphi(\infty)$ при $\tau \to \pm\infty$. Вимагатимемо, щоб при великих τ виконувалась нерівність

$$\left|\varphi(\tau) - \varphi(\infty)\right| \le \frac{A}{\tau^{\mu}}, \qquad \mu > 0, A > 0. \tag{A.12}$$

Означимо інтеграл типу Коші

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau, \tag{A.13}$$

вважаючи, що z не лежить на дійсній вісі. Його ми будемо означати наступним співвідношнным:

$$\Phi(z)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-N}^{N}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-N}^{N}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\varphi(\infty)\int_{-N}^{N}\frac{d\tau}{\tau-z}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}d\tau\pm\frac{1}{2}\varphi(\infty).$$

Якщо функція $\varphi(z)$ є аналітичною в верхній півплощині $D^{+}=\{z\in C:\operatorname{Im}z>0\}$, неперервна на її замиканні, а при $\tau\to\pm\infty$ задовольняє умову (A.21), то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=\begin{cases}\varphi(z)-\dfrac{\varphi(\infty)}{2} & \text{при } z\in D^{+},\\ -\dfrac{\varphi(\infty)}{2} & \text{при } z\in D^{-}.\end{cases} \tag{A.14}$$

Якщо функція $\varphi(z)$ є аналітичною в нижній півплощині $D^{-}=\{z\in C:\operatorname{Im}z<0\}$, неперервна на її замиканні, а при $\tau\to\pm\infty$ задовольняє умову (A.21), то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=\begin{cases}\dfrac{\varphi(\infty)}{2} & \text{при } z\in D^{+},\\ \dfrac{\varphi(\infty)}{2}-\varphi(z) & \text{при } z\in D^{-}.\end{cases} \tag{A.15}$$

Нехай тепер точка $z=t$ розміщена на лінії інтегрування. Тоді сингулярний інтеграл

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau \tag{A.16}$$

Будемо означати співвідношенням

$$\Phi(t)=\lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-N}^{t-\varepsilon}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int_{t+\varepsilon}^{N}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\right\}.$$

Легко показати, що і в цьому випадку справедливі формули Сохоцького

$$\Phi^{+}(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau, \tag{A.17}$$

$$\Phi^{-}(t)=-\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau. \tag{A.18}$$

ДОДАТОК Б

Відомі результати відносно крайових задач Рімана

Б.1 Задача Рімана на замкненому контурі

Розглянемо вже відомі теоретичні результати, наведені в монографії Гахова Ф.Д. [7], щодо класичних крайових задач Рімана.

Нехай γ – простий гладкий замкнений контур, який ділить комплексну площину на дві області: зовнішню D^{-} і внутрішню D^{+}. Припустимо, що точка $z_0 \in D^{+}$. Нехай на γ визначені дві функції $G(t)$ і $g(t)$, причому вони задовольняють умову Гельдера, і функція $G(t)$ у всіх точках контура γ не дорівнює 0.

Задача Рімана на замкненому контурі полягає у наступному: знайти функції $\Phi^{+}(z)$ і $\Phi^{-}(z)$, аналітичні відповідно в областях D^{+} і D^{-}, і задовольняють на контурі γ крайову умову

$$\Phi^{+}(z) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t), t \in \gamma, \tag{Б.1}$$

де $\Phi^{\pm}(t)$ – граничні значення функцій $\Phi^{\pm}(z)$ при прямуванні $z \in D^{\pm}$ до точки $t \in \gamma$ відповідно. Функція $G(t)$ – коефіцієнт задачі Рімана, а функція $g(t)$ – її вільний член.

Якщо $g(t) \equiv 0$, задача Рімана називається однорідною.

Керуючись роботами Гахова Ф.Д. [7], отримувати розв’язок задачі (Б.1) будемо поетапно.

І етап. $G(t) \equiv 1$ – задача «про стрибок». Задача (Б.1) виглядає таким чином:

$$\Phi^{+}(z)-\Phi^{-}(t)=g(t),\, t\in\gamma, \qquad (Б.2)$$

і за формулами Сохоцького (А.14) має розв’язок:

$$\Phi^{+}(t)=\frac{1}{2}g(t)+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{g(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

$$\Phi^{-}(t)=-\frac{1}{2}g(t)+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{g(\tau)}{\tau-t}d\tau.$$

Враховуючи матеріал із роботи Гахова Ф.Д. [7], за властивостями інтеграла типу Коші, розв’язку задачі (Б.2) можна надати вигляду

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{g(\tau)}{\tau-z}d\tau. \qquad (Б.3)$$

Отже, в класі функцій, які щезають на нескінченності $(\Phi^{-}(\infty)=0)$, задача (Б.2) має єдиний розв’язок (Б.3). Якщо ж не розглядати додаткову умову $\Phi^{-}(\infty)=0$, то розв’язок задачі (Б.2) буде визначено за формулою

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{g(\tau)}{\tau-z}d\tau+const. \qquad (Б.4)$$

II етап. $g(t)\equiv 0$, тобто розглядається однорідна задача

$$\Phi^{+}(z)=G(t)\Phi^{-}(t),\, t\in\gamma. \qquad (Б.5)$$

Нехай $\kappa = IndG(t)$. Будемо вважати спочатку, що $\kappa = 0$. Тоді розв'язками задачі (Б.5) за умови $\Phi^{-}(\infty) = 1$, будуть функції, за Гаховим Ф.Д. [7],

$$\Phi^{+}(z) = e^{\Gamma^{+}(z)}, \, \Phi^{-}(z) = e^{\Gamma^{-}(z)}. \tag{Б.6}$$

Якщо ж умова $\Phi^{-}(\infty) = 1$ відсутня, то розв'язок задачі (Б.5) набуде вигляду

$$\Phi^{+}(z) = Ae^{\Gamma^{+}(z)}, \, \Phi^{-}(z) = Ae^{\Gamma^{-}(z)}, \tag{Б.7}$$

де A – довільна стала.

Таким чином [7], якщо $\kappa = 0$, то задача (Б.5) має єдиний розв'язок, якщо $\Phi^{-}(\infty) = 1$; містить одну довільну сталу, якщо $\Phi^{-}(\infty) = const \neq 0$; якщо $\Phi^{-}(\infty) = 0$, то задача (Б.5) має лише тривіальний розв'язок – тотожний нуль.

З іншого боку, задачу (Б.5) можна переписати у вигляді

$$G(t) = \frac{\Phi^{+}(t)}{\Phi^{-}(t)}, \, t \in \gamma. \tag{Б.8}$$

Із (Б.6) випливає, що функція відмінна від нуля на контурі γ і задовольняє на ньому умову Гельдера. Її можна представити єдиним чином: як відношення крайових значень функцій, відповідно аналітичних в областях D^{+} і D^{-}, тобто

$$G(t) = \frac{X^{+}(t)}{X^{-}(t)}, \, t \in \gamma, \tag{Б.9}$$

$$X^{+}(z) = e^{\Gamma^{+}(z)}, \, X^{-}(z) = e^{\Gamma^{-}(z)}. \tag{Б.10}$$

При цьому функції $X^{\pm}(z)$ згідно з (Б.10) мають такі властивості: вони не обертаються в нуль в областях $D^{\pm}$; їхні граничні значення відмінні від нуля і задовольняють умову Гельдера на γ; $X^{-}(\infty)=1$. Подання функції $G(t)$ у вигляді (Б.9) називається факторизацією.

Розглянемо тепер $\kappa \neq 0$. Якщо $\kappa > 0$, то функція є аналітичною у всій площині і має полюс порядку κ, тобто це многочлен порядку κ $P_{\kappa}(t)$. Тоді розв'язок задачі (Б.5) набуває вигляду

$$\Phi^{+}(z) = X^{+}(z)P_{\kappa}(z),\ \Phi^{-}(z) = (z-z_0)^{-\kappa} X^{-}(z)P_{\kappa}(z), \tag{Б.11}$$

де функції $\Gamma^{\pm}(z)$ і $X^{\pm}(z)$ визначаються формулами

$$X^{+}(z) = e^{\Gamma^{+}(z)},\ X^{-}(z) = e^{\Gamma^{-}(z)}, \tag{Б.12}$$

$$\Gamma^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{\ln[(\tau - z_0)^{-\kappa} G(\tau)]}{\tau - z} d\tau. \tag{Б.13}$$

Розглянемо випадок коли $\kappa < 0$, при цьому функція є аналітичною в усій площині, має на нескінченності нуль порядку κ. Тоді $\Phi^{+}(z) = \Phi^{-}(z) \equiv 0$ – задача (Б.5) має лише тривіальний розв'язок.

Отже, якщо $\kappa = 0$, то однорідна задача Рімана за умови $\Phi^{-}(\infty)=1$ має єдиний розв'язок, що визначається формулами (Б.6), якщо ж $\kappa < 0$, то однорідна задача Ріманана замкненому контурі має лише нульовий розв'язок; якщо $\kappa > 0$, то однорідна задача Рімана має розв'язок, що визначається формулами (Б.11), (Б.12), (Б.13).

III етап. Розглядається неоднорідна задача

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t),\ t \in \gamma. \tag{Б.14}$$

Нехай $\kappa = IndG(t)$.

а) якщо $\kappa \geq 0$, то визначається функція, аналітична на всій площині, яка має на нескінченності полюс порядку κ, тобто це є многочлен $P_\kappa(t)$ порядку κ. Розв'язок неоднорідної задачі Рімана (Б.14) має вигляд

$$\Phi^+(z) = X^+(z)\left[\Psi^+(z) + P_\kappa(z)\right], \tag{Б.15}$$

$$\Phi^-(z) = (z - z_0)^{-\kappa} X^-(z)\left[\Psi^-(z) + P_\kappa(z)\right], \tag{Б.16}$$

де $X^{\pm}(z), \Gamma^{\pm}(z)$ визначаються за формулами (Б.12), (Б.13), при цьому функція $\Psi(z)$ має вигляд

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z}. \tag{Б.17}$$

б) якщо $\kappa < 0$, то функція аналітична на всій площині, яка перетворюється в нуль на нескінченності. Неоднорідна задача Рімана на замкненому контурі (Б.14) має розв'язок

$$\Phi^+(z) = X^+(z)\Psi^+(z), \tag{Б.18}$$

$$\Phi^-(z) = (z - z_0)^{-\kappa} X^-(z)\Psi^-(z). \tag{Б.19}$$

Так як $\Psi^-(\infty) = 0$, при $\kappa = -1$ задача (Б.14) має єдиний розв'язок, визначений формулами (Б.18), (Б.19), (Б.12), (Б.13), (Б.17). Якщо $\kappa < -1$, то неоднорідна задача (Б.14) є нерозв’язною, оскільки в цьому випадку з (Б.19) випливає, що $\Phi^-(z)$ на нескінченності може мати полюс порядку $-\kappa - 1$.

Отже, якщо $\kappa \geq 0$, то розв’язок неоднорідної задачі буде визначено за формулами (Б.15), (Б.16) і залежатиме від $\kappa + 1$ довільної сталої; якщо $\kappa = -1$, то неоднорідна задача Рімана на замкненому контурі розв'язна і має єдиний розв'язок, що визначається формулами (Б.18), (Б.19); якщо ж $\kappa < -1$, то неоднорідна задача Рімана не має розв'язку в загальному випадку.

Б.2 Задача Рімана на дійсній осі

Розглянемо умову, коли γ – дійсна вісь. На цій осі задана функція $G(t)$, $g(t)$, такі що задовольняють умову Гельдера. Також існує додаткова умова, що $G(t) \neq 0$.

Задача Рімана, за Гаховим Ф.Д. [7], в цьому випадку полягає в тому, щоб знайти значення функцій $\Phi^{+}(z)$ і $\Phi^{-}(z)$, що є аналітичними відповідно у верхній та нижній півплощинах. Причому граничні значення $\Phi^{+}(t)$ і $\Phi^{-}(t)$ на γ задовольняють крайову умову

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t), -\infty < t < \infty. \tag{Б.20}$$

Знаходження розв’язку задачі Рімана на дійсній осі проводиться за тією ж схемою, що і при замкненому контурі. Основна відмінність полягає в тому, що тут роль функції t^{n} відіграє функція $\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{n}$, оскільки $Ind\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{n} = n.$ Далі розглянемо окремі випадки задачі Рімана на дійсній осі.

І випадок. $G(t) \equiv 1$, задача «про стрибок»:

$$\Phi^{+}(t) = \Phi^{-}(t) + g(t), -\infty < t < \infty.$$

Розв'язок цього випадку отримаємо із формул Сохоцького (А.17), (А.18):

$$\Phi^{+}(t) = \frac{1}{2} g(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{\tau - t} d\tau,$$

$$\Phi^{-}(t) = -\frac{1}{2} g(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{\tau - t} d\tau;$$

або

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

II випадок. $g(t) \equiv 0$, тобто розглянемо однорідну задачу:

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t), -\infty < t < \infty. \qquad (\text{Б.21})$$

Тут $\kappa = IndG(t)$. Розглянемо спочатку випадок коли $\kappa = 0$. Розв'язок однорідної задачі Рімана на дійсній осі набуде вигляду

$$\Phi(z) = e^{\Gamma(z)}. \qquad (\text{Б.22})$$

де функція $\Gamma(z)$ визначається за формулою

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau, \qquad (\text{Б.230}$$

Якщо звернутись до роботи Гахова Ф.Д. [7], то формула (Б.22) дає розв’язок задачі про факторизацію функції $G(t)$, тоді її можна зобразити у вигляді

$$G(t)=\frac{\mathrm{X}^{+}(t)}{\mathrm{X}^{-}(t)},\ -\infty<t<\infty, \tag{Б.24}$$

причому $\mathrm{X}^{+}(z)=e^{\Gamma^{+}(z)}, \mathrm{X}^{-}(z)=e^{\Gamma^{-}(z)}$. Ці функції аналітичні відповідно у верхній та нижній півплощинах і не мають там нулів; крайові значення $\mathrm{X}^{\pm}(t)$ не перетворюються в нуль на дійсній осі та є такими, що задовольняють умову Гельдера.

Отже, спираючись на матеріал Гахова Ф.Д. [7], у випадку нульового індексу однорідна задача Рімана на дійсній осі (Б.21) розв'язна. Вона має єдиний розв'язок, що визначається за формулами (Б.22), (Б.23). Також, із (Б.24) випливає, що будь-яка функція, що не обертається в нуль на дійсній осі γ, задовольняє тут умову Гельдера та має індекс, прирівняний до нуля, може бути зображена як відношення граничних значень функцій, які є аналітичними відповідно у верхній та нижній півплощинах.

Якщо, спираючись на матеріали роботи Гахова Ф.Д. [7], $\kappa=IndG(t)\neq 0$. Тоді крайову умову однорідної задачі Рімана на дійсній осі набуде вигляду

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{\mathrm{X}^{+}(t)}=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}\frac{\Phi^{-}(t)}{\mathrm{X}^{-}(t)},\ -\infty<t<\infty, \tag{Б.25}$$

$$\mathrm{X}^{+}(z)=e^{\Gamma^{+}(z)},\ \mathrm{X}^{-}(z)=e^{\Gamma^{-}(z)}, \tag{Б.26}$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left[\left(\frac{\tau-1}{\tau+1}\right)^{\kappa}G(t)\right]\frac{d\tau}{\tau-z}. \tag{Б.27}$$

Розглянемо випадок коли $\kappa>0$. Тоді з лівої сторони рівності (Б.25) стоїть граничне значення функції, яка є аналітичною у верхній півплощині, а в правій частині – крайове значення функції, яка є аналітичною в нижній півплощині, за винятком $z=-i$, де вона має полюс порядку κ. Тоді рівність

(Б.25) представляє функцію $\frac{P_{\kappa}(t)}{(t+i)^{\kappa}}$, де $P_{\kappa}(t)$ – довільний многочлен степеня κ. Тоді

$$\Phi^{+}(z) = X^{+}(z)\frac{P_{\kappa}(z)}{(z+i)^{\kappa}}, \qquad (Б.28)$$

$$\Phi^{-}(z) = X^{-}(z)\frac{P_{\kappa}(z)}{(z-i)^{\kappa}}, \qquad (Б.29)$$

де $X^{\pm}(z)$ отримують свої значення за формулами (Б.26), $P_{\kappa}(z)$ – довільний многочлен порядку κ. Отже, у випадку $\kappa < 0$, то $\Phi^{+}(z) = \Phi^{-}(z) \equiv 0$.

Можна зробити висновок про те, що при $\kappa > 0$, однорідна задача Рімана на дійсній осі розв'язна. Розв'язок визначається формулами (Б.28), (Б.29) і має лінійно незалежні розв’язки:

$$\Phi_k^{+}(z) = X^{+}(z)\frac{z^k}{(z+i)^{\kappa}}, \Phi_k^{-}(z) = X^{-}(z)\frac{z^k}{(z-i)^{\kappa}}, \qquad k = 1,2,..., \kappa.$$

III випадок. Крайову умову неоднорідної задачі Рімана (Б.20) на дійсній осі можна представити у вигляді

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{X^{+}(t)} = \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}\frac{\Phi^{-}(t)}{X^{-}(t)} + \frac{g(t)}{X^{+}(t)}, \qquad -\infty < t < \infty. \qquad (Б.30)$$

Так як функція $\frac{g(t)}{X^{+}(t)}$ задовольняє на дійсній осі γ умову Гельдера,

отримаємо:

$$\frac{g(t)}{X^+(t)} = \Psi^+(t) - \Psi^-(t),$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)(\tau - z)}d\tau. \qquad (Б.31)$$

Тоді

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa}\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t), -\infty < t < \infty. \qquad (Б.32)$$

Розглянемо випадок коли $\kappa \geq 0$. Спираючись на інформацію із роботи Гахова Ф.Д. [7], як і в однорідної задачі, впевнимось, що рівність (Б.32) є функцією $\frac{P_\kappa(t)}{(t+i)^\kappa}$, при $P_\kappa(t)$ – довільний многочлен степеня κ. Тоді

$$\Phi^+(z) = X^+(z)\left[\Psi^+(z) + \frac{P_\kappa(z)}{(z+i)^\kappa}\right], \qquad (Б.33)$$

$$\Phi^-(z) = \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{\kappa} X^-(z)\left[\Psi^-(z) + \frac{P_\kappa(z)}{(z+i)^\kappa}\right]. \qquad (Б.34)$$

Розглянемо випадок коли $\kappa < 0$. Тоді ліва і права частини рівності (Б.32) – граничні значення функцій, що є аналітичними відповідно у верхній та нижній півплощинах. Тоді рівність (Б.32) представляє собою функцію, яка є аналітичною на всій площині, тобто сталу C. Отже

$$\Phi^+(z) = X^+(z)\left[\Psi^+(z) + C\right], \qquad (Б.35)$$

$$\Phi^-(z) = \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{\kappa} X^-(z)\left[\Psi^-(z) + C\right]. \qquad (Б.36)$$

Функція $\Phi^{-}(z)$ в точці $z=-i$ має полюс порядку $-\kappa$. Якщо $\kappa=-1$ цей полюс можна погасити вибором сталої C, обравши її рівною $C=-\Psi^{-}(-i)$. Отже, можемо зробити висновок, що при $\kappa=-1$ неоднорідна задача Рімана на дійсній осі має єдиний розв'язок, та при $\kappa<-1$ задача є нерозв’язною. Використовуючи висновки Гахова Ф.Д. [7], можна визначити умови, при яких неоднорідна задача Рімана на дійсній осі буде мати розв’язок:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{\mathrm{X}^{+}(\tau)(\tau+i)^{k+1}} d\tau = 0,\ k=1,2,\ldots,-\kappa-1. \tag{Б.37}$$